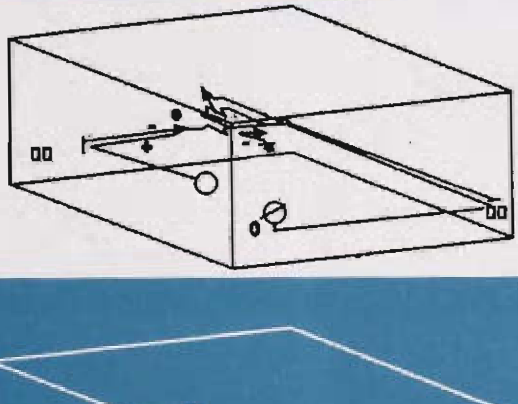
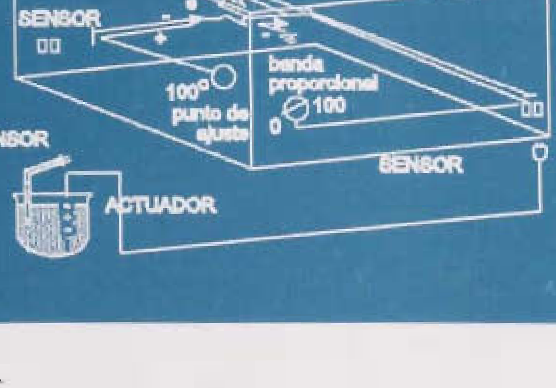
Apuntes para la U.E.A. sistemas de control I





Enrique Álvarez Ballesteros

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Apuntes para la U.E.A.
sistemas de control I

Apuntes para la U.E.A. sistemas de control I

Enrique Álvarez Ballesteros

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Electrónica

ISBN: en trámite

Corrección:
Delia Cortés Martínez
Ilustración de portada:
Consuelo Quiroz Reyes
Diseño de Portada:
Modesto Serrano Ramírez

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180
Col. Reynosa Tamaulipas
Delegación Azcapotzalco
C.P. 02200
México, D.F.

Sección de producción
y distribución editoriales
Tel. 5318-9222/9223
Fax. 5318-9222

1a. edición, 2002

Impreso en México.

ÍNDICE

PRÓLOGO

El propósito de estos apuntes es proporcionar a los alumnos que cursan la materia de Sistemas de control I en la División de CBI de la UAM Azcapotzalco, un material que cubra el temario en su totalidad y que presente los conceptos en una forma clara y concisa, sin que se pierda la profundidad requerida.

El material se ha organizado para un aprendizaje gradual, presentando los conceptos y acciones básicas de control y preparando a los estudiantes en el manejo y formulación de modelos matemáticos para el análisis y diseño de sistemas de control lineal.

Estos apuntes se dividen en cuatro unidades:

La unidad I pretende dar un amplio panorama de lo que comprende el estudio del sistema de control. La unidad 2 presenta las técnicas de modelaje de los sistemas más empleados en sistemas de control, haciendo hincapié en la función de transferencia y los diagramas de bloques. En la unidad 3 se estudia el método de análisis temporal de los sistemas lineales, y por último, la unidad 4 presenta una introducción al estudio de los controladores industriales.

Al comenzar este curso, el alumno ya manejará adecuadamente las ecuaciones diferenciales, la variable compleja y la transformada de Laplace.

La idea fundamental es presentar el material de manera muy concreta, aclarando los conceptos básicos implícitos, evitando los argumentos matemáticos lo más posible y presentando ejercicios ilustrativos de cada concepto, recomendándose apoyarse con el problemario que para el mismo curso fue elaborado por este autor.

I. PANORAMA GENERAL

1.1 Importancia e historia del control

Los sistemas de control han venido adquiriendo a través de los últimos años un papel cada vez más importante en el desarrollo y avance de la civilización y tecnología moderna.

Los sistemas de control se encuentran en todas las actividades del género humano. En el campo doméstico nos encontramos con controles automáticos para calefacción y aire acondicionado, calentadores de agua, refrigeradores, tostadores de pan, etc. En el campo industrial nos encontramos con controles automáticos de máquinas – herramientas, líneas de ensamblaje automático, control de vehículos espaciales, armamento nuclear, robótica y muchos otros. Incluso, la teoría del control se puede aplicar a toda clase de sistemas, por ejemplo a sistemas químicos, biológicos, sociales, económicos, políticos, etc.

La existencia de los sistemas automáticos de control facilita la vida actual en todo tipo de sociedad avanzada. Tales sistemas actúan como catalizadores en promover el progreso y su desarrollo.

Los desarrollos tecnológicos han hecho posible viajar a la luna y al espacio exterior. El funcionamiento perfecto de los vehículos espaciales depende del funcionamiento adecuado de un gran número de sistemas de control empleados en tales viajes.

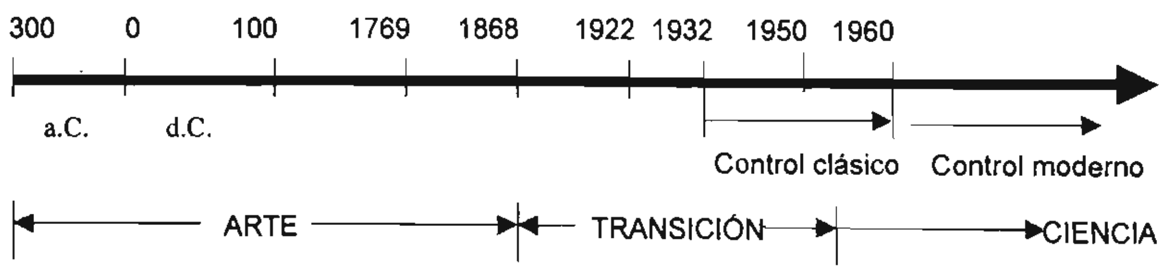
Es por esto y por muchas cosas más que es tan importante el estudio del control automático, así como sus diversas aplicaciones.

Los sistemas de control son sistemas dinámicos y el estudio de la teoría de Control proporciona la base para un mejor entendimiento de estos sistemas.

Por último, los sistemas de control emplean frecuentemente componentes de diferentes tipos: mecánicos, eléctricos, hidráulicos, neumáticos, etc. y por lo tanto el ingeniero dedicado al control debe estar familiarizado con las leyes fundamentales que rigen a tales componentes.

A lo largo de la historia, el control ha formado parte importante del ser humano, el cual a lo largo de su evolución a creado sistemas de control desde lo más rudimentario hasta lo más sofisticado, a continuación se enumeran algunos de estos sistemas de control que han surgido durante la evolución del hombre:

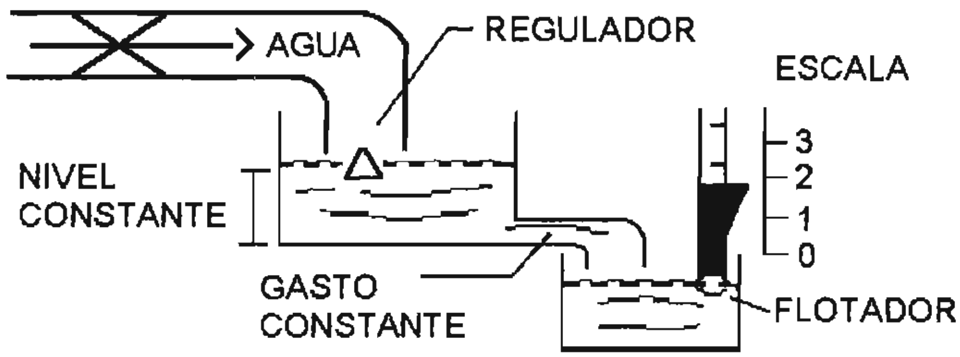
Evolución histórica de la teoría de control:



-Las primeras aplicaciones del control con retroalimentación se basan en los mecanismos reguladores con flotador desarrollados en Grecia en el periodo 300 a 1 a.C.

-Reloj de agua de KTESIBIUS (300 a.C.).- A este aparato puede catalogársele como el primer sistema de control en forma.

Este tipo de dispositivo fue utilizado por las culturas egipcias, romanas, etc., su funcionamiento consistía en que por un tubo corriera el agua y se depositara en un contenedor, el cual en su parte inferior derecha tenía un orificio para que así el agua dentro del contenedor se depositara en un segundo contenedor, y este último, contaba con un flotador que marcaba sobre una escala de tiempo el aumento constante del nivel de agua.



RELOJ DE KTESIBIUS

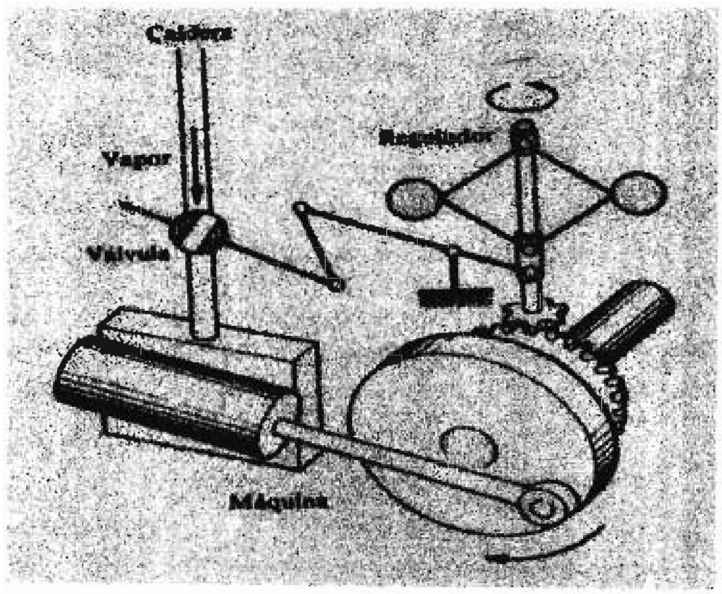
-FILON.- Aproximadamente en el año 250 a. C.; inventó una lámpara de aceite, la cuál usaba un regulador de flotador para mantener un nivel constante de aceite.

-HERON de Alejandría.- En el primer siglo d. C., publicó un libro titulado Preneumática, en el que describe varias formas de mecanismos de nivel de agua con reguladores de flotador.

-El primer sistema con retroalimentación inventado en Europa, fue el regulador de temperatura de Cornelis Drebbel (1572-1633).

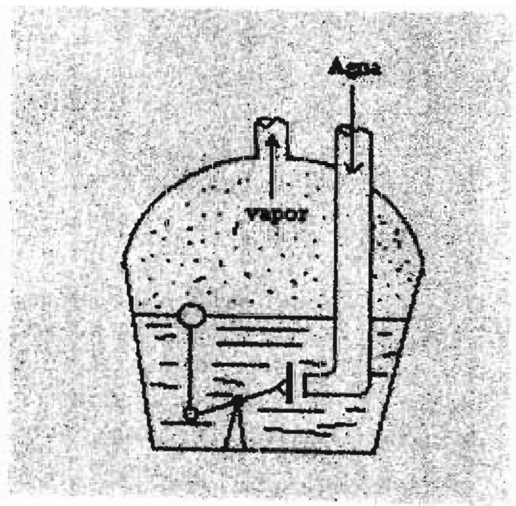
-DENNIS PAPIN (1647-1712) Inventor del primer regulador de presión para calderas de vapor en 1681, esté regulador de presión fue una especie de regulador que semejaba a la válvula de las ollas a presión.

-JAMES WATT (1769)- El primer regulador con retroalimentación automática usado en un proceso industrial, según se acepta generalmente, fue el regulador centrífugo de JAMES WATT, desarrollado en 1769 para controlar la velocidad de una máquina de vapor. Este dispositivo era completamente mecánico, el cual, media la velocidad del eje motor y utilizaba el movimiento centrífugo del volante para controlar la válvula y por lo tanto la cantidad de vapor que entraba en la máquina. Conforme aumenta la velocidad, se elevan los contrapesos, alejándose del eje y cerrando la válvula, los contrapesos necesitan potencia de la máquina para girar, con lo cual hacen menos exacta la medición de la velocidad.



Regulador centrífugo de James Watt

-POLZUNOV (1765)- El primer sistema por la Unión Soviética es el regulador de nivel de agua de flotador, que fue inventado por I. POLZUNOV en 1765, dicho sistema hace que el flotador detecte el nivel de agua y controle la válvula que tapa la entrada de la caldera.



Regulador de nivel de agua de flotador

-El periodo de 1868 a mediados del siglo XIX también se le llama ciclo de transición, ya que es una etapa donde se combinó el arte con la ciencia; ésta etapa se caracterizó por el desarrollo de sistemas de control automático inventados intuitivamente. Los esfuerzos para aumentar la exactitud de los sistemas de control condujeron a disminuir la amortiguación de las oscilaciones transitorias e incluso a sistemas inestables. Por consiguiente, fue imperativo desarrollar una teoría del control automático. J. C. MAXWELL formuló una teoría matemática relacionada con la teoría del control usando el modelo de ecuación diferencial de un regulador. El estudio de MAXWELL consideró el efecto que tenían los diversos parámetros de un sistema en su comportamiento. Durante el mismo periodo I. A. VYSHNEGRADSKII formuló una teoria matemática de los reguladores.

-MINORSKY (1922) Trabajó en controladores automáticos de dirección en barcos y mostró como se podría determinar la estabilidad a partir de las ecuaciones diferenciales que describen el sistema.

-NYQUIST (1932) Desarrolló un procesamiento relativamente simple para determinar la estabilidad de los sistemas de lazo cerrado sobre la base de la respuesta a lazo abierto con excitación senoidal en régimen permanente.

-HAZEN (1934) Quien introdujo el término servomecanismos para los sistemas de control de posición, desarrolló el diseño de servomecanismos repetidores capaces de seguir con exactitud una entrada cambiante.

-De 1932-1960 se desarrolla la teoría del control clásico.

-Los eminentes matemáticos y mecánicos prácticos de Rusia estimularon y dominaron el campo de la teoría del control. Por tanto, la teoría rusa tendió a utilizar una formulación del dominio del tiempo usando ecuaciones diferenciales.

-Durante la segunda guerra mundial, la práctica y la teoría del control automático recibió un gran impulso, ya que fue necesario diseñar y construir pilotos automáticos para aviones, sistemas de puestos de tiro, sistemas de control por antenas de radar y otros sistemas militares basados en los métodos de control por retroalimentación.

-Antes de 1940, en la mayoría de los casos, el diseño de los sistemas de control fue un arte que implicaba aproximaciones de prueba y error.

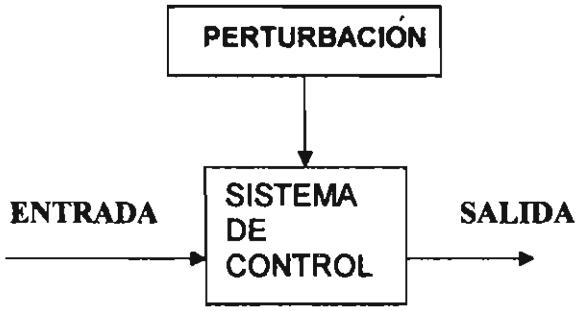
-Durante la década de 1940, se incrementaron en número y utilidad los métodos matemáticos y analíticos, por lo tanto la ingeniería de control se convirtió en una disciplina por derecho propio.

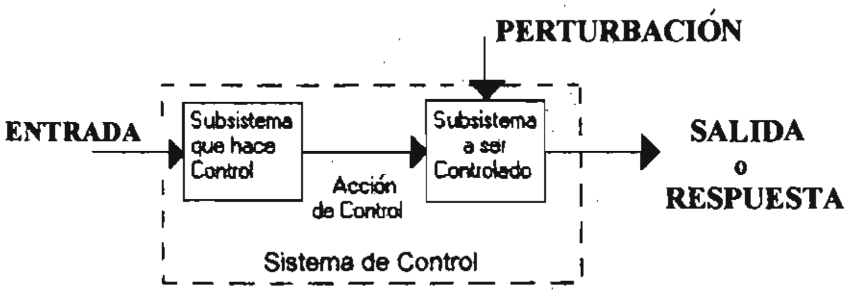
-Durante la década de 1950, el énfasis en la teoría de la ingeniería de control se centró en el desarrollo y uso de los métodos en el plano s y, particularmente en el enfoque de los lugares geométricos de las raíces. Además durante está época se hizo posible la utilización de las computadoras analógicas y digitales como componentes de control.

-En los últimos 20 años ha habido más interés en estudiar sistemas de control numérico y control jerarquizado y recientemente se ha notado un cambio en el campo de aplicación de la teoría del control.

-En la actualidad, parece que la ingeniería de control debe considerar simultáneamente tanto el dominio del tiempo como el dominio de la frecuencia para el análisis y el diseño de sistemas de control.

Sistema de control: Es un conjunto de elementos interrelacionados que forman un ente o un todo el cual dirige, comanda o regula a otro sistema y/o así mismo.





Señal de entrada: Es la excitación del sistema.

Señal de salida: Es la señal que se desea controlar.

Señal de perturbación: Es una señal de entrada no deseada, de una duración limitada.

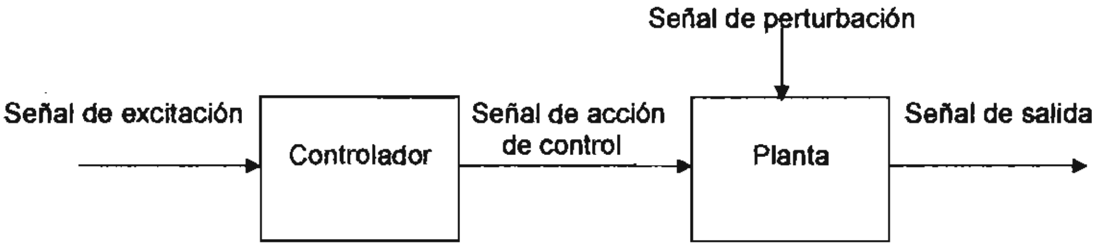
Subsistema que hace control: se le denomina controlador, compensador o regulador.

Subsistema a ser controlado: se le denomina Planta o Proceso.

1.2 Sistema de lazo abierto y de lazo cerrado

Dependiendo del tratamiento que el sistema de control realiza con la respuesta, pueden distinguirse dos topologías de control en general: lazo abierto y lazo cerrado.

Sistema de lazo abierto: En estos sistemas la señal de excitación comienza en un punto y termina en otro diferente, describiendo una trayectoria abierta.



Nótese que en estos sistemas la señal de acción de control no depende de la señal de salida.

Un ejemplo práctico es una lavadora; Él remojo, el lavado y el enjuague en la lavadora operan con una base de tiempo. La máquina no mide la señal de salida, que es la limpieza de la ropa, por tanto, a cada entrada de referencia le corresponde una condición operativa fija; como resultado, la calidad del lavado depende de la calibración. Ante la presencia de perturbaciones, un sistema de control en lazo abierto no realiza la tarea deseada. Obsérvese que cualquier sistema de control que opere con una base de tiempo es en lazo abierto, por ejemplo el control de tránsito mediante señales operadas con una base de tiempo es otro ejemplo de control en lazo abierto.

Las características más importantes de estos sistemas son:

- La exactitud queda determinada por calibración.

  Calibración: Proceso mediante el cual se establece una relación de salida a entrada

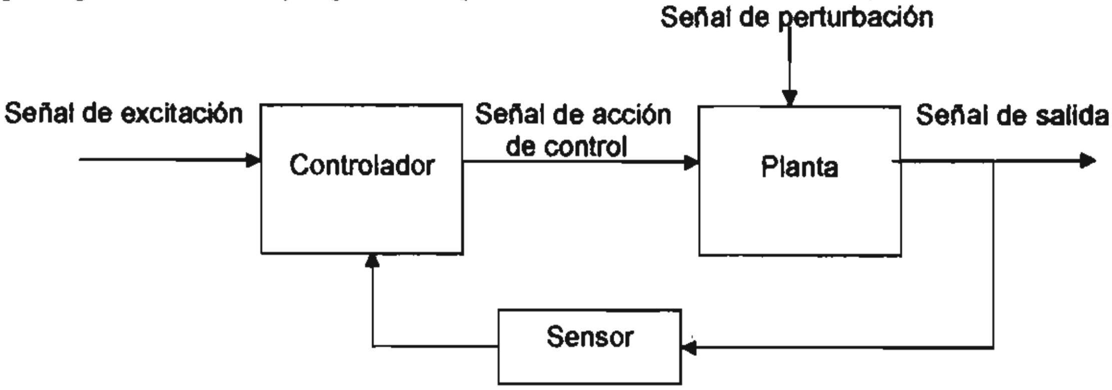
- No tiene problemas de inestabilidad

- En presencia de perturbaciones no cumple la función asignada

- Son de alta sensitividad

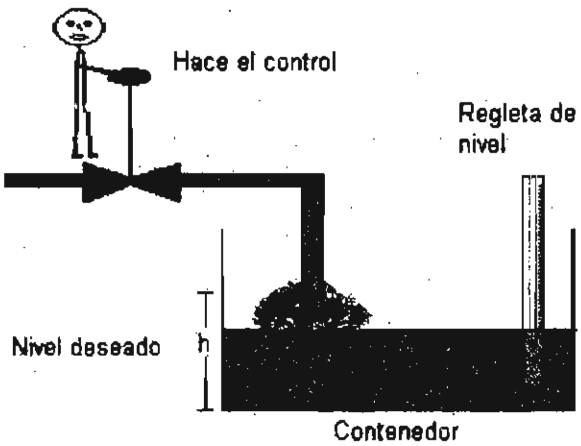
- Son económicos, simples en su ingeniería y de pocos componentes

Sistema de lazo cerrado. En estos sistemas la señal de excitación comienza en un punto, pasa por algunos elementos y regresa a un punto de inicio, formando una trayectoria cerrada.



Nótese que en estos sistemas, la señal de acción de control sí depende de la señal de salida.

A estos sistemas se les llama también de Retroalimentación; que es la propiedad de los sistemas de inyectar la señal de salida a la entrada.
Un ejemplo práctico es el sistema de control manual del nivel de agua en un contenedor.



Aquí apreciamos que lo que se desea controlar es el nivel de agua (respuesta) en el contenedor (planta). Para lo cual, el hombre (controlador) deberá cerrar la llave cuando el nivel en el líquido llegue al nivel deseado, esto es el hombre al observar el nivel del agua que tiene la cisterna manda una señal de lo que observó a su cerebro, el cual hace la función de diferenciador, que inmediatamente compara el nivel deseado contra la señal de retroalimentación que el observo, el hombre en su cerebro hace la diferencia entre el nivel deseado y el nivel observado en el sensor que es la regleta, esta diferencia representa un error en el sistema lo que implica que el hombre a partir de que exista esta diferencia deberá tomar la decisión de mantener la llave abierta, el hombre constantemente deberá estar observando el nivel de la cisterna y haciendo la comparación hasta el momento en el que ocurra que el nivel observado sea igual al deseado o que la diferencia que el cerebro del hombre obtuvo sea igual con cero, esto implicará que el cerebro del hombre ordenará que se tiene que cerrar la llave.

Las características más importantes que introduce la retroalimentación son:

- Aumenta la exactitud.
- Reduce la sensitividad.
- Minimiza efectos de perturbación.
- Reduce efectos de No - linealidad.
- Tendencia a oscilación e inestabilidad.
- Son costosos, con mayor número de componentes y una ingeniería más compleja.

1.3 Clasificación de los sistemas

Aparte de la clasificación anterior, los sistemas de control se pueden clasificar para su estudio, de la siguiente manera:

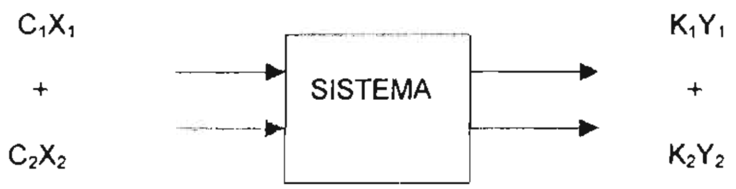
a) Sistemas estáticos y sistemas dinámicos:

Se dice que un sistema es estático cuando su salida en cierto instante depende solamente de su entrada en ese mismo instante.

Será dinámico si su salida en un momento dado depende de su entrada, en ese momento y momentos anteriores.

b) Sistemas lineales y sistemas no lineales:

Se dice que un sistema es lineal si cumple con el principio de superposición y homogeneidad.



$$f_{n\,ENT} = C_1X_1 + C_2X_2$$

$$\downarrow\downarrow$$

$$f_{n\,SAL} = K_1Y_1 + K_2Y_2$$

En sistemas dinámicos el sistema es lineal, si cumple con el modelo lineal.

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots a_0 = g(x)$$

De lo contrario, el sistema es no lineal.

c) Sistemas determinísticos y Sistemas estocásticos (variables)

Si las variables de entrada están bien definidas, provocarán una respuesta bien determinada, esto es un sistema determinístico.

En cambio si las variables de entrada son de manera aleatoria, o sea no conocidas con exactitud, pero que pueden ser representadas por una función de distribución, (o sea en cierto grado aleatorias) provocarán una respuesta estocástica o sea una respuesta conocida en forma probabilística, esto se denomina un sistema estocástico.

d) Sistema concentrado y Sistemas distribuidos (parámetros)

Será de parámetros distribuidos si su respuesta depende del tiempo y de otras variables, como de su posición en el sistema.

Será concentrado si la respuesta únicamente depende del tiempo y se supone que no influye la posición en el sistema.

e) Sistemas continuos y sistemas discretos

Será continua si las variables del sistema son contínuas en el tiempo.

Será discreto si las variables son discretas en el tiempo, esto es, cambian de valor a intervalos conocidos de tiempo o sea son discontinuos, también denominados sistemas muestreados.

La teoría que se emplea para estudiar los sistemas dinámicos, lineales, determinísticos, de parámetros concentrados, continuos y de una entrada y una salida se llaman teoría del control clásico. Los sistemas que no entran en esta clasificación, se estudian con la teoría del control moderna.

1.4 Características deseables de los sistemas

Todo sistema de control debe diseñarse de tal manera que cumpla lo mejor posible con las siguientes características fundamentales:

1) Estabilidad
2) Exactitud
3) Rapidez de respuesta

Necesariamente un sistema debe de ser estable, esto significa que la respuesta a una señal debe alcanzar y mantener un valor útil durante un periodo razonable, debe tener en su respuesta un valor muy cercano al valor que se espera, ~~esto es;~~ debe ser lo más exacto posible, tratando de hacer que el error tienda a cero, además debe completar su respuesta a cierta señal de entrada en un tiempo aceptable.

Otra característica importante es la sensitividad del funcionamiento del sistema a los cambios específicos con respecto a algún parámetro.

La sensitividad se puede entender como la desviación que se tiene en la respuesta, debido a los cambios internos del sistema, ya sea por cambios en el medio, por envejecimiento o ~~por~~ ignorancia de los valores exactos de los elementos u otros factores naturales que afectan los sistemas.

En los sistemas de control se debe buscar que sean de baja sensitividad, esto es, que los cambios internos se reflejen en la respuesta lo menos posible.

1.5 Aplicación y usos actuales de los sistemas de control

La aplicación de los sistemas de control en la actualidad se ha dividido en dos grandes ramas:

1) Sistemas de control de procesos

Un control de procesos es un sistema de retroalimentación cuya salida es una variable como presión, temperatura, nivel, etc.

Este tipo de sistemas se está aplicando en la industria manufacturera como: refinerías, vidrio, plástico, etc.

2) Sistemas de servomecanismos

Sistema de retroalimentación cuya variable de respuesta es mecánica, aceleración, desplazamiento, etc.

Estos sistemas son la base de las máquinas, herramientas que se emplean en muchas aplicaciones industriales como: tornos, fresadora, etc.

En la actualidad los sistemas de control se han desarrollado ampliamente, aplicándose en sistemas modernos como: control distribuido, control óptimo, control adaptivo, control digital, control con PLC, control numérico, robots, etc.

Además, el control tiende a ser automático, es decir, que el control se realiza sin la intervención del hombre en el proceso, de esta manera se reduce la fuerza de trabajo humana así como accidentes o factores que alteren el proceso, y se tiende a emplear la computadora como elemento de control.

II. CONCEPTOS BÁSICOS DE CONTROL

2.1 Modelos Matemáticos

Para analizar y diseñar sistemas de control, las especificaciones o descripción del sistema y sus componentes deben ponerse en una forma manejable.

Un modelo es una representación "simplificada" de un sistema.

Existen tres formas básicas de representar (modelar) a los sistemas de ingeniería:

1) Modelos icónicos. Son réplicas físicas construidas generalmente a escala: Maquetas, aviones y barcos a escala, mapas, etc.

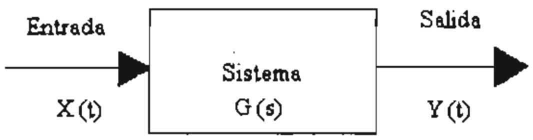
2) Modelos analógicos. El comportamiento y las propiedades del sistema se realizan a través de un medio completamente diferente al del sistema mismo: Modelo eléctrico para tráfico automovilístico, simulador de vuelo, etc.

3) Modelos simbólicos. La representación se realiza mediante símbolos. "En esta categoría caen los modelos matemáticos", que es la representación mediante las ecuaciones diferenciales de los sistemas dinámicos.
Por ejemplo, un circuito RL se modela así:

$$V(t) = R\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

Función de transferencia

En control se maneja un modelo dinámico al cual se le conoce como función de transferencia, se define como el cociente de la transformada de Laplace de la salida entre la transformada de Laplace de la entrada, con condiciones iniciales igual a cero.



$$G(s) = \frac{\text{Salida}}{\text{Entrada}} = \left.\frac{Y(s)}{X(s)}\right|_{C.I. = 0}$$

Para encontrar la función de transferencia, es necesario definir cual es la entrada y cual es la salida, y si no se define la entrada, se puede considerar como entrada a la fuente de alimentación.

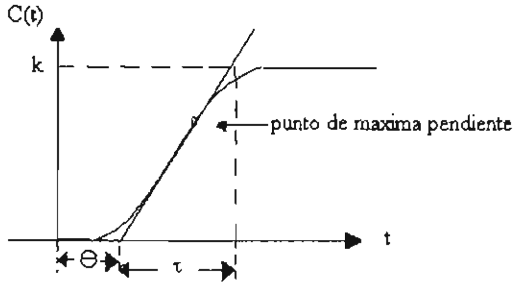
Técnicas de identificación de sistemas

Cuando para un sistema, el obtener la función de transferencia a partir del modelo matemático del sistema, es complicado ya sea porque el sistema es complejo o por que no se conocen elementos internos, se puede emplear esta técnica que se basa en general en el estudio de la respuesta en función de una entrada predeterminada.

Entre los métodos más conocidos podemos mencionar "el método gráfico, el método de correlación, el método de verosimilitud, etc".

Para entender en forma sencilla esta técnica de identificación se planteara en forma breve el método más simple que es el gráfico y particularmente el método de Ziegler-Nichols, que a partir de la gráfica de respuesta temporal a una entrada escalón unitario obtiene los parámetros de la función de transferencia conocida para un sistema de primer orden:

$$G(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau s + 1}$$



2.1.1 Transformada de Laplace

Definición. Sea una función real $f(t)$ de la variable real t, definida para $t>0$ y nula para todo $t<0$. La transformada de Laplace $F(s)$ de la función $f(t)$ se define por la relación:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

En donde s es una variable compleja igual a $\sigma + j\omega$.

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ existe si la integral de Laplace converge. La integral converge si $f(t)$ es continua seccionalmente en cada intervalo finito en el rango $t > 0$ y si es de orden exponencial cuando t tienda a infinito.

El cálculo de la transformada de Laplace de cualquier función se debe realizar mediante la integral (A). Se han calculado transformadas de las funciones más usuales en control y se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 1: Transformadas de Laplace

F(t)	F(s)	f(t)	F(s)
Impulso unitario δ(t)	1	$\frac{1}{b-a}(be^{-at}-ae^{-bt})$	$\frac{S}{(S+a)(S+b)}$
Escalón unitario 1(t)	$\frac{1}{S}$	$\frac{1}{ab}\left[1+\frac{1}{a-b}(be^{-at}-ae^{-bt})\right]$	$\frac{1}{S(S+a)(S+b)}$
t	$\frac{1}{S^2}$	$\frac{1}{a^2}(1-e^{-at}-ate^{-at})$	$\frac{1}{S(S+a)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\cdots(n=1,2,3,..)$	$\frac{1}{S^n}$	$\frac{1}{a^2}(at-1+e^{-at})$	$\frac{1}{S^2(S+a)}$
$t^n\cdots(n=1,2,3,..)$	$\frac{n!}{S^{n+1}}$	$e^{-at}Sen\omega t$	$\frac{\omega}{(S+a)^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{S+a}$	$e^{-at}Cos\omega t$	$\frac{S+a}{(S+a)^2+\omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(S+a)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}sen\left[\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)\right]$	$\frac{\omega_n^2}{S^2+2\zeta\omega_n S+\omega_n^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}$	$\frac{1}{(S+a)^n}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}sen\left[\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)-\phi\right]$ $\phi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{S}{S^2+2\zeta\omega_n S+\omega_n^2}$
$t^n e^{-at}\cdots(n=1,2,3,..)$	$\frac{n!}{(S+a)^{n+1}}$	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}sen\left[\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)-\phi\right]$ $\phi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{S(S^2+2\zeta\omega_n S+\omega_n^2)}$
$Sen\omega t$	$\frac{\omega}{S^2+\omega^2}$	$1-Cos\omega t$	$\frac{\omega^2}{S(S^2+\omega^2)}$
$Cos\omega t$	$\frac{S}{S^2+\omega^2}$	$\omega t-Sen\omega t$	$\frac{\omega^3}{S^2(S^2+\omega^2)}$
$Senh\omega t$	$\frac{\omega}{S^2-\omega^2}$	$Sen\omega t-\omega tCos\omega t$	$\frac{2\omega^3}{(S^2+\omega^2)^2}$
$Cosh\omega t$	$\frac{S}{S^2-\omega^2}$	$\frac{1}{2\omega}tSen\omega t$	$\frac{S}{(S^2+\omega^2)^2}$
$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{S(S+a)}$	$tCos\omega t$	$\frac{S^2-\omega^2}{(S^2+\omega^2)^2}$
$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$	$\frac{1}{(S+a)(S+b)}$	$\frac{1}{\omega_1 t-\omega_2 t}(Cos\omega_1 t-Cos\omega_2 t)$	$\frac{S}{(S^2+\omega_1^2)(S^2+\omega_2^2)}$
		$\frac{1}{2\omega}(Sen\omega t-\omega tCos\omega t)$	$\frac{S^2}{(S^2+\omega^2)^2}$

Propiedades de la transformada de Laplace

A continuación se muestran en la tabla algunas propiedades de la transformada de Laplace más usuales; las cuales se pueden emplear ventajosamente en la determinación de transformadas de funciones complicadas.

Tabla 2. Propiedades de la transformada de Laplace

$\mathcal{L}\{ Af(t) \} = AF(s)$
$\mathcal{L}\{ f_1(t) \pm f_2(t) \} = F_1(s) \pm F_2(s)$
$\mathcal{L}_{\pm}\{ \frac{d}{dt} f(t) \} = sF(s) - f(0\pm)$
$\mathcal{L}_{\pm}\{ \frac{d^2}{dt^2} f(t) \} = s^2F(s) - sf(0\pm) - f(0\pm)$
$\mathcal{L}_{\pm}\{ \int f(t)dt \} = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} [\int f(t)dt]_{t=0\pm}$
$\mathcal{L}_{\pm}\{ \int \cdots \int f(t)(dt)^n \} = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1} \frac{1}{s^{n-k+1}} [\int \cdots \int f(t)dt^k]_{t=0\pm}$
$\mathcal{L}\{ \int_0^t f(t)dt \} = \frac{F(s)}{s}$
$\int_0^{\infty} f(t)dt = \lim_{s\to 0} F(s) \quad \text{si} \int_0^{\infty} f(t)dt \text{ existe}$
$\mathcal{L}\{ e^{-at} f(t) \} = F(s+a)$
$\mathcal{L}\{ f(t-\alpha)1(t-\alpha) \} = e^{-\alpha s}F(s) \quad \alpha \geq 0$
$\mathcal{L}\{ t f(t) \} = \frac{d}{ds} F(s)$
$\mathcal{L}\{ t^2 f(t) \} = \frac{d^2}{ds^2} F(s)$
$\mathcal{L}\{ t^n f(t) \} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad n=1,2,3,\ldots$ $\mathcal{L}\{ \frac{1}{t} f(t) \} = \int_0^{\infty} F(s)\, ds \quad \text{si} \lim_{s\to 0} \frac{1}{t} f(t) \text{ existe}$
$\mathcal{L}\{ f(\frac{t}{a}) \} = aF(s)$
$\mathcal{L}\{ \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \} = F_1(s)F_2(s)$
$\mathcal{L}\{ f(t)g(t) \} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s-p)\, dp$

Transformada inversa de Laplace

La transformada inversa de Laplace, es un proceso que consiste en encontrar la función del tiempo f(t) a partir de la correspondiente transformada de Laplace F(s). Se dispone de varios métodos para encontrar la transformada inversa de Laplace, el más simple de ellos consiste en usar la tabla de transformadas de Laplace (tabla 1) para encontrar la función del tiempo f(t) que le toca a una transformada de Laplace dada F(s); sin embargo hay transformadas de Laplace complejas en las que no se puede encontrar su función del tiempo de manera sencilla, por lo que se requiere utilizar el método de expansión de fracciones parciales.

- *Método de expansión en fracciones parciales para encontrar transformadas inversas de Laplace.*

Si F(s), la transformada de f(t), se separa en componentes

$$\mathbf{F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \ldots + F_n(s)}$$

Y si las transformadas inversas de Laplace de $F_1(s)$, $F_2(s)$, ..., $F_n(s)$ están fácilmente disponibles, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F(s)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F_1(s)}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F_2(s)}\} + \ldots + \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{F_n(s)}\}$$

$$= \mathbf{f_1(t) + f_2(t) + \ldots + f_n(t)}$$

donde $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$ son las transformadas inversas de Laplace de $F_1(s)$, $F_2(s)$, ..., $F_n(s)$, respectivamente. La transformada inversa de Laplace de F(s) así obtenida es única, excepto posiblemente en los puntos donde la función del tiempo es discontinua. Donde quiera que la función del tiempo sea continua, la función del tiempo f(t) y su transformada de Laplace F(s) tendrán correspondencia uno a uno.
En los problemas de análisis de sistemas, F(s) ocurre frecuentemente en la forma

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

donde A(s) y B(s) son polinomios en s y el grado de A(s) no es mayor que el de B(s).

La ventaja del enfoque de la expansión en fracciones parciales es que los términos individuales de F(s), resultantes de la expansión de fracciones parciales, son funciones muy simples en s; en consecuencia, no es necesario consultar la tabla de transformadas de Laplace si memorizamos varios pasos de transformadas de Laplace simples. Debe notarse, sin embargo, que al aplicar la técnica de expansión en fracciones parciales en la búsqueda de la transformada inversa de Laplace de F(s) = A(s)/B(s), las raíces del polinomio B(s) del denominador deben conocerse por anticipado. Es decir, este método no se aplica hasta que el polinomio del denominador haya sido factorizado.

Considérese F(s) escrita en la forma factorizada

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)...(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)}$$

donde p_1, p_2, ..., p_n y z_1, z_2, ..., z_m sean cantidades reales o complejas, pero por cada complejo p_i o z_i estará presente el complejo conjugado de p_i o z_i, respectivamente. Aquí la potencia más alta de s en B(s) se supone mayor que la de A(s).

En la expansión de $\frac{A(s)}{B(s)}$ en la forma de fracciones parciales, es importante que la potencia más alta de s en B(s) sea mayor que la más alta potencia de s en A(s). Si no es el caso, el numerador A(s) debe dividirse entre el denominador B(s) con el objeto de producir un polinomio en s más un residuo (una razón de polinomio en s cuyo numerador sea de menor grado que el denominador).

Ejemplo:
A partir de la siguiente ecuación diferencial obtener y(t), aplicando la transformada de Laplace

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 2t$$

$$con: y(0) = 0; \frac{dy}{dt} = 1$$

utilizando las propiedades de la transformada de Laplace tenemos

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 2t\right\}$$

aplicando la propiedad conmutativa de la transformada de Laplace, tenemos

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 2\mathcal{L}\{t\}$$

aplicando la propiedad de la derivada de la transformada de Laplace a la ecuación anterior, y sustituyendo las condiciones iniciales tenemos:

$$S^2Y(s)-Sy(0)-\frac{dy(0)}{dt}+SY(s)-y(0)-2Y(s)=\frac{2}{S^2}$$

$$S^2Y(s)-S(0)-1+SY(s)-0-2Y(s)=\frac{2}{S^2}$$

$$S^2Y(s)-0-1+SY(s)-0-2Y(s)=\frac{2}{S^2}$$

$$S^2Y(s)-1+SY(s)-2Y(s)=\frac{2}{S^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Factorizando y despejando Y(s) de la ecuación (1) tenemos que

$$Y(s)[S^2+S-2]-1=\frac{2}{S^2}$$

$$Y(s)=\frac{\frac{2}{S^2}+1}{S^2+S-2}$$

$$Y(s)=\frac{2+S^2}{S^2(S+2)(S-1)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace tenemos que

$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$

Como Y(s) tiene términos complejos aplicamos el método de fracciones parciales a Y(s), para obtener términos sencillos que se puedan encontrar en las tablas de transformadas
Como primer paso, la ecuación (2) la igualamos a

$$\frac{2+S^2}{S^2(S+2)(S-1)}=\frac{A}{S^2}+\frac{B}{S}+\frac{C}{S+2}+\frac{D}{S-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Como segundo paso, multiplicamos la ecuación (3) por S^2 y evaluamos para $S = 0$, para obtener el valor de A

$$\frac{(2+S^2)S^2}{S^2(S+2)(S-1)}=\frac{AS^2}{S^2}+\frac{BS^2}{S}+\frac{CS^2}{S+2}+\frac{DS^2}{S-1}$$

$$\frac{(2+S^2)}{(S+2)(S-1)}=A+BS+\frac{CS^2}{S+2}+\frac{DS^2}{S-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\frac{(2+(0)^2}{(0+2)(0-1)}=A+B(0)+\frac{C(0)^2}{0+2}+\frac{D(0)^2}{0-1}$$

$$-\frac{2}{2}=A\therefore A=-1$$

Como tercer paso derivamos la ecuación (4), y evaluamos para S = 0 para obtener el valor de B

$$\frac{(2+S^2)}{(S+2)(S-1)} = A + BS + \frac{CS^2}{S+2} + \frac{DS^2}{S-1}$$

$$\left.\frac{(S^2+S-2)(2S)-[(2+S^2)(2S+1)]}{(S^2+S-2)^2} = 0 + B + \frac{C[(S+2)(2S)-[(S^2)(1)]]}{(S+2)^2} + \frac{D[(S+1)(2S)-[(S^2)(1)]]}{(S-1)^2}\right|_{S=0}$$

$$\frac{((0)+0-2)(2(0))-[(2+(0)^2)(2(0)+1)]}{((0)^2+0-2)^2} = B + \frac{C[(0+2)(2(0))-[((0)^2)(1)]]}{(0+2)^2} + \frac{D[(0+1)(2(0))-[((0)^2)(1)]]}{(0-1)^2}$$

$$-\frac{2}{4} = B + 0 + 0 \therefore B = -\frac{1}{2}$$

Como cuarto paso, multiplicamos la ecuación (3) por (S+2), y evaluamos para S = (-2), para obtener el valor de C

$$\frac{(2+S^2)(S+2)}{S^2(S+2)(S-1)} = \frac{A(S+2)}{S^2} + \frac{B(S+2)}{S} + \frac{C(S+2)}{S+2} + \frac{D(S+2)}{S-1}$$

$$\left.\frac{2+S^2}{S^2(S-1)} = \frac{A(S+2)}{S^2} + \frac{B(S+2)}{S} + C + \frac{D(S+2)}{S-1}\right|_{S=-2}$$

$$\frac{2+(-2)^2}{(-2)^2(-2-1)} = \frac{A(-2+2)}{(-2)^2} + \frac{B(-2+2)}{(-2)} + C + \frac{D(-2+2)}{-2-1}$$

$$-\frac{6}{12} = A(0) + B(0) + C + D(0) \therefore C = -\frac{1}{2}$$

Como quinto paso, multiplicamos la ecuación (3) por (S - 1), y evaluamos para S = 1, para obtener el valor de D

$$\frac{(2+S^2)(S-1)}{S^2(S+2)(S-1)} = \frac{A(S-1)}{S^2} + \frac{B(S-1)}{S} + \frac{C(S-1)}{S+2} + \frac{D(S-1)}{S-1}$$

$$\left.\frac{2+S^2}{S^2(S+2)} = \frac{A(S-1)}{S^2} + \frac{B(S-1)}{S} + \frac{C(S-1)}{S+2} + D\right|_{S=1}$$

$$\frac{2+(1)^2}{(1)^2(1+2)} = \frac{A(1-1)}{(1)^2} + \frac{B(1-1)}{(1)} + \frac{C(1-1)}{1+2} + D$$

$$\frac{3}{3} = A(0) + B(0) + C(0) + D \therefore D = 1$$

Como sexto paso obtenemos que

$$Y(s)=\frac{2+S^2}{S^2(S+2)(S-1)}=-\frac{1}{S^2}-\frac{1}{2S}-\frac{1}{2(S+2)}+\frac{1}{S-1}$$

Por lo tanto

$$y(t)=-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S^2}\right\}-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\}-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S+2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S-1}\right\}$$

buscando estos términos en las tablas de transformadas obtenemos que:

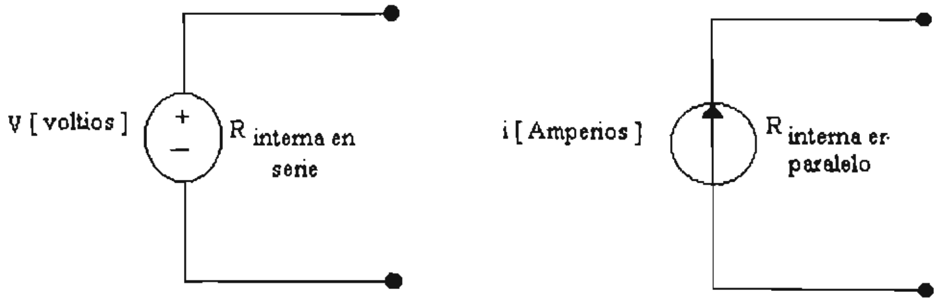
$$y(t)=-t-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}+e^{t}$$

2.1.2 Sistemas Eléctricos

Este sistema es un conjunto de elementos eléctricos interconectados de tal manera que forman una unidad eléctrica que cumple con las leyes de Kirchhoff.

Podemos clasificar los elementos de un circuito en dos grandes categorías: elementos activos y elementos pasivos.

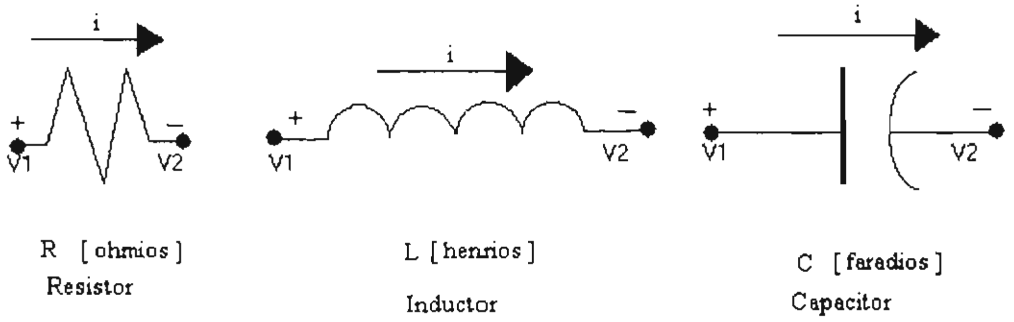
Los elementos activos son los elementos que proporcionan energía al sistema, fuentes de voltaje y fuentes de corriente con sus representaciones siguientes:



Fuente de voltaje

Fuente de corriente

Los elementos pasivos son los elementos que consumen energía en el sistema, estos pueden ser: resistores, inductores y capacitores. La propiedad del resistor es la resistencia, del inductor es la inductancia y del capacitor es la capacitancia, y sus representativos son:



Las leyes lineales de estos elementos son:

Ley de Ohm: $V_{12}(t) = Ri(t)$

Ley de Faraday: $V_{12}(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$

Ley de Coulomb: $V_1(t) = \dfrac{1}{c}\int i(t)dt$

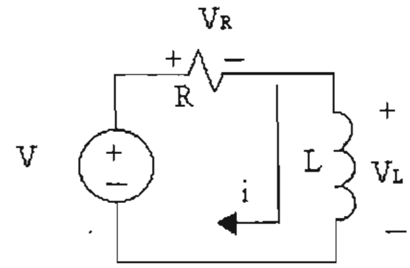
Con el manejo de las leyes lineales de comportamiento de los elementos y las leyes de Kirchhoff se puede modelar cualquier sistema eléctrico.

Ley de voltajes de Kirchhoff. La suma algebraica de las subidas y bajadas de voltaje en una malla debe ser igual a cero.

Ley de corrientes de Kirchhoff. La suma algebraica de las corrientes que entran y salen de un nodo debe ser igual a cero.

Ejemplo

Encontrar el modelo matemático y la función de transferencia del siguiente circuito:



Por la ley de voltajes de Kirchhoff tenemos

$$V_R + V_L - V(t) = 0$$

De donde $\quad V(t) = V_R + V_L$

El modelo matemático es: $\quad V(t) = Ri(t) + L\dfrac{di}{dt}$

En Laplace tenemos que: $\quad V(s) = RI(s) + LSI(s)$

Factorizando a I(s) tenemos: $\quad V(s) = (R+LS)I(s)$

Por lo que la función de transferencia es: $\dfrac{I(s)}{V(s)} = \dfrac{1}{(R+LS)}$

El modelaje de los sistemas eléctricos se pueden realizar en forma genérica mediante el método general de mallas o el método general de nodos.

Método de mallas

Consiste en determinar las corrientes de mallas de un circuito plano obteniendo ´n´ ecuaciones linealmente independientes a partir de aplicar la ley de Kirchhoff de voltajes a las ´n´ mallas de un circuito.

Se dice que un circuito es plano cuando se puede dibujar en un plano sin que existan ramas que se crucen y que una malla es un lazo o trayectoria cerrada que no contiene otro lazo en su interior.

Con el sistema de dos ecuaciones se determinan las dos corrientes de mallas i_1 e i_2.

Y así, si nuestro circuito contiene ´n´ mallas, tendríamos que suponer ´n´ corrientes de malla y determinar ´n´ ecuaciones independientes. En general la solución puede obtenerse sistemáticamente mediante el uso de determinantes.

La forma de aplicar el método, se puede resumir con los siguientes pasos

1°. Asegurarse que el circuito es plano

2°. Hacer un esquema de circuito, simple y claro, indicando los valores de los elementos, son preferibles los valores de resistencia.

3°. Asignar a cada malla una corriente de malla en sentido horario.

4°. Si el circuito contiene únicamente fuentes de voltaje, aplique la ley de Kirchhoff de voltaje alrededor de cada malla.

5°. Si el circuito contiene fuentes de corriente, mentalmente reemplace a cada fuente por un circuito abierto reduciendo de esta manera el número de mallas en uno y aplique la L.V.K. a las mallas resultantes, relacionando la corriente de la fuente con las corrientes de mallas.

Métodos de Nodos

Consiste en determinar los voltajes asociados con los nodos de un circuito. Puesto que la existencia de un voltaje se define entre dos nodos, conviene seleccionar un nodo en el circuito que sea un nodo de referencia y asociarlo en un voltaje o en un potencial con cada uno de los otros nodos.

El voltaje de cada nodo con respecto al nodo de referencia se define como voltaje de nodo. Es común seleccionar las polaridades de modo que el voltaje de cada nodo sea positivo con respecto al nodo de referencia. En un circuito que contenga ´n´ nodos, habrá ´n-1´ voltajes de nodos a determinar, mediante la aplicación de la ley de Kirchhoff de corrientes a los ´n-1´ nodos del circuito, dándonos ´n-1´ ecuaciones linealmente independientes.

Con frecuencia se escoge como nodo de referencia aquel al cual se conecta el mayor número de ramas.
Muchos circuitos en la práctica se construyen sobre una base o bastidor metálico y es común que haya varios elementos conectados al bastidor, el cual ofrece una elección lógica como nodo de referencia.

La forma de aplicar el método, se puede resumir en los siguientes pasos

1°. Hacer un esquema en el circuito simple y claro indicando los valores de los elementos, son preferibles los valores de conductancia.

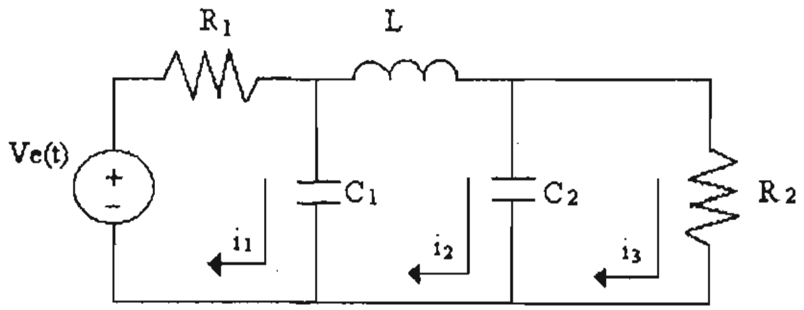
2°. Elegir al nodo al que incide mayor número de ramas como el nodo de referencia y asignarle a cada nodo un voltaje V1, V2,..V_{n-1}. que estarán en función o referidos al nodo de referencia.

3°. Si el circuito contiene únicamente fuentes de corrientes, aplique la ley de Kirchhoff de corrientes a los n-1 nodos.

4°. Si el circuito contiene fuentes de voltaje, mentalmente reemplace a cada fuente de voltaje por un corto circuito, reduciendo de esta manera el número de nodos en uno y aplique la L.C.K. a los nodos resultantes, relacionando el voltaje de las fuentes con los voltajes de nodos.

Ejemplo:

Encontrar el modelo matemático y la función de transferencia del siguiente circuito por el método de mallas.



Por el método de mallas (en condiciones iniciales igual a cero)

$$\mathrm{V(t)} = R_1 i_1 + \frac{1}{C_1}\int (i_1 - i_2)dt \text{ ---------------------------1}$$

$$0 = L\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_2}\int (i_2 - i_3)dt + \frac{1}{C_1}\int (i_2 - i_1)dt \text{ -------2}$$

$$0 = R_2 i_3 + \frac{1}{C_2}\int (i_3 - i_2)dt \text{ ---------------------------3}$$

MODELO MATEMÁTICO

teniendo el modelo matemático, se pasa a Laplace

$$\mathrm{Ve(s)} = R_1 I_1(s) + \frac{1}{SC_1}(I_1(s) - I_2(s))$$

$$0 = LSI_2(s) + \frac{1}{SC_2}(I_2(s) - I_3(s)) + \frac{1}{SC_1}(I_2(s) - I_1(s))$$

$$0 = R_2 I_3(s) + \frac{1}{SC_2}(I_3(s) - I_2(s))$$

Organizando

$$Ve(s) = (R_1 + \frac{1}{SC_1})I_1 \quad + \quad (-\frac{1}{SC_1})I_2 \quad + \quad 0I_3$$

$$0 = \quad (-\frac{1}{SC_1})I_1 \quad + \quad (LS + (\frac{1}{SC_2}) + (\frac{1}{SC_1}))I_2 \quad + \quad (-\frac{1}{SC_2})I_3$$

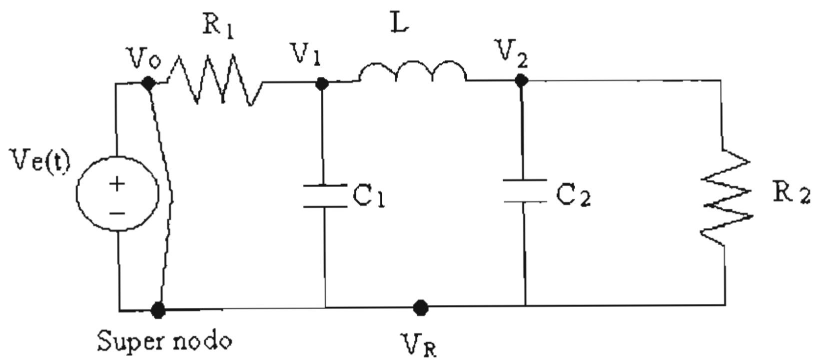
$$0 = \quad 0I_1 \quad + \quad (-\frac{1}{SC_2})I_2 \quad + \quad (R_2 + \frac{1}{SC_2})I_3$$

Resolviéndolo por el método de Kramer y teniendo a $I_3(s)$ como salida la función de transferencia es:

$$\frac{SALIDA}{ENTRADA} = \frac{I_3(s)}{Ve(s)}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{S^2C_1C_2}}{\left(R_1R_2 + \left(SL + \dfrac{1}{SC_2} + \dfrac{1}{SC_1}\right) + R_1\left(\dfrac{L}{C_2} + \dfrac{1}{S^2C_1C_2}\right) + R_2\left(\dfrac{L}{C_1} + \dfrac{1}{S^2C_1C_2} + \dfrac{2}{S^2C_1^2}\right) + \dfrac{L}{SC_1} + 2S^3C_1^2C_2\right)}$$

Ejemplo: Encontrar el modelo matemático y la función de transferencia del siguiente circuito por el método de nodos (condiciones iniciales igual a cero):



Por el método de nodos

$$Ve = V_1 + C_1 R_1 \frac{dv_1}{dt} + \frac{R_1}{L} \int (v_1 - v_2) dt$$

MODELO

MATEMÁTICO

$$0 = C_2 \frac{dv_2}{dt} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{1}{L} \int (v_2 - v_1) dt$$

aplicando la transformada de Laplace

$$Ve(s) = V_1(s) + C_1 R_1 S V_1 + R_1 \frac{V_1}{LS} - R_1 \frac{V_2}{LS}$$

$$0 = C_2 V_2 S + \frac{V_2}{R_2} + V_2 \frac{1}{LS} - V_1 \frac{1}{LS}$$

Organizando

$$V_e = \left[1 + C_1 R_1 S + \frac{R_1}{LS}\right] V_1 - \frac{R_1}{LS} V_2$$

$$0 = \frac{1}{LS} V_1 + \left[C_2 S + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{LS}\right] V_2$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 + C_1 R_1 S + \frac{R_1}{LS} & Ve \\ -\frac{R_1}{LS} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + C_1 R_1 S + \frac{R_1}{LS} & -\frac{R_1}{LS} \\ -\frac{R_1}{LS} & \frac{1}{R_2} + C_2 S + \frac{1}{LS} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\dfrac{V_e}{LS}}{\left[1 + C_1 R_1 S + \dfrac{R_1}{LS}\right]\left[\dfrac{1}{R_2} + C_2 S + \dfrac{1}{LS}\right] + \dfrac{R_1}{L^2 S^2}}$$

Resolviendo:

$$V_2 = \frac{V_e R_2}{LS\left[1 + C_2 R_2 S + \dfrac{R_1}{LS} + (C_1 R_1 S)(C_2 R_2 S) + \dfrac{C_1 R_1 R_2}{LS} + \dfrac{R_1}{LS} + \dfrac{R_1 R_2 C_2 S}{LS} + \dfrac{R_1 R_2}{LS^2} - \dfrac{R_1 R_2}{L^2 S^2}\right]}$$

$$V_2 = \frac{V_e R_2}{LS + C_2 R_2 LS^2 + R_2 + LC_1 R_1 C_2 R_2 S^3 + C_1 R_1 R_2 + R_1 + R_1 R_2 C_2 S}$$

F. de T. y modelo matemático.

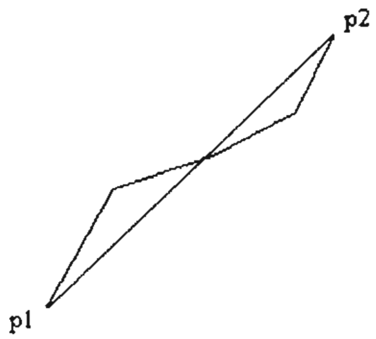
$$\frac{V_2(S)}{V_e(S)} = \frac{R_2}{LC_1 R_1 C_2 R_2 S^3 + LC_2 R_2 S^2 + (L + C_1 R_1 R_2 + R_1 R_2 C_2)S + R_1 + R_2}$$

2.1.3 Sistemas mecánicos

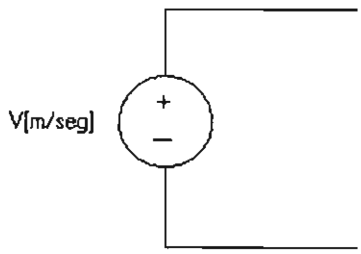
Los sistemas mecánicos se pueden clasificar en:

- Sistemas mecánicos de translación
- Sistemas mecánicos de rotación

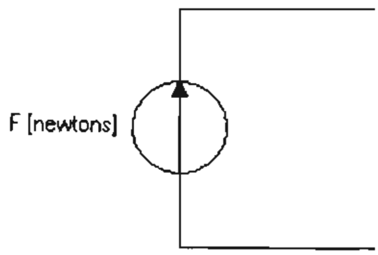
a) **Sistemas mecánicos de translación**.- Son aquellos en que la cantidad de movimiento se puede medir en línea recta (sin importar su movimiento original)



Al igual que en los sistemas eléctricos podemos clasificar sus elementos
Los elementos activos son:

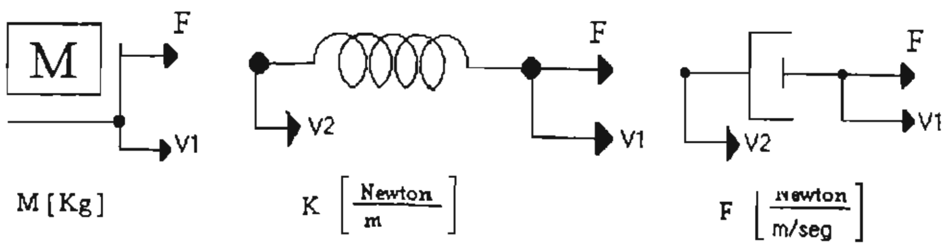


Fuente de velocidad



Fuente de fuerza

Los elementos pasivos son:



Masa

Resorte

Amortiguador

Las leyes lineales para estos elementos son:

Ley de Newton $F = M\frac{dv_1}{dt}$

Ley de Hooke $F = KX = K\int v_{12}dt$

Ley de la fricción viscosa $F = fv_{12}$

Con el manejo de las leyes de comportamiento de los elementos y las leyes de Newton se puede modelar cualquier sistema mecánico.

Leyes de Newton

1.- *En ausencia de fuerzas, un cuerpo en reposo seguirá en reposo, y un cuerpo moviéndose a velocidad constante en línea recta continuará haciéndolo indefinidamente.*

2.- *Cuando se aplica una fuerza a un objeto ("cuerpo") se acelera en la dirección de la fuerza. La aceleración es directamente proporcional a la intensidad de la fuerza e inversamente proporcional a la masa a mover:*

$$a = \frac{F}{m} \quad \text{ó} \quad F = m\,a$$

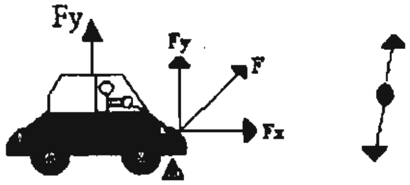
3.- *Las fuerzas son siempre producidas en pares, teniendo direcciones opuestas e igual magnitud. Si el cuerpo nº 1 actúa con una fuerza F sobre el cuerpo nº 2, el cuerpo nº 2 actuará sobre el nº 1 con una fuerza de igual intensidad y dirección opuesta.*

Para modelar sistemas mecánicos se recomienda seguir las siguientes reglas:

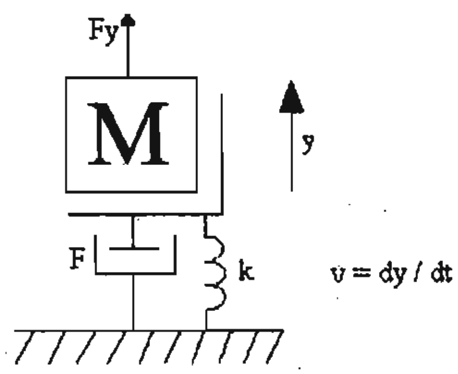
1. Determinar el grado de libertad. El grado de libertad esta en función del numero de movimientos linealmente independientes.
2. Dibujar el diagrama de cuerpo libre.
3. Dibujar el diagrama de fuerzas en cada movimiento.
4. Balance de fuerzas (principio de D' Alambert) para cada movimiento.

$$\sum F = M\frac{dv}{dt}$$

Ejemplo: Encuentra el modelo matemático del movimiento vertical de un automóvil al pasar un tope.

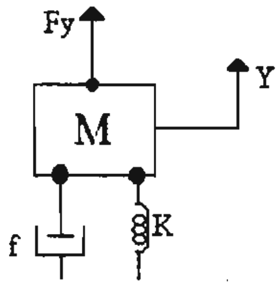


Pasando el sistema físico a un sistema de elementos mecánicos

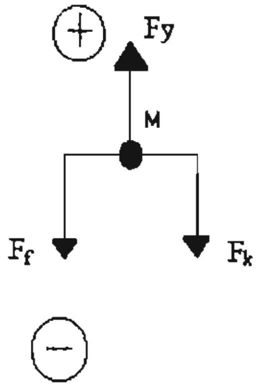


1.-El sistema se mueve solamente en la masa, por lo tanto es un sistema de un grado de libertad.

2.-El diagrama de cuerpo libre, consiste en dibujar todos los elementos ligados al movimiento en cuestión.



3.-El diagrama de fuerzas será



4. El balance de fuerzas será.

$$+F_y - F_f - F_k = M\frac{dV}{dt}$$

Despejando la fuerza externa $F_y = M\frac{dV}{dt} + F_f + F_k$

$$F_y(t) = M\frac{dV}{dt} + fV + K\int Vdt \longrightarrow \text{MODELO MATEMÁTICO}$$

Factorizando.

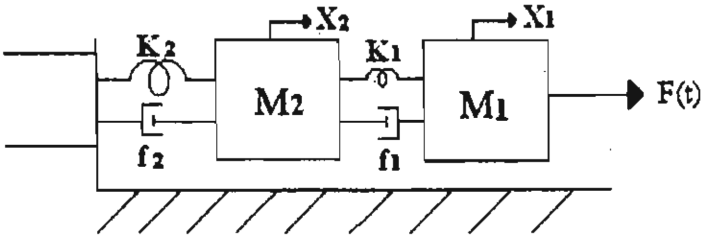
$$F_y(s) = MSV(s) + fV(s) + \frac{K}{S}V(s)$$

$$F_Y(s) = \left[MS + f + \frac{K}{S}\right]V(s)$$

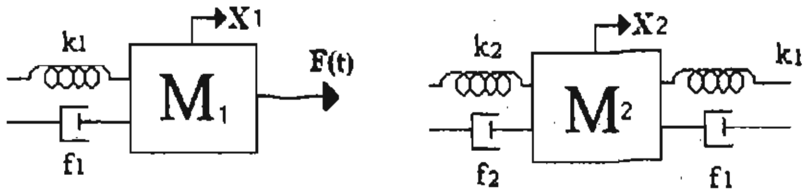
La F. de T. del sistema será:

$$\frac{V(s)}{F_y(s)} = \frac{1}{MS + f + K} \Rightarrow \frac{Y(S)}{F_y(S)} = \frac{1}{MS^2 + fS + \frac{K}{S}}$$

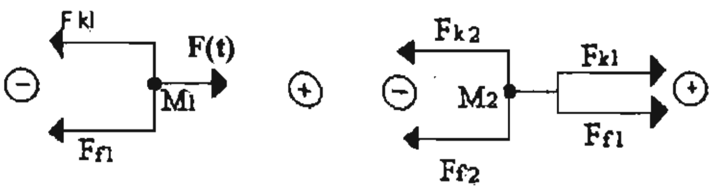
Ejemplo: Determine el modelo matemático y la F. de T.



1. El sistema tiene dos movimientos independientes, es decir es de dos grados de libertad, por lo tanto su modelo matemático será un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
2. Los diagramas de cuerpo libre, consisten en dibujar todos los elementos ligados a los movimientos en cuestión.



3. Los diagramas de fuerzas serán



4.- Los balances de fuerzas son

$$F(t) - F_{K1} - F_{f1} = M_1 \frac{dV_1}{dt} \text{-------------} (1)$$

$$+F_{K1} - F_{f1} - F_{k2} - F_{f2} = M_2 \frac{dV_2}{dt} \text{---------} (2)$$

$$F(t) = M_1 \frac{dV_1}{dt} + f_1(V_1 - V_2) + K_1 \int (V_1 - V_2)dt \text{-----------} (1) \quad \text{MODELO}$$

$$0 = M_2 \frac{dV_2}{dt} + f_2 V_2 + K_2 \int V_2 dt + f_1(V_2 - V_1) + K_1 \int (V_2 - V_1)dt \text{--} (2) \quad \text{MATEMÁTICO}$$

Pasando a Laplace

$$F(s) = SM_1V_1 + f_1V_1 - f_1V_2 + \frac{K_2V_1}{S} - \frac{K_1V_2}{S}$$

$$0 = SM_2V_2 + f_2V_2 + \frac{K_2V_2}{S} + f_1V_2 - f_1V_1 + \frac{K_1V_2}{S} - \frac{K_1V_1}{S}$$

Factorizando

$$F(s) = \left[SM_1 + f_1 + \frac{K_1}{S}\right]V_1 - \left[f_1 + \frac{K_1}{S}\right]V_2$$

$$0 = -\left[f_1 + \frac{K_1}{S}\right]V_1 + \left[SM_2 + f_2 + \frac{K_1}{S} + \frac{K_2}{S} + f_1\right]V_2$$

si $V_1 = X_1S$ y $V_2 = X_2S$

$$F(s) = \left[SM_1 + f_1 + \frac{K_1}{S}\right]X_1S - \left[f_1 + \frac{K_1}{S}\right]X_2S$$

$$0 = -\left[f_1 + \frac{K_1}{S}\right]X_1S + \left[SM_2 + f_2 + \frac{K_1}{S} + \frac{K_2}{S} + f_1\right]X_2S$$

$$F(s) = \left[S^2M_1 + f_1S + K_1\right]X_1 - \left[f_1S + K_1\right]X_2$$

$$0 = -\left[f_1S + K_1\right]X_1 + \left[S^2M_2 + (f_2 + f_1)S + K_1 + K_2\right]X_2$$

Resolviendo para X_2.

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} [S_1M_1 + f_1S + K_1] & F(s) \\ -[f_1S + K_1] & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [S^2M_1 + f_1S + K_1] & -[f_1S + K_1] \\ -[f_1S + K_1] & [S^2M_2 + (f_1 + f_2)S + K_1 + K_2] \end{vmatrix}}$$

$$X_2 = \frac{F(s)[f_1 S + K_1]}{[S^2 M_1 + Sf_1 + K_1][S^2 M_2 + S(f_1 + f_2) + K_1 + K_2] - [Sf_1 + K_1]^2}$$

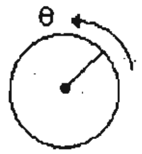
$$X_2 = \frac{F(s)[f_1 S + K_1]}{\begin{array}{l} S^4 M_1 M_2 + S^3 M_1 f_1 + S^3 M_1 f_2 + S^2 M_1 K_1 + S^2 M_1 K_2 + S^3 M_2 f_1 + S^2 f_1^2 + S^2 f_1 f_2 \\ + Sf_1 K_1 + Sf_1 K_2 + S^2 M_2 K_1 + SK_1 f_1 + SK_1 f_2 + K_1^2 + K_1 K_2 - 2S^2 f_1^2 - 2Sf_1 K_1 - K_1^2 \end{array}}$$

$$X_2 = \frac{F(s)[f_1 S + K_1]}{\begin{array}{l} [M_1 M_2]S^4 + [M_1 f_1 + M_1 f_2 + M_2 f_1]S^3 + [M_1 K_1 + M_1 K_2 + f_1 f_2 + M_2 K_1 - f_1]S^2 \\ + [K_1 f_2 + K_2 f_1]S + K_1 K_2 \end{array}}$$

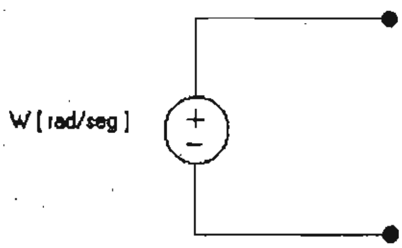
por lo tanto la Función de Transferencia será:

$$\frac{X_2}{F(s)} = \frac{[f_1 S + K_1]}{\begin{array}{l} [M_1 M_2]S^4 + [M_1 f_1 + M_1 f_2 + M_2 f_1]S^3 + [M_1 K_1 + M_1 K_2 + f_1 f_2 + M_2 K_1 - f_1]S^2 \\ + [K_1 f_2 + K_2 f_1]S + K_1 K_2 \end{array}}$$

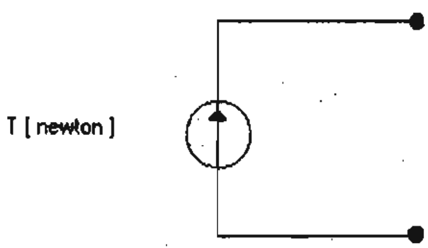
b) Sistemas mecánicos de rotación. Son aquellos en los que la cantidad de movimiento se puede medir alrededor de un eje fijo.



Al igual que en los sistemas eléctricos podemos clasificar sus elementos
Los elementos activos son:

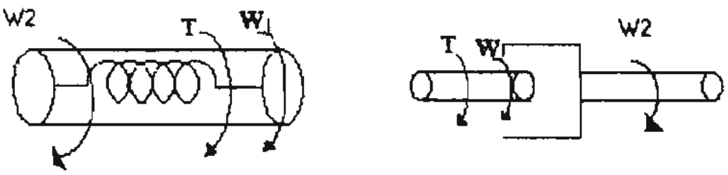


Fuente de velocidad angular



Fuente de fuerza de torsión

Los elementos pasivos son



$J\,[kg\ m^2]$ $K = [Nm / rad]$ $f\left[\dfrac{N\ m}{rad / seg}\right]$

Momento de inercia Resorte torcional Amortiguador torcional

Las leyes lineales para estos elementos son:

Ley de Newton $T = J\dfrac{dw_1}{dt}$

Ley de Hooke $T = K\theta = K\int w_{12}dt$

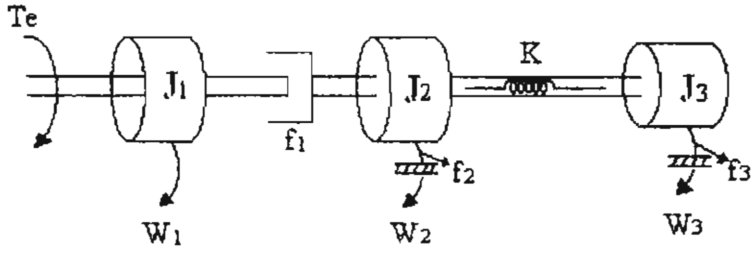
Ley de la función viscosa $T = fw_{12}\mathrm{T}$

Para modelar sistemas mecánicos de rotación se recomienda seguir las mismas reglas empleadas en los sistemas de translación.

1. Determinar el grado de libertad. El grado de libertad esta en función del número de movimientos linealmente independientes.
2. Dibujar el diagrama de cuerpo libre.
3. Dibujar el diagrama de fuerzas en cada movimiento.
4. Balance de fuerzas (principio de D' Alambert) para cada movimiento.

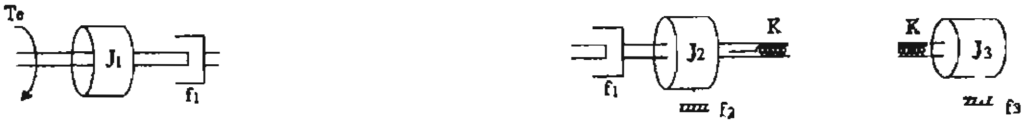
$$\sum T = J\frac{dw}{dt}$$

Ejemplo: Determine el modelo matemático y la F. de T.

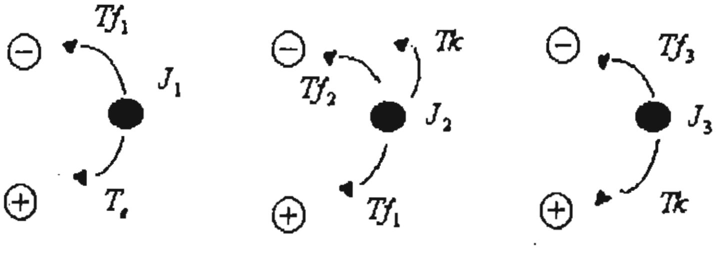


1.- El sistema tiene tres movimientos, por lo tanto, es de tres grados de libertad.

2.- Los diagramas de cuerpo libre son:



3.- Los diagramas de fuerza son



4.- Los balances de fuerza son

$$T_e - Tf_1 = J_1 \frac{dw_1}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$Tf_1 - Tk - Tf_2 = J_2 \frac{dw_2}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$Tk - Tf_3 = J_3 \frac{dw_3}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

con las siguientes ecuaciones para los elementos

$$Tf_1 = f_1(W_1 - W_2)$$
$$Tk = k\int (W_2 - W_3)dt$$
$$Tf_2 = f_2 W_2$$
$$Tf_3 = f_3 W_3$$

MODELO MATEMÁTICO

$$\begin{cases} T_e = J_1 \dfrac{dW_1}{dt} + f(W_1 - W_2) \text{ ----------------------------------1} \\ 0 = J_2 \dfrac{dW_2}{dt} + k\int (W_2 - W_3)dt + f_2 W_2 + f_1(W_2 - W_1) \text{------2} \\ 0 = J_3 \dfrac{dW_3}{dt} + f_3 W_3 + k\int (W_3 - W_2)dt \text{ -------------------------3} \end{cases}$$

$$T_e = (J_1 S + f_1)W_1 - f_1 W_2 + 0W_3$$
$$0 = -f_1 W_1 + \left[f_1 + f_2 + \frac{k}{S} + J_2 S \right] W_2 - \frac{k}{S} W_3$$
$$0 = 0W_1 - \frac{k}{S} W_2 + \left[\frac{k}{S} + f_3 + J_3 S \right] W_3$$

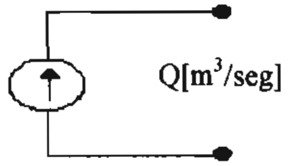
$$\frac{\theta_3(s)}{T_e(s)} = \frac{\begin{vmatrix} J_1 S + f_1 & -f_1 & T_e \\ -f_1 & f_1 + f_2 + \frac{k}{S} + J_2 S & 0 \\ 0 & -\frac{k}{S} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\frac{f_1 k}{S}}{s\Delta}$$

2.1.4 Sistemas hidráulicos

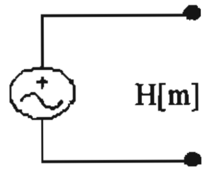
Los sistemas hidráulicos son sistemas que funcionan debido al movimiento del agua u otro líquido como el aceite, el amplio uso de estos sistemas en ingeniería de control se debe a que son muy exactos, flexibles, de alta relación de potencia–peso, precisión y simple de operar.

Al modelar sistemas hidráulicos nos encontramos con que estos presentan fenómenos tales como compresibilidad, cavitación, pérdidas, etc. Que conducen a una operación no lineal. Aquí se presentan las bases para modelar sistemas lineales, por tal razón las leyes de comportamiento de los elementos se linealizan.

Los elementos activos son:



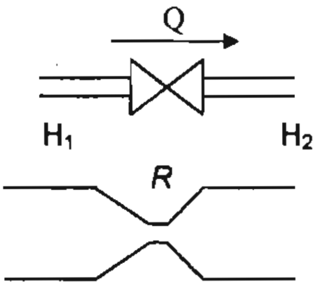
FUENTE DE FLUJO HIDRÁULICO



FUENTE DE POTENCIAL HIDRÁULICO

Los elementos pasivos son:

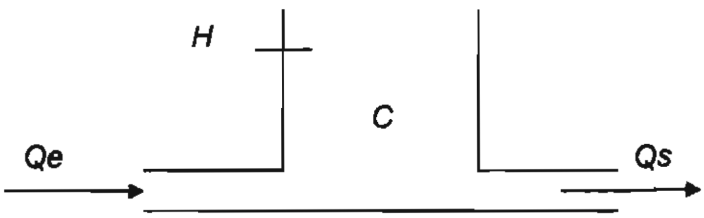
Resistencia hidráulica: Es la oposición al flujo hidráulico



$$R = \frac{Variación \ \ del \ \ Potencial \ \ Hidráulico}{Variación \ \ del \ \ Flujo \ \ Hidráulico} = \frac{dH}{dQ}\left[{}^{s}\!/\!_{m^2}\right]$$

$$R = \frac{H_1 - H_2}{Q} \text{ - - - - - - - - } para\,flujo\,laminar$$

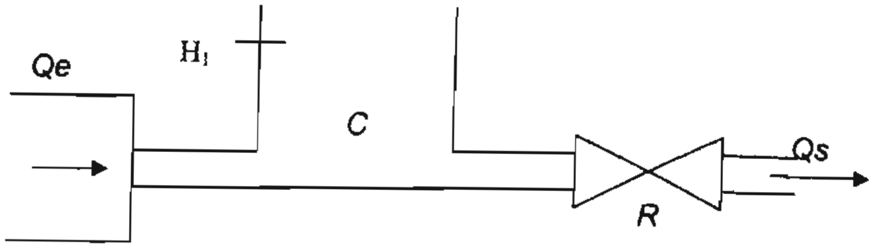
Capacitancia hidráulica: Es el almacenamiento del líquido.



$$C = \frac{Cambio \ \ del \ \ Líquido \ \ Almacenado}{Variación \ \ de \ \ Potencial \ \ Hidráulico} = \frac{(Qe - Qs)dt}{dH}$$

$$Qe - Qs = \frac{CdH}{dt} \text{ - - - - - - - - - - - - - - - } para\,flujo\,laminar$$

Ejemplo: Determine el modelo matemático y la F. de T. del sistema de nivel de líquidos que se muestra



Para la capacitancia

$$Qe - Qs = C\frac{dH_1}{dt}$$

Para la resistencia

$$Qs = \frac{H_1}{R}$$

Relacionando las ecuaciones se tiene

$$\boxed{Qe = C\frac{dH_1}{dt} + \frac{H_1}{R}}$$ MODELO MATEMATICO

Plano de Laplace para función de transferencia

$$Qe(s) = \left(CSH_1 + \frac{H_1}{R}\right)$$

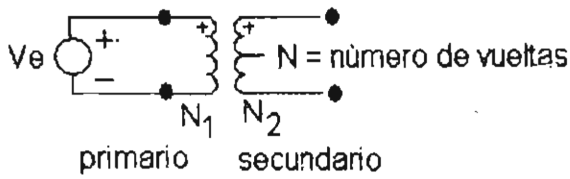
$$Qe(s) = \left(CS + \frac{1}{R}\right)H_1(s)$$

$$\frac{H(s)}{Qe(s)} = \frac{1}{CS + \frac{1}{R}} = \frac{\overbrace{R}^{k}}{\underbrace{RC}_{\tau}S + 1}$$

2.1.5 Transformadores de energía

-Eléctrica

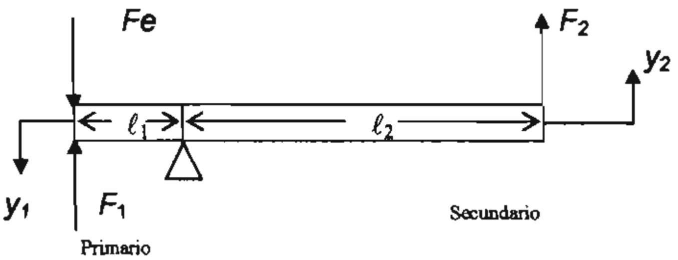
Transformador: Se emplea principalmente para reducir el voltaje de linea.



$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{i_2}{i_1}$$

-Mecánica de Traslación

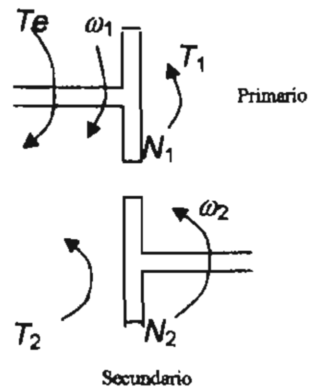
Palanca – Se emplea principalmente para aplicar la fuerza.



$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{y_2}{y_1}$$

-Mecánica de Rotación

Juego de engranes: Se emplea principalmente para reducir la velocidad.

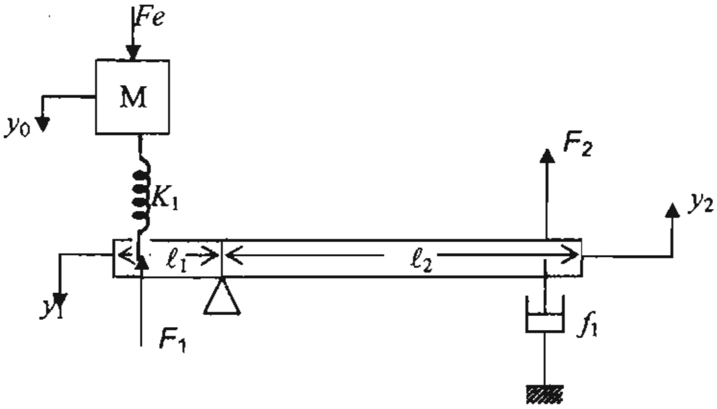


$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

N = nùmero de dientes

2894203

EJEMPLO: Modele el siguiente sistema y de la F. de T.



$$Fe = M\frac{dv_0}{dt} + K_1\int (V_0 - V_1)dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$K_1\int V_0 - V_1)dt = F_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$F_2 = f_1 V_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{V_2}{V_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$F_1 = \frac{\ell_2}{\ell_1}F_2 \qquad ; \qquad V_1 = \frac{\ell_1}{\ell_2}V_2$$

$$k_1(y_0 - y_1) = \frac{\ell_2}{\ell_1} f_1 y_2' - - - - - - - - - - - (2')$$

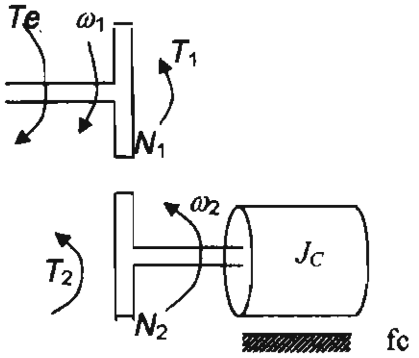
$$\left.\begin{aligned} Fe &= M_1 y_0'' + k_1\left(y_0 - \frac{\ell_1}{\ell_2}y_2\right) - - - - - - - - - - (1) \\ 0 &= -k_1\left(-y_1 + \frac{\ell_1}{\ell_2}y_2\right) + \frac{\ell_2}{\ell_1}f_1 y_2' - - - - - - - (2) \end{aligned}\right\}$$

$$Fe = (M_1 S^2 + k_1)Y_0 - k_1 \frac{\ell_1}{\ell_2} Y_2$$

$$0 = -k_1 Y_0 + \left(k_1 \frac{\ell_1}{\ell_2} + \frac{\ell_2}{\ell_1} f_1 S \right) Y_2$$

$$\frac{Y_2(s)}{Fe(s)} = \frac{\begin{bmatrix} M_1 S^2 + k_1 & Fe \\ -k_1 & 0 \end{bmatrix}}{\Delta} = \frac{k_1}{\Delta}$$

Ejemplo: Determine el modelo matemático del siguiente sistema.



$$Te - T_1 = 0$$

$$Te = T_1 \text{ ------------ } (1)$$

$$T_2 = J_C \omega_2' + f\ c\omega_2 \text{ ------ } (2)$$

$$T_1 = \frac{N_1}{N_2} T_2 \text{ ---------- } (3)$$

$$\Rightarrow Te = \frac{N_1}{N_2}(J_C \omega_2' + f\ c\omega_2)$$

2.1.6 Analogía entre sistemas

Se dice que dos sistemas son análogos cuando siendo de tipos diferentes de energía, sus comportamientos son semejantes (dinámicamente iguales). Dos sistemas son análogos cuando sus modelos matemáticos son del mismo tipo de estructura. Este concepto nos es útil para modelar, analizar y diseñar sistemas de un tipo de energía mediante otro tipo más simple. Además este concepto se puede aplicar a cualquier tipo de sistema, siempre y cuando se establezca la base de analogía de comportamiento entre los elementos correspondientes, siendo esto muy complicado y para ciertos sistemas no se han podido establecer.

Para sistemas electromecánicos se tiene las siguientes ecuaciones de los elementos.

$$V_R = Ri \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots F_f = f_v \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots T_f = f_w$$

$$V_L = L\frac{di}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots F_M = M\frac{dv}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots T_J = J\frac{dw}{dt}$$

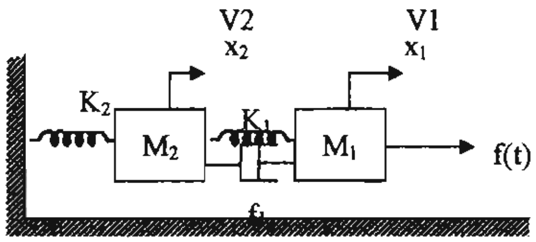
$$V_C = \frac{1}{C}\int idt \ldots\ldots\ldots\ldots F_K = K\int vdt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots T_K = K\int wdt$$

Si establecemos la siguiente base de analogía denominada Analogía "Fuerza-Voltaje" las ecuaciones eléctricas serán iguales a las mecánicas.

ANALOGÍA FUERZA-VOLTAJE		
ELÉCTRICO	MECÁNICO TRASLACIÓN	MECÁNICO ROTACIÓN
V	F	T
i	V	ω
L	M	J
R	F	F
$1/C$	K	K

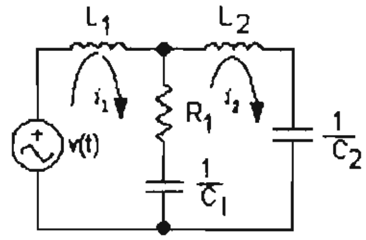
Para determinar el modelo matemático de un sistema empleado el concepto de analogías se puede seguir el procedimiento que se presenta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Determine el modelo matemático del siguiente sistema.



1° Determinar el sistema eléctrico, de la siguiente forma:
(a).- Poner una fuente de voltaje análoga a la fuente de fuerza f(t)
(b).- Dependiendo de las velocidades, poner corrientes de malla. Como hay dos velocidades se crean dos mallas con i_1 e i_2.

(c).- Se colocan elementos conforme a la analogía fuerza-voltaje. Como la M_1 está sujeta solamente a V_1 corresponde L_1 sujeta a i_1, como K_1 y F_1 están entre V_1 y V_2 corresponde R_1 y $1/c_1$ entre i_1 y i_2, como M_2 esta sujeta solamente a V_2 corresponde L_2 sujeta a i_2, como K_2 esta sujeta solamente a V_2 porque el otro extremo no se desplaza corresponde $1/c_2$ sujeta solamente a i_2.



2° Se modela el sistema eléctrico por el método de mallas.

$$v(t) = L_1 \frac{di}{dt} + R_1(i_1 - i_2) + \frac{1}{C1}\int (i_1 - i_2)dt \text{---------}(1)$$

$$0 = \frac{1}{C_1}\int (i_2 - i_1) + R_1(i_2 - i_1) + L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2 dt \text{---}(2)$$

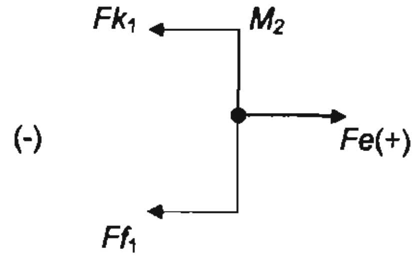
3° Se aplica la tabla de analogías correspondientes a los elementos mecánicos.

$$F(t) = M_1 \frac{dv_1}{dt} + f_1(v_1 - v_2) + k1\int (v_1 - v_2)dt \text{----------}(1)$$

Modelo Matemático

$$0 = f_1(v_2 - v_1) + M_2 \frac{dv_2}{dt} + k_2\int (v_2)dt + k_1\int (v_2 - v_1)dt \text{---}(2)$$

Resolviendo por mecánica

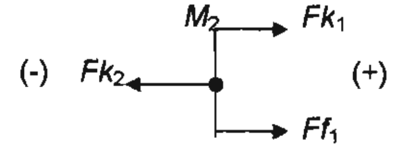


$$+Fe - Fk_1 - Ff_1 = M_1 \frac{dv_1}{dt}$$

$$Fk_2 = k_2 \int v_2 dt$$

$$Fk_1 = k_1\int (v_1 - v_2)dt \qquad Ff_1 = f_1(v_1 - v_2)$$

$$\Rightarrow Fe = M_1\frac{dv_1}{dt} + k_1\int (v_1 - v_2)dt + f_1(v_1 - v_2) ----------------(1)$$



$$+Fk_1 + Ff_1 - Fk_2 = M_2\frac{dv_2}{dt}$$

$$0 = M_2\frac{dv_2}{dt} + k_1\int (v_2 - v_1)dt + f_1(v_1 - v_2) + k_2\int v_2 dt ------------(2)$$

Existe otro tipo de analogía denominada "Fuerza-Corriente" que se obtiene en forma semejante a la anterior pero con las ecuaciones eléctricas para la corriente.

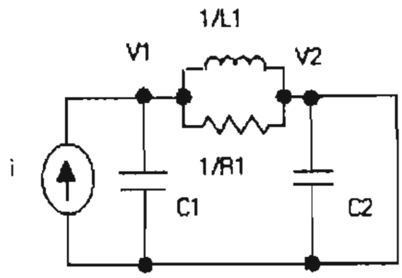
ANALOGÍA FUERZA-CORRIENTE		
ELÉCTRICO	MECÁNICO TRASLACIÓN	MECÁNICO ROTACIÓN
i	F	T
V	V	ω
C	M	J
$1/L$	K	K
$1/R$	F	f

Resolviendo el ejemplo anterior mediante ésta analogía:
1° Determinar el sistema eléctrico, de la siguiente forma.

(a).- Poner una fuente de corriente análoga a la fuente de fuerza f(t)

(b).- Dependiendo de las velocidades, poner voltajes de nodos, como hay dos velocidades se crean dos nodos con V1 y V2.

(c) .- Se colocan elementos conforme a la analogía Fuerza- Corriente. Como la M_1 esta sujeta solamente a V1 correspondiente C1 sujeta a V1, como K1 y f1 están entre V1 y V2 correspondiente 1/L1 y 1/R1 entre V1 y V2, como M2 esta sujeta solamente a V2 corresponde C2 sujeta a V2, como K2 esta sujeta solamente a V2 corresponde 1/L1 sujeta solamente a V2



2° Se modela el sistema eléctrico por el método de nodos.

$$I(t)=C_1\frac{dv_1}{dt}+\frac{1}{R_1}(v_1-v_2)+\frac{1}{L_1}\int(v_1-v_2)dt\text{ ---------- }(1)$$

$$\frac{1}{L_1}\int(v_1-v_2)dt+\frac{1}{R_1}(v_1-v_2)=\frac{1}{L_2}\int v_2dt+C_2\frac{dv_2}{dt}\text{ ---------- }(2)$$

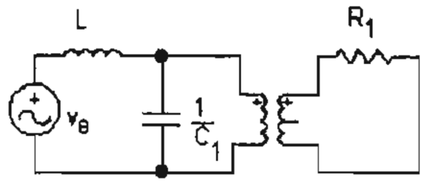
3° Se aplica la tabla de analogías correspondientes a los elementos mecánicos

$$F(t)=M_1\frac{dv_1}{dt}+f_1(v_1-v_2)+K_1\int(v_1-v_2)dt\text{ ---------- }(1)$$

$$K_1\int(v_1-v_2)dt+f_1(v_1-v_2)=K_2\int v_2dt+M_2\frac{dv_2}{dt}\text{ ------ }(2)$$

Ejemplo: Determine el modelo mediante la analogía Fuerza-Voltaje para el ejemplo de la palanca (Pág. 42).

1° Sistema eléctrico análogo Fuerza-Voltaje.



2° Modelo del sistema eléctrico por mallas.

$$Ve = L\frac{di_0}{dt} + \frac{1}{C_1}\int(i_0 - i_1)dt \text{----------} (1)$$

$$\frac{1}{C_1}\int(i_0 - i_1) = V_1 \text{-----------------} (2)$$

$$V_2 = R_1 i_2 \text{--------------------} (3)$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{i_2}{i_1} \text{------------------} (4)$$

3° Modelo mecánico por la tabla Fuerza-Voltaje.

$$Fe = M\frac{dv_0}{dt} + K_1\int(v_0 - v_1)dt \text{-----------} (1)$$

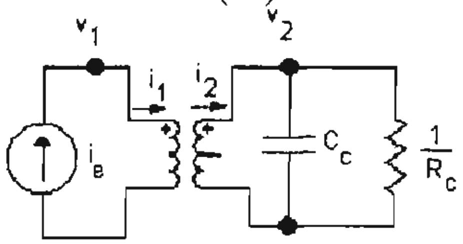
$$K_1\int(v_0 - v_1)dt = F_1 \text{-----------------} (2)$$

$$F_2 = f_1 v_2 \text{----------------------} (3)$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{v_2}{v_1} \text{--------------------} (4)$$

Ejemplo: Determine el modelo mediante la analogía Fuerza-Corriente para el ejemplo del juego de engranes (Pág. 43).

1° Sistema eléctrico análogo Fuerza-Corriente (F-I).



2° Modelo del sistema eléctrico por nodos.

$$I_e = I_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$I_2 = C_c\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{R_c}v_2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

3° Modelo matemático por la tabla Fuerza-Corriente (F-I).

$$T_e = T_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$T_2 = J_c\omega_2 + f_c\omega_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

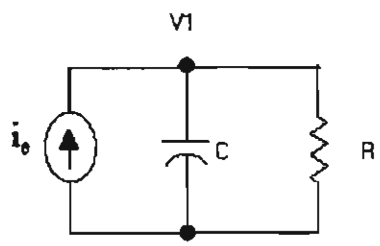
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Para los sistemas hidráulicos se ha establecido una analogía directa con los sistemas eléctricos.

ANALOGÍA DIRECTA	
Qe	I
H	V
R	R
C	C

Ejemplo: Determine el modelo mediante la analogía del sistema del ejemplo de nivel de líquidos (Pág. 40).

1°



2°

$$I_e = C\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{R}V_1$$

3°

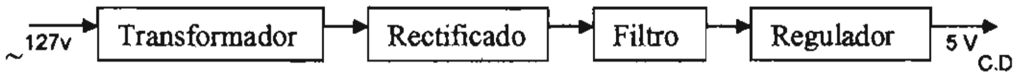
$$Q_e = C\frac{dH_1}{dt} + \frac{1}{R}H_1$$

2.2 Representación Gráfica

Cuando se trabaja con sistemas demasiado complejos, ya sea por la cantidad de elementos o por que consta de elementos de varios tipos de energía, por ejemplo un sistema electromecánico-neumático, es conveniente modelarlos mediante métodos gráficos en los cuales se trabaje con la función de transferencia, de los elementos o grupo de elementos y mediante ramas, se indique el flujo de la señal a través del sistema.

2.2.1 Diagramas de bloques

Los diagramas de bloques, son la representación de un sistema por medio de bloques (□ = bloque). A continuación se muestra un ejemplo de dichos diagramas:

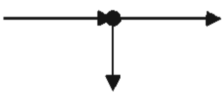


Los elementos básicos para poder conformar un diagrama de bloques son los siguientes:


= BLOQUE


= FLECHA ó RAMA


= SUMADOR


= PUNTO BIFURCACIÓN

Estos últimos cuatro elementos, son básicos para el estudio del control; así mismo cada elemento tiene un significado el cual es:

a) Los bloques representan a los sistemas mediante la F. de T.
b) Las flechas representan a las variables o señales.
c) Los sumadores son donde se encuentran dos o tres señales y solo sale la suma o la resta de las mismas (una sola señal).
d) Los puntos bifurcación establecen que la señal va hacia dos lados diferentes.

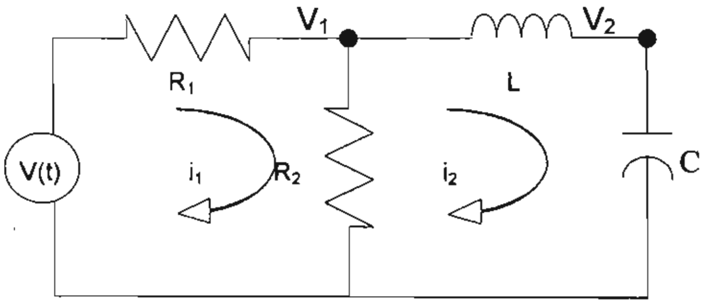
El modelaje de sistemas se puede llevar a cabo de dos formas.

1- Mediante las ecuaciones del sistema
2- Mediante desglose del sistema en subsistemas.

Para poder resolver un sistema eléctrico, por medio de diagramas de bloques, se siguen los siguientes pasos.

a) Se encuentra el mayor número de variables independientes.
b) Encontrar el modelo matemático de cada variable independiente.
c) Mediante el principio *CAUSA EFECTO* se prosigue a pasarlo a diagramas de bloques.

Ejemplo
Resolver el siguiente diagrama eléctrico encontrando su función de transferencia por el método de diagrama de bloques.



a) i_1, V_1, i_2 y V_2

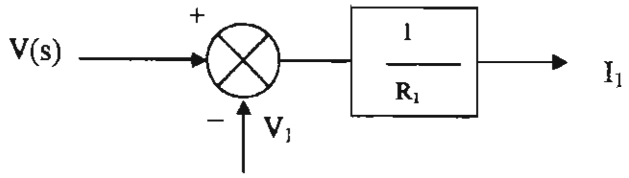
b) $i_1 = \dfrac{V(t) - V_1}{R_1}$ .... $I_1 = \dfrac{V(s) - V_1}{R_1}$ ....(1)

$V_1 = (i_1 - i_2)R_2$ .... $V_1 = (I_1 - I_2)R_2$ ....(2)

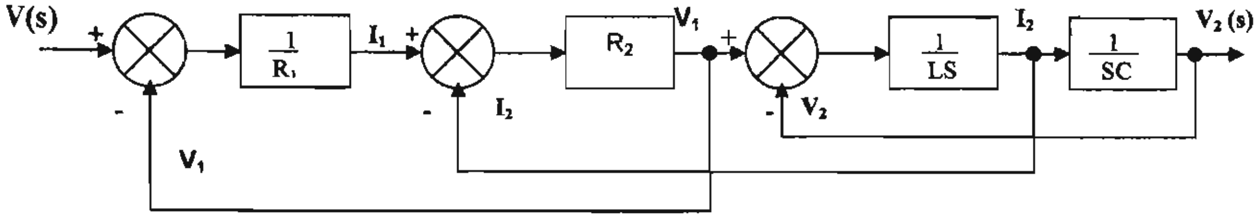
$i_2 = \dfrac{1}{L}\int (V_1 - V_2)dt$ .... $I_2 = \dfrac{1}{SL}(V_1 - V_2)$ ....(3)

$V_2 = \dfrac{1}{C}\int i_2 dt$ .... $V_2 = \dfrac{1}{SC} I_2$ ....(4)

c) De la ecuación 1 se tiene:



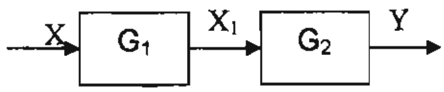
El diagrama de bloques total será

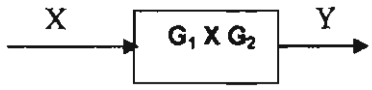


Para poder reducir los diagramas de bloques hay una álgebra de diagramas de bloques, a continuación se muestra algunas de las formas más comunes de este tipo de álgebra:

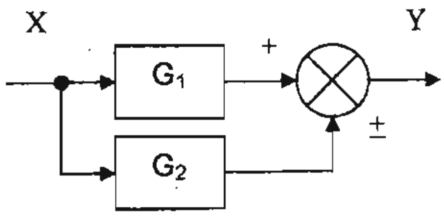
Álgebra de diagramas de bloques:

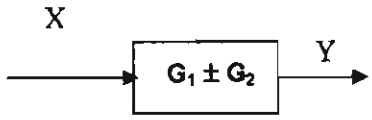
1. Bloques en cascada (serie).



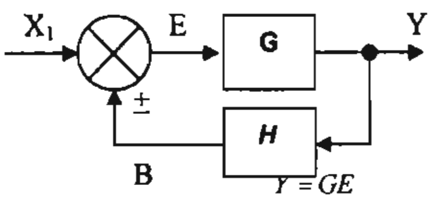


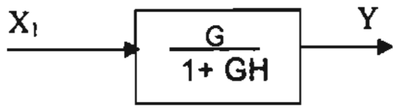
2.- Bloques en paralelo





3. Bloques en retroalimentación



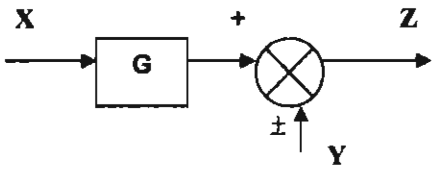


$$Y = GE$$
$$E = X \pm B = X \pm HY$$
$$B = HY$$
$$Y = G(X \pm HY)$$
$$Y = GX \pm GHY$$

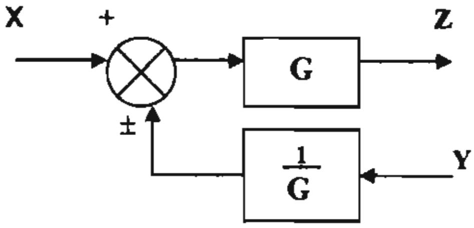
$$Y \mp GHY = GX$$
$$Y(1 \mp GH) = GX$$
$$\frac{Y}{X} = \frac{G}{1 \mp GH}$$

H	– Función del lazo de retroalimentación
G	– Función de lazo directo o trayectoria directa
GH	– Función de transferencia o lazo abierto
E	– Señal de error
X	– Punto de ajuste o señal de entrada
H_1	– Cuando H vale 1 a esto se le conoce como retroalimentación unitaria

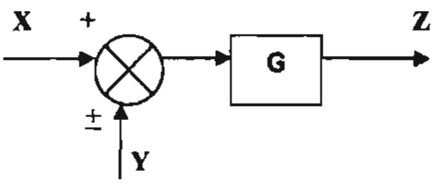
4. Movimiento de un punto sumador hacia atrás de un bloque.



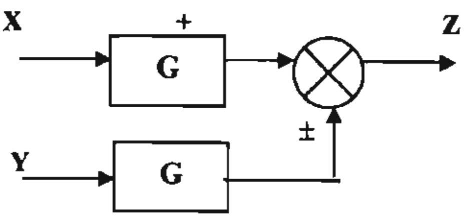
$$Z = GX \pm Y$$



5. Movimiento de un punto sumador hacia adelante de un bloque

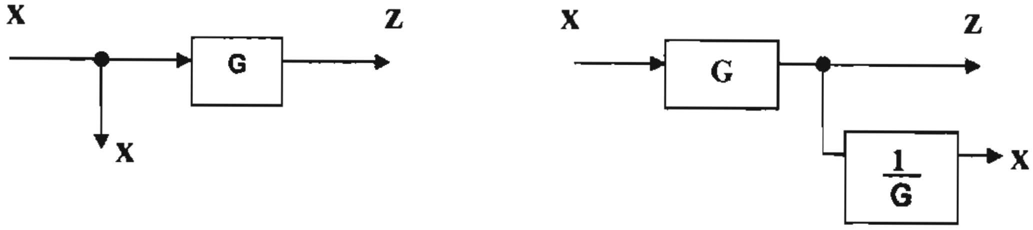


$$Z = G(X \pm Y)$$

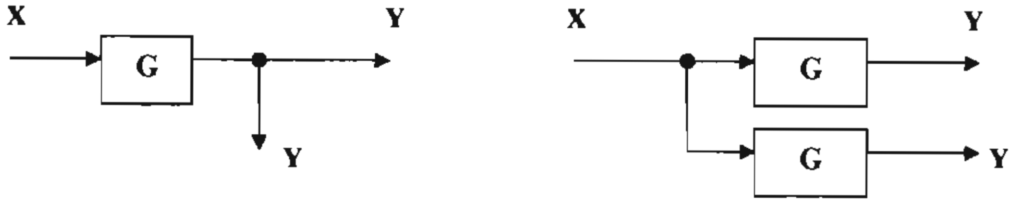


$$Z = XG \pm YG$$

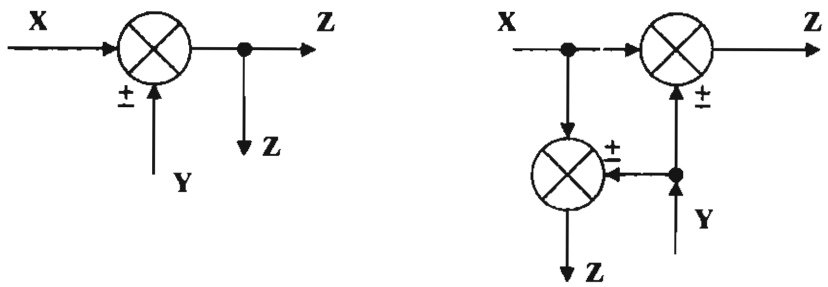
6. Movimiento de un punto bifurcación hacia adelante de un bloque



7. Movimiento de un punto bifurcación hacia atrás de un bloque.

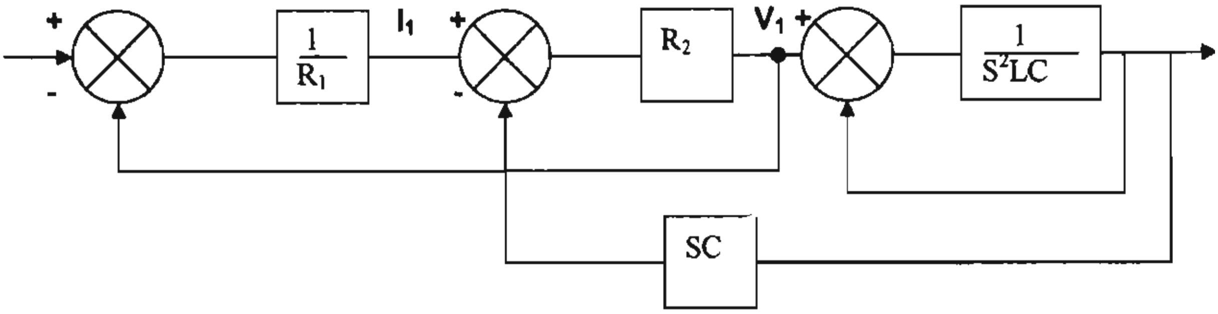


8. Intercambio entre punto sumador y punto bifurcación.

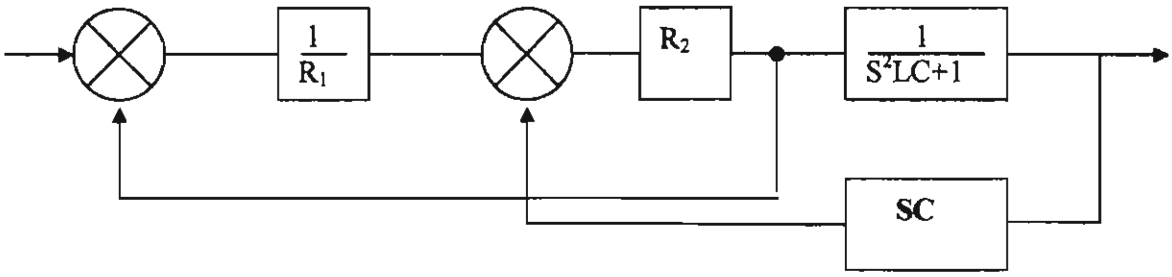


Al reducir un diagrama de bloques, se debe de tratar de evitar emplear esta última regla, ya que se complica la reducción del diagrama.

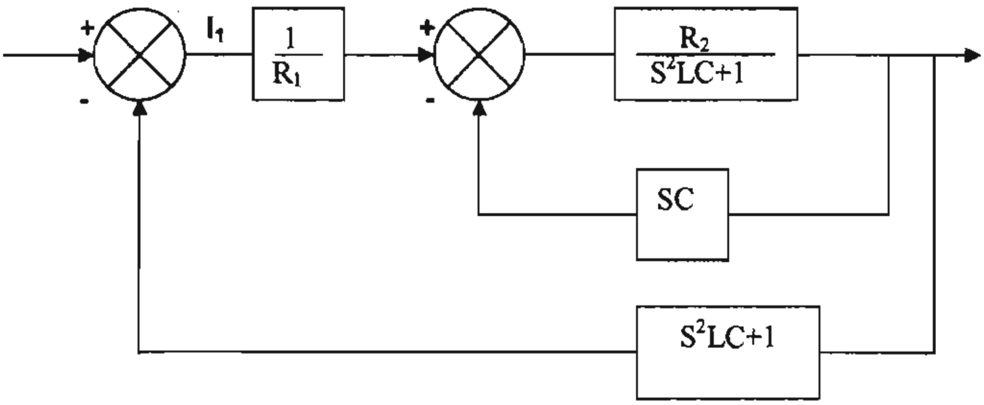
Ejemplo: Reducir el diagrama del ejemplo anterior (Pág.52).
- Se emplea la regla 6 en la I_2 y después la regla 1



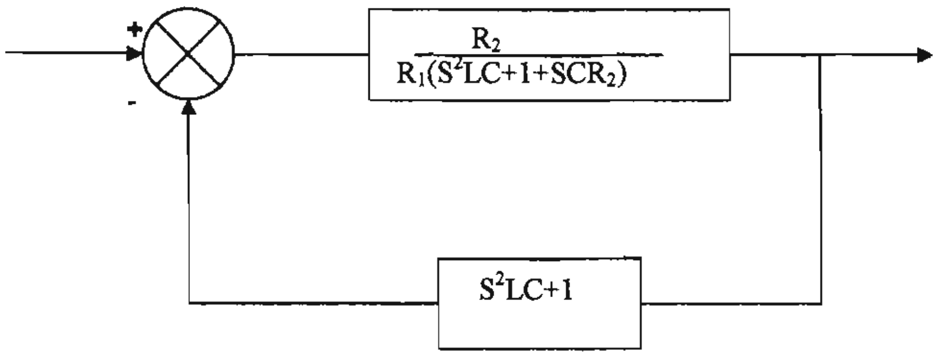
Mediante la regla 3.



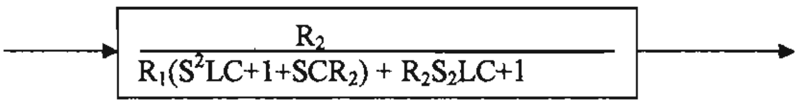
Mediante regla 6 y después la regla 1



Mediante la regla 3 y después la regla 1



Por último aplicando la regla 3



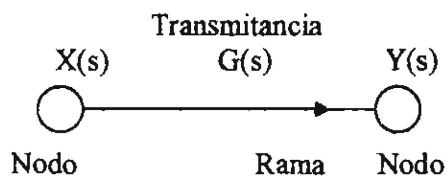
2.2.2 Gráficas de flujo de señal

Se puede definir y/o decir que: "Las gráficas de flujo de señal son la representación gráfica de las ecuaciones diferenciales que representan a un sistema".

Este tipo de método es mucho más simple que los diagramas a bloques, ya que solo consta de dos elementos primordiales en su elaboración los cuales se expresan a continuación:

a) Nodos (O).- Los nodos son elementos que nos representan las variables o señales (X_s).

b) Ramas(⟶). Estas nos representarán a los elementos, subsistemas, transmitancias o constantes; entre las cuales podemos enunciar a la función de transferencia o G(s).



Para la representación de las gráficas de flujo se utiliza el principio de causa-efecto:

$$Y(s) = X(s)G(s)$$

Los diagramas de flujo, se pueden elaborar mediante dos métodos los cuales son:

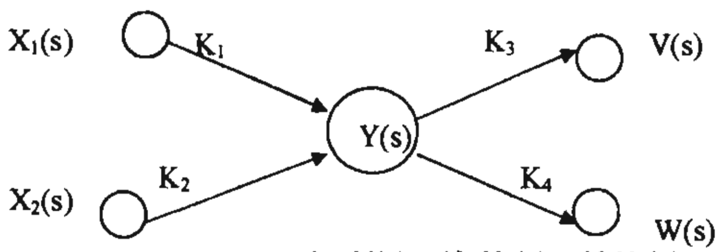
1. A partir de los modelos matemáticos o de las ecuaciones del sistema

2. Identificando a los elementos o subsistemas (partes del sistema como motor, engranes, etc.)

A continuación se obtendrá el diagrama a bloques a partir de las ecuaciones del sistema.
Se deben considerar dos propiedades fundamentales de los nodos que son:

I. Las ramas que entran a un nodo, se suman.

II. Las ramas que salen de un nodo, transmiten la señal que tiene dicho nodo.

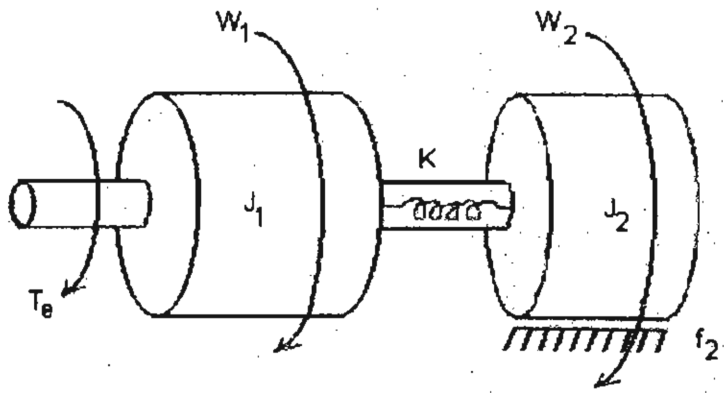


I.- $Y(s) = K_1 X_1(s) + K_2 X_2(s)$

II.- $V(s) = K_3 Y(s)$; $W(s) = K_4 Y(s)$

NOTA: Se recomienda, siempre poner el nodo de entrada lo más a la izquierda posible; ya que esto nos ayudará a tener una mejor visión de las gráficas.

Ejemplo: Encuentre la función de transferencia del siguiente esquema



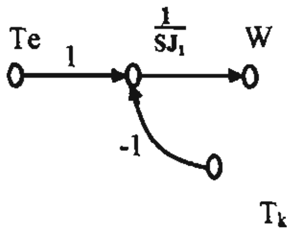
a) Identificamos el mayor número de variables independientes W_1, T_k, W_2, T_f.

b) Ecuación matemática　　　　　　Pasando a Laplace

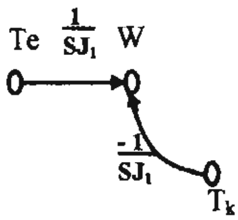
1ª ecuación

$$T_e - T_K = J_1 \frac{d\omega_1}{dt} \quad \Rightarrow \quad T_e - T_K = J_1 S \omega_1$$

$$\therefore \quad \omega_1 = \frac{T_e - T_K}{SJ_1}$$



ó



2ª ecuación

$$T_K = K\int(\omega_1 - \omega_2)dt \quad \Rightarrow \quad T_K = \frac{K}{S}(\omega_1 - \omega_2)$$

3ª ecuación.

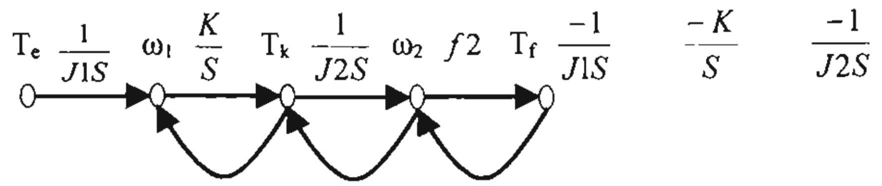
$$T_K - Tf_2 = J_2 \frac{d\omega_2}{dt} \quad \Rightarrow \quad T_K - Tf_2 = J_2 S \omega_2$$

$$\therefore \quad \omega_2 = \frac{T_K - Tf_2}{J_2 S}$$

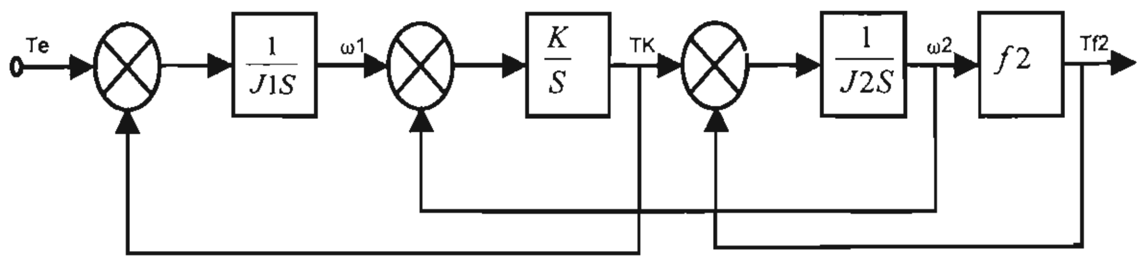
4° ecuación

$$T_{f2} = f_2 \omega_2$$

c) la gráfica de flujo total será



y el diagrama de bloques será



Reducción de gráficas de flujo

Para poder hacer una buena reducción de gráficas de flujo, debemos tener en cuenta o conocer ciertas definiciones que nos podrán orientar y encaminar a entender mejor este procedimiento; las cuales veremos a continuación:

TRAYECTORIA: Camino o trayecto recorriendo las ramas conectadas en el sentido de las flechas.

GANANCIA DE UNA TRAYECTORIA: Producto de las transmitancias involucradas.

TRAYECTORIA DIRECTA: Trayectoria que va desde el nodo de inicio hasta el nodo final, sin que pase por algún nodo intermedio más de dos veces.

NODO DE ENTRADA O FUENTE: Es un nodo que sólo tiene ramas que salen de él.

NODO DE SALIDA O SUMIDERO: Es un nodo que sólo tiene ramas que entran a él.

TRAYECTORIA CERRADA O LAZO: Trayectoria que empieza y termina en el mismo punto (nodo), sin pasar por algún nodo intermedio más de dos veces.

LAZOS DISJUNTOS: Son aquellos lazos que no poseen ningún nodo en común.
La reducción de gráficas la manejaremos como se indica a continuación:

Mediante el método matemático o sistemático; este método se realiza por medio de la fórmula de *MASON*.

La fórmula general de ganancia de Mason; se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\Sigma P_i \Delta_i}{\Delta} \qquad \Delta = 1 - \Sigma P_j + \Sigma P_k P_l - \Sigma P_m P_n P_ñ$$

Donde:

P_i = Ganancia de las posibles trayectorias directas.
Δ_i = Cofactor de P_i (Porqué a cada P_i la corresponde un Δ diferente).

Para obtener el valor del cofactor, debemos eliminar todos los lazos cerrados que toquen a la trayectoria directa y después se calculará con la fórmula del determinante del sistema.

Δ = Determinante del sistema.

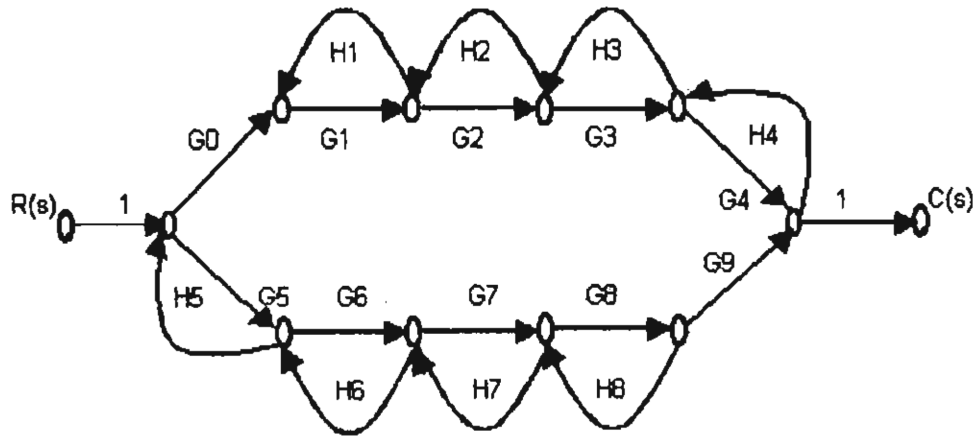
$\Delta = 1 - \Sigma P_j + \Sigma P_k P_l - \Sigma P_m P_n P_ñ + \ldots^4 \ldots\ldots - \ldots^5 \ldots\ldots + \ldots^6 \ldots$

La sumatoria de todos los lazos cerrados del sistema

Σ de las ganancias del producto de todas las posibilidades de dos lazos disjuntos.

Σ de tres lazos que no se tocan entre ellos.

Ejemplo: Determine la función de transferencia de la siguiente gráfica de flujo utilizando la fórmula general de Mason.



$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{\sum_{a=1}^{n} Pi\Delta i}{\Delta}$$

$\Delta = 1 - \{[G_1H_1 + G_2H_2 + G_3H_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8] + [L_1(L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8)] + [L_2 (L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8)] + [L_3 (L_5 + L_6 + L_7 + L_8)] + [L_5 (L_7 + L_8) + [L_6 (L_8)]\} + \{[L_1L_3 (L_5 + L_6 + L_7 + L_8)] + [L_1L_4 (L_5 + L_6 + L_7 + L_8)] + [L_2L_4 (L_5 + L_6 + L_7 + L_8)] + [L_5L_7 (L_1 + L_2 + L_3 + L_4)] + [L_5L_8 (L_1 + L_2 + L_3 + L_4)] + [L_6L_8 (L_1 + L_2 + L_3 + L_4)]\} - \{[L_1 L_3 L_5 (L_7 + L_8)] + [L_1 L_4 L_5 (L_7 + L_8)] + [L_2 L_4 L_5 (L_7 + L_8)]\} + L_1 L_4 L_5 L_8 + L_1 L_4 L_6 L_8 + L_2 L_4 L_6 L_8\}$

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{\sum_{a=1}^{n} Pi\,\Delta i}{\Delta} = \frac{P1\Delta 1 + P2\Delta 2}{\Delta}$$

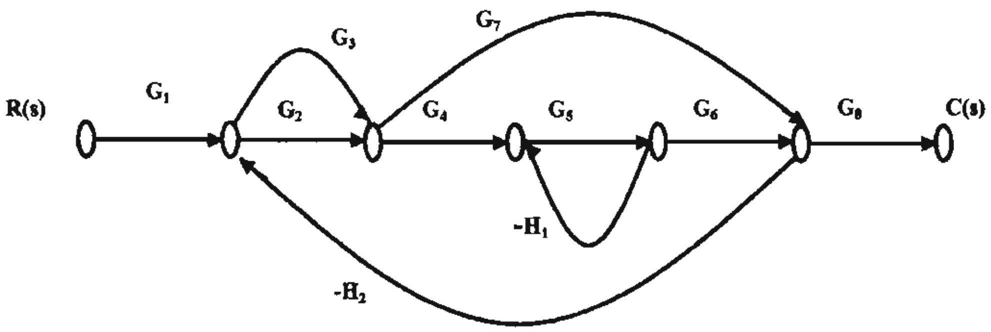
Donde: $L_1 = G_1H_1$
$L_2 = G_2H_2$
$L_3 = G_3H_3$
Etc.

Donde:

$$P_1 = G_0G_1G_2G_3G_4$$
$$\Delta_1 = 1 - (L_6 + L_7 + L_8) + L_6L_8$$
$$P_2 = G_5G_6G_7G_8G_9$$

$$\Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1L_3$$

Ejemplo: Determine la función de transferencia de la siguiente gráfica de flujo utilizando la fórmula general de Mason.



$L_1 = -H_1(G_5)$
$L_2 = -H_2(G_2G_4G_5G_6)$
$L_3 = -H_2(G_3G_4G_5G_6)$
$L_4 = -H_2(G_2G_7)$
$L_5 = -H_2(G_3G_7)$

$P_1 = G_1G_2G_4G_5G_8$
$P_2 = G_1G_3G_4G_5G_6G_8$
$P_3 = G_1G_2G_7G_8$
$P_4 = G_1G_3G_7G_8$

$\Delta_1 = 1 - 0 = 1$
$\Delta_2 = 1$
$\Delta_3 = 1 - (L_1)$
$\Delta_4 = 1 - (L_1)$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) + [(L_1L_4 + L_1L_5) + 0]$$

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3 + P_4\Delta_4}{\Delta}$$

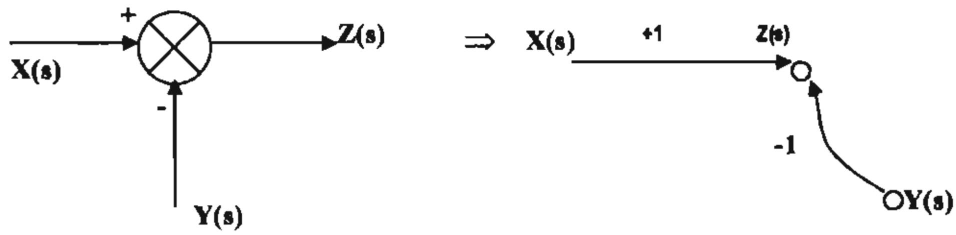
Conversión de una gráfica a otra.

Para poder convertir de un diagrama de bloques a una gráfica de flujo debemos de tener en cuenta las siguientes reglas:

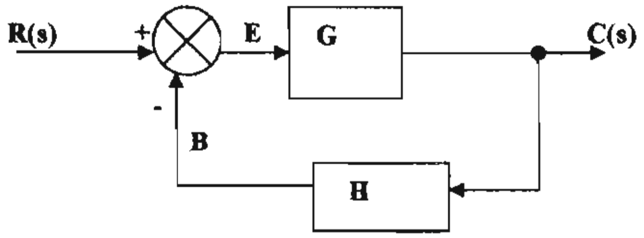
a) Un bloque se convertirá en una flecha

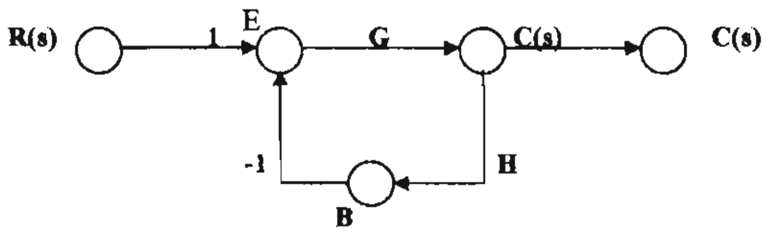
b) Las flechas se convertirán en nodos

c) Los sumadores se convertirán en dos flechas, que entran a un nodo con transmitancia de ± 1



Ejemplo: Convierta el siguiente diagrama a bloques a una gráfica de flujo.

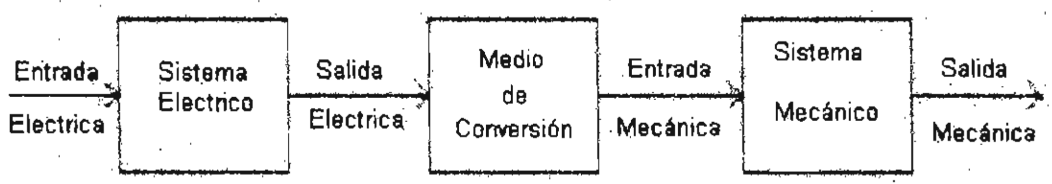




2.2.3 Modelado de sistemas electromecánicos

Muchos sistemas de control utilizan elementos electromecánicos que convierten la energía eléctrica en mecánica y viceversa, aquí trataremos de ver como se plantea el modelado matemático de estos elementos.

Eléctrica ⇒ Mecánica ⇒ Se le llama motor
Mecánica ⇒ Eléctrica ⇒ Se le llama generador



Servomotores de C.C.
Sabemos que un motor es un máquina que convierte la energía eléctrica en energía mecánica. En las aplicaciones de los sistemas de control, los motores se usan como dispositivos de potencia que conducen los elementos gobernados hacia los objetivos deseados.

En las aplicaciones de control automático, la mayoría de motores de C-C son de excitación independiente. La señal de control puede aplicarse a los bornes del devanado de excitación o del devanado del rotor del motor. Cuando la señal de mando actúa sobre la excitación, el motor se denomina *controlado por campo*, si la señal actúa sobre el rotor, el motor se denomina *controlado por armadura*.

- Motor controlado por campo.

La siguiente figura muestra el diagrama esquemático de un motor de C.C. controlado por campo. Para su análisis lineal, haremos las siguientes suposiciones:

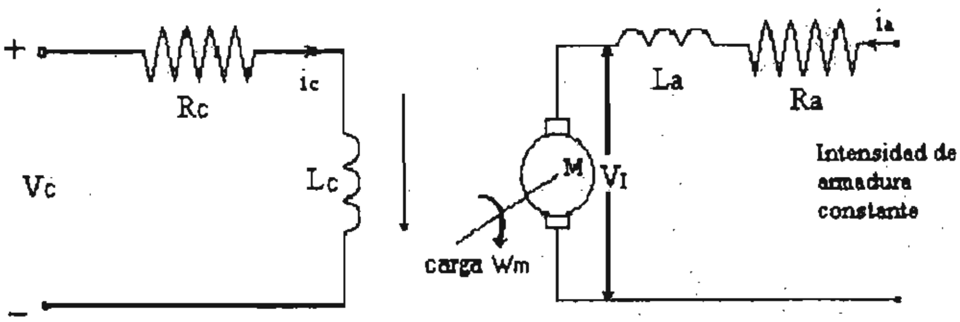


Diagrama esquemático de un motor controlado por campo

1.- La armadura esta alimentada a intensidad constante I_a

2.- El flujo en el entrehierro $\phi(t)$ es proporcional a la intensidad de campo i_c (t); es decir

$$\phi(t) = K_{ex} i_c(t) \text{..........}(1)$$

donde K_{ex} es constante

3.- El par desarrollado por el motor Tm (t), es proporcional al flujo en el entrehierro y a la intensidad en la armadura. Así

$$Tm(t) = KIa\phi(t) \text{..........}(2)$$

Sustituyendo $\phi(t)$ de la ec. 1 en la ec. 2 resulta

$$Tm(t) = K\ I_a K_{ex} i_c(t) = K_m\ i_c(t) \ldots\ldots\ldots(3)$$

Donde

$$Km = K\ I_a\ K_{ex}\ \ldots\ldots\ldots (4)$$

La ecuación del circuito de campo es

$$Lc\frac{di_c(t)}{dt} + Rci_c(t) = Vc(t) \rightarrow \frac{Ic(s)}{Vc(s)} = \frac{1}{LcS + Rc} \cdots (5)$$

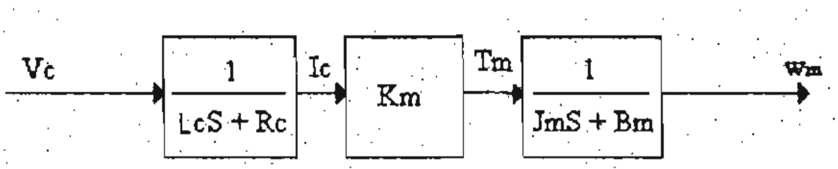
donde Vc(t) es la señal de control.

Esta ecuación puede ser considerada como una relación causa-efecto; esto es, Vc(t) la causa, Ic(t) el efecto. A su vez, esta intensidad $i_c(t)$ desarrolla el par motor de acuerdo con la ecuación 3.
La ecuación de los elementos mecánicos es:

$$Jm\frac{dWm(t)}{dt} + BmWm(t) = Tm \rightarrow \frac{Wm(s)}{Tm(s)} = \frac{1}{JmS + Bm} \qquad (6)$$

Esto explica porque es necesario suponer que la intensidad en la armadura I_a es constante.

Donde J_m y B_m son la inercia y el rozamiento viscoso del eje motor. $\omega_m(t)$es la velocidad del motor.



En la figura podemos observar el diagrama de bloques de un motor de c-c, en el que se ha hecho uso de las ecuaciones 3, 5 y 6.

La función de transferencia es:

$$\frac{\omega_m(s)}{V_c(s)} = \frac{K_m}{(J_m S + B_m)(L_c S + R_c)}$$

- Motor controlado por armadura

La siguiente figura muestra el diagrama esquemático de un motor de C.C controlado por armadura. En este tipo de aplicaciones, la señal de control actúa sobre la armadura del motor, manteniendo constante la intensidad de campo.

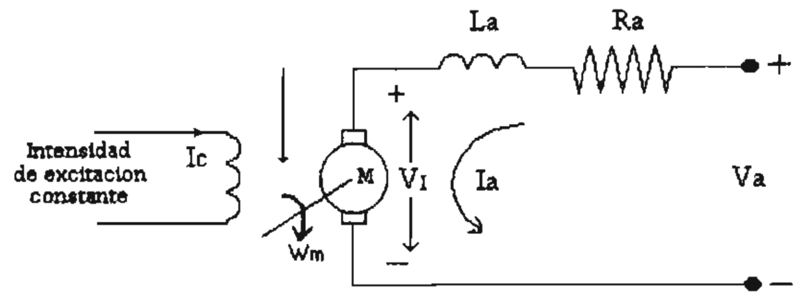


Diagrama esquemático de un motor de C.C controlado por armadura.

Para el análisis lineal se hacen las siguientes suposiciones:

1.- El flujo en el entre hierro es proporcional a la intensidad de excitación; es decir:

$$\Phi(t) = K_{ex}\, I_c \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

2.- El par desarrollado por el motor es proporcional al flujo en el entre hierro y la intensidad en la armadura. Por tanto,

$$Tm(t) = K\, \Phi i_a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

sustituyendo la ecuación 1 en la ecuación 2 tenemos.

$$Tm(t) = K\, K_{ex}\, I_c\, i_a(t) = K_m\, i_a \ldots\ldots\ldots(3)$$

3.- La fuerza contraelectromotriz (f.c.e.m.) es proporcional a la velocidad del motor. O sea

$$VI = \text{f.c.e.m.} = K_b\, w_m(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Empezando por el circuito de armadura, la ecuación, es

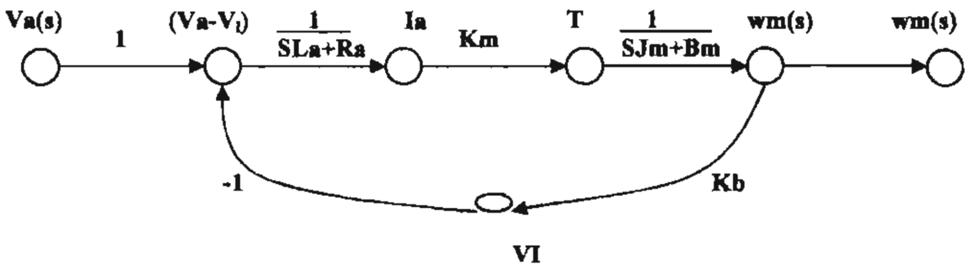
$$L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) = V_a(t) - V_I(t) \rightarrow \frac{I_a}{V_a(s) - V_I(s)} = \frac{1}{SL_a + R_a} \quad \ldots..(5)$$

donde $V_a(t)$ es la señal de control.

Las ecuaciones para los elementos mecánicos son

$$J_m \frac{dW_m}{dt} + B_m W_m(t) = T_m(t) \rightarrow \frac{W_m(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{SJ_m + B_m} \quad \ldots(6)$$

En la siguiente figura esta representada la gráfica de flujo en el que se han usado las ecuaciones 3,4,5 y 6.



La F. de T. Es

$$\frac{W_m(s)}{V_a(s)} = \frac{\dfrac{K_m}{(R_a + L_a S)(J_m S + B_m)}}{1 + \dfrac{K_m K_b}{(R_a + L_a S)(J_m S + B_m)}} = \frac{K_m}{(R_a + L_a S)(J_m S + B_m) + K_m K_b}$$

III. RESPUESTA EN EL TIEMPO

3.1 Respuesta transitoria y permanente (solución homogénea y solución particular)

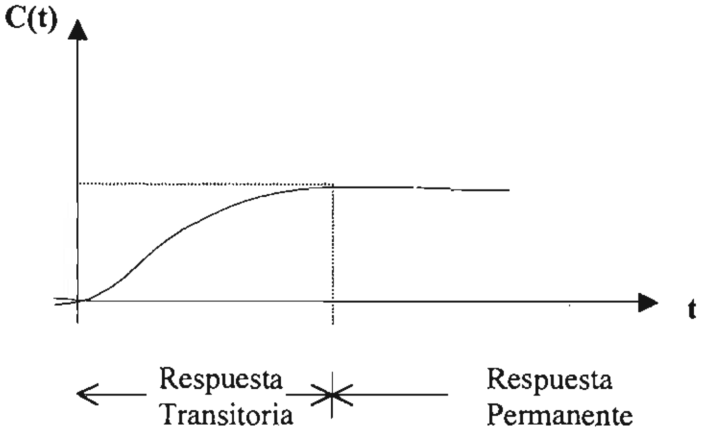
La respuesta temporal de un sistema esta dada por la solución de la ecuación diferencial que representa a dicho sistema.

Cuando el sistema es excitado externamente la solución de la ecuación será la suma de la solución homogénea, que es la solución cuando la ecuación se iguala a cero, y la solución particular.

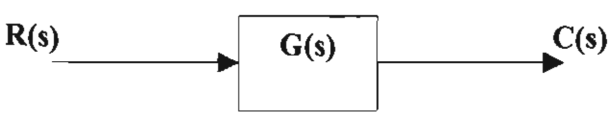
La solución homogénea es lo que se conoce como la respuesta transitoria mientras que la solución particular se conoce como respuesta en estado permanente, entonces la respuesta temporal es la suma de ambas respuestas.

La respuesta en estado permanente se entiende como la repuesta que toma el sistema cuando el tiempo tiende a infinito.

La respuesta transitoria se define como la respuesta que va desde el tiempo de inicio hasta que toma el estado permanente.



Analizar un sistema es estudiar la respuesta del mismo:



$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

Donde la respuesta es:

$$C(s) = G(s)\, R(s)$$

$$C(t) = \mathcal{L}^{-1}\{ C(s) \} = \mathcal{L}^{-1}\{ G(s)R(s)\}$$

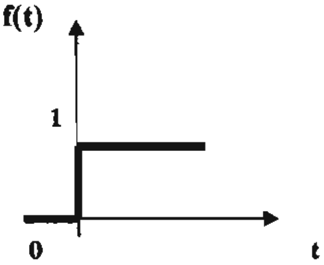
Respuesta temporal

$$C(t) = g(t) * r(t)$$

3.2 Entradas típicas de prueba

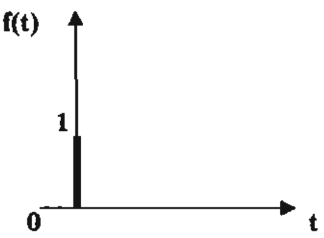
Para obtener la respuesta de un sistema se debe conocer al sistema y al tipo de entrada al mismo. Por esta razón se caracteriza la respuesta transitoria respecto a entradas típicas de prueba. Generalmente, las entradas típicas son: función escalón, impulso, rampa y parabólica, aunque la más importante de todas ellas es la función escalón.

a) Escalón unitario



$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

b) Impulso unitario

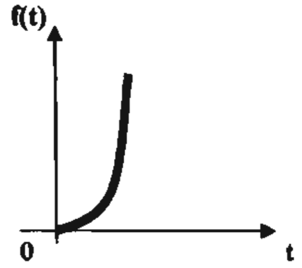


$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

c) Rampa unitaria

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

d) Parabólica



$$t^2 = \begin{cases} At^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

3.3 Respuesta de sistemas de 1^er^ orden

Para el estudio de la respuesta transitoria de los sistemas, es conveniente clasificar a los sistemas de acuerdo al orden en: sistemas de 1er orden, sistemas de 2° orden y sistemas de alto orden. El orden de un sistema está en función del número de elementos almacenadores linealmente independientes.

Un sistema de 1er orden tiene un solo elemento almacenador de energía, y su modelo matemático involucra una primera derivada.
La función de transferencia típica de un sistema de 1er orden sin retardo es:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau S + 1}$$

Despejando la función de salida:

$$Y(s) = \frac{K}{\tau S + 1} X(s)$$

- Respuesta al impulso unitario

$$X(s) = 1$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{\tau S + 1}\right\}$$

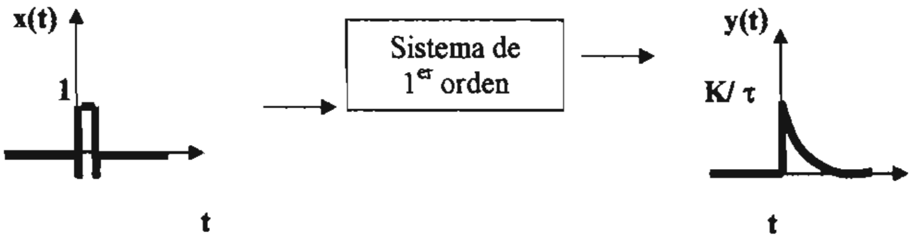
Dividiendo la función de transferencia entre τ, tenemos

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{K}{\tau}}{S+\frac{1}{\tau}}\right\}$$

De la tabla de transformadas de Laplace, obtenemos la función en el tiempo de y(t)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{\tau}\frac{1}{S+\frac{1}{\tau}}\right\} = \frac{Ke^{-(1/\tau)t}}{\tau}$$

La respuesta al impulso unitario se puede representar de la siguiente manera



Respuesta al escalón unitario

$$X(s) = \frac{1}{S}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{S(\tau S+1)}\right\}$$

Dividiendo la función de transferencia entre τ, tenemos

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{K}{\tau}}{S\left(S+\frac{1}{\tau}\right)}\right\}$$

Utilizando el método de polos y residuos resolvemos la ecuación anterior

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{K}{\tau}}{S\left(S+\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{A}{S} + \frac{B}{\left(S+\frac{1}{\tau}\right)}\right\}$$

<u>Multiplicamos por S y evaluamos para S = 0</u>

$$\left\{\frac{\frac{K}{\tau}S}{S\left(S+\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{AS}{S} + \frac{BS}{\left(S+\frac{1}{\tau}\right)}\right\}_{S=0}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{K}{\tau}}{\frac{1}{\tau}}\right\} = A + 0$$

Por lo tanto A = K.

Ahora, para obtener el valor de B multiplicamos la F. de T. por $S+\frac{1}{\tau}$ y evaluamos para $S = -\frac{1}{\tau}$

$$\left\{\frac{\frac{K}{\tau}\left(S+\frac{1}{\tau}\right)}{S\left(S+\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{A\left(S+\frac{1}{\tau}\right)}{S} + \frac{B\left(S+\frac{1}{\tau}\right)}{\left(S+\frac{1}{\tau}\right)}\right\} \quad S = -\frac{1}{\tau}$$

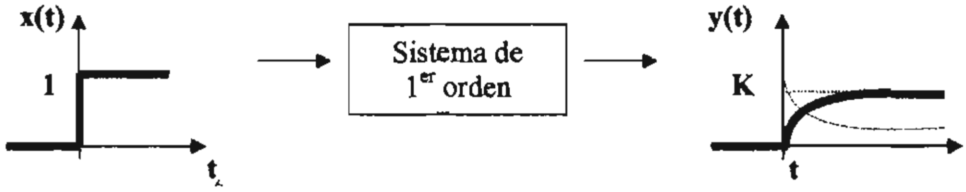
$$\left\{\frac{\frac{K}{\tau}}{-\frac{1}{\tau}} = 0 + B\right\} \qquad \text{por lo tanto } B = -K$$

Entonces, utilizando la tabla de transformadas de Laplace obtenemos y(t)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{K}{\tau}}{S\left(S+\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{K}{S} + \frac{-K}{S+\frac{1}{\tau}}\right\}$$

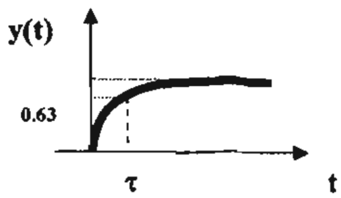
$$y(t) = K\mu(t) - Ke^{-(1/\tau)t} = K(1-e^{-t/\tau})$$

La respuesta al escalón unitario se puede representar de la siguiente manera.



La respuesta al escalón unitario tiene una gran importancia, pues de ella se puede obtener el valor de la constante de tiempo, cuando t = τ.

$$c(t) = K(1-e^{-1}) = K(1-0.368) = 0.632K$$



- **Respuesta a la rampa unitaria**

$$X(s) = \frac{1}{S^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{S^2(\tau S+1)}\right\}$$

Dividiendo la función de transferencia entre τ, tenemos

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{S^2\left(S+\frac{1}{\tau}\right)}\right\}$$

Utilizando el método de polos y residuos resolvemos la ecuación anterior

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{S^2\left(S+\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{A}{S^2} + \frac{B}{S} + \frac{C}{\left(S+\frac{1}{\tau}\right)}\right\}$$

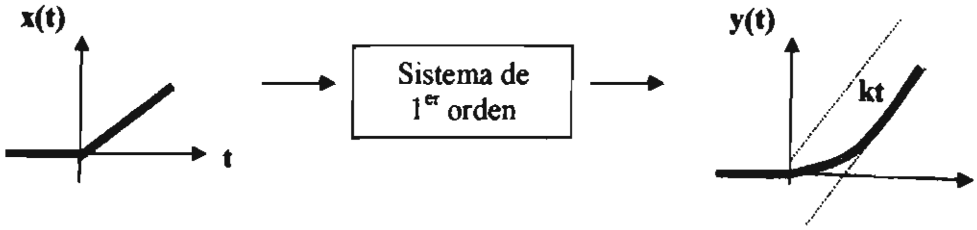
Donde A = K, B = -Kτ y C = Kτ

Entonces, utilizando la tabla de transformadas de Laplace obtenemos y(t)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{S^2\left(S+\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{K}{S^2} + \frac{-K}{S} + \frac{K\tau}{\left(S+\frac{1}{\tau}\right)}\right\}$$

$$y(t) = (Kt - K\tau + K\tau e^{-t/\tau})$$

La respuesta a la rampa unitaria se puede representar de la siguiente manera



3.4. Respuesta de sistemas de segundo orden

Un sistema de 2° orden tiene dos elemento almacenadores de energía, y su modelo matemático involucra una segunda derivada.

$$\Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\omega_n \longrightarrow$ Frec. natural de oscilación $\qquad \zeta \longrightarrow$ Coeficiente de amortiguamiento

$$C(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s)\right\}, \qquad R(s) = \frac{1}{s}(escalón \quad unitario).$$

$$s_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{(2\zeta\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2}$$

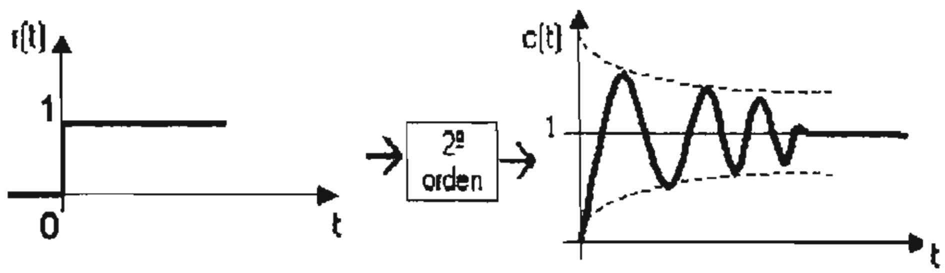
$$= -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Caso subamortiguado; cuando $\zeta < 1$

$S_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\ j$ raíces complejas conjugadas

$$\mathrm{C(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{(1^2-\zeta^2)}j)(s+\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{(1^2-\zeta^2)}j)}\right)\frac{1}{s}\right\}$$

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\left(\omega_d + \operatorname{tg}^{-1}\sqrt{\frac{1-\zeta^2}{\zeta}}\ \right) \qquad \text{donde } \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

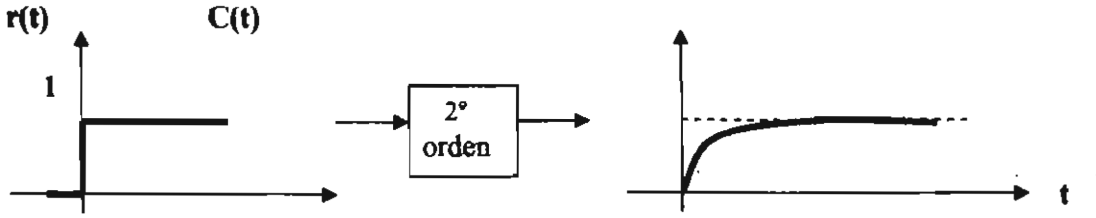


Caso sobreamortiguado; cuando $\zeta > 1$

$S_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ raíces reales y diferentes

$$C(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_n^2}{\left(s+\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)\left(s+\zeta\omega_n-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}\frac{1}{s}\right\}$$

$$C(t) = 1 + \frac{e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{2\sqrt{\zeta^2-1}(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})} - \frac{e^{-(\zeta^2-\sqrt{\zeta-1})\omega_n t}}{2\sqrt{\zeta^2-1}(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}$$



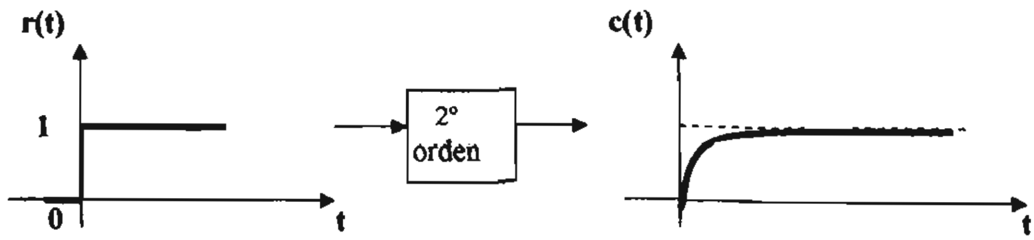
Caso críticamente amortiguado; cuando $\zeta = 1$

$s_{1,2} = -\omega_n$ raíces reales y repetidas

$$C(t) = \mathcal{L}\left\{\frac{\omega_n^{\,2}}{(s+\omega_n)(s+\omega_n)}\frac{1}{s}\right\},$$

$$C(t) = \left\{ \frac{A}{S} + \frac{B}{(s+\omega_n)^2} + \frac{C}{s+\omega_n} \right\}$$

$$C(t) = 1 - \omega_n t e^{-\omega_n t} - e^{-\omega_n t}$$



Caso sin amortiguamiento; cuando $\zeta = 0$

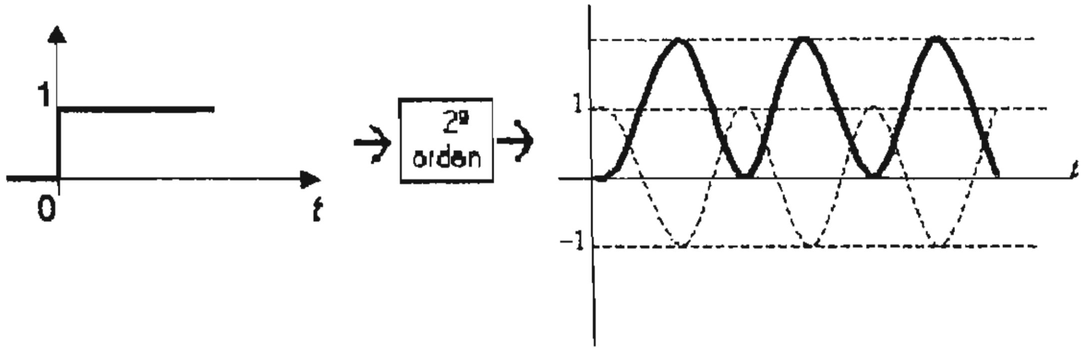
$s_{1,2} = \pm j\omega_n$ raíces imaginarias puras

$$C(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_n^2}{(s+j\omega_n)(s-j\omega_n)}\right\}$$

sustituyendo en la respuesta subamortiguada:

$$si\,\zeta = 0 \rightarrow C(t) = 1 - \operatorname{sen}(\omega_n t + \operatorname{tg}^{-1}\infty)$$

$$C(t) = 1 - \cos\omega_n t$$



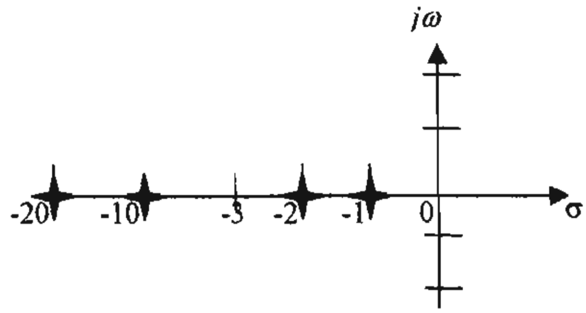
3.5 Sistemas de alto orden. (Polos dominantes)

Los sistemas de alto orden, son sistemas de 3°- orden en adelante, se analizan de la misma forma que los anteriores.
Cuando se tienen sistemas de alto orden se pueden resolver utilizando el método de fracciones parciales para encontrar términos más sencillos que se puedan encontrar en las tablas de las transformadas.

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s)\frac{2(S+3)}{(S+1)(S+2)(S+10)(S+20)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+10} + \frac{D}{s+20}\}$$

Como esto sería muy complejo existe un método para facilitar el análisis de estos sistemas, para lo cual se utiliza el concepto de polos dominantes.
Polos dominantes: son los polos más cercanos al eje imaginario, tomando como base el criterio de por lo menos 5 veces menor en su parte real.

El diagrama de los polos y ceros del sistema sería



Utilizando el concepto anterior, tendríamos que los polos dominantes serían:

$$P_1 = -1$$
$$P_2 = -2$$

Y el sistema lo podríamos trabajar como uno de segundo orden, utilizando la función de transferencia siguiente:

$$Y(s) = \frac{2(S+3)}{(S+1)(S+2)}$$

La justificación de este concepto, es que los polos van a ser los exponentes de las exponenciales decrecientes, los cuales al ser grandes, provocaran que las exponenciales se vayan más rápidamente a cero, predominando la respuesta de los polos dominantes.

3.6 Estabilidad

Un sistema lineal es estable si, alejado durante un corto tiempo de su posición de equilibrio regresa a ella al cabo de un determinado tiempo.
En ingeniería de control, se dice que un sistema es estable si a entradas acotadas se tienen respuestas acotadas.
La estabilidad de un sistema de control por retroalimentación, queda determinada en función de sus polos y se establece que la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea estable, es que todos los polos de su F. de T. tengan parte real negativa. Si en el diagrama de polos y ceros, todos los polos están en el semiplano izquierdo, el sistema correspondiente es estable.

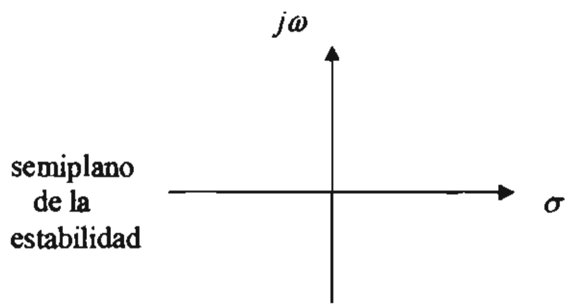


Diagrama de polos y ceros (plano s).

En la actualidad, todo diseño de sistemas de control por retroalimentación involucra un estudio de la estabilidad del sistema; ya que su operación en la inestabilidad podría ser peligroso. Uno de los primeros métodos para este estudio es el que se presenta a continuación.

Criterio de estabilidad de Routh – Hurwitz

Este criterio nos indica si existen polos de parte real positiva, sin tener que calcularlas. El procedimiento para la aplicación de este criterio es el siguiente.

1° Se escribe la ecuación característica en la siguiente forma

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

Nota: Se llama ecuación característica, al polinomio en S del denominador de la F. de T., igualando a cero, por lo tanto las raíces de esa ecuación serán los polos de la F. de T.

2° Se hace un arreglo de los coeficientes de la ecuación característica llamado "Tabla de Routh", la cual se llena de la forma siguiente:

	1° Columna	2° Columna	etc.	
s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_0
s^{n-1}	pivote $\rightarrow a_{n-1}$	a_{n-3}	a_{n-5}	
s^{n-2}	$b_0 = \dfrac{(a_{n-1})(a_{n-2}) - (a_n)(a_{n-3})}{a_{n-1}}$	$b_1 = \dfrac{(a_{n-1})(a_{n-4}) - (a_n)(a_{n-5})}{a_{n-1}}$	a_0	
$\vdots$	$b_2 = \dfrac{(b_0)(a_{n-3}) - (b_1)(a_{n-1})}{b_0}$	...		
S^0	$\vdots$			

3° El criterio establece que la condición necesaria y suficiente para que el sistema sea absolutamente estable, es que todos los elementos de la primera columna de su tabla sean positivos.

Ejemplo: Determinar la estabilidad del siguiente sistema

$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$ Ecuación Característica

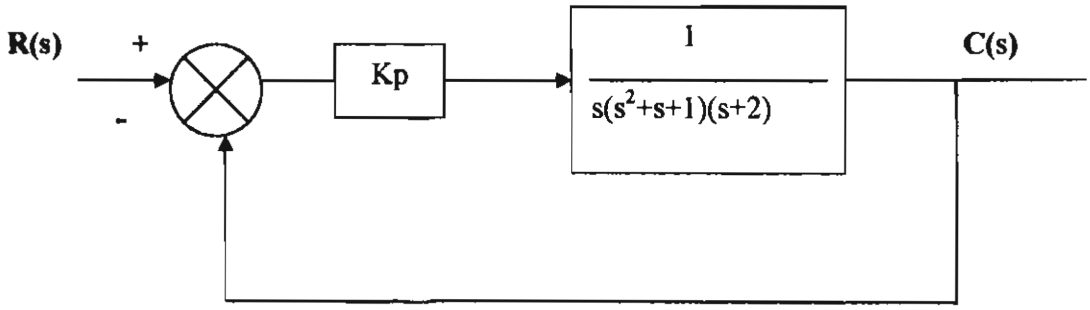
s^4	1	3	5
s^3	2	4	0
s^2	1	5	
s^1	-6		
s^0	5		

inestable

El número de raíces en el plano derecho, es igual al número de cambios de las signos en la primera columna, en el ejemplo anterior serán dos raíces.

Estabilidad condicionada

Consiste en determinar las condiciones de la ganancia K, para las cuales un sistema de retroalimentación es estable, ejemplo:



1.- Ecuación característica

$$1 + GH(s) = 1 + \frac{Kp}{s(s^2+s+1)(s+2)} = 0; \quad \text{ya que} \quad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$s(s^2 + s + 1)(s+2) + Kp = 0$$

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2\ 2s + Kp = 0$$

2.- Hacer la tabla de Routh

S^4	1	3	Kp
S^3	3	2	
S^2	$^7/_3$	Kp	
S^1	$\dfrac{^{14}/_3 - 3Kp}{^7/_3}$		
S^0	Kp		

3.- Para que sea estable $\quad Kp>0 \quad$ y $\quad \dfrac{^{14}/_3 - 3Kp}{^7/_3} > 0$

$$\longrightarrow\ ^4/_3 - 3Kp > 0$$

$$\longrightarrow\ ^{14}/_3 > 3Kp$$

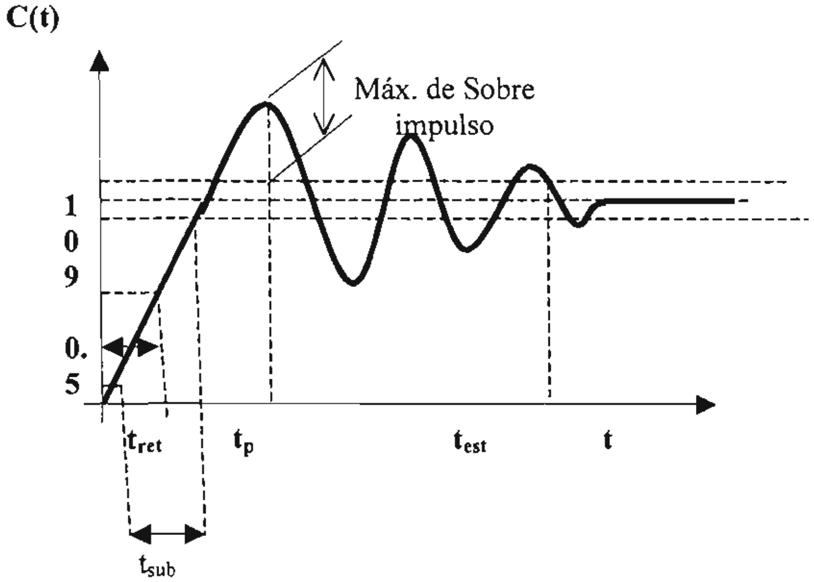
$$^{14}/_9 > Kp$$

$0 < Kp < ^{14}/_9$ condición de estabilidad.

3.7 Especificaciones temporales

Son ciertos parámetros que especifican el funcionamiento temporal de un sistema, de tal manera que cuando se quiere diseñar un sistema de control, uno puede indicar el funcionamiento deseado mediante estas especificaciones.

Las especificaciones más comunes dadas por la **ASOCIACIÓN INTERNACIONAL DE CONTROL** y que están en función del escalón unitario son:



Tiempo de retardo (**t_{ret}**): Es el tiempo en el que el sistema tarda en llegar al 50 % del estado permanente.

Tiempo de subida (**t_{sub}**): Es el tiempo que el sistema tarda en ir del 10 % al 90 % del estado permanente.

Tiempo pico (**t_p**): Es el tiempo que el sistema tarda en presentar el primer pico en la respuesta temporal.

Tiempo de establecimiento (**t_{est}**): Es el tiempo que tarda el sistema en entrar a una banda alrededor del estado permanente sin salir de esta.

Máximo de sobre impulso (**Mp**): Valor máximo que el sistema sobrepasa en el primer pico del 100 %.

Las fórmulas para determinar las especificaciones temporales, en función de una entrada escalón unitario, para un sistema típico de segundo orden son:

$$Mp = e^{-\left(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)\pi} \qquad t_{est} = \frac{4}{\zeta\omega_n},$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}, \qquad t_{sub} = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}tg^{-1}\left[\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta\omega_n}\right]$$

Ejemplo:

Determinar las especificaciones temporales para el siguiente sistema.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{25}{s^2 + 6s + 25},$$ comparando con la forma típica

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\,\omega_n + \omega_n^2} \Rightarrow \omega_n = 5,\ \ \zeta = 0.6$$

$$Mp = 0.694 = 9.4\%$$

$$t_{est} = 1.33 segundos$$

$$t_p = \frac{\pi}{4} = 0.78 segundos$$

$$t_{sub} = \frac{1}{4} tg^{-1} \frac{4}{-3} = \frac{1}{4\frac{rad}{seg}}(2.2 rad) = 0.55 segundos$$

3.8 Coeficientes de Error

La señal de error en los sistemas retroalimentados

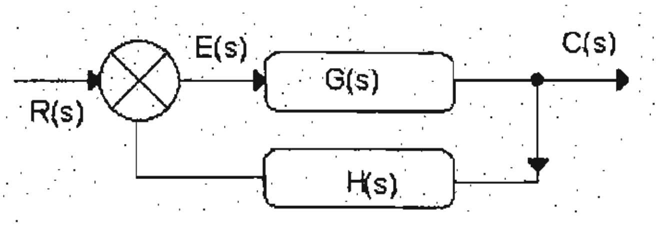
En los sistemas de control, la exactitud del sistema es una de las especificaciones más importantes que verificar, el sistema debe "seguir" la señal de referencia en estado permanente del modo más exacto posible: Por está razón, en sistemas retroalimentados se obtiene las expresiones de los errores en estado permanente del sistema en función del tipo de señal de referencia introducida.

La exactitud del sistema queda determinada en función del error mismo.

La ecuación del error está dada como la diferencia de la respuesta ideal menos la respuesta real.

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

analizando el diagrama a bloques de un sistema de retroalimentación se obtiene



$E(s) = |R(s) - C(s)|$ multiplicando y dividiendo por R(s)

$$E(s) = \left|1 - \frac{C(s)}{R(s)}\right| R(s)$$

Error en estado permanente se define

$$C(t)\big|_{t\to\infty} e(t)\big|_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0} S\left|1 - \frac{C(s)}{R(s)}\right| R(s)$$

Señales de prueba y tipos de sistemas

Los sistemas de control sufren inherentemente un error en estado permanente en respuesta a ciertos tipos de entradas. El análisis de error se realiza en función de las entradas típicas de prueba que son: el escalón unitario, la rampa unitaria, y la parabólica unitaria.

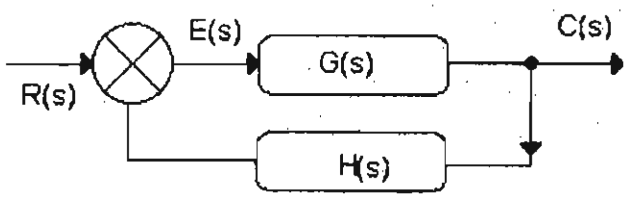
Si un sistema de control va a tener nada, poco o mucho error permanente, determinada función de entrada depende del "tipo de sistema". Se puede clasificar a los sistemas de acuerdo a su capacidad de seguir entradas, considerando la clase de sistemas cuya función de transferencia pueda escribirse de la siguiente manera:

$$G(s) = \frac{k\left(1+\frac{S}{3}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{S}{3m}\right)}{S^{\ell}\left(1+\frac{S}{P_1}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{S}{P_n}\right)}$$

En está ecuación, el termino S^{ℓ} significa un numero ℓ de integraciones sobre la señal del sistema. De acuerdo a la Función de Transferencia anterior, se define un sistema tipo 0 como aquel en el cual $\ell = 0$, un sistema tipo 1, es aquel en el que $\ell = 1$, etcétera.

Coeficientes de error

En sistemas de control es conveniente analizar la exactitud de los sistemas mediante el estudio del sistema de retroalimentación.



La respuesta es: C(S)= G(S) E(S)

El error es: E(s) = R(s) - H(s) C(s)

Sustituyendo E(s) = R(s) - H(s) G(s) E(s)

Despejando: E(s) + H(s) G(s) E(s) = R(s)

Factorizando: E(s) = [1 + H(s) G(s)]=R(s)

F. de T. del error en función de la entrada

$$\frac{E(S)}{R(S)} = \frac{1}{1+GH(S)} \Rightarrow \qquad E(S) = \frac{1}{1+GH(S)} R(S)$$

$$e_{ep} = \lim_{s \to 0} S \frac{1}{1 + GH(S)} R(S)$$

Para una entrada escalón unitario, r(t) = μ(t) ; R(S)=1/s

$$e_{ep} = \lim_{s \to 0} S \frac{1}{1 + GH(S)} (1/_s) = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} GH(S)}$$

Kp = Coeficiente de error estático de posición $= \lim_{s \to 0} GH(S)$

$$e_{ep} = \frac{1}{1 + Kp}$$

Para la entrada rampa unitario, r (t)= t ; R(S)=1/s²

$$e_{ep} = \lim_{s \to 0} S \frac{1}{1+GH} \frac{1}{S^2} = \frac{1}{0 + \lim_{s \to 0} SGH(S)}$$

Kv= Coeficiente de error estático de velocidad $= \lim_{S \to 0} SGH(S)$

$$e_{ep} = \frac{1}{Kv}$$

Para una entrada parabólica unitaria $\quad r(t)=\frac{1}{2}t^2$; $R(S)=\frac{1}{S^3}$

$$e_{ep} = \frac{1}{0 + \lim_{s \to 0} S^2 GH(S)}$$

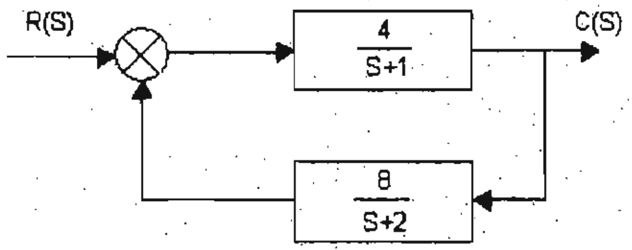
Ka = Coeficiente de error estático de aceleración = $\lim_{S \to 0} S^2 GH(S)$

$$e_{ep} = \frac{1}{Ka}$$

En la siguiente tabla se presenta un resumen de los errores de estado permanente para sistemas de tipo, 0, 1, 2 y 3 en función de las entradas escalón, rampa y parabólica unitarias. Cabe señalar que los coeficientes de error son indicadores del funcionamiento en estado permanente.

ENTRADA	μ(T)		t		½ t^2	
	Kp	e_{ep}	Kv	e_{ep}	Ka	e_{ep}
TIPO DE GH						
0	Lim GH(S) s→0	1/1+Kp	0	∞	0	∞
1	∞	0	Lim SGH(S) s→0	1/Kv	0	∞
2	∞	0	∞	0	Lim S^2GH(S) s→0	1/Ka
3	∞	0	∞	0	∞	0

EJEMPLO. Determinar el error en estado permanente a una entrada tipo escalón unitario del siguiente sistema:



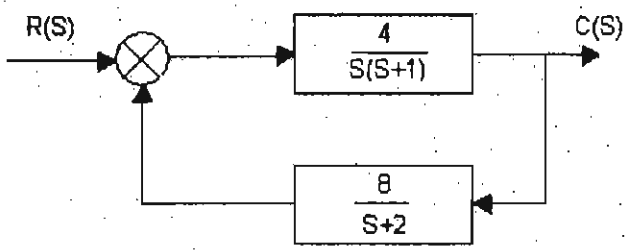
calcular primero GH(S)

$$GH(S) = \frac{32}{(S+1)(S+2)}$$

$$Kp = \lim_{S\to 0} \frac{32}{(S+1)(S+2)} = \frac{32}{2} = 16$$

$$e_{ep} = \frac{1}{1+16} = \frac{1}{17} = 0.058 = 5.8\%$$

EJEMPLO. Determinar el error en estado permanente a una entrada tipo rampa unitaria del siguiente sistema:

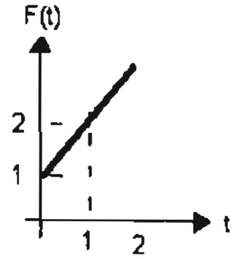


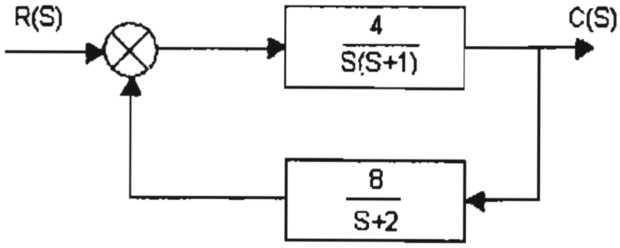
$$GH(S) = \frac{32}{S(S+1)(S+2)}$$

$$Kv = \lim_{S\to 0} S \frac{32}{S(S+1)(S+2)} = \frac{32}{2} = 16$$

$$e_{ep} = \frac{1}{Kv} = \frac{1}{16} = 0.062 = 6.2\%$$

EJEMPLO. Determine el error en estado permanente para el siguiente sistema de entrada.





por tabla (pag. 87)

$$e_{ep\mu(t)} = 0$$

$$e_{ep\,t} = \frac{1}{Kv} = \frac{1}{16} = 0.062 \therefore$$

$$e_{epTOT} = 0 + 0.062 = 6.2\%$$

IV ACCIONES BASICAS DE CONTROL

4.1 Controladores

Cuando un proceso no cumple con las especificaciones requeridas de exactitud, rapidez de respuesta y estabilidad, entonces en este proceso hay que diseñar una estrategia de control para forzarlo a que cumpla con el funcionamiento deseado.

Estrategias de control

Plantear una configuración del sistema en forma estratégica que fuerce al sistema de control para cumplir las especificaciones requeridas.

Las estrategias de control más comunes son las siguientes:

1. Retroalimentación negativa con controlador en serie al proceso (fig. 1).

Figura 1

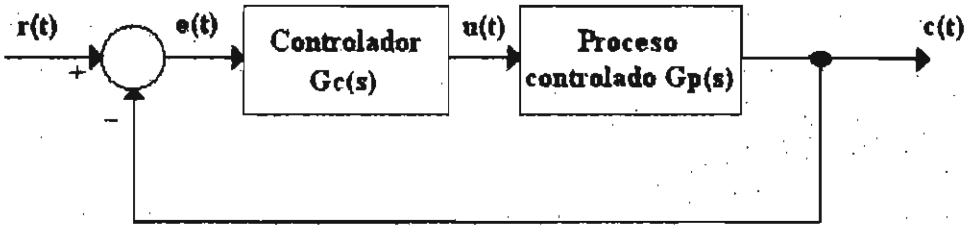


fig. 1

2. Retroalimentación positiva con controlador en serie al proceso (fig. 2).

Figura 2

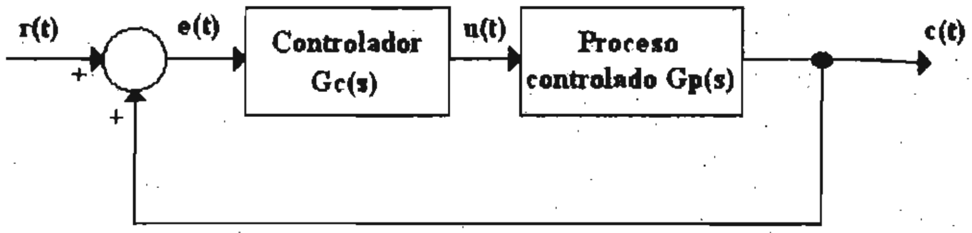


fig. 2

3.- Retroalimentación negativa con controlador en paralelo (fig. 3).

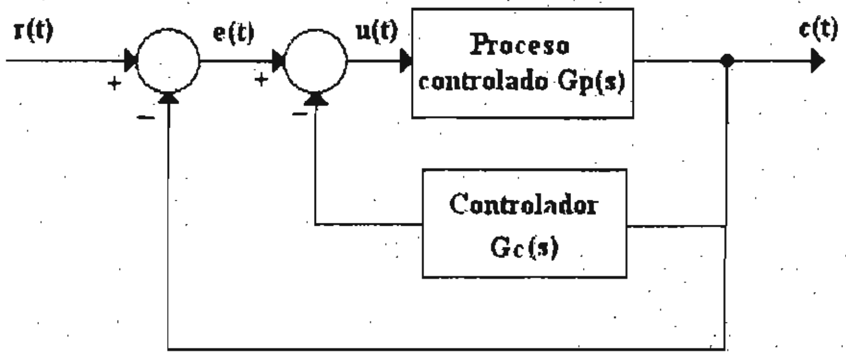


fig. 3

4.- Controlador en prealimentación (fig. 4).

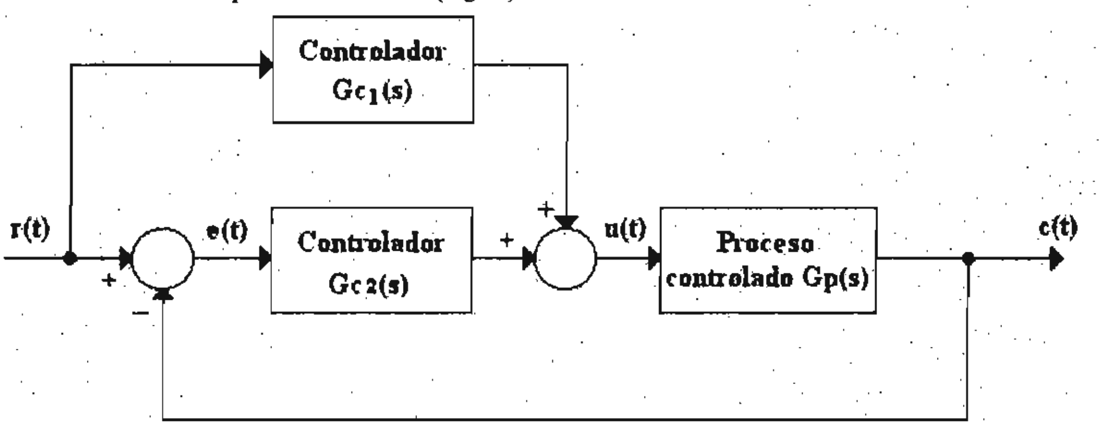


fig. 4

Al diseñar un sistema de control se introduce un controlador de tal manera que afecte la F. de T. total del nuevo sistema, tal que esta función cumpla con las especificaciones deseadas.

Controlador es un dispositivo cuya F. de T. Se puede variar mediante el ajuste de sus modos de control.

Se pueden clasificar dependiendo del tipio de energía que manejan en:

Controladores electrónicos
Controladores eléctricos
Controladores neumáticos
Controladores hidráulicos

La tendencia actual es emplear controladores electrónicos digitales

También los controladores se pueden clasificar de acuerdo a la acción que realizan en:

- Controladores básicos
- Controladores modernos

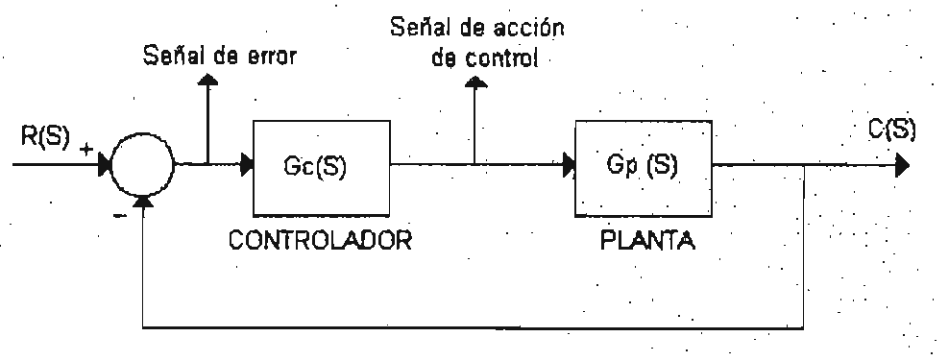
Los controladores básicos realizan una acción básica y se diseñan en base a la teoría clásica del control.

Se clasifican en:
Controlador proporcional
Controlador proporcional integral (PI)
Controlador proporcional derivativo (PD)
Controlador proporcional integral derivativo (P I D)

Los controladores modernos: realizan una acción compleja y se diseñan en base a la teoría moderna del control.

Se clasifican en:
Controlador P I D digital
Controlador adaptivo
Controlador I M C (Internal Mode Control)

En este curso se estudiarán algunas técnicas para el ajuste de controlador en serie en una estructura como la que se muestra en la figura.



En este sistema se observa que el controlador es el encargado de procesar la señal de error y generar una señal denominada, de acción de control que tiene como objetivo la máxima precisión posible del sistema.

4.2 Controlador proporcional

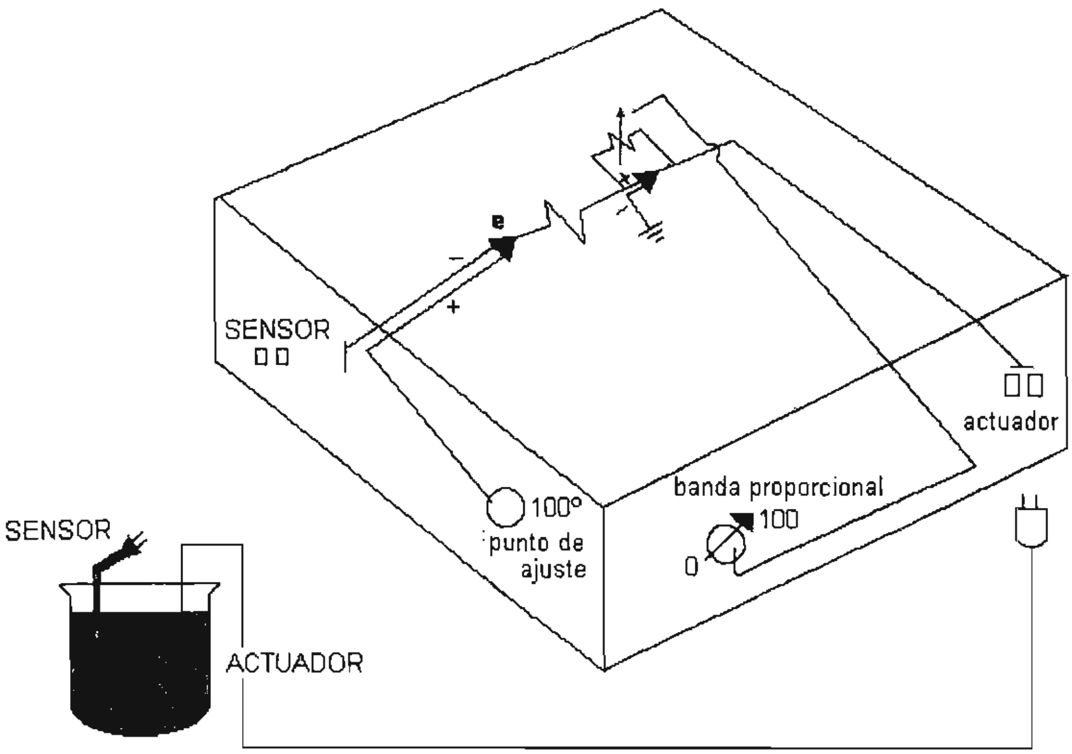
El controlador proporcional genera a la salida una señal de control que es proporcional a la señal de error.

$$m(t) = Kp\ e(t)$$

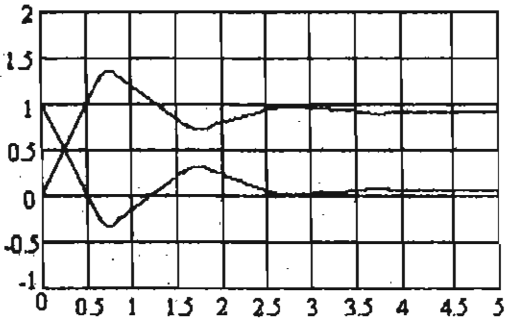
Se dice que el controlador proporcional es de un modo (banda) de control y su F. de T. es:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = Kp$$

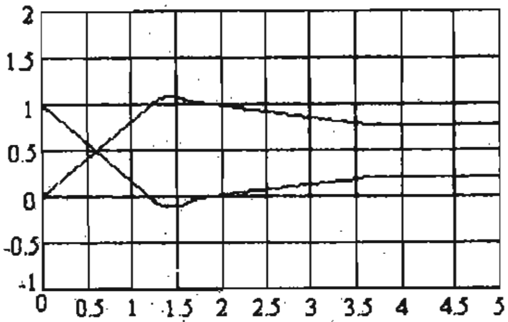
Un controlador proporcional electrónico industrial será algo semejante a lo que se muestra en la siguiente figura



En las siguientes figuras se puede observar las respuestas típicas de la señal de error y de salida de un controlador proporcional con dos valores diferentes de ganancia.



Control proporcional con Kp = 15



Control proporcional con Kp = 5

Para escoger el valor adecuado de Kp se tiene que elegir entre ajustar el error en estado permanente o una buena respuesta transitoria.

4.3 Controlador proporcional integral (P I)

La acción de control integral genera una señal de control proporcional a la integral de la señal de error.

$$m(t) = Ki\int e(t)dt$$

$$\frac{M(s)}{E(s)} = \frac{Ki}{S}$$

La característica fundamental de este control es que la acción correctiva se efectúa mediante la integral del error, permitiendo una señal de control en función de la "historia" de la señal de error.

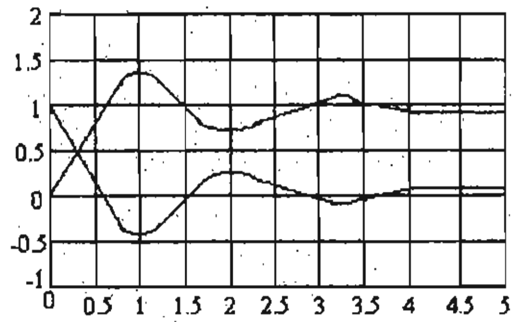
El controlador proporcional integral genera una señal resultante de la combinación de la acción proporcional integral conjuntamente.

$$m(t) = Kpe(t) + Ki\int e(t)dt$$

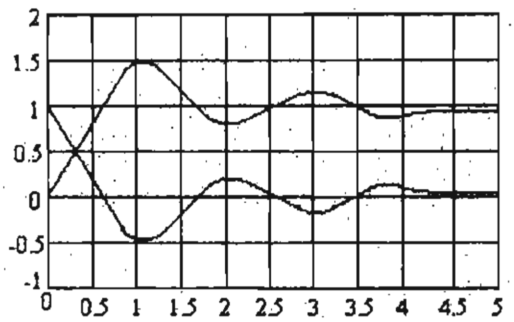
$$\frac{M(s)}{E(s)} = Kp + \frac{Ki}{S} = Kp[\ 1 + \frac{1}{TiS}\ ]$$

Donde: 1 / Ti = frecuencia de reposición.

En las siguientes figuras se puede observar las respuestas típicas de la señal de error y de salida de un controlador PI con dos valores diferentes de ganancia.



Control PI con Kp= 10, ki = 2



Control PI con Kp= 10, ki = 4

El controlador P I es de dos modos, combinando las ventajas de la acción proporcional y de la integral, eliminando el error en estado permanente y reduciendo el riesgo de inestabilidad.

4.4 Controlador proporcional derivativo (P D)

La acción de control derivativa genera una señal de control proporcional a la derivada de la señal de error.

$$m(t) = Kd\frac{de(t)}{dt}$$

$$\frac{M(t)}{E(s)} = Kds$$

La característica fundamental de este control es que mediante la derivada de la señal de error "conoce" sus características dinámicas, produciendo una corrección antes de que la señal de error sea excesiva, a esto se le conoce como *acción anticipativa*.

El controlador proporcional derivativo genera una señal resultante de la combinación de la acción proporcional y la acción derivativa conjuntamente.

$$m(t) = Kpe(t) + Kd\frac{de(t)}{dt}$$

$$\frac{M(s)}{E(s)} = Kp + KdS = Kp(1 + TdS)$$

Donde: 1 / Td = frecuencia anticipativa.

El controlador **P D** es de dos modos y proporciona una mejor estabilidad relativa, traduciéndose en un menor sobre impulso pero que puede tender a una respuesta muy lenta.

4.5 Controlador proporcional integral derivativo (P I D)

El controlador **P I D** genera una señal resultante de la combinación de la acción proporcional, integral y derivativa conjuntamente.

$$m(t) = Kpe(t) + Ki\int e(t)dt + Kd\frac{de(t)}{dt}$$

$$\frac{M(s)}{E(s)} = Kp + \frac{Ki}{S} + KdS = Kp\left(1 + \frac{1}{TiS} + TdS\right)$$

El controlador **P I D** es de tres modos de control, permite eliminar el error en estado permanente, reducir el máximo de sobre impulso y aumentar la rapidez de la respuesta.

4.6 Ajuste de controladores

En el diseño de sistemas de control basados en la estructura de retroalimentación y con controlador en serie al proceso, después de elegir el tipo de controlador, se tiene que ajustar los modos de control (los parámetros Kp, Ki, Kd), para que el sistema cumpla con las especificaciones de diseño.

En la actualidad existen varios métodos para ajustar controladores: métodos de prueba y error, métodos de síntesis industrial (método de Ziegler-Nichols), métodos por simulación en computadora y métodos teóricos.

Los métodos teóricos se basan en ajustar los valores, empleando la teoría del control clásico y aunque el diseño se limita a sistemas de bajo orden, son muy empleados en la práctica.

El método que emplearemos será el siguiente:

1.- Determinar la F. de T. del sistema compuesto.

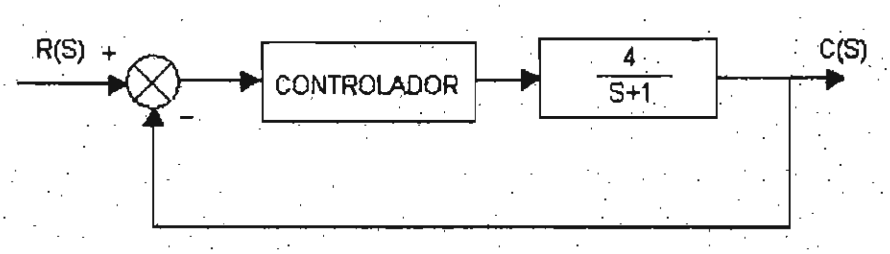
2.- Igualar la F. de T. canónica con la F. de T. anterior, obteniendo ecuaciones para los parámetros dinámicos y estáticos.

3.- De las especificaciones deseadas encontrar los valores de ζ y Wn y de los coeficientes de error.

4.- Resolver las ecuaciones de los parámetros para encontrar los valores de Kp, Ki ó Kd según se requieran.

Ejemplos

1. Ajuste el controlador del siguiente sistema, para que se cumpla una constante de tiempo de 0.5 segundos.



Cuando desea ajustar un sólo parámetro, se propone un controlador de un modo, en este ejemplo un controlador P, para que no altere el orden del proceso, ya que es de 1er y la especificación es de τ.

$$Gc(s) = Kp$$

1°) La F. de T. del sistema será

$$\frac{\frac{4Kp}{s+1}}{1+\frac{4Kp}{s+1}} = \frac{4Kp}{s+1+4Kp}$$

2°) Igualando con F. de T. canónica de 1er orden.

$$\frac{K}{\sigma s+1} = \frac{\frac{4Kp}{1+4Kp}}{\frac{1}{1+4Kp}S+1}$$

Obtenemos

$$K = \frac{4Kp}{1+4Kp} \quad y \quad \sigma = \frac{1}{1+4Kp}$$

3°) La especificación deseada es $\zeta = 0.5$

$$\zeta = 0.5 = \frac{1}{1+4Kp}$$

4°) Resolviendo para Kp

$$0.5 + 2\,Kp = 1$$

$$Kp = \frac{1-05}{2} = 0.25$$

2) Diseñe el sistema del ejemplo anterior con el fin de que cumpla un e_{ep} = 10% a una entrada $\mu(t)$.

Para este ejemplo no se requieren los 1° y 2° pasos.

3°) $$e_{ep} = \frac{1}{1+K_0} \quad \therefore \quad K_0 \frac{1-e_{ep}}{e_{ep}} = \frac{1-0.1}{0.1} = 9$$

$$K_0 = \lim_{S \to 0} GH(s) = \lim_{S \to 0} \frac{4Kp}{S+1} = 9$$

4°) $$\frac{4Kp}{1} = 9 \quad \Rightarrow \quad Kp = \frac{9}{4} = 2.25$$

De estos dos ejercicios se puede observar que al ajustar Kp a un valor, ajusta un parámetro, pero no podría ajustar al otro, para ajustar los dos parámetros simultáneamente se requiere de un controlador de dos modos.

3) Diseñe el sistema del ejemplo 1, con el fin de que cumpla con una $\delta = 0.5$ y e_{ep} = 10% para este ejemplo se propone un controlador que no altera el orden del proceso.

$$Gc(s) = Kp + Kd\,S$$

1°) $$\frac{\dfrac{4(Kp+KdS)}{S+1}}{\dfrac{1+4(Kp+KdS)}{S+1}} = \frac{4(Kp+KdS)}{S+1+4(Kp+KdS)} = \frac{4Kp+4KdS}{(1+4Kd)S+1+4Kp}$$

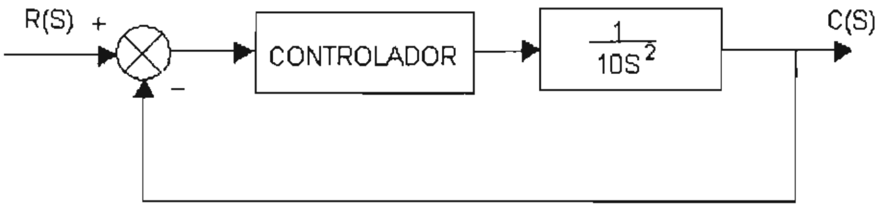
2°) $$K = \frac{4(Kp+KdS)}{1+4Kp} \quad y \quad \sigma = \frac{1+4Kd}{1+4Kp}$$

3°) $0.5 = \dfrac{1 + 4Kd}{1 + 4Kp}$

y $\lim\limits_{S \to 0} \dfrac{4(Kp + KdS)}{S + 1} = 9$

4°) $0.5 = \dfrac{1 + 4Kd}{1 + 9} \rightarrow Kd = 1 \quad y \quad \dfrac{4Kp}{1} = 9 \rightarrow Kp = \dfrac{9}{4} = 2.25$

4) Dado el siguiente sistema, proponga el tipo de controlador y ajústelo para que cumpla con un máximo de sobre impulso de 17% aproximadamente, y un tiempo de establecimiento de 8 segundos.



Como se desea ajustar dos parámetros se debe proponer un controlador de dos modos y como el proceso es de 2° orden se propone un P D que no altera el orden.

1°) $$\frac{\dfrac{Kp + KdS}{10S^2}}{1 + \dfrac{Kp + KdS}{10S^2}} = \frac{Kp + KdS}{10S^2 + Kp + KdS} = \frac{\dfrac{Kp}{10} + \dfrac{Kd}{10}S}{S^2 + \dfrac{Kd}{10}S + \dfrac{Kp}{10}}$$

2°) $$\frac{\dfrac{Kp}{10} + \dfrac{Kd}{10}S}{S^2 + \dfrac{Kd}{10}S + \dfrac{Kp}{10}} = \frac{Wn^2}{S^2 + 2\zeta WnS + Wn^2}$$

Ya que los ceros de una función intervienen de manera insignificativa en la dinámica de un sistema, podemos llegar a:

$$Wn^2 = \frac{Kp}{10} \qquad y \qquad 2\xi Wn = \frac{Kd}{10}$$

3°) Con las fórmulas de las especificaciones deseadas

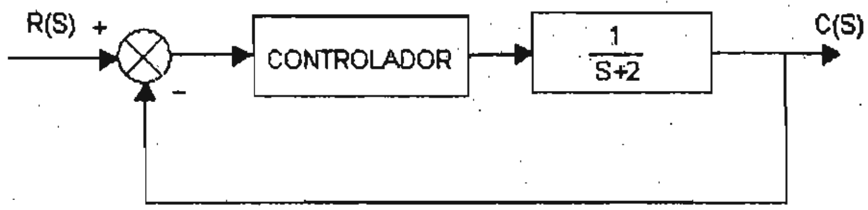
$$Mp = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} = 0.17 \longrightarrow \zeta = 0.5$$

$$t_{est} = \frac{4}{\xi Wn} = 8 \text{ segundos} \longrightarrow Wn = 1\frac{rad}{seg}$$

4°) $1 = \dfrac{Kp}{10}$ por lo tanto Kp = 10

$(2)(0.5)(1) = \dfrac{Kd}{10}$ por lo tanto Kd = 10

5) Dado el siguiente sistema proponga el tipo de controlador y ajústelo para que cumpla con Mp = 9.5 % y tp = 0.8 seg.



Como las especificaciones que se desean ajustar son para un sistema de 2° orden, se requiere subir el orden en uno, ya que es de 1er orden. Por lo tanto se debe proponer un controlador P I.

$$Gc(s) = Kp + \frac{Ki}{S}$$

1°) $$\frac{\left(10\left(Kp+\frac{Ki}{S}\right)\right)}{\left(1+\frac{10\left(Kp+\frac{Ki}{S}\right)}{S+2}\right)} = \frac{10\left(Kp+\frac{Ki}{S}\right)}{S+2+10Kp+\frac{10Ki}{S}} = \frac{10(KpS+Ki)}{S^2+2S+10KpS+10Ki}$$

2°) $$\frac{10KpS + 10Ki}{S_1^2 + (2+10Kp)S + 10Ki} = \frac{Wn^2}{S^2 + 2\xi WnS + Wn^2}$$

y Wn 2 = 10Ki

2 ξ Wn = 2 + 10Kp

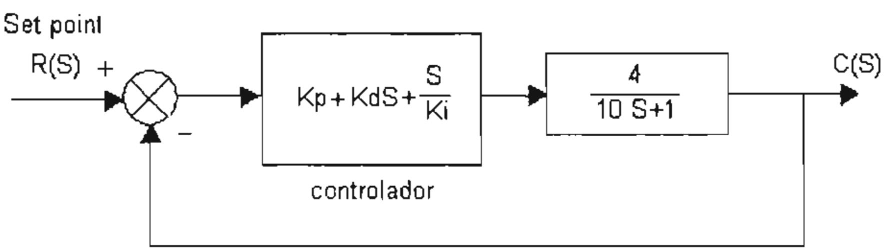
3°) Mp = $e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta 2})\pi} = 0.095 \longrightarrow \xi = 0.6$

$$tp = \frac{\pi}{Wn\sqrt{1-\xi^2}} = 0.8 \longrightarrow Wn = 5\frac{rad}{seg}$$

4°) $(5)^2 = 10Ki \longrightarrow Ki = 2.5$

$(2)(0.6)(5) = 2 + 10Kp \longrightarrow Kp = 0.4$

6) Ajuste de un controlador P I D.



Diseñe el sistema de control tal que se cumpla:

e_{ep} = 2 %, Mp = 25 % y tp = 6seg.

1°) Función de transferencia

$$G(s)=\frac{\dfrac{\left[Kp+KdS+\dfrac{Ki}{S}\right]4}{10\,S+1}}{1+\dfrac{4\left[Kp+KdS+\dfrac{Ki}{S}\right]}{10\,S+1}}$$

$$G(s)=\frac{4\left(Kp+KdS+\dfrac{Ki}{S}\right)}{10S+1+4Kp+4KdS+4\dfrac{Ki}{S}}$$

$$G(s)=\frac{4(SKp+S^2Kd+Ki)}{10S^2+S+4KpS+4KdS^2+4Ki}$$

$$G(s)=\frac{4(SKp+S^2Kd+Ki)}{(4Kd+10)S^2+(4Kp+1)S+4Ki}$$

2°) En su forma canónica

$$G(s)=\frac{\dfrac{4(SKp+S^2Kd+Ki)}{4Kd+10}}{S^2+\dfrac{4Kp+1}{4Kd+10}S+\dfrac{4}{4Kd+10}}$$

3°) $Mp\rightarrow\xi=0.4$

$$ip=\frac{\pi}{Wn\sqrt{1-\xi^2}}=6$$

$$K_1 = \lim_{S \to 0} SGH(s) = S \frac{4Kp + 4KdS + \frac{4Ki}{S}}{10S + 1} = 50$$

$$50 = \lim_{S \to 0} \frac{S}{S} \frac{S\ 4Kp + 4Kd + 4\frac{Ki}{S}}{} 10S + 1$$

4°)

$$50 = 4Ki \longrightarrow Ki = 12.5$$

$$e_{ep} = \frac{1}{Kv} \longrightarrow \frac{1}{0.02} = 50 = Kv$$

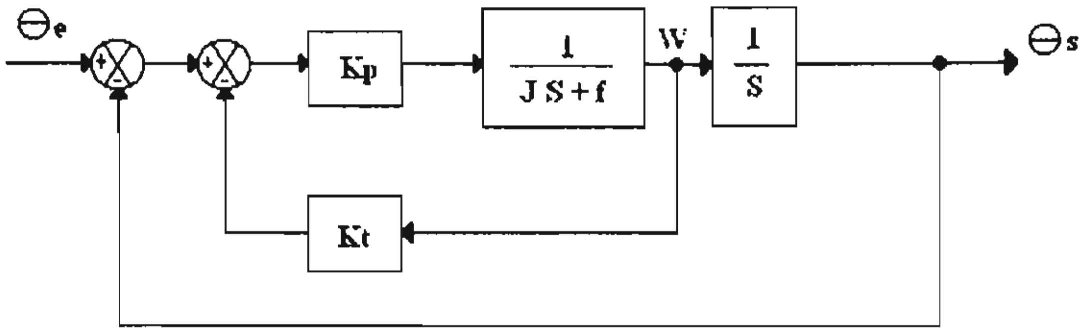
$$Wn^2 = \frac{4Ki}{10 + 4Kd} = 0.3249$$

$$Kd = \frac{50 - 3.2}{1.28} = 36.56$$

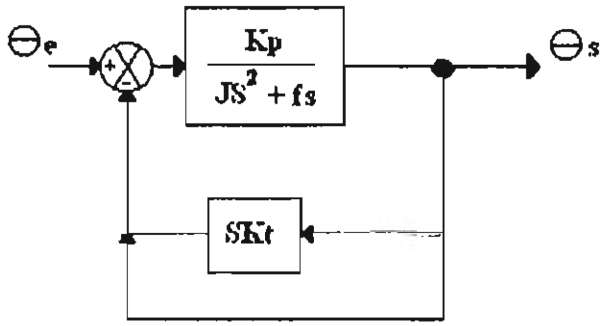
$$2\zeta Wn\xi = (2)(0.4)(0.57) = \frac{4Kp + 1}{10 + 4Kd}$$

$$Kp = \frac{(10 + 4Kd)(2)(4)(0.57) - 1}{4} = 17.29$$

7).- Ajuste un controlador taquimétrico
con: J = 5 y f = 2



Diseñe el sistema de control tal que se cumpla: tp = 10 seg. y Cep = 5%



1°) Función de Transferencia

$$= \frac{\dfrac{Kp}{JS^2 + fs}}{1 + \dfrac{Kp}{JS^2 + fs} K_T S}$$

$$= \frac{Kp}{JS^2 + fs + Kp\,K_T S}$$

$$= \frac{Kp}{JS^2 + (f + K_T Kp)S + Kp}$$

2°) Forma canónica.

$$Gs(S) = \frac{\dfrac{Kp}{J}}{S + \dfrac{[f + K_T Kp]S}{J} + \dfrac{Kp}{J}}$$

3°) $e_{ep} = \dfrac{1}{K_V} = 0.05$

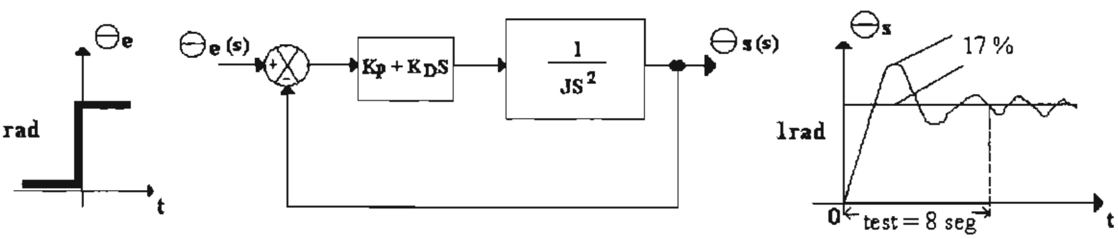
$K_V = 20$ si la entrada fuera una rampa

4°) $K_V = \lim_{S \to 0} S \dfrac{Kp K_T S + Kp}{S(5S + 2)} = 20 \quad \Rightarrow \quad Kp = 40$

$$\omega_n^{\,2} = \frac{Kp}{J} = 8$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{f + K_T Kp}{J} \qquad \Rightarrow \quad K_T = \frac{2\zeta\omega_n J - f}{Kp} = 0.65$$

Ejercicio: Diseñe el siguiente sistema de tal manera que se cumplan las especificaciones indicadas:



Si J = 10

Resolvemos de la siguiente manera

1°) Función de transferencia

$$G(s) = \frac{\dfrac{Kp + K_D S}{JS^2}}{1 + \dfrac{Kp + K_D S}{JS^2}} = \frac{Kp + K_D S}{JS^2 + Kp + K_D S}$$

2°) Ponerlo en la forma típica

$$G(s) = \frac{Wn^2}{S^2 + 2\xi WnS + Wn^2}$$

3°) Para las condiciones pedidas

$$Mp = 0.17 \quad \rightarrow \quad \xi = 0.5$$

$$t_{est} = \frac{4}{\xi Wn} = 8$$

$$Wn = \frac{4}{\zeta\, t_{est}} = \frac{4}{(8)(0.5)}$$

$$Wn = 1$$

4°) $\frac{Kp}{J} = Wn^2 = 1$

$$Kp = J = 10$$

$$\frac{K_D}{10} = 2(0.5)(1) \longrightarrow K_D = 10$$

APÉNDICE A

APLICACIÓN DEL PAQUETE CC A LA INGENIERÍA DE CONTROL

A.1. INTRODUCCIÓN

El paquete CC (Clasic Control) es un programa que fue elaborado por el profesor Peter M. Thompson, este paquete se caracteriza por trabajar con funciones de transferencia.

Para entrar y salir del paquete, se procederá de la siguiente manera:

1. Introducir el disco de CC en el drive A, se procede a encender la maquina. (ver fig. 1-a)
2. Después de que arranco la PC para entrar en el paquete se usa la instrucción (A>CC y se presiona la tecla ENTER, entonces aparecerá CC>. (ver fig. 1-b)
3. Para salir del paquete se usa la instrucción (Q),
   CC>Q y se presiona la tecla ENTER, entonces aparecerá Are you sure? (y/n) si (y) y te sacara del programa a MS-DOS de nuevo (ver fig. 1-c)

A:\>CC

Figura 1-a. Como ingresar a CC

```
Program CC, Versión 3
 (C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights reserved
 HELP = list of commands
CC>
```

Figura 1-b. Dentro de CC

```
Program CC, Versión 3
 (C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights reserved
 HELP = list of commands
CC>q
 Are you sure? (y/n) > y
```

Figura 1-c. Saliendo de CC

Para introducir una función de transferencia, utilizando CC, se procederá de la siguiente manera:

CC>ENTER, G1 (G1 es el nombre de la función de transferencia, es importante poner siempre una G y un número)

El comando ENTER, guarda la función de transferencia en el archivo que llamamos G1 Por eso es importante poner la G y el número.

A continuación esto se observará en el ejemplo como introducir la función de transferencia.

Ejemplo: Introducir la siguiente función de transferencia.

El procedimiento para introducir la función es la siguiente:

$$G1 = \frac{s+1}{s\left(s^3+5s+4\right)} \qquad \text{Ec 1}$$

<u>**CC> ENTER, G1**</u>

Después de haber introducido el nombre de nuestra función el programa nos solicitara los siguientes datos los cuales se describen a continuación.

CC>Introducir el número de polinomios del numerador>

Aquí lo que se nos pregunta es cuantos polinomios tiene nuestro numerador en este caso G1, se observa que nada mas cuenta con uno el cual es **(s+1)**.

CC> Se teclea el 1 que indica que se tiene sólo un polinomio.

Ahora el programa lo que nos solicita es que le introduzcamos el polinomio lo cual se hace de la siguiente manera.

CC> Introducir polinomio>

El polinomio se introduce ingresando primero el grado del polinomio, después coeficiente de la variable en orden descendente, y por último el término independiente. A continuación se muestra gráficamente el polinomio del numerador. (ver fig. 2)

(s+1) $\longrightarrow$ **1,1,1**

Término independiente
Coeficiente
Grado
(se toma el máximo exponente que se encuentra en nuestro polinomio que en este caso es de 1)

```
Program CC, Versión 3
 (C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights reserved
 HELP = list of commands
CC>enter,g1

Enter each polynomial:a(n)*s^n + a(n-1)*s^(n-1) +  ... + a(1)*s + a(0)
as follows:n, a(n), a(n-1), ..., a(1), a(0)

Enter # of polynomials in numerator > 1
Enter poly # 1  > 1,1,1
```

Figura 2 Introducción de polinomio del numerador

Después de introducir el polinomio en el numerador el programa nos preguntará cuantos polinomios tenemos en el denominador, en este caso tenemos dos, los cuales se muestran a continuación:

CC>Introducir el número de polinomios del denominador>

$$\underset{\text{Pol 2}}{s}\underset{\text{Pol 1}}{\left(s^3 + 5s + 4\right)}$$

Ec 2

Cuando el programa no pregunta esto, se introduce 2; Ahora el programa nos preguntará cuáles son los polinomios 1 y 2. Para saber cuál es el polinomio se tomará de derecha a izquierda.

CC>Introducir polinomio #1>

Polinomio 1

$$(s^3+5s+4)$$

Este es el primer polinomio y así es como lo tenemos en su forma original, pero para leerlo lo tenemos que poner de la siguiente forma.

$$(s^3+0s^2+5s^1+4) \qquad 3,1,0,5,4$$

Término independiente
Coeficiente
Coeficiente
Coeficiente
Grado
(se toma el máximo exponente que se encuentra en nuestro polinomio que en este caso es de 3)

Esta es la forma en que se debe de interpretar el polinomio, y luego introducir los datos en el programa (ver fig.3) como se hizo para el polinomio del numerador, ahora nos solicitará el polinomio número 2 y se realizara lo mismo.

CC>Introducir polinomio #2>

Polinomio 2

(s)

Como se ve nuestro segundo polinomio es sólo s, también hay que saber leerlo para introducirlo, el cual se hace de la siguiente manera.

$$(1\,S + 0) \longrightarrow \quad 1, 1, 0.$$

Figura 3. Aquí se muestra como se introducen todos los polinomios (numerador y denominador)

```
 Program CC, Versión 3
 (C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights reserved
 HELP = list of commands
CC>enter,g1

Enter each polynomial:a(n)*s^n + a(n-1)*s^(n-1) +  ... + a(1)*s + a(0)
as follows:n, a(n), a(n-1), ..., a(1), a(0)

Enter # of polynomials in numerator > 1
Enter poly # 1  > 1,1,1
Enter # of polynomials in denominator > 2
Enter poly # 1  > 3,1,0,5,4
Enter poly # 2  > 1,1,0
```

Cuando ya se cargaron todos lo polinomios de nuestra función de transferencia, nos desplegará en pantalla el polinomio, tal y como lo tenemos nosotros escrito(ver fig.4)

```
 Program CC, Versión 3
 (C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights reserved
 HELP = list of commands
CC>Enter,G1, 1,1,1,1, 2,1,1,0,3,1,0,5,4


            s + 1
G1(s) = ----------------
                3
         s ( s  + 5s + 4)

CC>
```

Figura 4. Desplegado de nuestra función de transferencia

En la figura anterior se observa como se despliega nuestra función de transferencia, en la parte superior de la imagen se ven los datos los cuales introducimos para G1.

Además con esto nosotros podremos saber si la función que introducimos es la correcta.

Ahora bien así cargaremos tantas funciones como deseemos y a cada una se le dará un nombre distinto desde G1, G2, G3, ..., Gn., Cuando las funciones ya están cargadas en el programa y queremos verla, utilizaremos la instrucción DISPLAY (ver fig.5), la cual se emplea de la siguiente manera.

<u>CC>DISPLAY, G1</u>

```
CC>display,g1
```

$$G1(s) = \frac{s + 1}{s\ (s^3 + 5s + 4)}$$

```
CC>█
```

Figura 5. Utilización del comando DISPLAY en CC

Existe la instrucción HELP, la cual al llamarla nos muestra todas las instrucciones que maneja el paquete, así como la sintaxis de cada una de ellas.

Para llamarlas sólo basta con teclear **CC>HELP**.

Para pasar a la siguiente página solamente presione RETURN, y desea salir se utiliza la Q.

Ejemplos:

CC>Pzf.	G5	⟶	Mostrará la función de transferencia de polos y ceros.
CC>11 t	G5	⟶	Muestra la transformada inversa de Laplace.
CC>CF	G5	⟶	Muestra la F. de T. en forma de constantes de tiempo
CC>STABILITY	G5	⟶	Le dirá si el sistema es estable con retroalimentación unitaria.
CC>TIME	G5	⟶	Le mostrará la respuesta al escalón con diferentes opciones, además de la respuesta al impulso.

Cuando aparezca la gráfica con algunas de estas funciones, tiene un pequeño menú, para poder cambiar algunos de estos parámetros de la gráfica (escala del eje X, escala del eje Y, centrar la función, etc.). Por ejemplo:

Opción>	c	→	Para mover el cursor a lo largo de las gráficas
Opción>	a	→	Añadir otras gráficas
Opción>	q	→	Para salirse
Opción>	q	→	Para graficar una vez que se cambien los parámetros

Para graficar Bode, deberá crearse un archivo de frecuencias de la siguiente manera:

CC>Frecuency

Preguntará por el nombre de la función de transferencia>G5.

Baja frecuencia, alta frecuencia, número de puntos>0, 1, 100000.50: éste último, son los puntos que guardará para efectuar la gráfica.

Nota: Se recomienda que no se utilice un número muy elevado, ya que la máquina se tardará demasiado tiempo efectuando los cálculos.

Preguntará la escala 0 = 1100_{10}, 1 = lineal > 0.

```
CC>frequency
 Enter transfer function Gn > g1
 Enter low freq, high freq, # points > 0.1,100,300
 Enter 0=log10 scale, 1=linear scale > 0
```

Utilización del comando FREQUENCY en CC.

Una vez hecho esto, ya se puede entrar a BODE.

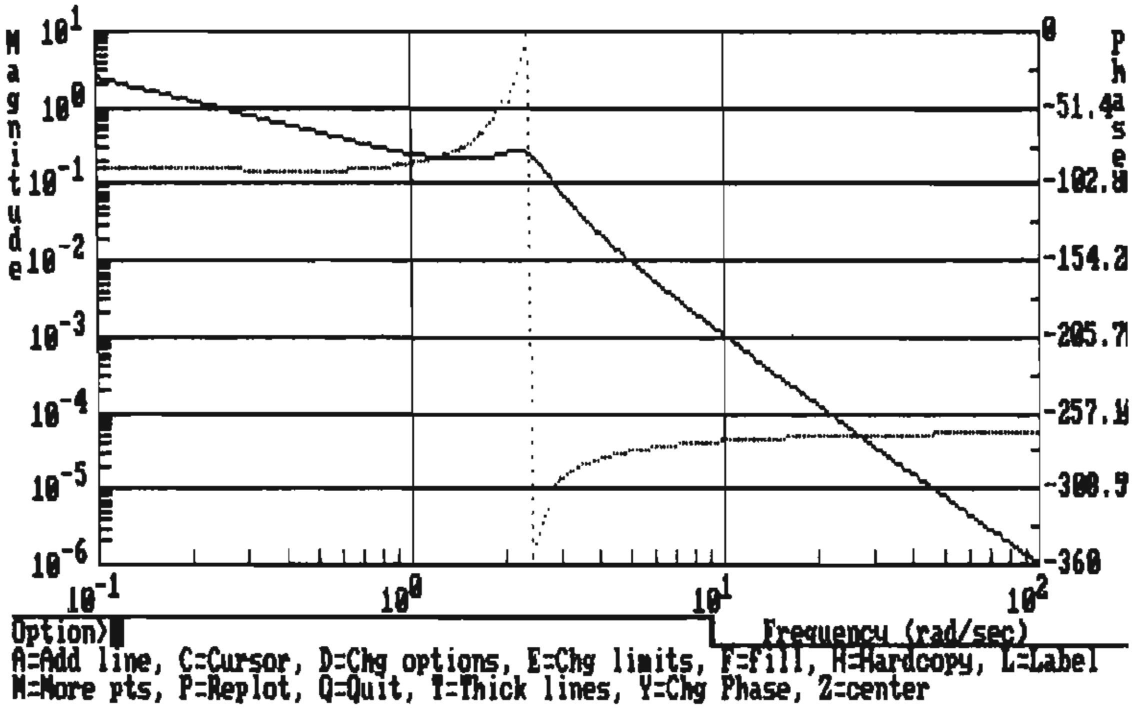
CC>BODE

Hará el BODE de la función de transferencia del archivo que fue creado anteriormente.

```
CC>bode
 Enter type of Bode plot > 3
 Automatic entry of remaining parameters? (y/n) > y
```

Utilización del comando BODE en CC.

Cuando aparece la gráfica, también en la parte inferior de la misma aparece un menú con los mismos comandos que se mencionaron anteriormente, los cuales se trabajan de la misma forma.



BODE de la funcion en CC.

A.2. PROBLEMARIO (del empleo de paquetes)

Tema I. Función de transferencia

Dada la función de transferencia, obtener su expresión en polos y ceros, y de constante de tiempo

1.- $\frac{H(S)}{Q(S)} = \frac{R}{RCS+1}$ con R = 1 y C = 5

2.- $G(S) = \frac{4}{S+1}$

3.- $G(S) = \frac{4}{10S+1}$

4.- $G(S) = \frac{S+2}{S^4+3S^3+3S^2+4S+1}$

Ejecutar el programa de CC: Se introduce al disco y desde MS-DOS ubicado en a:\ se teclea CC y se le da ENTER, lo cual nos ingresará al programa CC>.

Después darle un nombre a cada función de transferencia desde G1 hasta Gn el cual se introduce con el comando ENTER, Gn.

Después de que se nombró la función de transferencia, el programa nos pregunta cuantos polinomios tiene el numerador, depende del número de polinomios que tenga el numerador, se introduce el dato.

El polinomio se introduce primero el grado del polinomio, coeficiente de la variable en orden descendente y término independiente, con esto se introducen los datos del numerador

Después de esto el programa preguntará el número de polinomios del denominador, se introduce el dato.

Después de esto el programa nos desplegará la función que se ingreso.

Ahora utilizaremos el comando PZF.

CC>PZF, G1

Con esta instrucción nos desplegará la función de transferencia en polos y ceros.

Ahora para pasar la función de transferencia a su constante de tiempo se utiliza el comando TCF.

CC>TCF, G1

Respuestas: Utilizando los comandos PZF(forma de polos y ceros) y TCF (forma de constante de tiempo), sacarle a cada función de transferencia que se dio.

Resolviendo el problema 1, los datos se introducen de la siguiente manera. (Ver figura 6).

```
 Program CC, Version 3
 (C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights reserved
 HELP = list of commands
CC>ENTER, G1

Enter each polynomial:a(n)*s^n + a(n-1)*s^(n-1) +  ... + a(1)*s + a(0)
as follows:n, a(n), a(n-1), ..., a(1), a(0)

Enter # of polynomials in numerator > 1
Enter poly # 1  > 1,0,1
Enter # of polynomials in denominator > 1
Enter poly # 1  > 1,5,1
```

Figura 6. Introducción de datos para el problema 1

A continuación el programa desplegará la función de transferencia, la cual pasaremos de Función a polos y ceros, también obtendremos su constate de tiempo. (Ver fig. 7).

```
Program CC, Version 3
(C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights reserved
HELP = list of commands
CC>Enter,G1, 1,0,1, 1,1,5,1


           1
G1(s) = ------
         5s + 1

CC>█
```

Figura 7. Desplegado de la función de transferencia de la cual se convertirá a polos y ceros y su constante de tiempo.

Después de que ya se introdujo la función de transferencia se utilizarán los comandos PZF para la función de transferencia de polos y ceros y TCF para la función de transferencia en forma de constante de tiempo. (Ver fig. 8).

```
           1
G1(s) = ------
         5s + 1

CC>PZF, G1

           .2
G1(s) = -------
         (s+ .2 )


CC>TCF, G1

            1
G1(s) = ----------
         ( 5 s + 1)


CC>█
```

Figura 8. Utilización de los comandos PZF y TCF para el problema 1 de la función de transferencia y los resultados de los comandos.

A continuación se presentan los resultados de los problemas 2, 3 y 4.
Problema 2

$$G(S) = \frac{4}{S+1} \qquad \text{con}$$

$$\text{TCF} \quad G(2) = \frac{4}{(S+1)} \qquad \text{con} \quad \text{PZF} \quad G(2) = \frac{4}{(S+1)}$$

Problema 3.

$$G(S) = \frac{4}{10S+1} \qquad \text{con}$$

$$\text{TCF} \quad G(2) = \frac{4}{(10S+1)} \qquad \text{con} \quad \text{PZF} \quad G(2) = \frac{4}{(S+1)}$$

Problema 4

$$G(s) = \frac{24}{S^4 + 10S^3 + 5S^2 + 50S + 1}$$

con TFC

$$G(2) = \frac{0.9999999}{(0.1002306S+1)(0.2003374S^2 - 9.1964E - 0.2S + 1)} \quad \frac{1}{(2.075039S+1)}$$

con PZF

$$G(2) = \frac{24}{(S+9.97699)\left[(S-0.229454)^2 + 2.22371^2\right](S+0.4819186}$$

Tema II. Transformada inversa de Laplace.

Dada la función de transferencia obtener su expanción en fracciones parciales y su transformada inversa de Laplace.

1.- $G(s) = \dfrac{1}{S(S+1)}$

2.- $G(s) = \dfrac{25}{S^2 + 6S + 25}$

3.- $$G(s) = \frac{5}{S^4 + 2S^3 + 25S^2 + 4S + 5}$$

4.- $$G(S) = \frac{S + 2}{S^4 + 3S^3 + 3S^2 + 4S + 1}$$

Se realizará exactamente lo mismo que en la parte uno, hasta el punto donde se introduce el polinomio. (Ver Fig. 9).

Ahora se calculará la transformada inversa de Laplace con el comando ILT. Así como utilizaremos el comando PFE para tener la expansión en fracciones parciales de la función de transferencia.

```
Program CC, Versión 3
 (C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights reserved
 HELP = list of commands
CC>ENTER, G1

Enter each polynomial:a(n)*s^n + a(n-1)*s^(n-1) +  ... + a(1)*s + a(0)
as follows:n, a(n), a(n-1), ..., a(1), a(0)

Enter # of polynomials in numerator > 1
Enter poly # 1  > 1,0,1
Enter # of polynomials in denominator > 2
Enter poly # 1  > 1,1,1
Enter poly # 2  > 1,1,0
```

Figura 9. Se muestra como se introducen los datos del polinomio.

Resolviendo el problema 1, los datos se introducen de la siguiente manera. (Ver Fig. 10).

```
Program CC, Version 3
 (C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights reserved
 HELP - list of commands
CC>Enter,G1, 1,0,1, 2,1,1,0,1,1,1

             1
G1(s)  =  ----------
           s ( s + 1)
```

Figura 10. Muestra la función de la cual se calcularán las fracciones parciales y transformada inversa de Laplace.

A continuación aplicaremos los comandos PFE para fracciones parciales y ILT para la transformada inversa de Laplace y obtendremos los siguientes resultados. (Ver Fig. 11).

```
          1
G1(s) = ---------
        s ( s + 1)

CC>PFE, G1

        1      1
G1(s)= ---  - -----
        s     s + 1

CC>ILT, G1
 Causal Inverse Laplace transform

          ┌ 1 - 1*exp(-1t) for t>0
G1(t) = <
          └ 0 for t<0
```

Figura 11. Utilización de los comandos PFE con la cual obtenemos las fracciones parciales y ILT la transformada inversa de Laplace.

A continuación se presentan los resultados de los problemas 2, 3 y 4.

Problema 2:

$$G(s) = \frac{25}{S^2 + 6s + 25} \quad \text{Con PFE } G(s) = \frac{25}{[(s+3)^2 + 4]}$$

Con ILT

$$G(t) = \begin{cases} 6.25 * \sin(4t) + \exp(-3) \text{ for } t > 0 \\ 0 \text{ for } t < 0 \end{cases}$$

Problema 3

$$G(s) = \frac{5}{S^4 + 2S^3 + 25S^2 + 4S + 5}$$

Con PFE

$$G(S) = \frac{-0.7367658S + 0.4957178}{\left[(S - 0.2878155)^2 + 1.4116093^2\right]} + \frac{0.7367658S + 1.826024}{\left[(S - 1.287815S)^2 + 0.8578968^2\right]}$$

Con ILT

$$G(t) = \begin{cases} -.7635117 * \cos(1.416093t + .2654676) \\ * \exp(.2878155t) + 1.260296 * \sin(.8578968t + .624384). \\ * \exp(-1.287815t) \text{ for } t > 0 \\ 0 \text{ for } t < 0 \end{cases}$$

Problema 4.

$$G(s) = \frac{s + 2}{s^4 + 3s^3 + 3s^3 + 4s + 1}$$

Con PFE

$$G(s) = \frac{-.6144649s + 4.047881E - 0.2}{[(s - .168851s)^2 + 1.176117]} + \frac{2.865765E - 0.2}{s + 2.371229} + \frac{.5858073}{s + .299001}$$

Con ILT

$$G(t) = \begin{cases} -.6261807 * \cos(1.176117t + .1937449). \\ *\exp(-.1648851) + 2.86576E - 0.2 * \exp(-2.371229) + .5858073. \\ *\exp(-.29900t) \text{ for } t > 0 \\ \qquad 0 \text{ for } t < 0 \end{cases}$$

Tema 3. Estabilidad.

En éste tema se va estudiar la estabilidad de los sistemas de control y la forma en que el paquete CC muestra la estabilidad a partir de la función de transferencia.

Problema 1. De acuerdo a la siguiente función de transferencia obtenga la estabilidad y los rangos de ganancia para el siguiente sistema de retroalimentación unitaria.

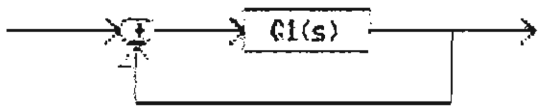
$$G(s) = \frac{1}{s(s + 10)}$$

Primero se introduce la función de transferencia de acuerdo al procedimiento que se sigue en el tema 1, posteriormente se llama a la función, por medio del comando DISPLAY.

```
Program CC, Version 3
(C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights reserved
HELP - list of commands
CC>display, G1

            1
G1(s) = ---------
         s ( s + 10)

CC>
```

A continuación por medio del comando STABILITY nos muestra si la función de transferencia es estable o inestable y además nos muestra los valores de los polos y los valores de los ceros y que a continuación se ilustra.

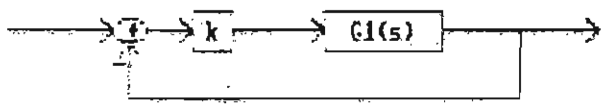
```
Program CC, Version 3
(C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights reserved
HELP = list of commands
CC>stability, G1
```




```
Closed loop characteristic polynomial:

p(s) =  s^2 + 10s + 1

ZEROS:        -.1010205144336442
              -9.898979485566356

The analog closed loop system is  STABLE
CC>
```

Posteriormente con el comando ROUTH se obtienen los rangos del sistema el cuál se muestra a continuación.

```
Program CC, Version 3
(C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights reserved
HELP = list of commands
CC>routh, G1
```

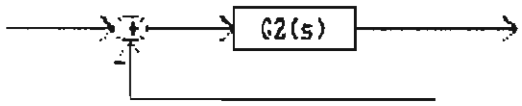



```
Stable for gain ranges :  0 to infinity

CC>
```

Problema 2 De acuerdo a la siguiente función de transferencia obtenga la estabilidad y los rangos de ganancia para el siguiente sistema de retroalimentación unitaria.

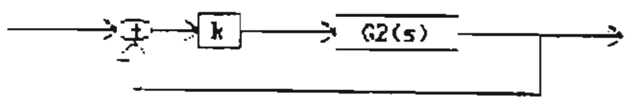
$$G(2)=\frac{25}{S^2+6S+25}$$

```
Program CC, Version 3
(C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights reserved
HELP = list of commands
CC>stability, G2
```




```
Closed loop characteristic polynomial:

 p(s) =  s^2 + 6s + 50

 ZEROS:      -3                          +j  6.403124237432849
             -3                          -j  6.403124237432849

The analog closed loop system is  STABLE
CC>
```

```
Program CC, Version 3
(C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights reserved
HELP = list of commands
CC>routh, G2
```




```
Stable for gain ranges : -1 to infinity
CC>
```

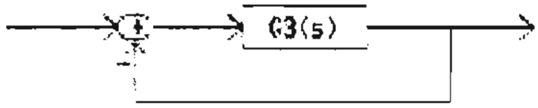
Problema 3. De acuerdo a la siguiente función de transferencia obtenga la estabilidad y los rangos de ganancia para el siguiente sistema de retroalimentación.

$$G(3) = \frac{5}{S^4 + 2S^3 + 25S^2 + 4S + 5}$$

Problema 4 De acuerdo a la siguiente función de transferencia obtenga la estabilidad y los rangos de ganancia para el siguiente sistema de retroalimentación.

$$G(S) = \frac{S+2}{S^4 + 3S^3 + 3S^2 + 4S + 1}$$

```
Program CC, Version 3
(C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights reserved
HELP = list of commands
CC>stability, G3
```




```
Closed loop characteristic polynomial:

p(s) =  s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 10

ZEROS:      -1.552260433007462       +j  1.175620891357173
            -1.552260433007462       -j  1.175620891357173
             .5522604330074621       +j  1.527226099027472
             .5522604330074621       -j  1.527226099027472

The analog closed loop system is  UNSTABLE
CC>█
```

```
Program CC, Version 3
(C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights reserved
HELP = list of commands
CC>routh, G4
```


```
Stable for gain ranges : -.5 to  .6241438

CC>█
```

Tema 4. Respuesta en el tiempo

En este tema se obtiene la respuesta en el tiempo a entradas impulso, escalón y rampa en sistemas de lazo abierto o lazo cerrado.

Problemas

Problema 1. Obtenga la respuesta escalón unitario, de un sistema de retroalimentación unitaria, cuya función de transferencia en lazo abierto es:

$$G1(s) = \frac{1}{S(S+10)}$$

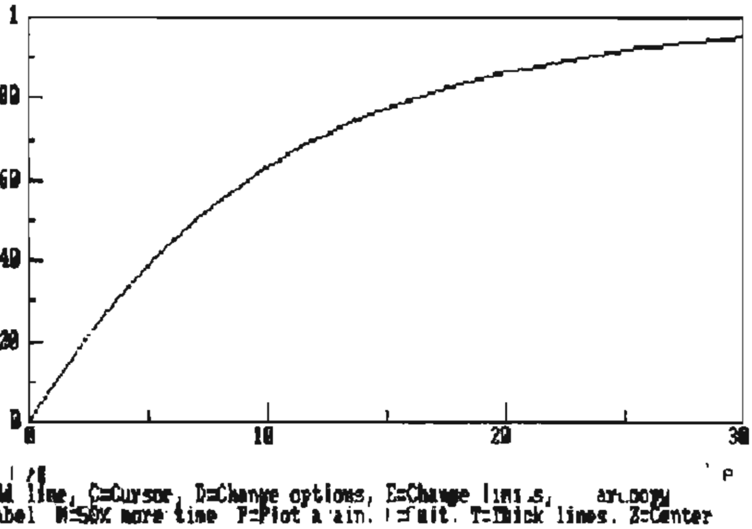
Primero se introduce la función de transferencia siguiendo los pasos del tema 1, después de haber introducido la función de transferencia, por medio del comando TIME se obtiene lo siguiente:

```
Program CC, Version 3
 (C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights reserved
 HELP = list of commands
CC>time, G1
Enter TIME command option): █
  1=Closed loop step              2=Closed loop impulse
  3=Open loop step                4=Open loop impulse
  5=Open loop non-causal impulse
```

Enseguida se selecciona el tipo de entrada y el tipo de sistema, en este caso se selecciona el número 1 que corresponde a la entrada del escalón unitario de lazo cerrada y se presiona la "Y" para dar los parámetros automáticamente, el cual se muestra a continuación:

```
Program CC, Version 3
 (C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights res
 HELP = list of commands
CC>time, G1
Enter TIME command option): 1
Automatic entry of remaining parameters ? (y/n) > y█
```

Después de haber presionado la letra "Y" se da aceptar y se obtiene el resultado

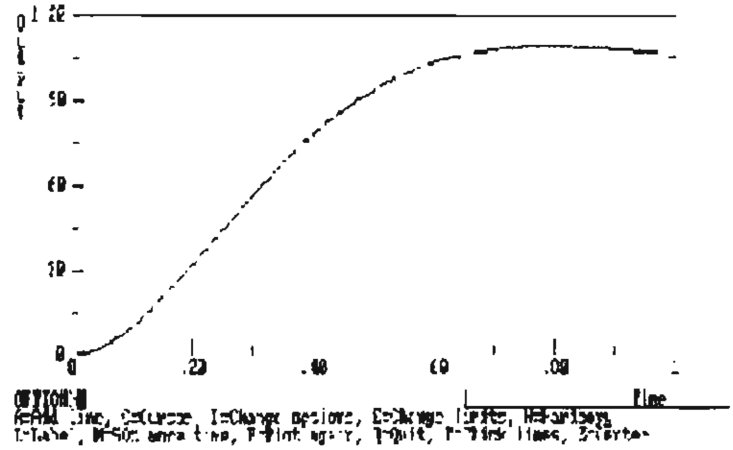


Problema 2.-Obtenga la respuesta escalón unitario del siguiente sistema

$$G2(s) = \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$$

```
Program CC, Version 3
 (C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights reserved
 HELP : list of commands
CC>time, G2
Enter TIME command option>: 3
Automatic entry of remaining parameters ? (y/n) > y
```

La gráfica de respuesta es

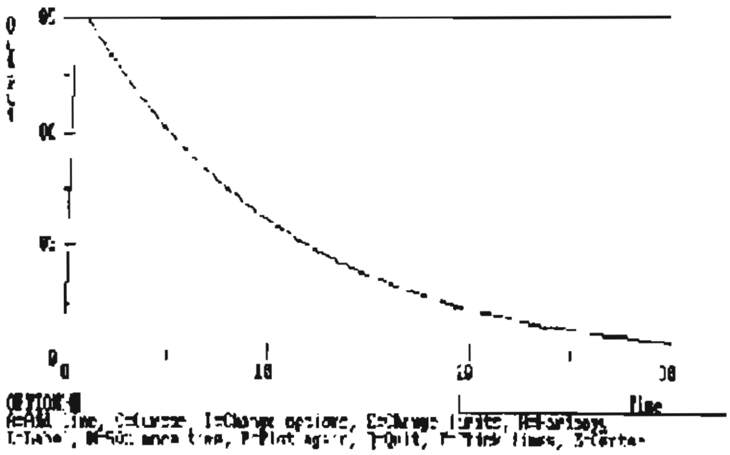


Problema 3. Obtenga la respuesta impulso unitario de un sistema de retroalimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G3(s) = \frac{1}{s(s + 10)}$$

```
Program CC, Version 3
(C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights reserved
HELP = list of commands
CC>time, G3
Enter TIME command option): 2
Automatic entry of remaining parameters ? (y/n) > y
```

La gráfica de respuesta es



Problema 4 . Obtenga la respuesta rampa del siguiente sistema .

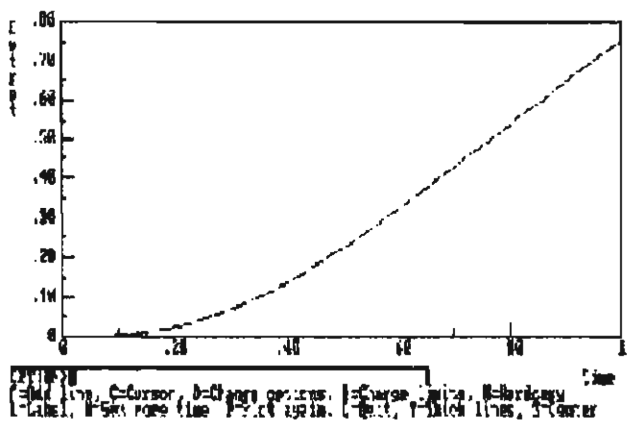
$$G4(s) = \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$$

La respuesta rampa unitaria se obtiene como la respuesta escalón unitario de G(s) / S.

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{25}{s^3 + 6s^2 + 25s}$$

```
Program CC, Version 3
(C) Copyright 1984,1985 by Peter M. Thompson, all rights reserved
HELP : list of commands
Append to current history file $$HIST (y/n) > y
CC>time, G4
Enter TIME command option>: 3
Automatic entry of remaining parameters ? (y/n) > y
```

La gráfica de respuesta es



APÉNDICE B

APLICACIÓN DEL PAQUETE MATLAB A LA INGENIERÍA DE CONTROL

Matlab es una herramienta útil para el manejo de ingeniería en especial de ingeniería de control. Matlab (MATrix LABoratory) es un sistema base en matrices, ya que todas las variables que maneja Matlab son matrices, es decir, sólo tiene un tipo de datos, una matriz, o un arreglo rectangular de números.

Generalmente Matlab se usa en un modo controlado por comandos, que estos al ser introducidos, Matlab los procesa y despliega los resultados, aunque también es capaz de ejecutar secuencias de comandos que se almacenan en archivos.

Una característica conveniente de Matlab es que no es necesario establecer las dimensiones de las variables antes de usarlas. En Matlab las variables se generan automáticamente una vez que se usan (es posible alternar dimensiones de las variables después, si es necesario).

B.1. INTRODUCCIÓN

Para entrar y salir del paquete utilizando el sistema operativo Windows, se procederá de la siguiente manera:

1. Se enciende la PC y se introduce el disco del programa de MATLAB en el drive D, se deberá contar en la PC con un espacio de 300 Mb o más para su instalación, así como Windows 95.
2. Después de instalar MATLAB, ir al menú de inicio ubicado en la barra de tareas, se abre y se busca programas.
3. En programas buscar la carpeta de MATLAB y en ella buscar el programa ejecutable de Student MATLAB.

El MATLAB es un excelente paquete muy útil para resolver problemas de ingeniería de control

El MATLAB, su nombre proviene de una abreviatura de MATrix LABoratory, es un sistema basado en el cálculo matricial, para desarrollar aplicaciones matemáticas y de ingeniería, se habla del MATLAB como una clase de lenguaje diseñado únicamente para realizar manipulaciones matriciales. Todas las variables que se manejan en el MATLAB son matrices, esto es, MATLAB tiene solo un tipo de datos, una matriz rectangular de números, posee un amplio conjunto de rutinas para obtener salidas gráficas.

MATLAB posee una ayuda en línea a la que puede llamarse siempre que se desee. La orden **help** visualizará una lista de funciones y operadores predefinidos para los que hay disponible una ayuda en línea.

La orden **help** dará información sobre la función especifica llamada de su finalidad y forma de uso. La orden **help help** dará información de cómo utilizar la ayuda en línea.

MATLAB tiene órdenes para las siguientes conversiones de modelos

Conversión del espacio de estado a función de transferencia
Conversión de función de transferencia a espacio de estado
Conversión del espacio de estado a ceros – polos
Conversión de ceros – polos a espacio de estado
Conversión de función de transferencia a ceros – polos
Conversión de ceros – polos a función de transferencia
Conversión de tiempo continuo a tiempo discreto

Los siguientes signos se utilizan en las operaciones matriciales

+ Suma
- Resta
* Multiplicación
^ Potencia
' Transpuesta conjugada

Los siguientes operadores relacionales y lógicos se utilizan en el MATLAB

< Menor que
<= Menor que o igual a
> Mayor que
>= Mayor que o igual a
== Igual
~= No igual

Observe que "=" se utiliza en una sentencia de asignación, mientras que "==" se emplea en una relación.

Los operadores lógicos son

& AND
| OR
~ NOT

En MATLAB se utilizan los siguientes caracteres especiales

[ ]	Utilizado para formar vectores y matrices
( )	Precedencia de expresión aritmética
,	Separa elemento y argumentos de función
;	Final de filas, suprime la impresión
:	Generación de vectores
!	Ejecución de orden del sistema operativo
%	Comentarios

Utilización del operador

El ; se utiliza para suprimir la impresión. Si el último carácter de una sentencia es un ; se suprime la impresión; la orden se ejecuta pero el resultado no se visualiza. Esto es una característica útil, puesto que la impresión de resultados intermedios puede no necesitarse. También, en la introducción de una matriz el ; se utiliza para indicar el final de una fila excepto de la última.

Si necesitas poner la hora y la fecha

La orden clock da el año, el mes, el día, la hora, los minutos y los segundos. Es decir, clock devuelve un vector fila de seis elementos que contiene la hora y la fecha en formato decimal.

Clock = [año mes día hora minutos segundos]

Además, la orden date da la fecha actual

Date
Ans =
        1-Jan-00

Acceso y salida de MATLAB

En la mayoría de los sistemas, una vez que se ha instalado MATLAB, para llamar a MATLAB ejecute la orden MATLAB. Para salir de MATLAB, ejecute la orden exit o la orden quit.

Como se utiliza MATLAB

Normalmente, MATLAB se utiliza en modo de orden dirigida. Cuando las órdenes se introducen en una única línea, MATLAB las procesa inmediatamente y visualiza los resultados. MATLAB, también es capaz de ejecutar secuencias de órdenes que estén almacenadas en filas.

A las órdenes que se hayan escrito, se puede acceder más tarde utilizando la tecla de flechas hacia arriba.

Variables en MATLAB

Una característica útil de MATLAB es que las variables no necesitan ser dimensionadas antes de ser utilizadas. En MATLAB, las variables se generan de una manera automática una vez que son utilizadas. Estas variables permanecen en memoria hasta que se introduce la orden quit o la orden exit.

Como guardar variables cuando se sale de MATLAB

Cuando se escribe "exit" o "quit", todas las variables en MATLAB se pierden. Si se introduce la orden save antes de salir, todas las variables se pueden guardar en un archivo de disco llamado matlab.mat. Cuando se vuelva a entrar en MATLAB, la orden load recuperará el estado inicial del espacio de trabajo.

Ordenes y funciones matriciales en MATLAB que se emplean con frecuencia en la resolución de problemas de ingeniería de control.

MATLAB tiene muchas funciones predefinidas que pueden ser llamadas por el usuario para resolver diferentes tipos de problemas.

Ordenes y funciones matriciales usadas normalmente en la resolución de problemas de ingeniería de control.	Explicación de lo que hacen las órdenes y de lo que significan las funciones matriciales y las sentencias.
abs	Valor absoluto, magnitud compleja
angle	Angulo de fase
ans	Respuesta cuando no se asigna expresión
atan	Arco tangente
axis	Escalado manual de ejes
bode	Representación en el diagrama de Bode
clear	Borra el espacio de trabajo
clg	Borra la pantalla gráfica
computer	Tipo de computador
conj	Complejo conjugado
conv	Convolución, multiplicación
corrcof	Coeficientes de correlación
cos	Coseno
cosh	Coseno hiperbólico
cov	Covarianza
desconv	Deconvolución, división
det	Determinante
diag	Matriz diagonal
eig	Valores propios y vectores propios
exit	Finalizar programa
exp	Exponencial base e
expm	Matriz exponencial
eye	Matriz identidad
filter	Implementación de filtro directo
format long	Punto fijo escalado a 15 dígitos (ejemplo: 1.33333333333333)
format long e	Punto flotante a 15 dígitos (ejemplo: 1.33333333333333e+000)
format short	Punto fijo escalado a 5 dígitos (ejemplo: 1.3333)
format short e	Punto flotante a 5 dígitos (ejemplo: 1.3333e+000)
freqs	Respuesta en frecuencia de la transformada de Laplace
freqz	Respuesta en frecuencia de la transformada – z
grid	Dibujar rejilla
hold	Mantener la gráfica actual en la pantalla
i	$\sqrt{-1}$

imag	parte imaginaria
inf	Infinito (∞)
inv	Inversa
j	√-1
length	Longitud del vector
linspace	Vectores espaciados linealmente
log	Logaritmo natural
loglog	Gráficas x – y loglog
logm	Logaritmo matricial
logspace	Vectores espaciados logarítmicamente
log10	Logaritmo en base 10
lqe	Diseño del estimador lineal cuadrático
lqr	Diseño del regulador lineal cuadrático
max	Valor máximo
mean	Valor medio
median	Mediana
min	Valor mínimo
NaN	No es un número
nyquist	Respuesta en frecuencia en el diagrama de Nyquist
ones	Constante
pi	Pi ()
plot	Gráfica x – y lineal
polar	Gráfica polar
poly	Polinomio característico
polyfit	Ajuste de curva polinomial
polyvalm	Evaluación polinomial
polyvalm	Evaluación polinomial matricial
prod	Producto de elementos
quit	Finalizar el programa
rand	Generación de números aleatorios y matrices
rank	Calcula el rango de una matriz
real	Parte real
rem	Resto o módulo
residue	Expansión en fracciones parciales
rlocus	Diagrama de lugar de las raíces
roots	Raíces de un polinomio
semilogx	Diagrama semilogarítmicos x – y (eje – x logarítmico)
semilogy	Diagrama semilogarítmico x – y (eje – y logarítmico)
sign	Función signo
sin	Seno
sinh	Seno hiperbólico
size	Dimensión de una matriz
sqrt	Raíz cuadrada
sqrtm	Raíz cuadrada matricial
std	Desviación estándar

step	Respuesta a un salto unitario
sum	Suma de elementos
tan	Tangente
tanh	Tangente hiperbólica
text	Posicionador arbitrario de texto
title	Titulo de una gráfica
trace	Traza de una matriz
who	Lista de todas las variables actualmente en memoria
xlabel	Etiqueta en el eje x
ylabel	Etiqueta en el eje y
zero	Cero

B.2 Problemario

Tema 1. Función de transferencia

Dadas las siguientes funciones de transferencia obtener su expresión en polos y ceros.

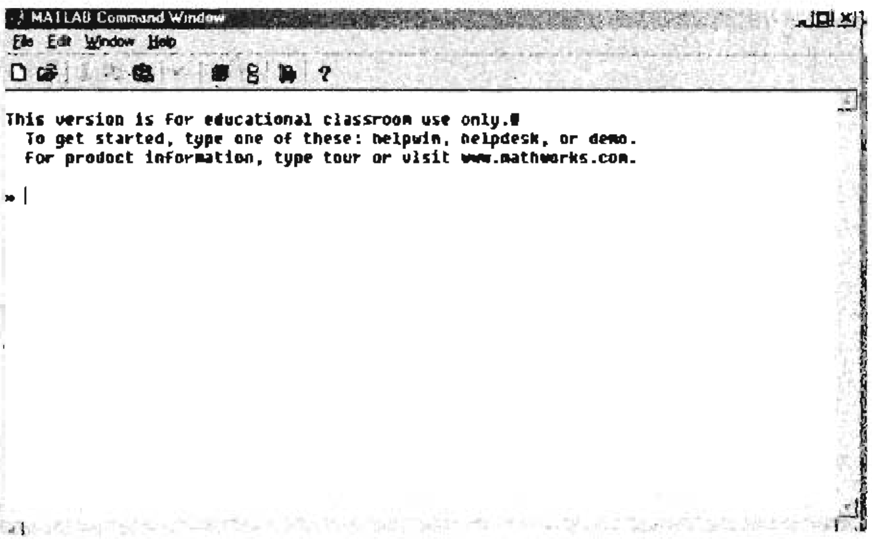
1.- $$G(s) = \frac{1}{S^2 + 5S + 1}$$

2.- $$G(s) = \frac{4}{S + 1}$$

3.- $$G(s) = \frac{4}{10S + 1}$$

4.- $$G(s) = \frac{(s + 2)}{S^4 + 3S^3 + 3S^2 + 4S + 1}$$

Se ingresa al programa por medio del menú inicio en la pantalla y aparecerá lo siguiente:



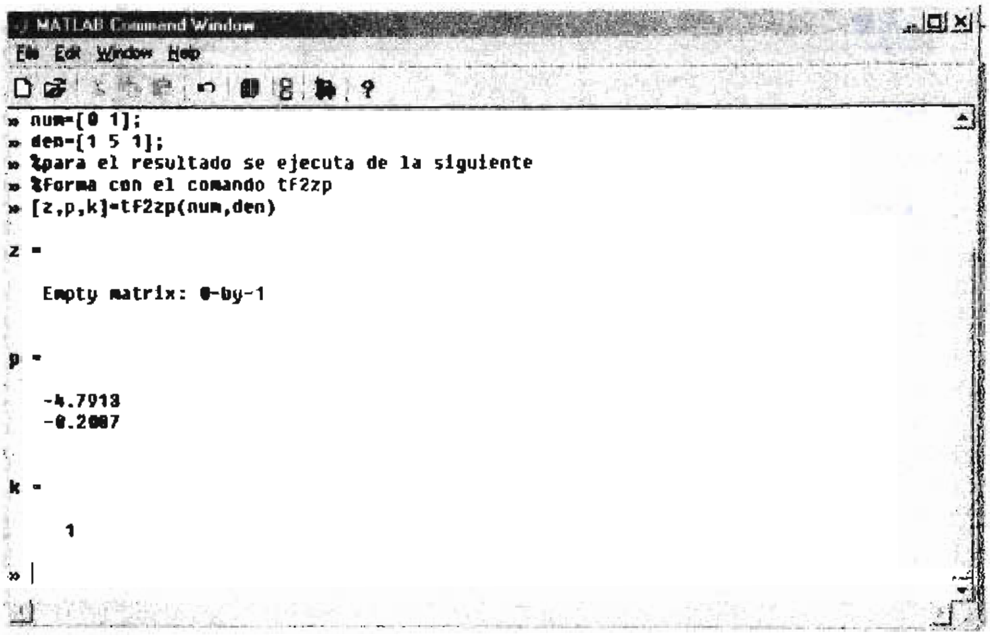
Para obtenerla se procede de la siguiente manera

Conversión de función de transferencia en cero, polos

Se introduce el numerador y el denominador de la función de transferencia del ejercicio 1

$$G(s) = \frac{1}{S^2 + 5S + 1}$$

De la siguiente manera, como se muestra en la pantalla

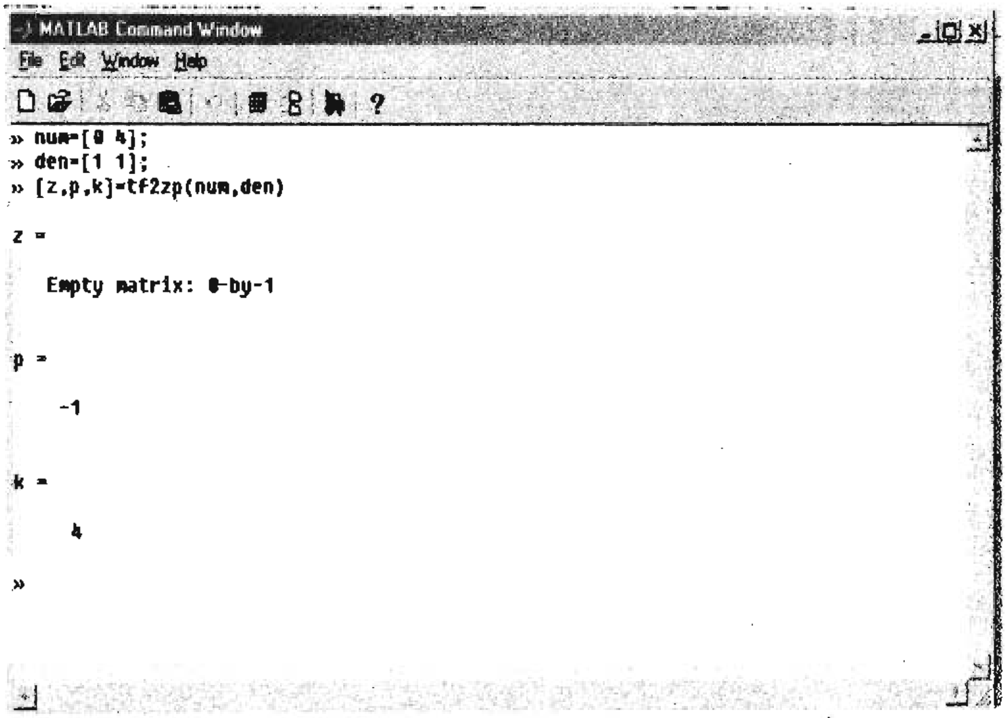


Con estos datos tenemos la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{(S + 4.7913)(S + 0.2087}$$

Problema 2

$$G(s) = \frac{4}{S+1}$$

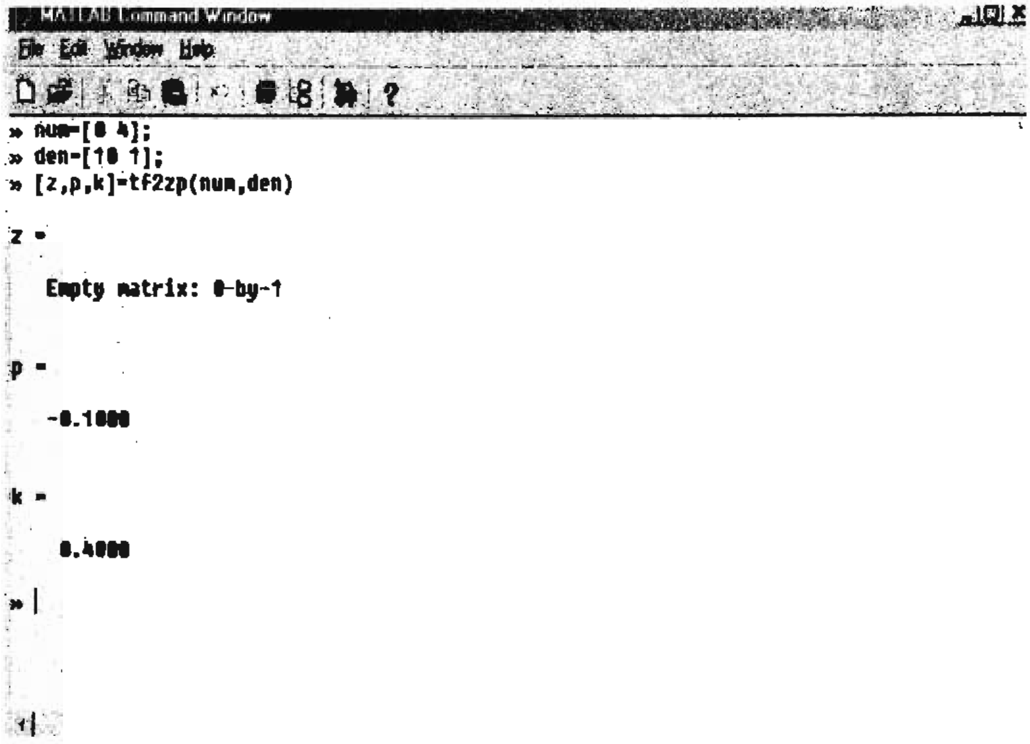


Con estos datos tenemos la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{4}{S+1}$$

Problema 3

$$G(s) = \frac{4}{10S + 1}$$

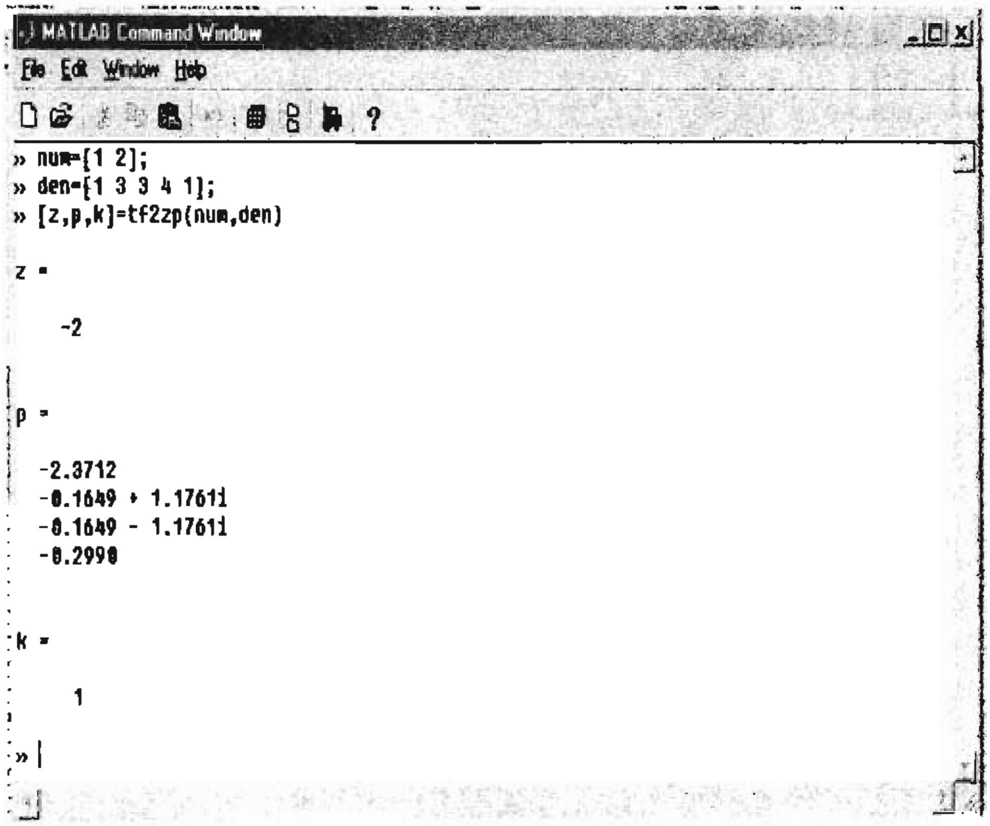


Con estos datos tenemos la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{0.4000}{S + 0.1000}$$

Problema 4.

$$G(s) = \frac{(s+2)}{S^4 + 3S^3 + 3S^2 + 4S + 1}$$



Con estos datos tenemos la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{(s+2)}{(S+2.3712)(S+0.1649+1.1761j)(S+0.1649-1.1761j)(S+0.2990)}$$

Tema 2. Transformada Inversa de Laplace

Problema 1. Dada la función de transferencia obtener su expansión en fracciones parciales

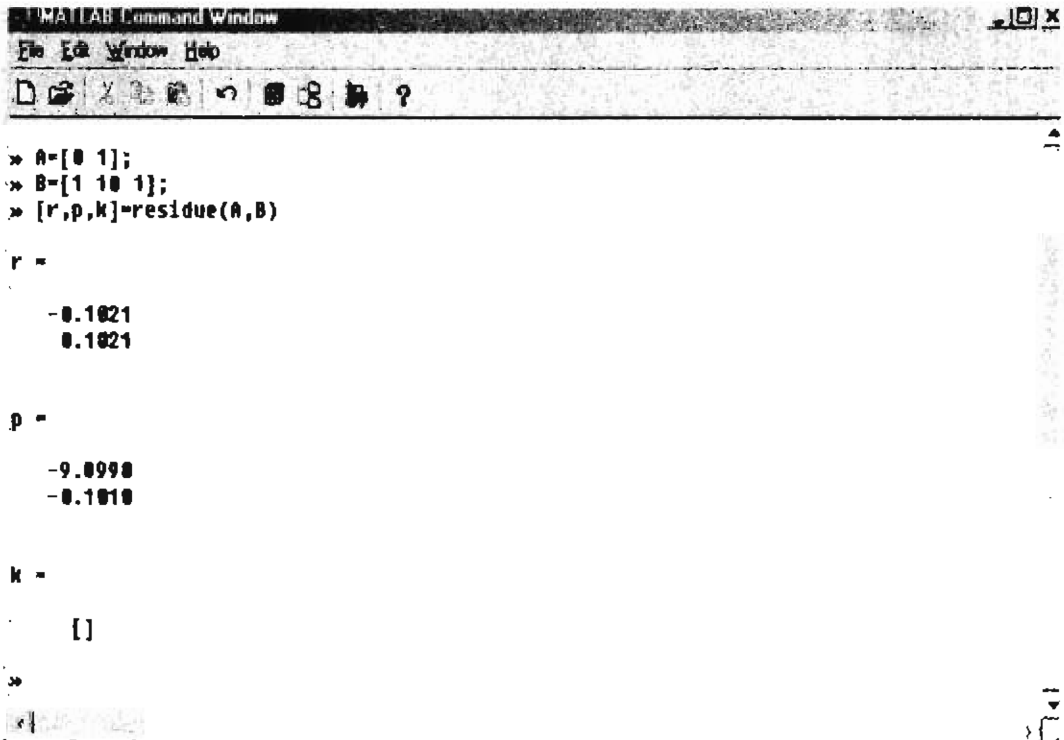
$$G(s) = \frac{1}{S(S+10)}$$

Se ejecuta el programa MATLAB y se introducen los datos de la función de transferencia.

Ahora utilizamos el comando

[r,p,k]= residue (num,den)

con esta instrucción nos despejará los residuos, los polos y los términos directos de descomposición en fracciones parciales.

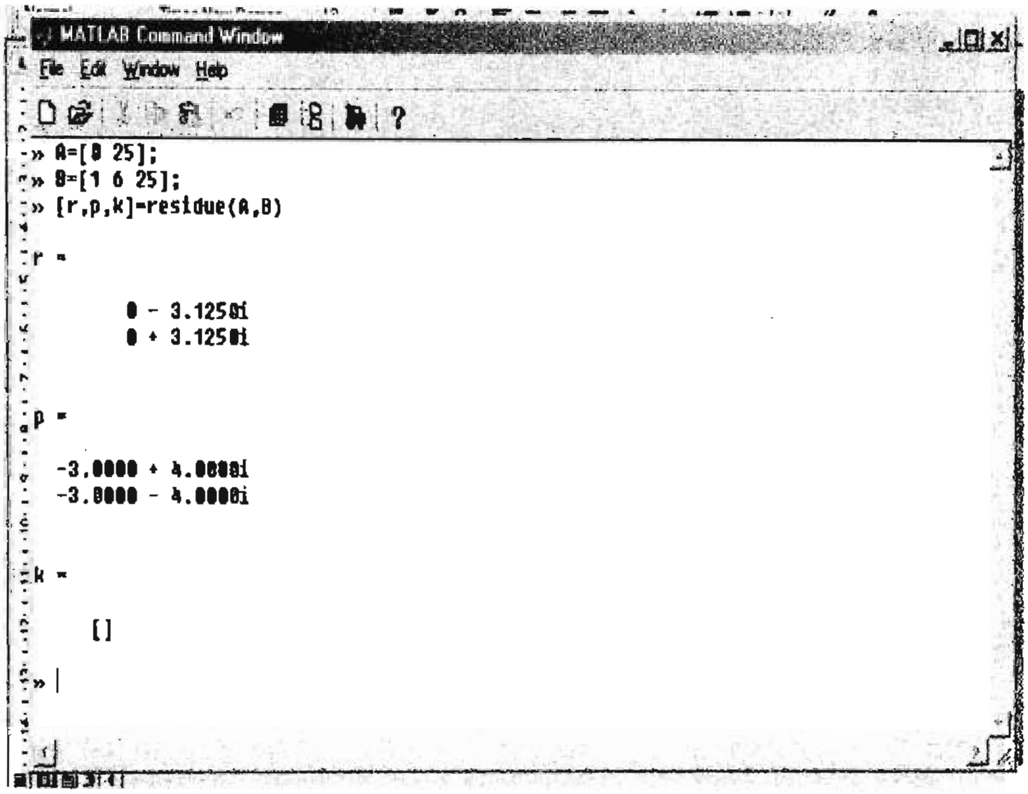


Las fracciones parciales son las siguientes

$$G(s) = \frac{-0.1021}{S+9.8990} + \frac{0.1021}{S+0.1010} + K$$

Problema 2. Dada la función de transferencia obtener su expansión en fracciones parciales

$$G(s) = \frac{25}{S^2 + 6S + 25}$$

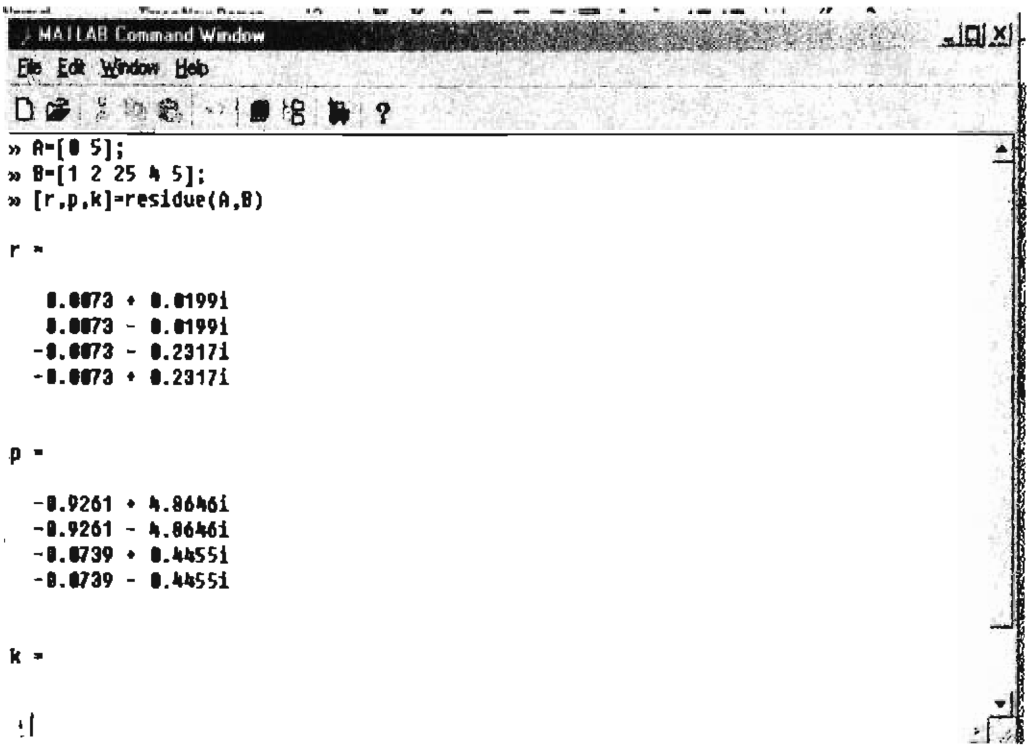


Las fracciones parciales son las siguientes

$$G(s) = \frac{-3.1250j}{S + 3.0000 - 4.0000j} + \frac{3.1250j}{S + 3.0000 + 4.0000j} + K$$

Problema 3. Dada la función de transferencia obtener su expansión en fracciones parciales

$$G(s)=\frac{5}{S^4+2S^3+25S^2+4S+5}$$



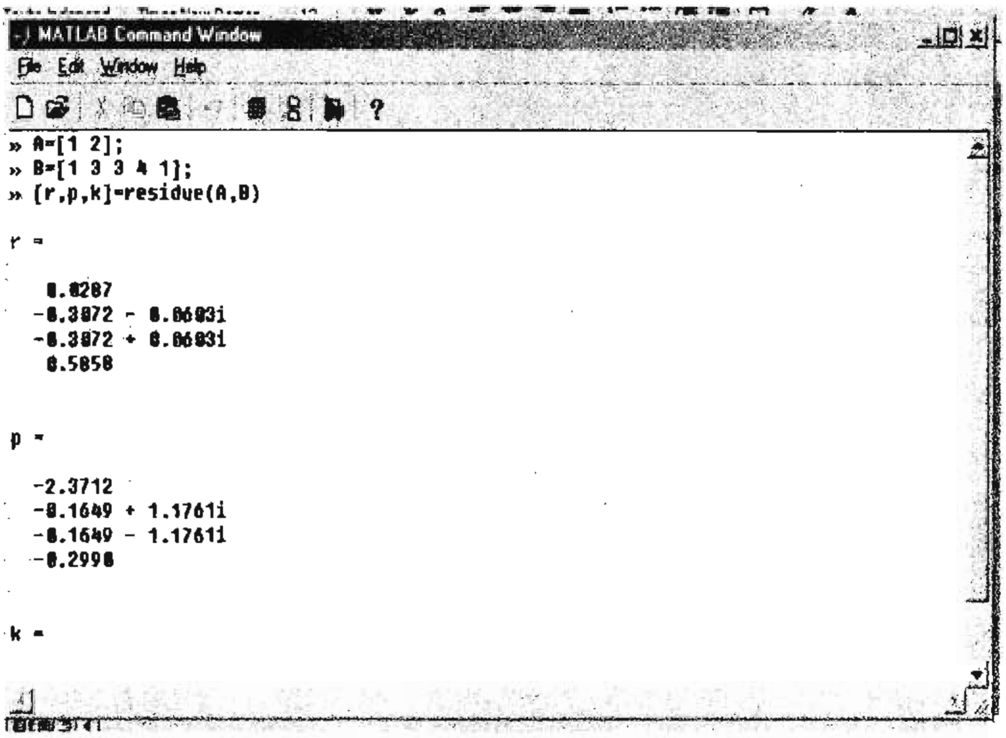
Las fracciones parciales son las siguientes

$$G(s)=\frac{0.0073+0.0199j}{S+0.9261-4.8646j}+\frac{0.0073-0.0199j}{S+0.9261+4.8646j}+\frac{-0.0073-0.2317j}{S+0.0739-0.4455j}$$

$$+\frac{-0.0073+0.2317j}{S+0.0739+0.4455j}+K$$

Problema 4. Dada la función de transferencia obtener su expansión en fracciones parciales

$$G(s) = \frac{(s+2)}{S^4 + 3S^3 + 3S^2 + 4S + 1}$$




```
» A=[1 2];
» B=[1 3 3 4 1];
» [r,p,k]=residue(A,B)

r =

   0.0287
  -0.3072 - 0.0603i
  -0.3072 + 0.0603i
   0.5858


p =

  -2.3712
  -0.1649 + 1.1761i
  -0.1649 - 1.1761i
  -0.2990


k =
```

Las fracciones parciales son las siguientes

$$G(s) = \frac{0.0287}{S+2.3712} + \frac{-0.3072-0.0603j}{S+0.1649-1.1761j} + \frac{-0.3072+0.0603j}{S+0.1649+1.1761j} + \frac{0.5858}{0.2990} + K$$

Tema 3. Estabilidad

En este tema se va a estudiar la estabilidad de los sistemas de control y la forma en que el paquete MATLAB muestra la estabilidad a partir de la función de transferencia.

Problema 1. Dada la función de transferencia obtener su estabilidad

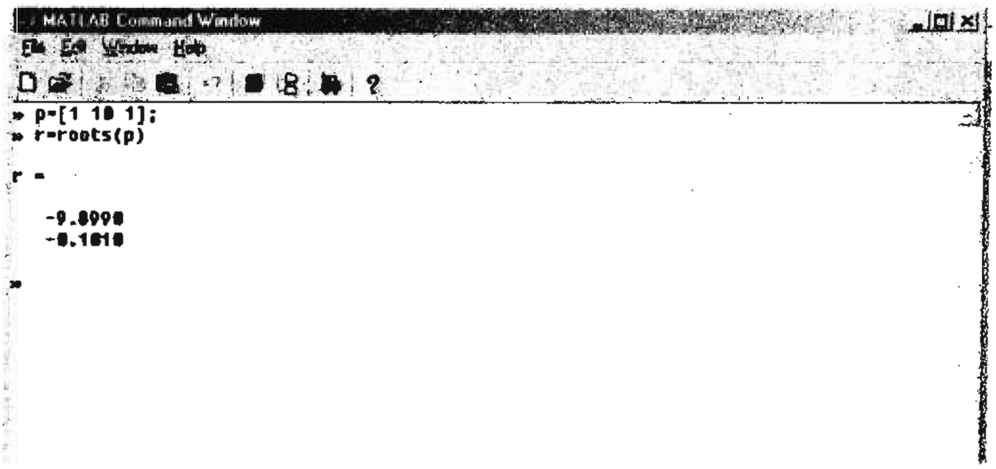
$$G(s) = \frac{1}{S(S+10)}$$

Primeramente determinamos la ecuación característica

$$F(s) = 1 + G(s) = s^2 + 10s + 1$$

Se obtendrán las raíces de esta ecuación por medio del comando

```
>>p=[1 10 1];
>>r = roots (p)
```



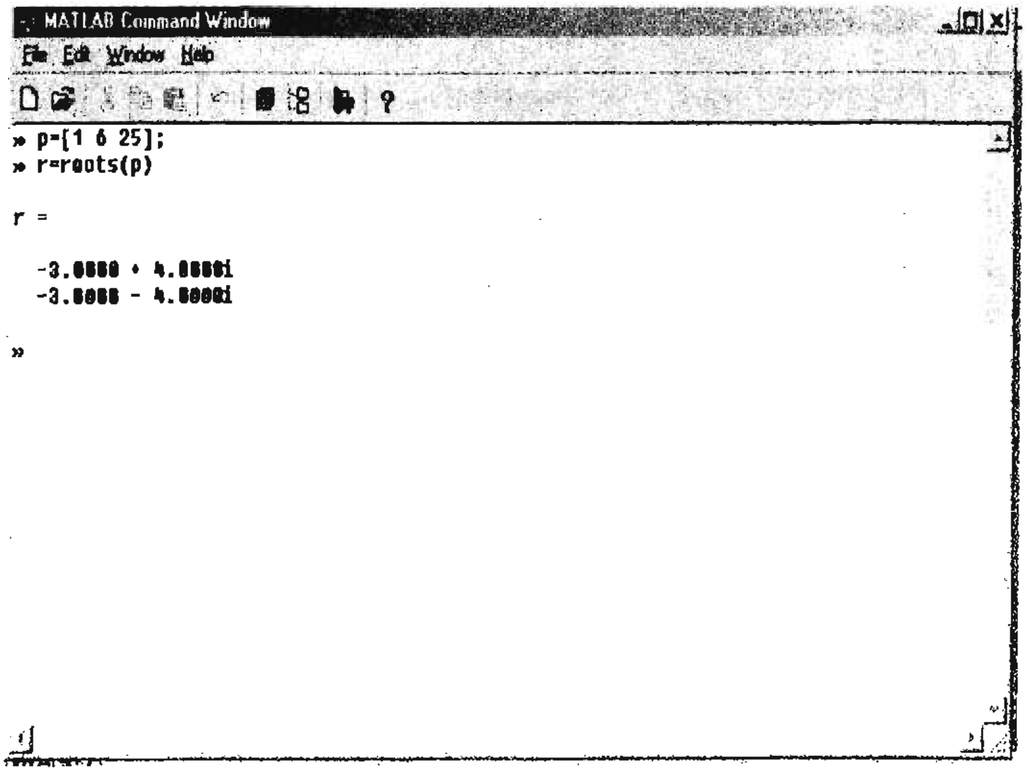
Como observamos que los signos de las raíces son negativos, concluimos que el sistema es absolutamente estable

Problema 2. . Dada la función de transferencia obtener su estabilidad

$$G(s) = \frac{25}{S^2 + 6S + 25}$$

Ecuación característica

$$F(s) = 25 + G(s) = s^2 + 6\,s + 25$$



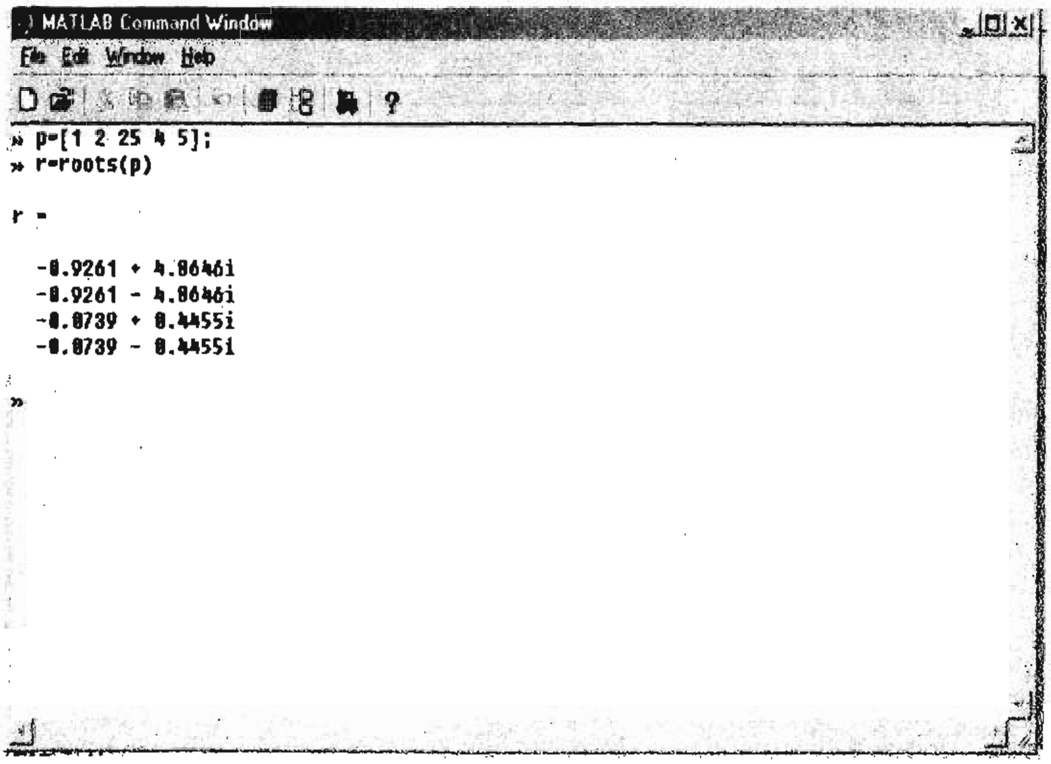
Como observamos que los signos de las raíces son negativos, concluimos que el sistema es absolutamente estable.

Problema 3. Dada la función de transferencia obtener su estabilidad

$$G(s) = \frac{5}{S^4 + 2S^3 + 25S^2 + 4S + 5}$$

Ecuación característica

$$F(s) = 5 + G(s) = s^4 + 2s^3 + 25s^2 + 4s + 5$$



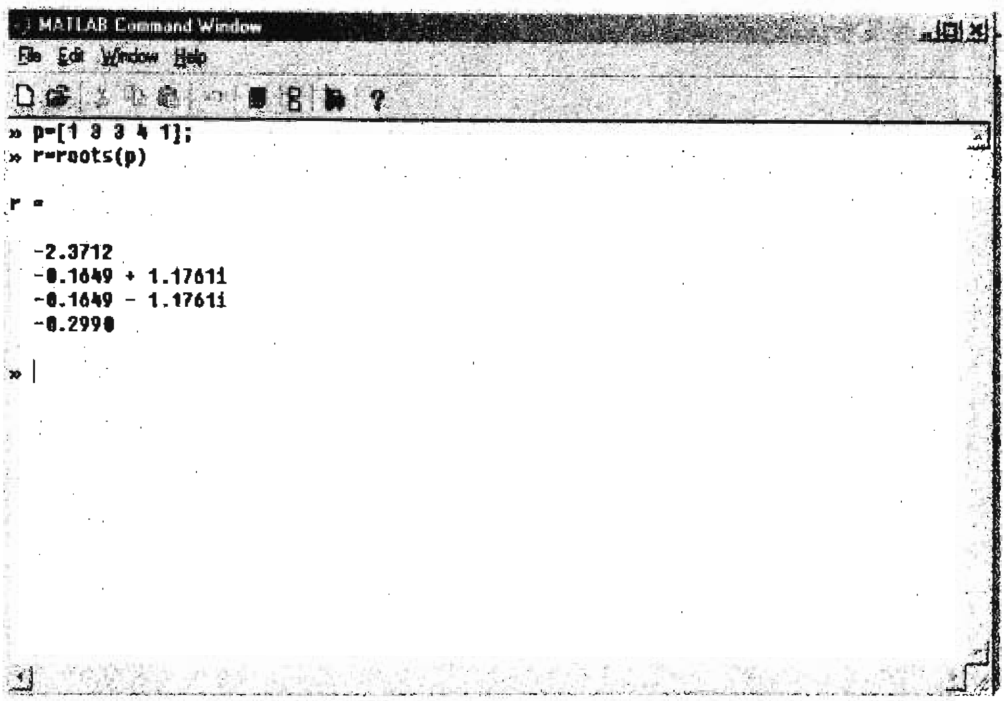
Como se observa que los signos de las raíces son negativos, concluimos que el sistema es absolutamente estable.

Problema 4. Dada la función de transferencia obtener su estabilidad.

$$G(s) = \frac{(s+2)}{S^4 + 3S^3 + 3S^2 + 4S + 1}$$

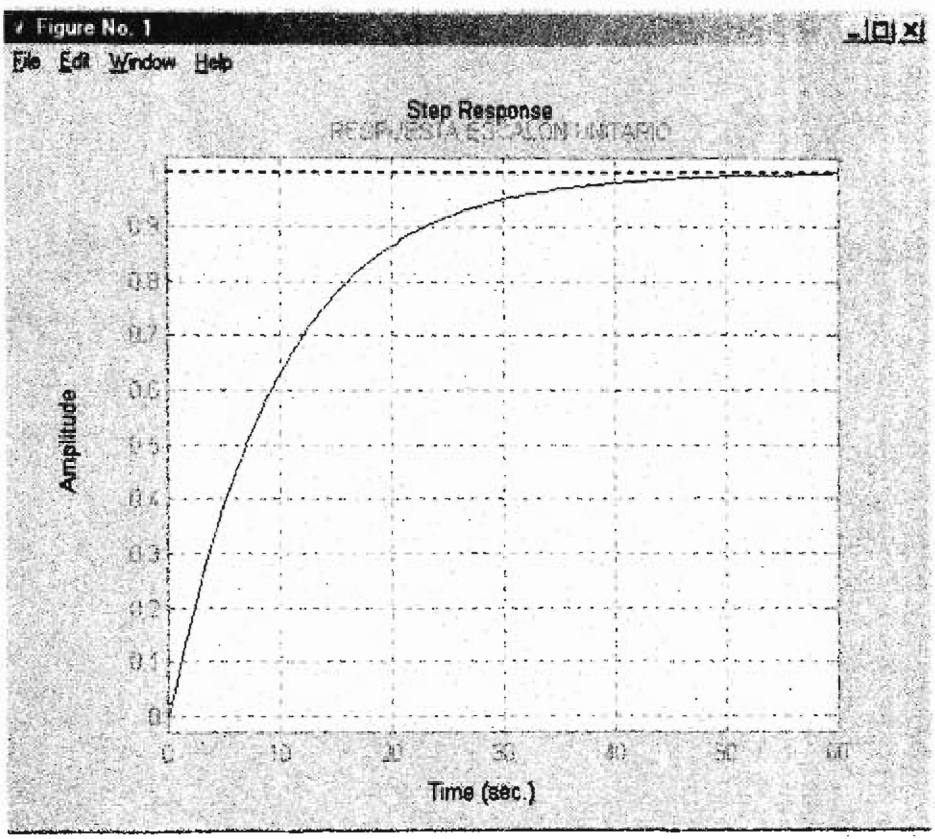
Ecuación característica

$$F(s) = (s+2) + G(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 4s + 1$$



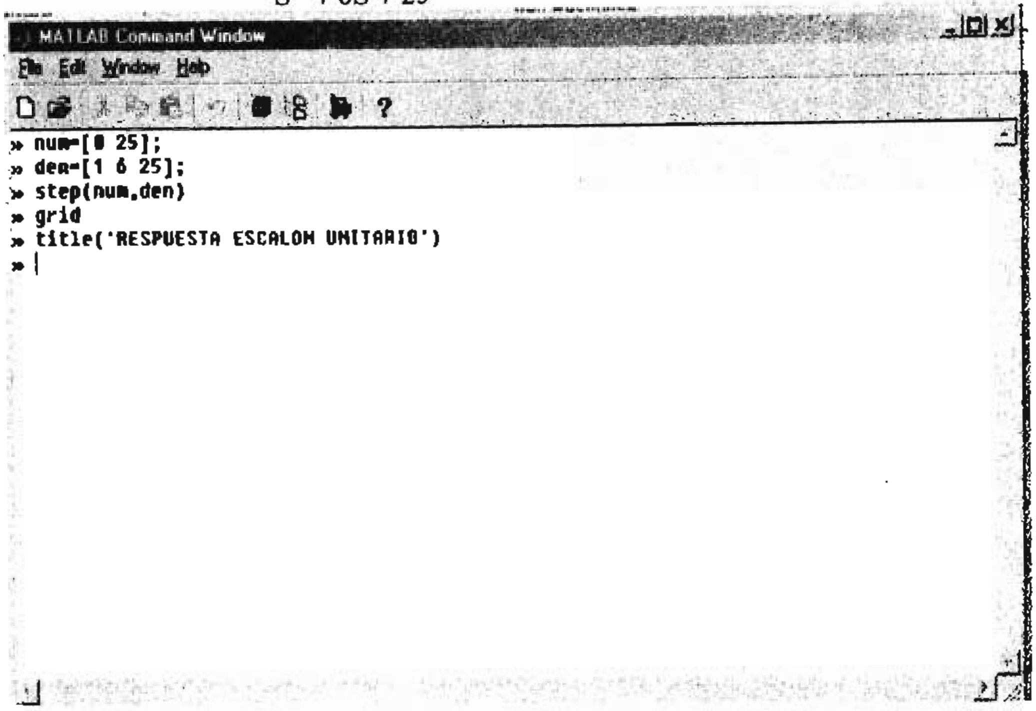
Como observamos que los signos de las raíces son negativos, concluimos que el sistema es absolutamente estable.

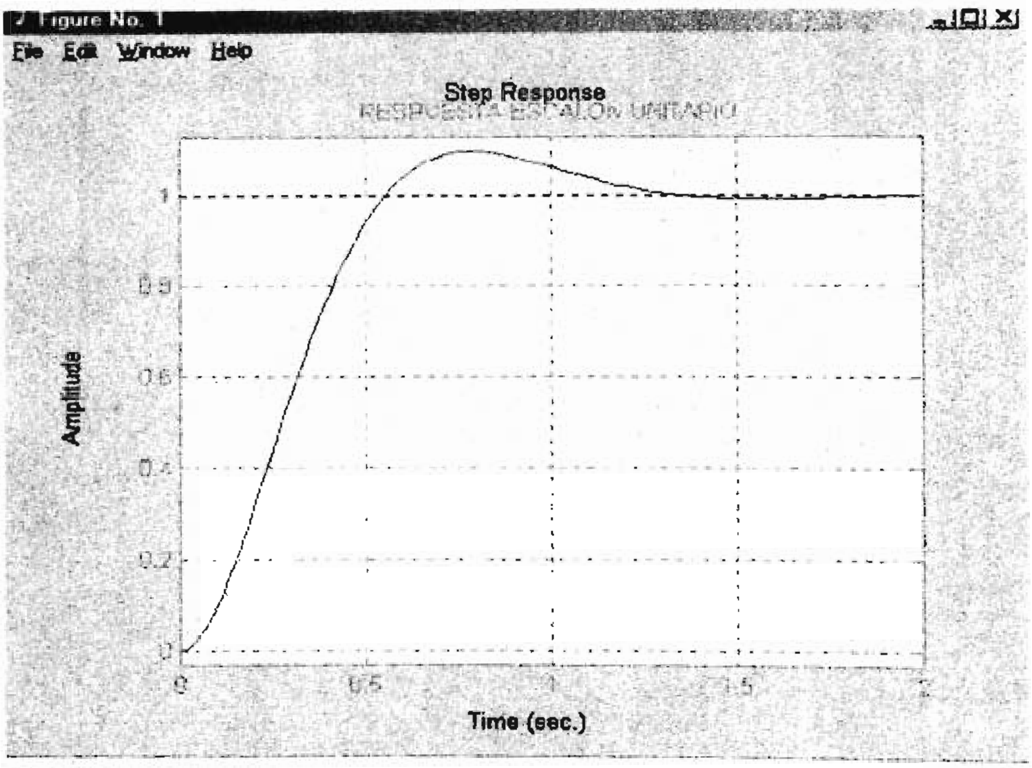
Y el resultado es la gráfica que se muestra a continuación



Problema 2. Obtenga la respuesta escalón unitario del siguiente sistema

$$G(s) = \frac{25}{S^2 + 6S + 25}$$





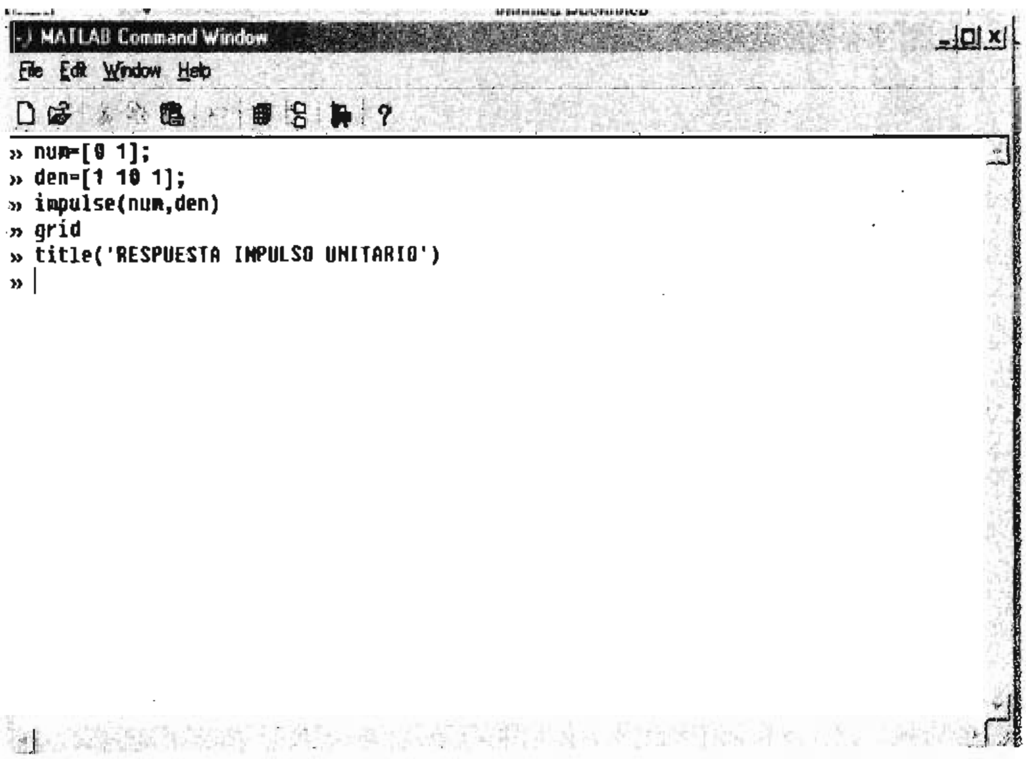
Problema 3. Obtenga la respuesta impulso unitario de un sistema de retroalimentación unitaria, cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{1}{S(S+10)}$$

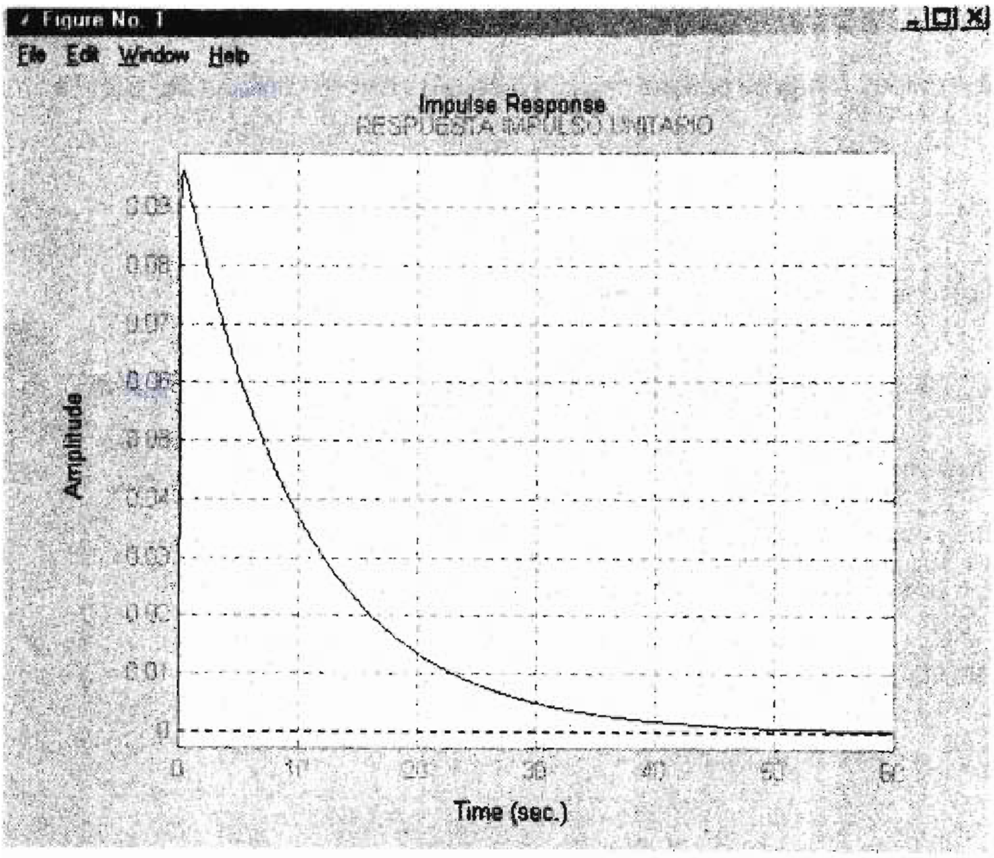
De acuerdo a lo antes mencionado en el problema 1 se tiene

$$G(s) = \frac{1}{S^2 + 10S + 1}$$

Para la realización se debe tomar en cuenta el comando impulse de acuerdo a la figura



La gráfica de respuesta es



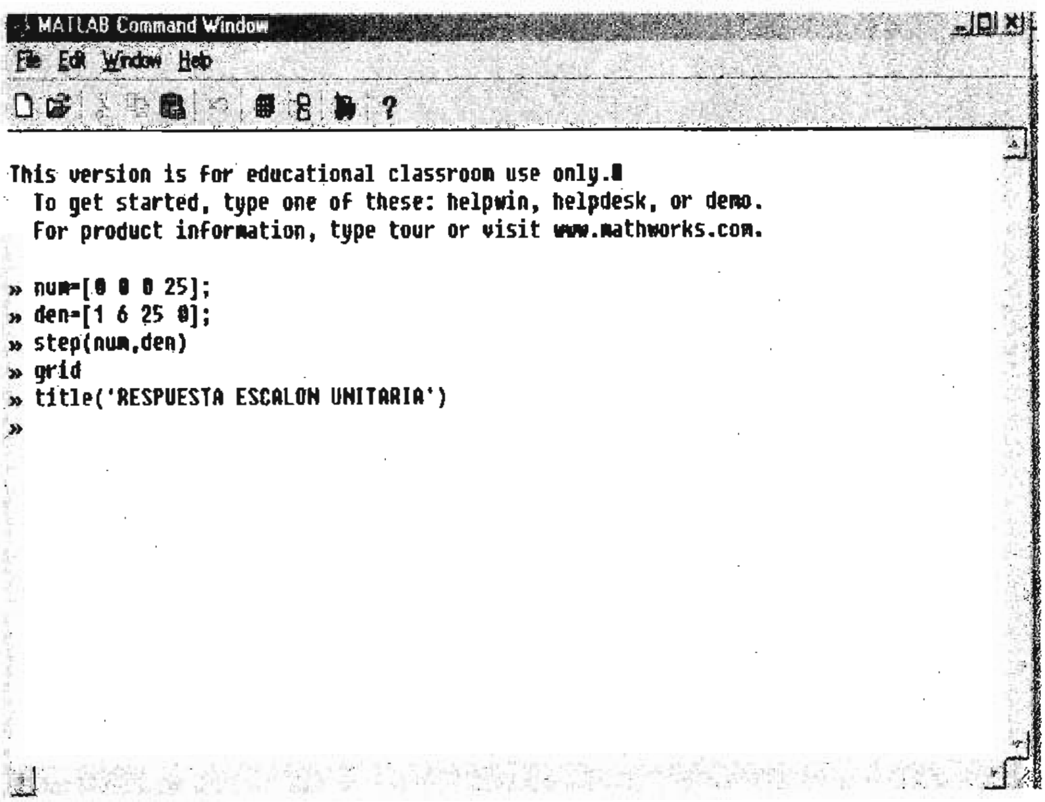
Problema 4. Obtenga la respuesta rampa unitaria del siguiente sistema

$$G(s) = \frac{25}{S^2 + 6S + 25}$$

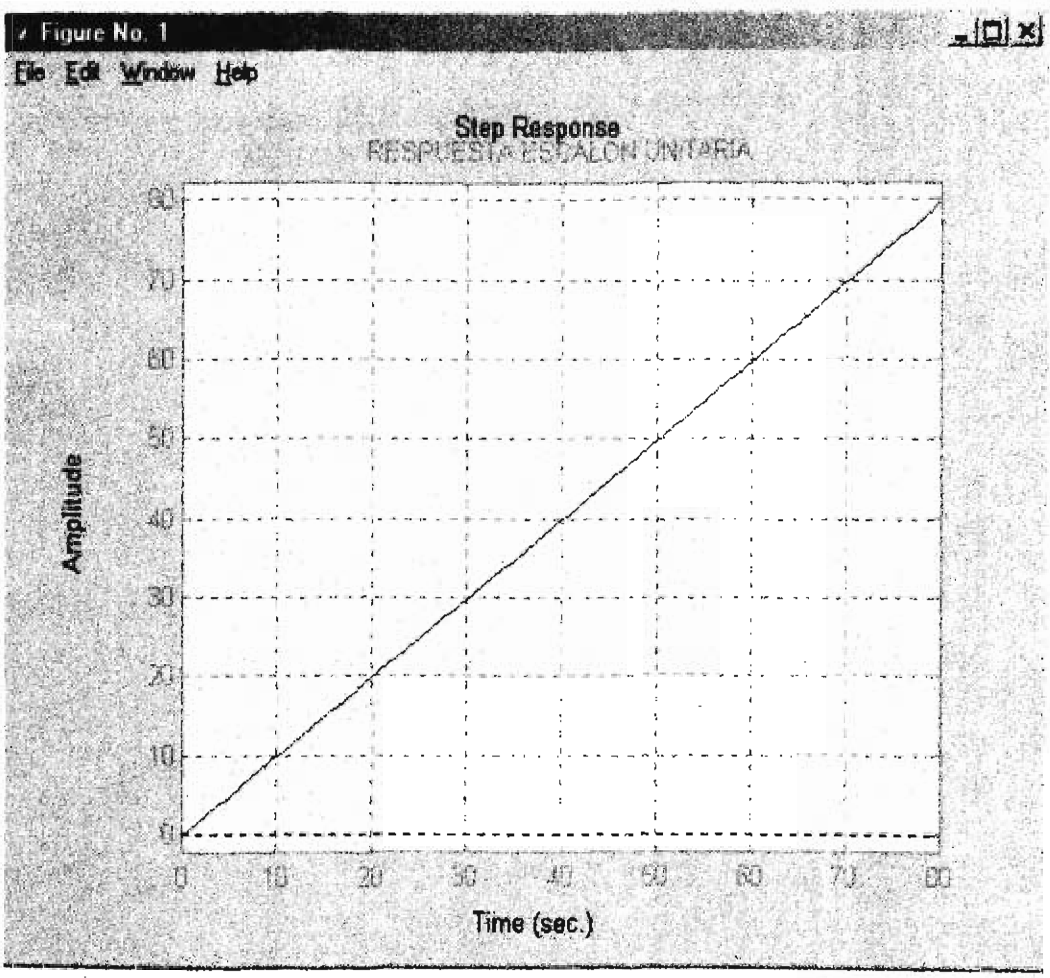
La respuesta rampa unitaria se obtiene como la respuesta escalón unitario de G(s) / s

$$\frac{G(s)}{S} = \frac{25}{S^3 + 6S^2 + 25S}$$

Se realiza como se muestra a continuación



La gráfica de respuesta es



BIBLIOGRAFÍA

D'azzo y Houpis, *Sistemas modernos de control,* Paraninfo, 1997.

Distefano III, *Retroalimentación y sistemas de control,* 2ª ed., Mc Graw-Hill, 1992.

Dorf, Richard C., *Sistemas modernos de control,* 2ª ed., Addison Wesley, 1989.

Kuo, Benjamín C., *Sistemas de control automático,* 7ª ed., Prentice Hall, 1996.

Matlab edición estudiante, Versión 4 guía de usuario, The math works inc., Prentice Hall, 1996.

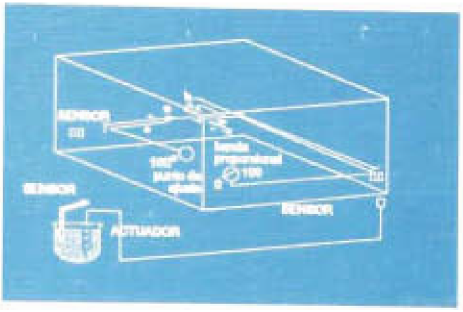
Ogata, Katsuhiko, *Ingeniería de control moderna,* 3ª ed., Prentice Hall, 1998.

Problemas de Ingeniería de control, Utilizando Matlab Katsuhuko Ogata, Prentice Hall, 1999.

Raven, Francis H., *Automatic control engineering,* 4ª ed., Mac graw-Hill, 1992.

Apuntes para la U.E.A.
sistemas de control I

Se terminó	La edición estuvo
de imprimir	a cargo
en el mes de julio	de la Sección
del año 2002	de Producción
en los talleres	y Distribución Editoriales
de la Sección	
de Impresión	Se imprimieron
y Reproducción de la	100 ejemplares
Universidad Autónoma Metropolitana	más sobrantes
Unidad Azcapotzalco	para reposición.



APUNTES PARA LA U.E.A. SISTEMAS DE CONTROL

ALVAREZ • SECCION DE IMPRESION

40204 $ 19.00

R. 40 $ 19.00

21-ANTOLOGIAS • 01-CBI

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Electrónica

Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales