Para citar o enlazar este recurso, use: http://hdl.handle.net/11191/7509

Análisis de observabilidad y controlabilidad para sistemas diferencialmente planos. *Aplicación a un sistema de oscilaciones de calcio*

Oscar Alejandro Esquivel Flores
Asesor: Dr. Ricardo Aguilar López

Universidad Autónoma Metropolitana
Maestría en ciencias de la computación
Julio de 2007

Contenido

1 Preliminares matemáticos y conceptos básicos **3**
- 1.1 Sistemas de ecuaciones diferenciales . . . 3
  - 1.1.1 Notación matricial . . . 4
  - 1.1.2 Existencia y unicidad de soluciones . . . 6
  - 1.1.3 Sistemas lineales . . . 7
  - 1.1.4 Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales . . . 8
- 1.2 Control . . . 11
  - 1.2.1 Modelos de sistemas a controlar . . . 12
  - 1.2.2 Objetivos de control . . . 13
  - 1.2.3 Técnicas básicas de control . . . 15
- 1.3 Controlabilidad y observabilidad . . . 21
  - 1.3.1 Controlabilidad . . . 21
  - 1.3.2 Observabilidad . . . 24

2 Espacio de estados y sistemas dinámicos **28**
- 2.1 Sistema dinámico . . . 28
  - 2.1.1 Concepto general de sistema dinámico . . . 28
- 2.2 Sistemas dinámicos diferenciables . . . 34
  - 2.2.1 Estados de equilibrio . . . 38
- 2.3 Propiedades de los sistemas . . . 39
  - 2.3.1 Linealización . . . 41
- 2.4 Sistemas lineales . . . 42
  - 2.4.1 Sistemas lineales generales . . . 42
- 2.5 Estabilidad y eigenmovimientos . . . 45
  - 2.5.1 Definiciones básicas de estabilidad . . . 46
  - 2.5.2 Análisis espectral de sistemas diferenciables lineales . . . 49

3 Álgebra diferencial y planitud **57**
- 3.1 Introducción . . . 57
- 3.2 Notación y definiciones básicas del álgebra diferencial . . . 59

4 Oscilaciones de calcio **66**
- 4.1 Introducción . . . 66
- 4.2 Modelo de oscilaciones de Ca^{2+} . . . 68

4.2.1 Mecanismos involucrados en el sistema 68
4.2.2 Modelo matemático 69
4.3 Bursting, caos y cuasiperiodicidad 71
4.4 Análisis de la dinámica libre del sistema de Ca^{2+} 72
4.5 Análisis de bifurcación 74
4.5.1 Variaciones paramétricas 74
4.5.2 Sistema parametrizado 76
4.6 Pruebas de controlabilidad y observabilidad 80

5 Control del sistema de oscilaciones de Ca^{2+} 82
5.1 Introducción 82
5.2 Diseño de una ley de control retroalimentado no lineal 83
5.3 Aplicación de la ley de control 85
5.3.1 Regulación de Ca^{2+} intracelular 86
5.3.2 Seguimiento de Ca^{2+} intracelular 86
5.3.3 Sincronización de calcio Ca^{2+} 87
5.3.4 Conclusiones 88

6 Observación del sistema de oscilaciones de Ca^{2+} 89
6.1 Enfoque algebráico diferencial del sistema 89
6.2 Sincronización usando observadores 91
6.2.1 Sincronización usando un esquema de modo deslizante . . 91
6.2.2 Sincronización usando un esquema Luenberger 93

A Códigos en Matlab 98
A.1 Sistema de ecuaciones diferenciales 98
A.2 Sistema de ecuaciones algebraicas 99
A.3 Análisis de bifurcación 99
A.3.1 Variación de parámetros β, k, k_f 99
A.3.2 Sistema parametrizado 100
A.4 Objetivos de control 100
A.4.1 Regulación 100
A.4.2 Seguimiento 101
A.4.3 Sincronización 102
A.5 Observación 104
A.5.1 Sincronización usando modo deslizante 104
A.5.2 Sincronización usando modo Luenberger 105

Capítulo 1

Preliminares matemáticos y conceptos básicos

1.1 Sistemas de ecuaciones diferenciales

En general, un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden puede expresarse de la forma

$$\begin{array}{c} x_1^{'} = f_1\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right) \\ x_2^{'} = f_2\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right) \\ \vdots \\ x_n^{'} = f_n\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right) \end{array} \tag{1.1}$$

donde f_1, f_2, ..., f_n son n funciones dadas definidas en alguna región D de un espacio Euclidiano de dimensión $(n+1)$ y $x_1, x_2, ..., x_n$ son n funciones desconocidas.

Resolver el sistema 1.1 significa encontrar un intervalo I sobre el eje t y n funciones $\varphi_1, ..., \varphi_n$ definida sobre I tales que:

- $\varphi_1^{'}\left(t\right), \varphi_2^{'}\left(t\right), ..., \varphi_n^{'}\left(t\right)$ existen para cada t en I,
- El punto $\left(t, \varphi_1\left(t\right), ..., \varphi_n\left(t\right)\right)$ permanece en D para cada t en I,
- $\varphi_j^{'}\left(t\right) = f_j\left(t, \varphi_1\left(t\right), \varphi_2\left(t\right), ..., \varphi_n\left(t\right)\right)$ para cada t en I donde $j = 1, ..., n$.

Naturalmente las funciones f_j pueden ser reales o complejas. Para nuestro estudio consideraremos el caso real. Una interpretación geométrica de las soluciones es inmediata para el caso en el que $n = 1$, una solución de 1.1(esto es, un conjunto de funciones $\varphi_1, ..., \varphi_n$ sobre el intervalo I) puede ser vista como una curva en la región D de dimensión $n+1$, con cada punto p sobre la curva con coordenadas $\left(t, \varphi_1\left(t\right), \varphi_2\left(t\right), ..., \varphi_n\left(t\right)\right)$ y con $\varphi_i^{'}\left(t\right)$ la componente del vector tangente a la curva en la dirección x_i. Esta interpretación es familiar para $n = 1$ y la curva en D, solución de 1.1, se le conoce como *curva solución.*

El *problema de valor inicial* asociado con un sistema como 1.1 es el problema de encontrar una solución(en el sentido que mencionamos antes) que pase a través del punto $p_0 = \left(t_0, x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ en D.

En general, no es posible resolver 1.1 excepto en casos especiales. Sin embargo es deseable obtener tanta información como sea posible acerca del comportamiento de las soluciones de los sistemas analizados.

1.1.1 Notación matricial

Sea la ecuación diferencial de orden n

$$x^{(n)} = g\left(t, x, x^{'}, ..., x^{(n-1)}\right) \tag{1.2}$$

puede ser reducida a un sistema de n ecuaciones de primer orden por medio del cambio de variable $x_1 = x$, $x_2 = x^{'}$, ..., $x_n = x^{(n-1)}$. Así, 1.2 es equivalente al sistema

$$\begin{aligned}
x_1^{'} &= x_2 \\
x_2^{'} &= x_3 \\
&\vdots \\
x_{n-1}^{'} &= x_n \\
x_n^{'} &= g\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right)
\end{aligned}$$

el cual es un caso especial de 1.1.

Como ejemplo tomemos el sistema de ecuaciones de segundo orden

$$\begin{aligned}
m_1 x^{''} &= -k_1 x + k_2\left(y - x\right) \\
m_2 y^{''} &= -k_2\left(y - x\right)
\end{aligned}$$

que describe el desplazamiento de dos masas en el tiempo t que están suspendidas verticalmente por un resorte desde un soporte rígido y conectadas entre sí por otro resorte con condiciones iniciales $x_1\left(0\right)$, $x_1^{'}\left(0\right)$, $y_2\left(0\right)$, $y_2^{'}\left(0\right)$. Este sistema puede ser reescrito como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden haciendo la sustitución $x_1 = x$, $x_2 = x^{'}$, $y_1 = y$, $y_2 = y^{'}$; expresando[1] el sistema en términos de x_i obtendremos el sistema equivalente

$$\begin{aligned}
x_1^{'} &= x_2 \\
x_2^{'} &= -\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_1}\right) x_1 + \frac{k_2}{m_1} x_3 \\
x_3^{'} &= x_4 \\
x_4^{'} &= -\frac{k_2}{m_2}\left(x_3 - x_1\right)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Observemos que el sistema anterior puede ser descrito totalmente por la

[1] Considérese $y_1 = x_3$, $y_2 = x_4$.

matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_1}\right) & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & 0 \end{bmatrix}$$

además se definen los vectores columna

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix}$$

con lo que el sistema 1.3 puede ser escrito de forma compacta

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

donde la parte derecha es el producto usual matriz-vector. Notemos que siempre es posible representar un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden como una ecuación diferencial vectorial de primer orden.

Definamos a $\mathbf{x}$ como un punto de dimensión n sobre $\mathbb{R}$ con coordenadas $(x_1, x_2, ..., x_n)$, y las funciones

$$\widehat{f}_j(t, \mathbf{x}) = f_j(t, x_1, x_2, ..., x_n) \quad (j = 1, ..., n)$$

así, el sistema 1.1 puede ser escrito de la forma

$$\begin{array}{c} x_1' = \widehat{f}_1(t, \mathbf{x}) \\ x_2' = \widehat{f}_2(t, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ x_n' = \widehat{f}_n(t, \mathbf{x}) \end{array} \tag{1.4}$$

Observemos que las funciones $\widehat{f}_1, ..., \widehat{f}_n$ pueden ser tomadas como n componentes del vector de funciones $\mathbf{f}$ definidas por

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \left(\widehat{f}_1(t, \mathbf{x}), ..., \widehat{f}_n(t, \mathbf{x})\right)$$

y de manera similar

$$\mathbf{x}' = \left(x_1', ..., x_n'\right)$$

Así, el sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden 1.1 puede ser expresado de forma compacta como

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{1.5}$$

Encontrar una solución para el sistema anterior significa hallar un intervalo $I \in \mathbb{R}$ y una función vectorial $\boldsymbol{\varphi}$ definida sobre I tal que:

- $\boldsymbol{\varphi}^{'}(t)$ exista para cada t en I,
- el punto $(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ permanezca en D para cada t en I,
- $\boldsymbol{\varphi}^{'}(t) = \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ para cada t en I.

1.1.2 Existencia y unicidad de soluciones

Desafortunadamente no siempre es posible encontrar una solución en términos de funciones elementales, por ello es importante probar que ciertas clases de ecuaciones diferenciales efectivamente tienen solución, este problema se conoce como *problema de existencia.* Ligado al problema de existencia se encuentra el *problema de unicidad*, el cual significa que bajo un conjunto particular de condiciones iniciales debe resultar exactamente en una solución.

Teorema 1 *Sea* $\mathbf{f}$ *una función vectorial con* n *componentes definidas en una región* D *de dimensión* $n+1$ *y sean los vectores* $\mathbf{f}$, $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k}$ *con* $k = 1, ..., n$ *continuos en* D. *Entonces, dado cualquier punto* $\left(t_0, \mathbf{x}^0\right)$ *en* D, *existe una única solución* $\boldsymbol{\varphi}$ *del sistema 1.5 que satisface la condición* $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{x}^0$. *La solución existe en cualquier intervalo* I *que contenga a* t_0 *para el cual los puntos* $(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$, *con* t *en* I, *permanecen en* D. *Además, la solución* $\boldsymbol{\varphi}$ *es una función continua para* $\left(t, t_0, \mathbf{x}^0\right)$.

En particular, nos interesan las soluciones de ecuaciones diferenciales de orden n de la forma

$$x^{(n)} = g\left(t, x, x^{'}, ..., x^{(n-1)}\right)$$

donde g es una función definida en alguna región D en el espacio $(t, x_1, ..., x_n)$ dimensión $(n+1)$.

Un resultado importante sobre existencia y unicidad para este tipo de ecuaciones diferenciales es el siguiente

Teorema 2 *Sean* $g, \dfrac{\partial g}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial g}{\partial x_n}$ *funciones continuas en una region* D *y sea* $p_0 = \left(t_0, x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ *un punto dado dentro de* D. *Entonces existe un intervalo que contiene a* t_0 *y exactamente una solución* φ, *definida en este intervalo, de la ecuación diferencial* $x^{(n)} = g\left(t, x, x^{'}, ..., x^{(n-1)}\right)$ *que pasa a través de* $\left(t_0, x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, *esto es que la solución* φ *satisface las condiciones iniciales* $\varphi(t_0) = x_1^0$, $\varphi^{'}(t_0) = x_2^0$, $\varphi^{(n-1)}(t_0) = x_n^0$. *La solución existe para aquellos valores de* t *para los cuales los puntos* $\left(t, \varphi(t), \varphi^{'}(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t)\right)$ *están en* D. *Además, la solución* φ *es una función continua de* $(n+2)$ *variables* $t, t_0, x_1^0, ..., x_n^0$.

1.1.3 Sistemas lineales

Un sistema lineal de ecuaciones diferenciales es aquel sistema $\mathbf{x}^{'} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ en el cual $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ es lineal en los componentes de $\mathbf{x}$. Consideremos por ejemplo el sistema

$$\begin{aligned} x_1^{'} &= x_1 - tx_2 + e^t \\ x_2^{'} &= t^2 x_1 + x_3 \\ x_3^{'} &= x_1 + x_2 - x_3 + 2e^{-t} \end{aligned} \tag{1.6}$$

el cual es lineal en x_1, x_2, x_3 y tiene la forma $\mathbf{x}^{'} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \left(x_1 - tx_2,\ t^2 x_1 + x_3,\ x_1 + x_2 - x_3\right) + (e^t,\ 0,\ 2e^{-t})$. Observemos que el vector $\left(x_1 - tx_2,\ t^2 x_1 + x_3,\ x_1 + x_2 - x_3\right)$ puede ser representado como el producto $A(t)\,\mathbf{x}$ de una matriz por un vector con

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & -t & 0 \\ t^2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y $\mathbf{x}$ es el vector columna $(x_1, x_2, x_3)^{\intercal}$. Así, el sistema 1.6 puede ser escrito como $\mathbf{x}^{'} = A(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$, donde $\mathbf{g}(t)$ es el vector columna$(e^t,\ 0,\ 2e^{-t})^{\intercal}$.

Más generalmente un sistema $\mathbf{x}^{'} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ con $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ lineal en los componentes de $\mathbf{x}$, tiene la forma

$$\begin{aligned} x_1^{'} &= a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + ... + a_{1n}(t)\,x_n + g_1(t) \\ x_2^{'} &= a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + ... + a_{2n}(t)\,x_n + g_2(t) \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ x_n^{'} &= a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + ... + a_{nn}(t)\,x_n + g_n(t) \end{aligned}$$

y puede ser representado como

$$\mathbf{x}^{'} = A(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \tag{1.7}$$

donde

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}$ es el vector columna con componentes $x_1, x_2, ..., x_n$.

Existencia y unicidad de sistemas lineales

Asumamos que en el sistema 1.7 la matriz $A(t)$ y el vector $\mathbf{g}(t)$ son continuos sobre un intervalo I. Entonces la función vectorial $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = A(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ es continua para $(t, \mathbf{x})$ en D, donde D es la banda $\{(t, \mathbf{x}) \,|t \in I, |y| < \infty\}$, y $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k} = (a_{1k}(t), a_{2k}(t), ..., a_{nk}(t))^{\intercal}$ con $k = 1, ..., n$. Por tanto $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k}$ también es continua en D para $k = 1, ..., n$.

Por el teorema (1) la ecuación diferencial 1.7 tiene una única solución $\boldsymbol{\varphi}(t)$ que pasa a través de algún punto dado $\left(t, \mathbf{x}^0\right)$ con t_0 en I y esta solución existe en un intervalo que contiene al punto t_0 en su interior. La solución $\boldsymbol{\varphi}$ existe en algún intervalo J que contiene al punto t_0 y está dentro del intervalo I para el cual los puntos $(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ con t en J permanecen en D. La solución existe en todo el intervalo I (finito o infinito) y puede probarse que $|\boldsymbol{\varphi}(t)|$, la norma de la solución $\boldsymbol{\varphi}$, está acotada por una constante que no depende de t(acotamiento a priori). Esto será posible siempre si I es un intervalo cerrado y acotado.

Teorema 3 *Si $A(t)\mathbf{x}, \mathbf{g}(t)$ son continuas sobre algún intervalo $a \leq t \leq b$, si $a \leq t_0 \leq b$, y si $\left|\mathbf{x}^0\right| < \infty$, entonces el sistema 1.7 tiene una única solución $\boldsymbol{\varphi}(t)$ que satisface la condición inicial $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{x}^0$ y existe en el intervalo $a \leq t \leq b$.*

Una interpretación geométrica del teorema anterior es el establecer que la solución permanece en una "caja" de dimensión $(n+1)$ de base $a \leq t \leq b$ y altura $2|\mathbf{x}|$, donde $|\mathbf{x}| \leq k_1 \exp[k_2(b-a)]$.

Notemos que si $A(t)\mathbf{x}$, $\mathbf{g}(t)$ en 1.7 son continuas para $-\infty < t < \infty$, entonces las propiedades mencionadas anteriormente se mantienen para cada subintervalo finito, en este caso la solución $\boldsymbol{\varphi}(t)$ no necesita permanecer acotada cuando $t \to \pm\infty$. Lo mismo sucede si $A(t)\mathbf{x}$ y $\mathbf{g}(t)$ son continuas en $a < t < b$, pero no necesariamente en $a \leq t \leq b$.

El teorema anterior nos conduce al siguiente

Corolario 1 *Si $A(t)\mathbf{x}$ y $\mathbf{g}(t)$ son continuas en un intervalo I abierto o cerrado, finito o infinito, y si $t_0 \in I$, $\left|\mathbf{x}^0\right| < \infty$, entonces 1.7 tiene una única solución $\boldsymbol{\varphi}(t)$ que satisface la condición inicial $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{x}^0$ y existe en I.*

1.1.4 Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales

Sistemas lineales homogéneos

Para discutir la estructura de las soluciones del sistema 1.7 comenzaremos con el sistema lineal homogéneo

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} \tag{1.8}$$

Asúmase que la matriz $A(t)$ de dimensión $n \times n$ es continua en el intervalo I y por el teorema (3) se sigue inmediatamente que dado cualquier punto $\left(t_0, \mathbf{x}^0\right)$, $t_0 \in I$, existe una y sólo una solución $\boldsymbol{\varphi}$ de la ecuación anterior tal que $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{x}^0$. En particular, dado el punto[2] (t_0, θ) y $t_0 \in I$, 1.8 tiene un *única solución $\boldsymbol{\varphi} = \theta$ en I*, que satisface la condición inicial $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \theta$. Por inspección notamos que θ siempre es una solución de la ecuación diferencial planteada y por teorema anterior es la única solución que pasa a través de (t_0, θ).

Para obtener la forma de las soluciones del sistema lineal homogéneo 1.8 observamos que si $\boldsymbol{\varphi}_1$ y $\boldsymbol{\varphi}_2$ son dos soluciones cualesquiera de 1.8 en un intervalo

[2] Denotaremos a $\theta \in \mathbb{R}^n$ como el vector columna cuyas componentes son todos cero.

I, y c_1 y c_2 son dos constantes cualesquiera, entonces la linealidad de 1.8 nos conducea a

$$\left(c_1\boldsymbol{\varphi}_1 + c_2\boldsymbol{\varphi}_2\right)' = c_1\boldsymbol{\varphi}_1' + c_2\boldsymbol{\varphi}_2' = c_1 A\boldsymbol{\varphi}_1 + c_2 A\boldsymbol{\varphi}_2 = A\left(c_1\boldsymbol{\varphi}_1 + c_2\boldsymbol{\varphi}_2\right)$$

esto es, $c_1\boldsymbol{\varphi}_1 + c_2\boldsymbol{\varphi}_2$ es también un solución de 1.8 en I. Las soluciones de 1.8 forman un espacio vectorial V sobre $\mathbb{C}$.

El resultado anterior se expresa de forma general por medio del siguiente

Teorema 4 *Si $A(t)$ es un matriz compleja de dimensión $n \times n$ y continua sobre un intervalo I, entonces la solución del sistema*

$$\mathbf{x}' = A(t)\,\mathbf{x}$$

sobre I forman un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{C}$.

De lo anterior puede decirse que las soluciones $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, .., \boldsymbol{\varphi}_n$ de 1.8 generan el espacio vectorial V, son linealmente independientes y forman una base del espacio solución V con dimensión n. Las soluciones $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, .., \boldsymbol{\varphi}_n$ linealmente independientes forman un *conjunto fundamental de soluciones*[3].

Una interpretación del teorema anterior es la siguiente: Una matriz de n renglones cuyas columnas son soluciones de 1.8 es llamada *matriz solución.* Si se forma una matriz de dimensión $n \times n$ usando las n soluciones linealmente independientes como columnas, obtendremos una matriz solución sobre I, cuyas columnas serán soluciones linealmente independientes de 1.8 sobre I. Una matriz solución cuyas columnas son linelamente independientes sobre I es llamada *matriz fundamental* de 1.8 sobre I. Denotaremos la matriz fundamental, formada por las soluciones $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, .., \boldsymbol{\varphi}_n$ como columnas, por Φ . Así, cualquier combinación lineal $\boldsymbol{\psi}$ de la forma

$$\boldsymbol{\psi}(t) = c_1\boldsymbol{\varphi}_1(t) + c_2\boldsymbol{\varphi}_2(t) + ... + c_n\boldsymbol{\varphi}_n(t)$$

para cada $t \in I$ puede expresarse como

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \Phi(t)\,\mathbf{c}$$

donde $\mathbf{c}$ es el vector columna con componentes $c_1, c_2, ..., c_n$.

Algunos resultados importantes sobre la matriz fundamental son los siguientes

Teorema 5 (Fórmula de Abel) *Si Φ es una solución de 1.8 sobre I y si t_0 es cualquier punto de I , entonces*

$$\det\Phi(t) = \det\Phi(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n} a_{jj}(s)\,ds\right] \tag{1.9}$$

para cada t en I.

[3] Es claro que existe una infinidad de conjuntos fundamentales de soluciones debido a las distintas combinaciones lineales de $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, .., \boldsymbol{\varphi}_n$.

Teorema 6 *Una matriz solución* Φ *de 1.8 sobre un intervalo* I *es una matriz fundamental de 1.8 sobre* I *si y sólo si* $\det \Phi(t) \neq 0$ *para cada* t *en* I.

Teorema 7 *Si* Φ *es una matriz fundamental de* $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ *sobre* I *y* C *es una matriz no singular con elementos constantes, entonces* ΦC *es también una matriz fundamental para* $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ *sobre* I. *Cada matriz fundamental de 1.8 es de esta forma para alguna matriz no singular* C.

Sistemas lineales no homogéneos

Ahora discutiremos la forma de las soluciones de los sistemas lineales no homogéneos

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \tag{1.10}$$

donde $A(t)$ es una matriz continua sobre t y $\mathbf{g}(t)$ es un vector continuo sobre un intervalo I. Todo el desarrollo en la obtención de las soluciones de este sistema lineal no homogéneo se basa en asumir que es posible encontrar una matriz fundamental que corresponde al sistema homogeneo $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$. El vector $\mathbf{g}(t)$ usualmente representa un término forzado ya que si 1.10 representa un sistema físico, $\mathbf{g}(t)$ representa una fuerza externa. Por el teorema (3) y el corolario resultante sabemos que dado cualquier punto $(t_0, \mathbf{x}^0)$, $t_0 \in I$, hay una única solución Φ de 1.10 que existe en todo I tal que $\Phi(t_0) = \mathbf{x}^0$.

Para construir las soluciones de 1.10 tomemos la matriz fundamental $\Phi(t)$ del sistema homogéneo $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ sobre I; Φ existe como una consecuencia del teorema 5. Supongamos que φ_1 y φ_2 son dos soluciones cualesquiera de 1.10 sobre I . Entonces $\varphi_1 - \varphi_2$ es una solución del sistema homogéneo sobre I.

Existe por lo tanto un vector constante $\mathbf{c}$ tal que

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \Phi\mathbf{c} \tag{1.11}$$

La fórmula anterior nos dice que para encontrar cualquier solución de 1.10 sólo necesitamos conocer una de sus soluciones. Un método sencillo, conocido como *variación de constantes*, para determinar una solución de 1.10 requiere de conocer la matriz fundamental del sistema homogéneo $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$. Dada Φ la matriz funamental sobre I, intentemos encontrar una solución ψ de 1.10 de la forma

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \Phi(t)\mathbf{v}(t) \tag{1.12}$$

donde $\mathbf{v}$ es un vector por determinar. Notemos que si $\mathbf{v}$ es un vector constante, entonces ψ satisface el sistema homogéneo y así, para nuestro propósito $\mathbf{v}(t) \equiv \mathbf{c}$ está descartado. Supongamos que la solución existe, entonces sustituyendo 1.12 en 1.10 encontramos que para toda t en I

$$\boldsymbol{\psi}'(t) = \Phi'(t)\mathbf{v}(t) + \Phi(t)\mathbf{v}'(t) = A(t)\Phi(t)\mathbf{v}(t) + \mathbf{g}(t)$$

Debido a que Φ es una matriz fundamental del sistema homogéneo $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ y los términos $A(t)\Phi(t)\mathbf{v}(t)$ se cancelan. Entonces si $\boldsymbol{\psi}(t) = \Phi(t)\mathbf{v}(t)$ es una solución de 1.10, debemos determinar $\mathbf{v}(t)$ de la relación

$$\Phi(t)\mathbf{v}'(t) = \mathbf{g}(t)$$

Dado que $\Phi(t)$ es no singular sobre I podemos premultiplicar por $\Phi^{-1}(t)$ e integrando tenemos

$$\mathbf{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\,\mathbf{g}(s)\,ds$$

para $t_0, t \in I$ y por lo tanto 1.12 queda

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\,\mathbf{g}(s)\,ds \tag{1.13}$$

para $t_0, t \in I$. Así, si 1.10 tiene una solución $\boldsymbol{\psi}$ de la forma 1.12 entonces $\boldsymbol{\psi}$ está dada por 1.13.

De manera inversa, definamos $\boldsymbol{\psi}$ como en 1.13 donde Φ es una matriz fundamental del sistema homogéneo sobre I . Entonces diferenciando 1.13 y usando el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}'(t) &= \Phi'(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\,\mathbf{g}(s)\,ds + \Phi(t)\,\Phi^{-1}(t)\,\mathbf{g}(t) \\
&= A(t)\,\Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\,\mathbf{g}(s)\,ds + \mathbf{g}(t)
\end{aligned}$$

y usando nuevamente 1.13

$$\boldsymbol{\psi}'(t) = A(t)\,\boldsymbol{\psi}(t) + \mathbf{g}(t)$$

para cada $t \in I$. Obviamente $\boldsymbol{\psi}(t_0) = \boldsymbol{\theta}$.

La fórmula de variación de constantes se formaliza por medio del siguiente

Teorema 8 *Si Φ es una matriz fundamental de $\mathbf{x}' = A(t)\,\mathbf{x}$ en I, entonces la función*

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\,\mathbf{g}(s)\,ds$$

es la única solución de 1.10 que satisface la condición inicial $\boldsymbol{\psi}(t_0) = \theta$ y es válida sobre I.

Por lo tanto vemos que cada solución $\boldsymbol{\varphi}$ de 1.10 sobre I tiene la forma

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}_h(t) + \boldsymbol{\psi}(t)$$

donde $\boldsymbol{\psi}$ es la solución de la ecuación 1.10 que satisface la condición inicial $\boldsymbol{\psi}(t_0) = \theta$ y $\boldsymbol{\varphi}_h$ es la solución del sistema homogéneo que satisface la misma condición inicial t_0 para $\boldsymbol{\varphi}$, por ejemplo $\boldsymbol{\varphi}_h(t_0) = \mathbf{x}^0$.

1.2 Control

La idea de control nos puede ser familiar si se piensa en el movimiento del volante del automóvil o bien al momento de girar la llave de la regadera. El resultado puede ser bueno o malo no obstante en cualquier caso el concepto de control debe reunir los siguientes cuatro elementos.

1. El *sistema a controlar,* también conocido como *planta.* Se refiere al sistema que se desea controlar.

2. El *objetivo de control* o comportamiento que se desea lograr en el sistema. Se trata de la meta a alcanzar.

3. El *conjunto de variables medibles* o salidas. Son las propiedades del sistema que pueden ser medibles.

4. El *conjunto de variables de control* o entradas. Son aquellas propiedades que pueden modificarse con la intensión de actuar sobre el sistema a controlar.

Otro elemento importante es el *controlador* o regulador que genera las entradas de control específicas para lograr la meta deseada. No obstante este quinto elemento no está presente en la etapa de formulación del problema de control, sino hasta que el problema ha sido resuelto. Al hablar de una solución de control nos referiremos a encontrar una *ley de control* o algoritmo de control. Una vez que la ley de control ha sido hallada puede ser usada por el controlador para evaluar las entradas de control basándose en las salidas medibles de la planta. El sistema compuesto por la planta y el controlador, es conocido como *sistema de control* o *sistema a lazo cerrado.*

1.2.1 Modelos de sistemas a controlar

El modelo de una planta utilizado para fines de control es usualmente lo más sencillo posible. Consideremos que se desea construir un modelo de un sistema donde la entrada es la posición angular de la llave del agua caliente y la salida es la temperatura del agua que sale. El sistema depende particularmente del giro de la llave del agua[4]. Sea $u(t)$ el ángulo de la llave en el tiempo t y $y(t)$ la temperatura del agua. Cuando el desplazamiento del ángulo $u(t)$ desde el valor inicial $\overline{u}$ es pequeño, se puede asumir que el correspondiente desplazamiento de $y(t)$ desde el valor inicial $\overline{y}$ es proporcional a $u(t) - \overline{u}$

$$y(t) - \overline{y} = \beta(u(t) - \overline{u}) \tag{1.14}$$

donde β es una constante. Lo que se obtiene es un modelo sencillo del sistema a controlar, el cual puede ser reescrito como

$$y(t) = \alpha + \beta(u(t) - \overline{u}) \tag{1.15}$$

Los modelos 1.14 y 1.15 pertenecen a la clase de modelos lineales *estáticos*(sin memoria): el valor de las salidas $y(t)$ dependen del valor de la entrada $u(t)$ medida en el mismo tiempo t. De cualquier forma, los sistemas del mundo real siempre tienen algún tipo de inercia o memoria, es decir, no es posible cambiar instantáneamente los estados del sistema. Un modelo más apropiado

[4] De ahí que a este sistema se le nombre *tap system*(sistema de grifo o de llave de agua). Vease [13] pp. 6.

deble incluir valores predeterminados de entrada y la salida y/o sus derivadas. Modelos más complicados son llamados *modelos dinámicos.*

Consideremos la temperatura de la mezcla de un fluido la cual no puede ser cambiada instantáneamente después del cambio en la tasa de flujo del componente; se tiene entonces la ecuación diferencial de primer orden

$$T\frac{dy\left(t\right)}{dt}+y\left(t\right)=\alpha+\beta u\left(t\right) \tag{1.16}$$

donde $T>0$ es la constante de tiempo. Más aún, si hay un segmento de tubería largo entre la salida del flujo y el lugar en que se realiza la mezcla, se deberá tomar encuenta un *retardo en el tiempo:*

$$T\frac{dy\left(t\right)}{dt}+y\left(t\right)=\alpha+\beta u\left(t-\tau\right)$$

donde $\tau>0$ es el retardo.

Finalmente, cuando se requiere un modelo válido no sólo en una región con pequeñas variaciones se tendrá que tomar en cuenta la nolinealidad del sistema. Un modelo estático no lineal del primer sistema descrito arriba considerando la ley de transferencia de calor queda

$$y\left(t\right)=\alpha+\beta f\left(u\left(t\right)\right),$$

$$f\left(u\right)=\frac{k_1uy_1+k_2u_2y_2}{k_1u+k_2u_2}$$

donde y_1, y_2 son las temperaturas del agua caliente y fría, k_1u, k_2u_2 son las tasas de flujo del agua caliente y fría respectivamente y k_1, k_2 son los coeficientes escalares.

En varios casos en necesario diseñar un algoritmo de control discreto en el tiempo para el controlar de forma computarizada un sistema real continuo en el tiempo. Esto se puede realizar transformando ambos modelos, el de la planta y el del controlador, en dos modelos continuos en el tiempo o en dos modelos discretos en el tiempo.

1.2.2 Objetivos de control

Otro componente en el problema de controlar un sistema es el objetivo de control a alcanzar, tradicionalmente se consideran dos metas: *regulación* y *seguimiento.*

Regulación

Regulación(estabilización o posicionamiento) se entiende como el manejo del vector de las variables de estado[5] $x\left(t\right)$ del sistema de control para colocarlo en algún *punto de equilibrio* o *punto fijo* $\widehat{x}$.En algunos casos es de mayor significado

[5] En lo que sigue denotaremos el vector de estados $\mathbf{x}\left(t\right)$ únicamente como $x\left(t\right)$, considerando que representa al conjunto de variables $x_1,...,x_n$.

sólo la regulación de la variable de salida $y(t)$. Formalmente se puede escribir este primer objetivo de control como

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \widehat{x}$$

o también

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \widehat{y}$$

Algunas consideraciones más realistas consisten en establecer las relaciones siguientes

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |x(t) - \widehat{x}| \leq \Delta$$

o bien

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |y(t) - \widehat{y}| \leq \Delta$$

donde Δ es el parámetro de exactitud.

Seguimiento

El seguimiento consiste en manejar la variable $x(t)$ de tal forma que se ajuste a una *trayectoria deseada* $\overline{x}(t)$, es decir

$$\lim_{t\to\infty} [x(t) - \widehat{x}(t)] = 0 \tag{1.17}$$

o conducir la salida $y(t)$ hacia una función deseada $\widehat{y}(t)$, es decir

$$\lim_{t\to\infty} [y(t) - \widehat{y}(t)] = 0 \tag{1.18}$$

La salida deseada $\widehat{y}(t)$ es interpretada frecuentemente como *señal de referencia* o *señal que gobierna.* Algunas veces esta señal de referencia es definida explícitamente como una función del tiempo. En otros casos puede ser definida como una solución de otro sistema auxiliar llamado *modelo de referencia* o *modelo objetivo.* El problema de encontrar el controlador que asegure el logro de las metas 1.17 y 1.18 es llamado *problema de control con modelo de referencia.*

Si tomamos en cuenta el control de sistemas que presentan un comportamiento oscilatorio, podemos estudiar almenos otros dos objetivos de control.

Sincronización

Entiéndase la sincronización como una coincidencia de las variables de dos o varios sistemas, o bien, como la coincidencia en los cambios de varias características cualitativas de los sistemas. El problema de sincronización es diferente a los modelos de control de referencia en el sentido que éste permite la coincidencia de diferentes variables, tomadas en distintos instantes de tiempo, es decir, con cambios en el tiempo, los cuales puede ser constantes o que tiendan a una constante(fases asintóticas). Además, en el problema clásico de sincronización se permite la conexión bidireccional entre los sistemas. Esto significa que el

límite de la solución deseada no puede ser determinada. Por otro lado, la sincronización con conexiones unidireccionales (*maestro-esclavo o respuesta sincronizada*) puede ser también interesante.

El fenómeno de sincronización que ocurre en sistemas sin control(*autosincronización*) es bien conococido y extensamente estudiado. No obstante, controlar la forma en que se sincroniza ha comenzado a investigarse recientemente.

Modificación del comportamiento asintótico de un sistema

Esta clase de objetivos de control incluye varios casos:

- Cambio del tipo de equilibrio, es decir, modificar un punto fijo inestable a uno estable y viceversa,
- Cambio del tipo de ciclo límite, modificar un ciclo límite a un atractor caótico y viceversa,
- Cambio del punto de bifurcación, y/o el tipo de punto de bifurcación en el parámetro de espacio,
- Creación de oscilaciones con propiedades deseadas.

Un ejemplo importante de los casos anteriores lo representa el problema conocido como *balanceo contraviento*[6] el cual implica la excitación de las oscilaciones por encima de la energía deseada(frecuencia, o algún otro parámetro de intensidad). Otro problema relacionado es la modificicación de la dimensión fractal del conjunto compacto invariante(atractor).

Una caracteríastica importante al controlar las oscilaciones y el caos es el bajo nivel de control utilizado. La razón se basa en que el tiempo de vida de un sistema oscilatorio cubre un número de ciclos largo y el nivel de las acciones de control por ciclo deben ser pequeñas como efecto de mantener la energía total del control dentro de cierto valor específico.

1.2.3 Técnicas básicas de control

Asúmase que el problema de control ya ha sido identificado, ahora lo que se necesita es resolverlo adecuadamente. A primera vista pareciera que un modelo sencillo de la planta o sistema a controlar debería conducir a una solución de control sencilla[7]. No obstante, esto no es cierto en ocasiones, para lo cual problemas adicionales pueden aparecer.

Como ejemplo consideremos la planta descrita por la ecuación diferencial de primer orden 1.16. Es conveniente reescribir la ecuación de la planta en forma tal que la derivada esté despejada(también conocida como forma de Cauchy)

$$\dot{y} = ay + bu + a_0 \tag{1.19}$$

[6] El término swinging/upwinding es manejado en [13], pp. 10.

[7] El concepto manejado en [13] se refiere a este apartado como *naive control* en el sentido que se exponen las técnicas y conceptos de control básicos sin el enfoque de las técnicas de control modernas.

donde los coeficientes constantes a, b, a_0 dependen de los parámetros de 1.16 $a = -1/T$, $b = \beta/T$, $a_0 = \alpha/T$. Notemos que en 1.19 no necesitamaos suponer que $T > 0$, es decir 1.19 puede describir también sistemas inestables($a > 0$) o neutralmente estables($a = 0$) en su dinámica interna.

Tomemos como objetivo de control la regulación de la salida $y(t)$ a un valor deseado $\widehat{y}$. Una solución aparente sería calcular el punto de equilibrio

$$\overline{y} = -\frac{a_0}{a} - \frac{b\overline{u}}{a}$$

del sistema 1.16 con una entrada constante $u(t) \equiv \overline{u}$ y elegir entonces a $\overline{u}$ de tal forma que conduzca a $\overline{y} = \widehat{y}$, es decir, elegir $u(t) = \widehat{u}$ donde

$$\widehat{u} = -\frac{(a\widehat{y} + a_0)}{b} \tag{1.20}$$

Así, el objetivo $y(t) \equiv \widehat{y}$ será alcanzado para toda $t \geq 0$ si se mantiene para el instante de tiempo inicial $t = 0$, es decir, si $y(0) = \widehat{y}$. Agregemos que el objetivo de control será alcanzado asintóticamente(cuando $t \to 0$) para cualquier condición inicial $y(0)$ cuando la planta 1.19 sea asintóticamente estable($a < 0$). La solución del problema de seguimiento con la función de salida deseada $\widehat{y}(t)$ puede ser construida de forma similar, es decir, sustituyendo $\widehat{y}(t)$ en 1.19 y resolviendo para $\widehat{u}(t)$

$$\widehat{u}(t) = \frac{\left(\dfrac{d\widehat{y}(t)}{dt} - a\widehat{y}(t) - a_0\right)}{b}$$

Por ejemplo, lograr el comportamiento oscilatorio deseado $\widehat{y}(t) = A + B\sin\omega t$, la siguiente ley de control

$$\widehat{u}(t) = \frac{(B\omega\cos\omega t - aA - aB\sin\omega t - a_0)}{b}$$

puede ser aplicado al sistema 1.19.

De cualquier forma, esta solución sencilla tiene sus inconvenientes:

1. Si la planta es inestable, entonces la entrada constante 1.20 dejará de ser inestable, es decir, pequeños desajustes arbitrarios en las condiciones iniciales conducirán a salidas que crecen ilimitadamente.

2. Supóngase que la planta 1.16 es estable, pero sus parámetros son imprecisos(es decir, los valores disponibles de a, b usados en el controlador difieren de los verdaderos). Entonces el error de evaluación de $\widehat{u}$ puede ser significativo y la meta deseada no podrá ser alcanzada.

3. Cambios repentinos en las variables de la planta implicarán el fracaso en la consecución del objetivo de control.

Retroalimentación

La experiencia obtendia por la ingeniería ha mostrado que pueden obtenerse soluciones mucho más eficientes por medio del principio de retroalimentación, es decir, por medio de algoritmos de control los cuales usan las medidas disponibles de $y(s)$, $0 \leq s \leq t$ para calcular $u(t)$. Las leyes de retroalimentación son distintas y variadas. Una de las leyes de retroalimentación más sencilla y frecuentemente utilizada es la ley de *retroalimentación proporcional*:

$$u(t) = K(y(t) - \widehat{y}) \tag{1.21}$$

La retroalimentación de *relevo o deslizante*(o signo) es también comunmente utilizada:

$$u(t) = Ksign(y(t) - \widehat{y}) \tag{1.22}$$

Se puede ver fácilmene que la retroalimentación negativa en 1.21 y 1.22 (con $K < 0$ para $b > 0$) puede cambiar la planta inestable 1.19(con $a > 0$) a una estable. De cualquier modo, un error de estado estacionario[8] $e_\infty = \lim_{t\to\infty}[y(t) - \widehat{y}] = y_\infty - \widehat{y}$ puede aparecer. Nótese que el equlibrio del sistema a lazo cerrado 1.19, 1.21 es estable si $a + bK < 0$ y este proporciona una solución estacionaria $y_\infty = \widehat{y} - (a\widehat{y} + a_0)/(a + bK)$ con error estacionario $e_\infty = (a\widehat{y} + a_0)/(a + bK)$ el cual se va haciendo más pequeño cuando K toma valores grandes. Para eliminar completamente el error estacionario es posible agregar la tendencia

$$u(t) = -(a\widehat{y} + a_0)/b + K(y(t) - \widehat{y}) \tag{1.23}$$

e introducir la integral de retralimentación:

$$u(t) = k_1(y(t) - \widehat{y}) + k_2 \int_0^t (y(s) - \widehat{y})\, ds$$

Los controladores con integral proporcional(IP) son ámpliamente utilizados debido a que requieren un conocimiento menor de los parámetros de la planta.

Note que cuando $a = a_0 = 0$, el sistema tiene un error estacionario cero para toda $\widehat{y}$ y toda K, tal que $bK < 0$. Por lo tanto en este caso, cualquier salida deseada $\widehat{y}$ puede ser alcanzada por la retralimentación 1.21 con una K arbitrariamente pequeña, es decir, por medio de una fuerza de control arbitrariamente pequeña.

Este sencillo ejemplo demuestra que la retroalimentación permite mejorar la estabilidad y la precisión del sistema a lazo cerrado mientras que la incertidumbre de los parámetros de la planta evita cualquier mejora en el desempeño del sistema. Entre otros obstáculos, los más importantes son:

- No linealidad,
- Mediciones incompletas,
- Control incompleto.

[8] *Steady-state error* lo referiremos aquí como error estacionario.

Por mediciones incompletas debe entenderse que no todas las variables de estado del sistema son variables medibles o que el ruido en la medición es muy grande. Control incompleto significa que es imposible cambiar el modelo de la planta a alguna forma deseada por medio de cambios admisibles de las variables de control. La teoría moderna del control, que incluye el control no lineal y el control adaptable, permite sobrepasar estas dificultades.

Incertidumbre

Es importante ilustrar las ideas principales del *control no lineal* y del *control adaptable* puesto que son dos herramientas que ayudan a enfrentar los problemas de incertidumbre en los parámetros de la planta. Iniciaremos por el control adaptable.

La presencia de incertidumbre en los parámetros es frecuente, por tanto el uso de un modelo de planta impreciso para propósitos de control podría resultar en un pobre desempeño del sistema de control. Si este no fuera el caso, el sistema de control se denominaría, *contol robusto.* De cualquier forma, es difícil diseñar un controlador robusto si los parámetros de la planta cambian en un rango amplio, en este caso es posible intentar desarrollar un controlador adaptable.

Supóngamos que la planta está descrita por la ecuación diferencial ordinaria de primer orden 1.19 y el objetivo de control es la regulación

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \widehat{y} \tag{1.24}$$

Como se mencionó antes, la ley de control 1.23 permite asegurar el logro del objetivo 1.24 cuando los valores de los parámetros a, b, a_0 son conocidos. Para obtener un controlador que trabaje bien para valores arbitrarios de los parámetros de la planta es posible intentar ajustar los parámetros del controlador 1.23 basados en las *mediciones en línea.*

Para este propósito tomemos la ley de control 1.23 y escribámosla de la forma

$$u(t) = \xi_1 \widehat{y} + \xi_2 + \xi_3 (y - \widehat{y})$$

donde $\xi_1 = -a/b$, $\xi_2 = -a_0/b$, $\xi_3 = K$. Ahora reemplacemos los coeficientes constantes ξ_i, para $i = 1, 2, 3$ por los coeficientes ajustados

$$u(t) = \theta_1(t)\,\widehat{y} + \theta_2(t) + \theta_3(t)\,(y(t) - \widehat{y}) \tag{1.25}$$

donde θ_i, para $i = 1, 2, 3$ son los parámetros de ajuste. La pregunta es ¿cómo actualizar $\theta_i(t)$ de tal forma que se asegure la meta 1.24 para valores arbitrarios de a, b? Para resolver el problema el método de *velocidad de gradiente(SG)*[9] proporciona una valiosa ayuda. La forma de diseñar el algoritmo SG es por medio de la reformulación del objetivo 1.24 de la siguiente forma:

$$\lim_{t\to\infty} Q(y(t)) = 0 \tag{1.26}$$

[9] Speed Gradient method

donde $Q(y) = (y - \widehat{y})^2/2$ es conocida como *función objetivo.* Entonces se calcula la derivada $\dot{Q}$ respecto al tiempo la cual es la rapidez de cambio de $Q(y(t))$ de las soluciones del sistema 1.18, 1.25 con θ_i fijos, $i = 1, 2, 3$.

Evidentemente,

$$\dot{Q} = (y - \widehat{y})\,\dot{y} = (y - \widehat{y})\,(ay + b\theta_1\widehat{y} + b\theta_2 + b\theta_3\,(y - \widehat{y}) + a_0)$$

Finalmente se calculan las derivadas parciales $\dfrac{\partial \dot{Q}}{\partial \theta_i}$ y formamos el vector gradiente $\nabla_\theta \dot{Q} = \operatorname{col} \dfrac{\partial \dot{Q}}{\partial \theta_i}$ donde $\theta = \operatorname{col}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ y escribimos el algoritmo SG de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= -\gamma\,(y - \widehat{y})\,\widehat{y}, \\ \dot{\theta}_2 &= -\gamma\,(y - \widehat{y}), \\ \dot{\theta}_3 &= -\gamma\,(y - \widehat{y})^2, \end{aligned} \tag{1.27}$$

donde $\gamma > 0$ es el factor de ganancia. El algoritmo 1.27 sugiere un cambio del vector $\theta(t)$ en el sentido de un decremento en $\dot{Q}$ el cual implica eventualmente(después de lograr la desiguladad $\dot{Q} < 0$ para todo $y \neq 0$) un decremento en la función inicial $Q(y(t))$.

Se sigue que el objetivo 1.26 se alcanza para todas las condiciones iniciales en el sistema a lazo cerrado si $b > 0$. Lo mismo es válido para $b < 0$ cuando el factor de ganancia es seleccionado negativo. Así, para resolver el problema por medio del controlador 1.25, 1.26 es suficiente conocer el signo del coeficiente b. La idea de reemplazar los coeficientes desconocidos por sus estimaciones es llamado *principio de certeza*[10] el cual es ámpliamente utilizado en la teoría de control adaptable.

Nolinealidad

En algunos casos los algoritmos de control para sistemas no lineales pueden ser diseñados de forma muy similar a aquellos usados por los sistemas lineales. Por ejemplo al modelo de la planta 1.18 se le aumenta el término no lineal $\sin y$ como sigue

$$\dot{y} = ay + a_0 + d\sin y + bu,$$

donde a, a_0, d, b son parámetros constantes desconocidos. Es sencillo notar que el sistema cerrado por retroalimentación puede poseer múltiples puntos de equilibrio, algunos de los cuales pueden ser estables y pueden alejarse de lo deseado. Para evitar el incremento en la complejidad de la planta es posible introducir un correspondiente término senoidal en la ley de control:

$$u(t) = \theta_1(t)\,\widehat{y} + \theta_2(t) + \theta_3 \sin y + \theta_4(t)\,(y(t) - \widehat{y})$$

[10] Certainty equivalence principle.

El algoritmo con parámetros actualizados puede ser deseñado similarmente a 1.27 como sigue

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_1 &= -\gamma\left(y-\widehat{y}\right)\widehat{y}, \\
\dot{\theta}_2 &= -\gamma\left(y-\widehat{y}\right), \\
\dot{\theta}_3 &= -\gamma\left(y-\widehat{y}\right)\sin y, \\
\dot{\theta}_3 &= -\gamma\left(y-\widehat{y}\right)^2,
\end{aligned}$$

En muchos casos la nolinealidad incrementa la complejidad en el comportamiento de la planta pero no incrementa la complejidad en el diseño del controlador. Por otro lado la nolinealidad puede provocar severos problemas cuando se toman en cuenta restricciones adicionales, es decir, se necesita de un "control pequeño".

Como ejemplo consideremos la ecuación diferencial de segundo orden que describe al movimiento oscilatorio de un péndulo:

$$\frac{ml^2}{2}\ddot{\varphi}+mgl\sin\varphi=u \tag{1.28}$$

donde $\varphi(t)$ es el ángulo del péndulo medido desde la vertical, el control $u(t)$ es el torque(giro) aplicado en el eje de rotación, m es la masa, l es la longitud y g es la gravedad. El objetivo de control serán las oscilaciones que presente el péndulo arriba de un nivel de energía dado $\widehat{E}$:

$$E(t)\to\widehat{E},\quad cuando\ t\to\infty \tag{1.29}$$

donde

$$E=\frac{m\left(l\dot{\varphi}\right)^2}{2}+mgl\left(1-\cos\varphi\right)$$

es la energía total del péndulo. El objetivo 1.29 difiere un poco de los objetivos tradicionales de regulación y seguimiento.

La solución convencional basada en la linealización de un modelo de la planta no funciona en este caso. Así, considere el modelo de la planta linealizado cerca del punto de equilibrio $y=0$

$$\ddot{\varphi}+\omega_0^2\varphi=bu$$

donde $\omega_0=\sqrt{2g/l}$, $b=2/\left(ml^2\right)$. Utilizando como señal de entrada una resonancia armónica,

$$u(t)=\gamma\sin\omega_0 t, \tag{1.30}$$

es posible lograr que la energía del péndulo aumente arbitrariamente aún para amplitudes γ arbitrariamente pequeñas. No obstante, esto no es cierto cuando el control a lazo abierto 1.30 actúa sobre el sistema 1.28, debido a que la frecuencia de sus oscilaciones libres dependen de la amplitud.

Ahora probemos otra vez con las leyes de retroalimentación y apliquemos el método SG para la función objetivo $Q = \left(E - \widehat{E}\right)^2 /2$ y tomemos en cuenta la naturaleza Hamiltoniana del sistema a controlar, podemos encontrar entonces soluciones sencillas de la forma

$$u(t) = -\gamma \left(E(t) - \widehat{E}\right) \dot{\varphi} \tag{1.31}$$

o

$$u(t) = -\gamma sign \left(\left(E(t) - \widehat{E}\right) \dot{\varphi}\right) \tag{1.32}$$

Es posible mostrar que el objetivo 1.29 se alcanza para cualquier nivel de energía $\widehat{E} > 0$ y cualquier $\gamma > 0$ y para casi todas la condiciones iniciales $\varphi(0), \dot{\varphi}(0)$.

Las leyes de control 1.31, 1.32 también son aplicables a los sistemas disipativos. De cualquier modo, en este caso la ganancia γ no puede ser elegida arbitrariamente pequeña.

Otras dificultades pueden surgir debido a la carencia de mediciones[11] (la velocidad $\dot{\varphi}(t)$ no es una medición disponible) y/o la falta de un control adecuado, es decir, casos en los que la inercia del motor del péndulo no puede ser evitada y el modelo de la planta es descrito por la ecuaciones

$$\tfrac{ml^2}{2}\ddot{\varphi} + mgl \sin\varphi = u, \quad T\dot{u} + u = v,$$

donde $v(t)$ es el nuevo control. Notemos que el cambio de control $v(t)$, impide cambiar el lado derecho de la ecuación anterior de forma arbitraria.

1.3 Controlabilidad y observabilidad

A continuación se introducen los conceptos de controlabilidad y observabilidad. Estos conceptos describen la interacción entre el mundo externo(entrada y salidas) y las variables internas del sistema(estados). La controlabilidad es la propiedad que indica si el comportamiento de un sistema puede ser controlado por medio de sus entradas, mientras que la observabilidad es la propiedad que indica si el comportamiento interno del sistema puede detectarse en sus salidas.

1.3.1 Controlabilidad

Consideremos el sistema de n estados y p entradas

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.33}$$

con las matrices constantes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Como la controlabilidad relaciona las entradas y los estados del sistema, la ecuación de salida es irrelevante.

[11] La falta de mediciones o carencia de medios para obtenerlas constituye el problema referido como *incompleteness of measurements.*

Definición 1 *La ecuación de estados 1.33, o el par* (A, B)*, se dice* controlable *si para cualquier estado inicial* $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ *y cualquier estado final* $x_1 \in \mathbb{R}^n$*, existe una entrada que transfiere el estado* x *de* x_0 *a* x_1 *en tiempo finito. En caso contrario, la ecuación 1.33, o el par* (A, B)*, se dice no controlable.*

La controlabilidad tiene que ver con la posibilidad de llevar al sistema de cualquier estado inicial a cualquier estado final en tiempo finito, no importando qué trayectoria se siga, o qué entrada se use.

Teorema 9 (Test de controlabilidad) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El para* (A, B), $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, *es controlable.*
2. *La matriz de controlabilidad,*

$$\mathcal{C} = \left[\begin{array}{ccccc} B & AB & A^2B & \ldots & A^{n-1}B \end{array} \right],\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}^{n\times np}, \tag{1.34}$$

   es de rango n *(rango fila pleno).*

3. *La matriz* $n \times n$

$$W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} BB^T e^{A^T\tau} d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} BB^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau \tag{1.35}$$

   no es singular para todo $t > 0$.

Proof.

$(1 \Rightarrow 2)$ Consideremos dos vectores cualesquiera x_0 y $x_1 \in \mathbb{R}^n$ y un intervalo finito de tiempo t_1 cualquiera. Como el sistema es controlable, sabemos que existe alguna entrada $u(t)$ que transfiere el estado de $x(0) = x_0$ al estado final $x(t_1) = x_1$ en el tiempo t_1. Usando la fórmula de variación de los parámetros, tenemos entonces que se satisface la ecuación

$$\begin{aligned} x_1 \quad &= \quad x(t_1) = e^{At_1} x_{0+} \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau, \qquad (1.36) \\ &\iff \quad \int_0^{t_1} e^{A^T(t_1-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau = x_1 - e^{At_1} x_0 \end{aligned}$$

Llamaremos z al vector $z \triangleq x_1 - e^{At_1} x_0$.
Recordemos la propiedad que menciona que toda función matricial de una matriz $n \times n$ se puede expresar como un polinomio matricial de orden $n-1$; entonces podemos escribir $e^{A(t_1-\tau)}$ como un polinomio en A (con coeficientes dependientes de τ),

$$\begin{aligned} e^{A(t_1-\tau)} &= e^{At_1} e^{-A\tau} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k(\tau) A^k \\ &= \eta_0(\tau) I + \eta_1(\tau) A + \ldots + \eta_{n-1}(\tau) A^{n-1} \qquad (1.37) \end{aligned}$$

Reemplazando 1.37 en 1.38 obtenemos

$$\begin{aligned} z &= \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau \\ &= \int_0^{t_1} \left[\eta_0(\tau) I + \eta_1(\tau) A + \ldots + \eta_{n-1}(\tau) A^{n-1}\right] Bu(\tau)\, d\tau \\ &= \int_0^{t_1} \left[B\eta_0(\tau) u(\tau) + ABu(\tau)\eta_1(\tau) + \ldots + A^{n-1}B\eta_{n-1}(\tau) u(\tau)\right] d\tau \\ &= \int_0^{t_1} \left[\begin{array}{ccccc} B & AB & A^2B & \ldots & A^{n-1}B \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \eta_0(\tau) u(\tau) \\ \eta_1(\tau) u(\tau) \\ \ldots \\ \eta_{n-1}(\tau) u(\tau) \end{array}\right] d\tau \\ &= \left[\begin{array}{ccccc} B & AB & A^2B & \ldots & A^{n-1}B \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \int_0^{t_1} \eta_0(\tau) u(\tau) \\ \int_0^{t_1} \eta_1(\tau) u(\tau) \\ \ldots \\ \int_0^{t_1} \eta_{n-1}(\tau) u(\tau) \end{array}\right] = \mathcal{C}r \quad (1.38) \end{aligned}$$

donde hemos definido como r el vector de la derecha en la línea anterior a 1.38, y $\mathcal{C}$ es la matriz de controlabilidad de 1.34. Así, en otras palabras, la controlabilidad del par (A, B) implica que la ecuación lineal algebraica $z = \mathcal{C}r$ siempre tiene solución, para z y r en $\mathbb{R}^n$ arbitrarios. Se sigue entonces que esto sucede si y sólo si la matriz $\mathcal{C}$ es de rango fila pleno, es decir, n.

$(2 \Rightarrow 3)$ Mostramos esta implicación por contradicción. Supongamos que la matriz $\mathcal{C}$ tiene rango fila pleno pero que existe algún $t > 0$ tal que $W_c(t)$ es singular. Por la forma del integrando en 1.35, la matriz $W_c(t)$ es siempre semidefinida positiva, y que sea singular es equivalente a decir que existe algún vector no nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $v^T W_c(t) v = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} 0 &= v^T W_c(t) v \\ &= \int_0^t v^T e^{A\tau} BB^T e^{A^T\tau} v d\tau = \int_0^t \left\| v^T e^{A\tau} B \right\|^2 d\tau \end{aligned}$$

que es equivalente a decir que $v^T e^{A\tau} B = 0$ para todo $\tau \in [0, t]$. Escribiendo la exponencial e^{At} en forma polinomial, similar a 1.37, tenemos

$$0 = v^T e^{A\tau} B = v^T \left[\begin{array}{ccccc} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \eta_0(\tau) I_p \\ \eta_1(\tau) I_p \\ \ldots \\ \eta_{n-1}(\tau) I_p \end{array}\right] \quad (1.39)$$

Como $e^{A\tau} B \neq 0$ si $B \neq 0$, la única posibilidad de que se dé 1.39 para todo τ es que $v^T \mathcal{C} = 0$, que implicaría que el rango fila de $\mathcal{C}$ es menor que n, lo cual es una contradicción, y prueba que $2 \Rightarrow 3$.

$(3 \Rightarrow 1)$ Sean x_0 y x_1 dos vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^n$, y $t_1 > 0$ arbitrario. Si $W_c(t)$ es no singular para cualquier $t > 0$, entonces podemos construirnos la entrada

$$u(t) = -B^T e^{A^T(t_1-t)} W_c^{-1}(t_1) \left(e^{At_1}x_0 - x_1\right) \tag{1.40}$$

Veamos que esta entrada transfiere el estado del sistema de x_0 a x_1 en el tiempo t_1. Efectivamente, reemplazando $u(t)$ de 1.40 en la fórmula de variación de los parámetros para $x(t_1)$ tenemos

$$\begin{aligned} x(t_1) &= e^{At_1}x_0 - \left(\int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} BB^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau\right) W_c^{-1}(t_1) \left(e^{At_1}x_0 - x_1\right) \\ &= e^{At_1}x_0 - W_c(t_1) W_c^{-1}(t_1) \left(e^{At_1}x_0 - x_1\right) = x_1 \end{aligned}$$

Como x_0, x_1, y $t_1 > 0$ son arbitrarios, hemos mostrado que el sistema es controlable.

■

1.3.2 Observabilidad

El concepto de observabilidad es dual al de controlabilidad, e investiga la posibilidad de estimar el estado del sistema a partir del conocimiento de la salida. Consideramos el sistema lineal estacionario

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{1.41}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q\times p}$.

Definición 2 *La ecuación de estado 1.41 es observable si para cualquier estado inicial $x(0)$ (desconocido), existe un tiempo finito t_1 tal que el conocimiento de la entrada u y la salida y sobre el intervalo $[0, t_1]$ es suficiente para determinar en forma única el estado inicial $x(0)$. En caso contrario el sistema no observable.*

Dado un estado inicial $x(0)$ y una entrada $u(t)$, la salida del sistema está dada por la fórmula

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau + Du(t) \tag{1.42}$$

Para estudiar observabilidad, la salida del sistema $y(t)$ y la entrada $u(t)$ se suponen conocidas, siendo el estado inicial $x(0)$ la única incógnita. Así, de 1.42 podemos escribir

$$\begin{aligned} Ce^{At}x(0) &= \overline{y}(t) \\ &\triangleq y(t) - C\int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau + Du(t) \end{aligned} \tag{1.43}$$

donde $\overline{y}(t)$ es una función conocida.

De lo anterior surge la pregunta, ¿cómo resolver 1.43 para obtener $x(0)$ de $\overline{y}(t)$? Para un tiempo t fijo, Ce^{At} es una matriz $q \times n$ real y constante, e $\overline{y}(t)$ un vector $q \times 1$ constante. Por su definición, $\overline{y}(t)$ está siempre en la imagen de Ce^{At}, por lo que siempre existe una solución $x(0)$. La cuestión es si existe una solución única.

En general, dado que hay menos variables medibles que el número de estados del sistema, tenemos que $q < n$. En este caso la matriz Ce^{At} tiene rango a lo sumo q, y por lo tanto tiene un espacio nulo no trivial. En consecuencia, si $q < n$ la solución no es única, y no podemos hallar un único valor $x(0)$ de 1.43 para un t fijo dado.

Para poder determinar $x(0)$ en forma única de 1.43 es necesario utilizar el conocimiento de $y(t)$ y $u(t)$ sobre un intervalo de tiempo de longitud no nula, como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 10 (Test W_0 de observabilidad) *La ecuación de estados 1.41 es observable si y sólo si la matriz* $W_0(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$W_0(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A\tau} d\tau \tag{1.44}$$

es no singular para todo $t > 0$.

Proof. Multiplicamos por izquierda ambos lados de 1.43 por $e^{A^T t} C^T$ y luego integramos sobre $[0, t_1]$, lo que da

$$\left(\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \right) x(0) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T \overline{y}(t)\, dt$$

Si $W_0(t_1)$ es no singular, entonces

$$x(0) = W_0^{-1}(t_1) \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T \overline{y}(t)\, dt \tag{1.45}$$

que da una única solución $x(0)$. Así hemos mostrado que si $W_0(t)$ es no singular entonces el sistema es observable.

Para mostrar la reversa supongamos que $W_0(t_1)$ es singular. Por su definición, $W_0(t_1)$ es *semi-definida* positiva, o sea que existe un vector constante $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ tal que

$$\begin{aligned} v^T W_0(t_1) v &= \int_0^{t_1} v^T e^{A^T t} C^T C e^{At} v dt \\ &= \int_0^{t_1} \left\| C e^{At} v \right\|^2 dt = 0 \end{aligned}$$

Pero, por la propiedad de la norma, esto implica que

$$Ce^{At} v \equiv 0 \tag{1.46}$$

para todo $t \in [0, t_1]$.
Si $u(t) \equiv 0$ entonces, en particular, las condiciones iniciales $x(0) = v \neq 0$ y $x(0) = 0$ dan ambas la misma salida $y(t) = Ce^{At}x(0) \equiv 0$ y por lo tanto no pueden diferenciarse. Esto muestra que si $W_0(t)$ es singular el sistema es inobservable, completando la prueba del teorema. ■

De la definición de la matriz $W_0(t)$ vemos que la observabilidad sólo depende de las matrices A y C. Así, la observabilidad es una propiedad del par (A, C), e independiente de las matrices B y D.

Teorema 11 (Dualidad entre controlabilidad y observabilidad) *El par (A, C) es observable si y sólo si el par $\left(A^T, C^T\right)$ es controlable*[12].

El teorema de dualidad hace inmediata la demostración de los tests de observabilidad análogos a los tests de contrabilidad.

Teorema 12 (Test de observabilidad) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El para (A, C), $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$, es observable.*
2. *La matriz de observabilidad,*

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \ \mathcal{O} \in \mathbb{R}^{nq\times n}, \tag{1.47}$$

   es de rango n (rango columna pleno).

3. *La matriz $n \times n$*

$$W_0(t) = \int_0^t e^{A^T\tau} C^T C e^{A\tau} d\tau = \int_0^t e^{A^T(t-\tau)} C^T C e^{A(t-\tau)} d\tau \tag{1.48}$$

   es no singular para todo $t > 0$.

Observación a través de diferenciación

Una forma alternativa de resolver 1.43 es a través de la diferenciación repetida de $\overline{y}(t)$ en $t = 0$ (que equivale a la diferenciación repetida de la entrada y salida). Es fácil verificar que $\overline{y}(0) = Cx(0)$, $\dot{\overline{y}}(0) = CAx(0), ..., \overline{y}^{(n-1)}(0) = CA^{n-1}x(0)$, por lo que podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{\overline{y}}(0) \\ \cdots \\ \overline{y}^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} \tag{1.49}$$

[12] La demostración de ese teorema es inmediata al considerar las definiciones de $W_c(t)$ y $W_0(t)$.

es decir, $\mathcal{O}x\left(0\right)=\widetilde{y}\left(0\right)$.

Por contrucción, $\widetilde{y}\left(0\right)$ está en la imagen de $\mathcal{O}$, y si el sistema es observable, el rango columna de $\mathcal{O}$ es pleno, rango $\mathcal{O}=n$. Entonces, existe una solución única del sistema de ecuaciones 1.49 dada por

$$x\left(0\right)=\left[\mathcal{O}^{T}\mathcal{O}\right]^{-1}\mathcal{O}^{T}\widetilde{y}\left(0\right) \tag{1.50}$$

Notar que aún seguimos necesitando conocimiento de $\overline{y}\left(t\right)$ en un entorno de $t=0$ para poder determinar $\dot{\overline{y}}\left(0\right),...,\overline{y}^{(n-1)}\left(0\right)$.Si bien es factible implementar observación mediante este método de diferenciación, en la práctica no es recomendable, ya que la medición de $y\left(t\right)$ va a incluir casi siempre ruido de alta frecuencia. La diferenciación de $\overline{y}\left(t\right)$ "amplifica" el ruido, aumentando los errores en el cálculo de $x\left(0\right)$. Por otro lado, como la integración tiene el efecto de "filtrar" ruido de alta frecuencia, es mucho mejor implementar el cálculo de $x\left(0\right)$ a través de la fórmula 1.45.

Gramiano de observabilidad

Si la matriz A es Hurwitz, la integral $W_{0}\left(t\right)$ de 1.44 converge para $t=\infty$. En ese caso notamos simplemente $W_{0}\left(t\right)=W_{0}$, y se llama *gramiano de observabilidad*. Si el par (A,C) es observable, entonces la matriz de observabilidad

$$\mathcal{O}=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

es de rango n. Dada esta condición, si la matriz A es de Hurwitz, grantiza que W_{0} es la única solución, y positiva definida, de la ecuación

$$W_{0}A+A^{T}W_{0}=-C^{T}C \tag{1.51}$$

Capítulo 2

Espacio de estados y sistemas dinámicos

La teoría del espacio de estados involucra los modelos dinámicos que describen la dinámica interna de un proceso físico y la interación de los procesos con el exterior. Por lo tanto dar una visión general de un *sistema dinámico* es nuestro punto de partida.

2.1 Sistema dinámico

Es importante enfatizar que un sistema dinámico es un modelo matemático y por lo lanto debe ser diferenciado de un proceso físico para el cual éste es una descripción general, no siempre exacta. Sistemas dinámicos de diferente tipo pueden ser usados como modelos del mismo proceso físico, no obstante, es conveniente usar la palabra "sistema" para el proceso físico real descrito por el modelo dinámico y en este caso agregar "real" o "físico" ayudará para establecer tal distinción.

En lo que sigue se dará un concepto matemático general de un sistema dinámico en el espacio de estados. Este concepto se ha desarrollado de distintas teorías como la teoría clásica de distemas dinamicos diferenciables, teoría de circuitos y teoría de autómatas.

2.1.1 Concepto general de sistema dinámico

Antes de dar una defínción formal es necesario considerar los términos básicos y las relaciones existentes entre ellos para obtener la defición de un sistema dinámico.

El dominio del tiempo. Un sistema dinámco evoluciona en el tiempo con lo que las variables que describen el comportamiento del sistema son funciones del tiempo. Con cada sistema dinámico hay un *domino del tiempo* $T \subset \mathbb{R}$ el cual contiene todos los tiempos t en los que las variables del sistema pueden ser

evaluados. El domino del tiempo puede ser continuo es decir un intervalo donde $T = (0, \infty]$ o discreto, es decir, T consisten de punto aislados en $\mathbb{R}$ como $T = \mathbb{Z}$ o $T = \mathbb{N}$. El intermalo $(t_0, t_1]$lo usaremos para denotar el conjunto de valores $\{t \in T; t_0 \leq t < t_1\}$ en T.

Variables externas. Estas son variables que describen las interacciones del sistema con el mundo exterior. Dado que una descripción completa de todas las interacciones nunca es posible, el modelo debe incluir un conjunto de variables que representen de la mejor manera al problema bajo análisis. Es usual dividir la variables externas en la familia $u = (u_i)$ de las *entradas* y la familia $y = (y_i)$ de las *salidas* Por entradas debe entenderse a las variables que modelan la influencia del munto exterior sobre el sistema físico.Estas entradas pueden ser *controladas* o bien *sin contol*(disturbios). Por salida se hace referencia a las variables con las cuales el sistema actúa sobre el mundo exterior. Algunas veces las salidas se dividen en dos conjuntos(no necesariamente disjuntos) de variables. Aquellas salidas que pueden ser medibles las llamaremos *medibles* y aquellas que deben ser manipuladas para mantener ciertos requerimientos específicos las nombraremos *reguladas*.

En un sistema dinámico se debe especificar el conjunto U de los valores de entrada(alfabeto de entrada)[1] y el conjunto Y de valores de salida(alfabeto de salida), por ejemplo $U = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2$ o bien $U = [0, \infty), Y = [0, \infty)$.

El conjunto U^T denota el conjunto de todas las funciones $u(\cdot) : T \to U$ en general no es posible admitir cualquier funcion arbitraria $u(\cdot) \in U^T$ como señales de entrada. Además del conjunto de valores de entrada se debe especificar el conjunto $\mathcal{U} \subset U^T$ de funciones de entradas admisibles. Una apropiada elección de $\mathcal{U}$ permite imponer las propiedades de medibilidad y suavidad a las funciones de control, así como las restricciones de variación respecto al tiempo en los valores de control.

Estado interno. La noción de estado desempeña un papel fundamental en la definición de un sistema dinámico. A diferencia de las variables externas, las variables *internas* o variables de *estado* describen los procesos en el interior del sistema. No cualquier conjunto de variables internas de un sistema puede ser aceptado como un vector de estados. Existen tres condiciones que se requieren:

I) El estado presente y la función de control elegida determinan los estados futuros del sistema. Específicamente, dado el estado $x(t_0) = x^0$ del sistema para algún tiempo $t_0 \in T$ y el control $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, la evolución del estado del sistema $x(t)$ está unicamente determinado para todos los t en un intervalo de tiempo apropiado $T_{t_0,x^0,u(\cdot)}$ de T comenzando en t_0. $T_{t_0,x^0,u(\cdot)}$ puede ser considerado como la *"expansión o tiempo de vida"* de la trayectoria[2] $x(\cdot)$ comenzando en x^0 para el tiempo t_0 bajo el control $u(\cdot)$.

II) Dado $x(t_0) = x^0$ para algún tiempo $t_0 \in T$, el estado $x(t)$ en cualquier tiempo posterior $t \in T, t \geq t_0$, depende únicamente de las valores de

[1] Es importante destacar que el conjunto U de valores de entradas admisibles no cambia con el tiempo y no depende de los valores de otro sistema de variables.

[2] "*Live span*", *véase [15]*

entrada $u(s)$ para $s \in [t_0, t)$. Así, para un tiempo t, el estado presente $x(t)$ no estaá influenciado por los valores presente y futuro $u(s), s \geq t$ de la entrada de control. Más aún, el conocimiento del estado $x(t_0)$ para algún tiempo $t_0 < t$ sustituye la información acerca de todos los valores de las entradas y estados previos.

III) El valor de la salida en el tiempo t está completamente determinado por los valores de la entrada y del estado $u(t)$ y $x(t)$ simultáneamente. En otras palabras, las entradas pasadas actuan sobre la salida presente únicamente vía los efectos acumulados sobre el estado presente del sistema.

Estos requerimientos aseguran que el principio de causalidad está construido bajo el concepto de estado. Si se observa la salida $y(t)$ como los "efectos" del pasado y el presente como las "causas"(=entradas), entonces $u(t)$ representa las causas instantáneas y el estado $x(t)$ incorpora la totalidad de las causas pasadas.

La elección de un adecuado vector de estado es usualmente un problema mucho más difícil que el de especificar las variables externas, para lo cual no hay nada preestablecido. De cualquier modo, en sistemas físicos las vaiables de estado son frecuentemente asociadas con el almacenamiento de energía[3].

Las variables de estado no necesitan representar cantidades físicas del sistema. Desde el punto de vista del procesamiento de información el estado del sistema puede ser visto como un tipo de actualización de memoria o almacén de información. El conjunto X de posibles estados aceptables de el sistema puede ser sustituido por cualquier otro conjunto $\widetilde{X}$ el cual es una correspondencia uno a uno con X y por tanto puede llevar la misma cantidad de información; así, hay una mayor libertad para la definición de variable de estado que para la definición de las variables externas que se refieren a la medición de cantidades físicas. Las arbitrariedades pueden reducirse solicitanto que el estado del sistema represente la *mínima* cantidad de información necesaria para describir el efecto de la historia pasada sobre el desarrollo futuro del sistema.

Las condiciones (I), (II) y (III) conducen la introducción de dos mapeos los cuales deben se especificados en la definición de cada sistema dinámico.

Mapeo de transición de estados. De acuerdo con (I) y (II), la evolución del estado de un sistema(*trayectoria*) puede ser descrita por un mapeo φ llamado *mapeo de transición de estado* como sigue:

$$x(t) = \varphi\left(t; t_0, x^0, u(\cdot)\right), \quad t \in T_{t_0, x^0, u(\cdot)}. \tag{2.1}$$

$\varphi\left(t; t_0, x^0, u(\cdot)\right)$ únicamente dependen de la restricción $u(\cdot)|[t_0, t)$ debido a (II). En la mayoría de las aplicaciones este mapeo está implícitamente definido por las ecuaciones de movimiento del sistema. Si estas ecuaciones son diferenciales o en diferencias para $x(\cdot)$, un problema de valor inicial con $x(t_0) = x^0$

[3] Por ejemplo, en los sistemas mecánicos la posición y la velocidad de cada masa o cuerpo rígido son posibles variables internas las cuales, conjuntamente, representan el estado del sistema en un tiempo dado.

debe ser resuelto para una función de control dada $u(\cdot)$ para obtener $x(t) = \varphi\left(t; t_0, x^0, u(\cdot)\right)$, $t \in T_{t_0,x^0,u(\cdot)}$.

Mapeo de transición de salida. Por el requerimiento (III) la salida del sistema para el tiempo t está totalmente determinada por el valor del estado y la salida en el tiempo t,

$$y(t) = \eta(t, x(t), u(t)) \tag{2.2}$$

η es llamado el *mapeo de salida.*

Ecuaciones diferenciales pueden ser resueltas hacia adelante y hacia atrás en el tiempo. Por tanto, si el mapeo de transición de estados está definido por una ecuación diferencial, el estado presente $x(t_0) = x^0$ tiene una expansión de vida $T_{t_0,x^0,u(\cdot)}$ que abarca momentos pasados y futuros, y el estado de la trayectoria $x(t) = \varphi\left(t; t_0, x^0, u(\cdot)\right)$ está definido por $t < t_0$ también. La siguiente definición permite esta posibilidad.

Definición 3 ***Sistema dinámico.*** *La estructura $\sum = (T, U, \mathcal{U}, X, Y, \varphi, \eta)$ se dice que es un sistema dinámico o sistema de espacio de estados con dominio en el tiempo T, espacio de valores de entrada U, espacio de funciones de entrada $\mathcal{U}$, espacio de estados X, espacio de valores de salida Y, mapeo de transición estados φ y mapeo de salida η, si $T, U, \mathcal{U}, X, Y$ son conjuntos no vacíos, $T \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{U} \subset U^T$, y $\eta : T \times X \times U \to Y$, $\varphi : \mathcal{D}_\varphi \to X$ (donde $\mathcal{D}_\varphi \subset T^2 \times X \times \mathcal{U}$) son funciones tales que los siguientes axiomas se cumplen*

Axioma del intervalo: *Para cada $t_0 \in T$, $x^0 \in X$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ la expansión de vida de $\varphi\left(\cdot; t_0, x^0, u(\cdot)\right)$*

$$T_{t_0,x^0,u(\cdot)} = \left\{t \in T; \left(t; t_0, x^0, u(\cdot)\right) \in \mathcal{D}_\varphi\right\} \tag{2.3}$$

es un intervalo en T que contiene a t_0.

Axioma de consistencia: *Para cada $t_0 \in T$, $x^0 \in X$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$*

$$\varphi\left(t_0; t_0, x^0, u(\cdot)\right) = x^0 \tag{2.4}$$

Axioma de causalidad: *Para todo $t_0 \in T$, $x^0 \in X$, $u(\cdot)$, $v(\cdot) \in \mathcal{U}$, $t_1 \in T_{t_0,x^0,u(\cdot)} \cap T_{t_0,x^0,v(\cdot)}$*

$$(\forall t \in [t_0, t_1) : u(t) = v(t)) \Longrightarrow \varphi\left(t_1; t_0, x^0, u(\cdot)\right) = \varphi\left(t_1; t_0, x^0, v(\cdot)\right) \tag{2.5}$$

Propiedad de cociclo: *Si $t_1 \in T_{t_0,x^0,u(\cdot)}$ y $x^1 = \varphi\left(t_1; t_0, x^0, u(\cdot)\right)$ para algún $t_0 \in T$, $x^0 \in X$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ entonces $T_{t_1,x^1,u(\cdot)} \subset T_{t_0,x^0,u(\cdot)}$ y*

$$\varphi\left(t; t_0, x^0, u(\cdot)\right) = \varphi\left(t; t_1, x^1, u(\cdot)\right), \quad t \in T_{t_1,x^1,u(\cdot)}. \tag{2.6}$$

El espacio $T \times X$ es algunas veces llamado *espacio de eventos* de $\sum$. Dígase que el control $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ *transfiere* un evento $\left(t_0, x^0\right)$ a $\left(t_1, x^1\right)$[4]si $x^1 = \varphi\left(t_1; t_0, x^0, u(\cdot)\right)$. Aunque esta expresión intuitivamente sólo tiene sentido si $t_1 \geq t_0$ es conveniente usarla también si $t_1 < t_0$. La propiedad del cociclo

[4] notación: $\left(t_0, x^0\right) \overset{u(\cdot)}{\rightsquigarrow} \left(t_1, x^1\right)$

menciona que un control $u(\cdot)$ transifere el evento (t_0, x^0) al evento (t_1, x^1) y (t_1, x^1) a (t_2, x^2) para tener entonces que (t_0, x^0) se transfiere a (t_2, x^2). Si no se asume lo anterior sería imposible interpretar $\varphi(t; t_0, x^0, u(\cdot))$ como el estado de $\sum$ para el tiempo t cuando $\sum$ es inicializado en (t_0, x^0) y controlado por $u(\cdot)$. El axioma de consistencia implica entonces el argumento x^0 de φ es en efecto el estado inicial $x(t_0)$ de el sistema.

El axioma del intervalo, el axioma de consistencia y el axioma de causalidad garantizan que el estado del sistema satisface los requerimientos (I) y (II). El requerimiento (III) es automáticamente satisfecho si se interpreta $y(t) = \eta(t, x, u)$ como la salida de $\sum$ en el tiempo t cuando x es su estado y u es el valor de la entrada instantánea en el tiempo t.

Para cualquier $t_0 \in T$, $x_0 \in X$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ la función

$$t \mapsto x(t) = \varphi(t; t_0, x^0, u(\cdot)), \quad t \in T_{t_0, x^0, u(\cdot)}.$$

describe la evolución del estado del sistema y es llamada la *trayectoria* de $\sum$ determinada por la condición inicial $x(t_0) = x_0$ y la función de control $u(\cdot)$. Su dominio de definición $T_{t_0, x^0, u(\cdot)}$ es la expansión de vida de la trayectoria. Su imagen $\{\varphi(t; t_0, x^0, u(\cdot)); t \in T_{t_0, x^0, u(\cdot)}\}$ se dice que es una *órbita* de $\sum$. La correspondiente *trayectoria de salida* o *señal de salida* es

$$y(\cdot) = y(\cdot; t_0, x^0, u(\cdot)): \quad t \mapsto y(t) = \eta(t, x(t), u(t)), \quad t \in T_{t_0, x^0, u(\cdot)}. \tag{2.7}$$

La definición anterior hace posible de que la trayectoria de estados de un sistema que comienza en $x(t_0) = x^0$ bajo el control $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ no exista para todos los instantes futuros $t \geq t_0$. Esto puede reflejar una situación donde el sistema "estalle" o la trayectoria "abandone el espacio de estados" X bajo la influencia del control $u(\cdot)$. Como caso extremo, la definición (3) permite que $\varphi(t; t_0, x^0, u(\cdot))$ no esté definido para cualquier $t > t_0$ y esto será expresado diciendo que el control $u(\cdot)$ *no es aplicable* a $\sum$ inicializada en (t_0, x^0).

Definición 4 ***Sistema dinámico completo.*** *Se dice que un sistema dinámico $\sum$ es completo si para todo $(t_0, x^0, u(\cdot)) \in T \times X \times \mathcal{U}$,*

$$T_{t_0, x^0, u(\cdot)} \supset T_{t_0} := \{t \in T; t \geq t_0\}.$$

$\sum$ es completo si y sólo si $\mathcal{D}_\varphi \supset T^2_{\geq} \times X \times \mathcal{U}$, donde $T^2_{\geq} = \{(t, t_0) \in T^2, t \geq t_0\}$.

Suponiendo que es completo $\sum$ y que el sistema es inicializado en (t_0, x^0), esto es el estado inicial $x(t_0) = x^0$ está fijado. Entonces la señal de salida está definida sobre t_0 y la restricción $y(\cdot)|T_{t_0}$ de $y(\cdot) = y(\cdot; t_0, x^0, u(\cdot))$ depende únicamente de la restricción

$$v(\cdot) = u(\cdot)|T_{t_0} \in \mathcal{U}_0 := \{u(\cdot)|T_{t_0}; u(\cdot) \in \mathcal{U}\}$$

por el axioma de cuasalidad. Abusando de la notación, en lo que sigue se escribirá $y(\cdot; t_0, x^0, u(\cdot)|T_{t_0})$ en lugar de $y(\cdot; t_0, x^0, u(\cdot))|T_{t_0}$. El comportamiento entrada salida de $\sum$ se describe entonces como sigue:

Definición 5 ***Comportamiento entrada-salida.*** *Dado un sistema completo* $\sum$ *y* $\left(t_0, x^0\right) \in T \times X$ *el operador entrada salida inicializado en* $\left(t_0, x^0\right)$ *está definido por*

$$G_{t_0,x^0}.\mathcal{U}_{t_0} \to Y^{T_{t_0}}, \quad v(\cdot) \to y\left(\cdot; t_0, x^0, v(\cdot)\right)$$

Un sistema dinámico completo es llamado *reversible* si es también un sistema dinámico para el tiempo corriendo hacia atrás.

Definición 6 ***Sistema reversible.*** *Un sistema dinámico completo* $\sum$ *es reversible si*

$$\mathcal{D}_\varphi = T^2 \times X \times \mathcal{U}$$

esto es $T_{t_0,x^0,u(\cdot)} = T$ *para todo* $\left(t_0, x^0, u(\cdot)\right) \in T \times X \times \mathcal{U}$.

En consecuencia todas las trayectorias de un sistema reversible están definidas sobre el dominio completo del tiempo T. Dado cualquier evento $\left(t_1, x^1\right)$ y cualquier $t_0 \in T, t_0 < t_1, u(\cdot) \in \mathcal{U}$, existe un único $x^0 \in X$ tal que $u(\cdot)$ transfiera $\left(t_0, x^0\right)$ a $\left(t_0, x^1\right)$. En efecto, este estado está dado por $x_0 = \varphi\left(t_0; t_1, x^1, u(\cdot)\right)$. Este es el único estado con esta propiedad, dado que para otro $\widehat{x} \in X$ que satisface $\left(t_0, \widehat{x}^0\right) \overset{u(\cdot)}{\rightsquigarrow} \left(t_1, x^1\right)$ por la propiedad de cociclo.y $\left(t_1, \widehat{x}^1\right) \overset{u(\cdot)}{\rightsquigarrow} \left(t_0, x^0\right)$ con lo que $\left(t_0, \widehat{x}^0\right) \overset{u(\cdot)}{\rightsquigarrow} \left(t_0, x^0\right)$, en consecuencia $\widehat{x}^0 = x^0$ por el axioma de consistencia.

La definición de sistema dinámico está lejos de ser una definición general sobre la cual construir una sustancial teoría matemática, no osbtante es útil para:

- Mostrar la unidad de desarollas similares en diferentes campos,
- Establecer puentes de transferencia de ideas de un área de aplicaciones a otra,
- Para reconocer más claramente las estructuras adicionales de los objetos en un campo particular.

Tradicionalmente el concepto de sistema dinámico fue más o menos sinónimo de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales. La teoría clásica de los sistemas dinámicos fue motivada por problemas en mecánica, particularmente correspondientes a la mecánica de los cuerpos celestes. Debido a esto fue natural suponer que las fuerzas externas estaban dadas y que no eran sometidas a la manipulación humana. Esto explica por qué los aspectos relativos a entradas y salidas no están presentes en la visión clásica de los sistemas dinámicos. El siguiente concepto puede ser visto como un equivalente mecánico de uns sistema dinámico reversible.

Definición 7 ***Flujo diferenciable.*** *Una tripleta* (T, X, ψ) *es llamada un flujo diferenciable o un sistema dinámico en el sentido clásico si* $T \subset \mathbb{R}$ *es un intervalo abierto,* X *un conjunto abierto de* $\mathbb{k}^n$, $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*(más generalmente un*

flujo diferenciable) y ψ es un mapeo continuamente diferenciable de $T^2 \times X$ en X, tal que

$$\begin{array}{cc} \psi(t;t,x) = x, & t \in T,\ x \in X \\ \psi(t;t_1,\varphi(t_1;t_0,x)) = \varphi(t;t_0,x), & t_0,t_1 \in T,\ x \in X \end{array}$$

Flujos diferenciales *locales* evitan la suposición de completez introduciendo la consideración que del tiempo y estado inicilaes dependen los tiempos de vida T_{t_0,x_0} de las trayectorias $\psi\left(\cdot;t_0,x^0\right)$. Los flujos diferenciales locales son generados comunmente por medio de la solución de ecuaciones diferenciales. Considere

$$\dot{x}(t) = g(t,x(t)) \tag{2.8}$$

donde $g : T \times T \mapsto \Bbbk^n$ es continua, con T un intervalo abierto y X un subconjunto abierto de $\Bbbk^n$. Se dice que $x(\cdot)$ es una solución de la ecuación diferencial 2.8 sobre un intervalo abierto $I \subset T$ si $x(\cdot)$ es continuamente diferenciable sobre $I, (t,x(t)) \in T \times X$ para todo $t \in I$ y $x(\cdot)$ satisface la ecuación diferencial 2.8 sobre I.

Teorema 13 *Sea $T \in \mathbb{R}$ un intervalo abierto, X un subconjunto abierto de $\Bbbk^n$ y suponga que $g : T \times X \to \Bbbk^n$ es continua y continuamente diferenciable con respecto a x sobre $T \times X$. Entonces para cualquier $(t_0,x_0) \in T \times X$, existe una solución única $x(\cdot) = \varphi(\cdot;t_0,x_0)$ de la ecuación 2.8 sobre algún intervalo abierto máximo $T_{t_0,x_0} \subset T$ conteniendo a t_0 tal que $x(t_0) = x^0$. Además el conjunto*

$$\mathcal{D}_\varphi = \left\{(t,t_0,x_0);t \in T_{t_0,x^0},(t_0,x_0) \in T \times X\right\}$$

es un conjunto abierto en $T^2 \times X$ y $\varphi : \mathcal{D}_\varphi \to \Bbbk^n$ es continuamente diferenciable(φ se dice que es la solución general de la ecuación diferencial 2.8).

Se observa que bajo las condiciones del teorema precedente, la ecuación diferencial 2.8 general un flujo diferencial local, (T,X,φ).

Comparando la definición de sistema dinámico con la correspondiente al flujo diferenciable se pueden observar las siguientes diferencias:

- Sólo se describe la evolución del estado,
- La condición de suavidad es impuesta sobre el mapeo de transición de estado,
- La reversibilidad está construida sobre la definición de flujo diferencial.

2.2 Sistemas dinámicos diferenciables

En lo que sigue supondremos que cada espacio $\Bbbk^l$, $l \in \mathbb{N}$ es un espacio normado, con una norma arbitraria denotada por $\|\cdot\|$

Un sistema dinámico $\sum = (T,U,\mathcal{U},X,Y,\varphi,\eta)$ es llamado diferenciable si satisface las siguientes condiciones:

1. $T \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto.

2. U, Y son subconjuntos de $\Bbbk^m$ y $\Bbbk^p$ respectivamente, X es un subconjunto abierto de $\Bbbk^n$.

3. Existe una función $f : T \times X \times U \to \Bbbk^n$ tal que para todo $t_0 \in T$. $x^0 \in X$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ el problema de valor inicial

$$\begin{array}{c} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \geq t_0,\ t \in T \\ x(t_0) = x^0 \end{array} \tag{2.9}$$

   tiene una solución única $\dot{x}(t)$ sobre un intervalo de tiempo abierto máximo I que satisface $I = T_{t_0, x^0, u(\cdot)}$ y $x(t) = \varphi\left(t; t_0, x^0, u(t)\right)$, $t \in I$

4. $\eta = T \times X \times U \to Y$ es continua

Nota 1 *Un sistema en tiempo continuo* $\sum = (T, U, \mathcal{U}, X, Y, \varphi, \eta)$ *cuyo intervalo de tiempo* $T \subset \mathbb{R}$ *no es abierto será llamado diferenciable si es obtenido por restricción del dominio del tiempo desde un sistema diferenciable en el sentido de la definición anterior.*

Algunos comentarios sobre la elección de $\mathcal{U}$ y el concepto de solución para la ecuación 2.9 se dan a continuación

Frecuentemente es necesario considerar saltos en las entradas de control, por ejemplo la función $u(\cdot)$ la cual $u(t) = u_1$, $t \leq t_1$ y otra $u(t) = u_2$, $t > t_1$. Lo anterior conduce a la elección de $\mathcal{U}$ como el espacio de las funciones constantes por pedazos de T a U o el espacio de las funciones continuas por pedazos $PC(T; U)$. Algunas veces será necesario extender el conjunto de las señales de entrada a funciones medibles en el sentido de Lebesgue u que son *localmente integrables* sobre T es decir $\int_a^b \|u(t)\| dt < \infty$ para todo $a, b \in T$ $a < b$. En general $f(t, x, u(t))$ no será dependiente de manera continua de t para cada x fijo, en consecuencia el concepto de solución utilizado en el teorema anterior no es aplicable. En lugar de esto se denominará $x(\cdot) : I \to X$ una solución de 2.9 sobre un intervalo $I \subset T$ si es *absolutamente continua* y satisface el problema de valor inicial precedente"casi donde sea" sobre I (es decir, "excepto sobre un conjunto de Lebsegue de medida cero"). Por absolutamente continua se quiere decir que la señal $x(\cdot)$ es continua, diferenciable casi donde sea con derivada localmente integrable y puede ser reconstruida desde su derivada por medio de la integración

$$\int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)\, ds = x(t) - x(t_0), \quad t_0, t \in T, t \geq t_0$$

Dos resultados básicos sobre la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales con lado derecho medible se dan a continuación.

Sea

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t)) \tag{2.10}$$

donde $g : T \times X \to \Bbbk^n, T \subset \mathbb{R}$ y X un subconjunto abierto de $\Bbbk^n$. Se dice que $g : T \times X \to \Bbbk^n$ satisface las *condiciones de Carathéodory* si

- **(Car 1)** $g(\cdot, x) : T \to \mathbb{k}^n$ es medible para cada $x \in X$ fija;
- **(Car 2)** $g(\cdot, x) : T \to \mathbb{k}^n$ es continua para cualquier $x \in X$ fija;
- **(Car 3)** $\|g(\cdot, \widetilde{x})\|$ es localmente integrable sobre T para algún $\widetilde{x} \in X$;
- **(Car 4)** Para cada conjunto compacto $C = I \times \mathbb{k} \subset T \times X$ existe una función integrable $L_C(\cdot) : I \to \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|g(t,x) - g(t,y)\| \leq L_C(t) \|x - y\| \quad , (t,x), (t,y) \in C \tag{2.11}$$

Recuérdese que en un espacio métrico la distancia entre un punto y un subconjunto está definida como

$$dist(x, S) = \inf \{d(x,y) ; y \in S\} \tag{2.12}$$

Teorema 14 ***Carathéodory.*** *Si T es un intervalo abierto, X es un subconjunto abierto de $\mathbb{k}^n$ y $g : T \times X \to \mathbb{k}^n$ satisface las condiciones de Carathéodory sobre $T \times X$, entonces para cualquier $\left(t_0, x^0\right) \in T \times X$ existe una solución única $x(\cdot) = \varphi\left(\cdot; t_0, x^0\right)$ de $\dot{x}(t) = g(t; x(t))$ sobre algún intervalo abierto $T_{t_0,x_0} \subset T$ conteniendo a t_0, tal que $x(t_0) = x^0$. Además:*

i) Si $t_+\left(t_0, x^0\right) = \sup T_{t_0,x^0} < \sup T$ entonces $x(t)$ no está acotado conforme $t \nearrow t_+\left(t_0, x^0\right)$ o el acotamiento ∂X de X es no vacía y $dist(x(t), \partial X) \to 0$ conforme $t \nearrow t_+\left(t_0, x^0\right)$. De manera análoga, para $t \searrow t_-\left(t_0, x^0\right) = \inf T_{t_0,x^0}$ si $t_-\left(t_0, x^0\right) > \inf T$.

ii) Si $\mathcal{D}_\varphi$ es el dominio de definición de la solución general φ,

$$\mathcal{D}_\varphi = \left\{(t, t_0, x_0) ; t \in T_{t_0,x^0}, (t_0, x_0) \in T \times X\right\},$$

entonces $\mathcal{D}_\varphi$ es un conjunto abierto en $T^2 \times \mathbb{k}^n$ y $\mathcal{D}_\varphi \to \mathbb{k}^n$ es continua.

Si $t_+ = t_+\left(t_0, x^0\right) < \sup T$ como en *(i)*, entonces t_+ es llamado un *tiempo de escape finito* de la solución.$\varphi(\cdot; t_0, x_0)$ Si adicionalmente $\varphi(\cdot; t_0, x_0)$ es no acotada sobre $[t_0, t_+)$ se dice entonces que la solución "explota" en tiempo finito.

Para establecer que una ecuación diferencial de la forma 2.9 define un sistema dinámico diferenciable se debe verificar que $g(t,x) = f(t, x, u(t))$ satisface las condiciones de Carathéodory para toda $u(\cdot) \in \mathcal{U}$.

Corolario 2 *Sean $T, U, \mathcal{U}, X, Y$ conjuntos que satisfacien lo correspondiente a la definición de sistemas dinámicos, y además $\eta : T \times X \times U \to Y$ es continua y $f : T \times X \times U \to \mathbb{k}^n$ es medible en $(t,u) \in T \times U$ para toda $x \in X$ y continua en $x \in X$ para cada $(t,u) \in T \times U$ fijo. Si $\mathcal{U} \subset U^T$ consiste de funciones L^p localmente integrables $(1 \leq p \leq \infty)$ sobre T y para cada conjunto compacto $C = I \times K \subset T \times X$ existen constantes m_C, l_C tales que*

$$\|f(t,x,u)\| \leq m_C\left(\|u\|^p + 1\right), \quad t \in I, \ u \in U \quad \text{para algún } x \in X,$$

$$\|f(t,x,u)-f(t,y,u)\| \leq l_C\left(\|u\|^p+1\right)\|x-y\|, \quad (t,x),(t,y)\in C,\ u\in U$$

Entonces el problemea de valor inicial

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t,x(t),u(t)), \quad t\in T\\ x(t_0) &= x^0\end{aligned}$$

tiene una solución única $x(\cdot)=x\left(\cdot;t_0,x^0,u(\cdot)\right)$ *sobre un intervalo de existencia máximo* $T_{t_0,x^0,u(\cdot)}$ *para todo* $\left(t_0,x^0,u(\cdot)\right)\in T\times S\times\mathcal{U}$. *Además, si se define al mapeo de transición de estado* $\varphi:\mathcal{D}_\varphi\to X$ *por medio de*

$$\varphi\left(t;t_0,x^0,u(\cdot)\right)=x\left(t;t_0,x^0,u(\cdot)\right),$$

$$\mathcal{D}_\varphi\left\{\left(t;t_0,x^0,u(\cdot)\right)\in T^2\times X\times\mathcal{U};\ t\in T_{t_0,x^0,u(\cdot)}\right\},$$

entonces $\sum$ *es un sistema dinámico diferenciable.*

En general los sistemas diferenciables no son completos. Consideremos el siguiente ejemplo en que se muestra que el intervalo de existencia maximal $T_{t_0,x^0,u(\cdot)}$ en general dependerá de x^0 y $u(\cdot)\in\mathcal{U}$.

Ejemplo 1 *Considere el problema de valor inicial*

$$\dot{x}(t)=x(t)^2+u(t), \quad x(0)=x^0 \tag{2.13}$$

donde $t\in T=\mathbb{R}$, $x^0\in X=\mathbb{R}$. *Para el control constante* $u(t)\equiv 1$, $t\geq 0$ *se tiene la solución:*

$$x(t)=\tan\left(t+c\left(x^0\right)\right), \quad t\geq 0, \quad c\left(x^0\right)=\arctan x^0\in(-\pi/2,\pi/2)$$

que "explota" en los tiempos $t_\pm\left(x^0\right)=\pm\pi/2-c\left(x^0\right)$. *En este caso el intervalo de existencia es* $\left(-\pi/2-c\left(x^0\right),+\pi/2-c\left(x^0\right)\right)$. *Para el control constante* $u(t)\equiv 0$ *es sencillo ver que* $x(t)=x^0/\left(1-x^0t\right)$ *es una solución de 2.13 sobre* $\left(1/x^0,\infty\right)$ *si* $x^0<0$. *Para* $x^0=0$ *la solución es cero para todo* $t\in\mathbb{R}$ *y para* $x^0>0$ *el intervalo de existencia es* $\left(-\infty,1/x^0\right)$.

En lo que sigue se determinarán las condiciones bajo las cuales un sistema dinámico diferenciable con espacio de estado $X=\Bbbk^n$ es completo.

La existencia de soluciones en el intervalo $\inf T<t<\sup T$ puede ser derivada del inciso *(i)* del teorema 15 (Carathéodory). De hecho, si $X=\Bbbk^n$ entonces $\sup T_{t_0,x^0}<\sup T$ (respectivamente $\inf T<\sup T_{t_0,x^0}$) puede ocurrir sólo cuando $x(t)$ no esté acotada conforme $t\to\sup T_{t_0,x^0}<\sup T$ (respectivamente $t\to\inf T_{t_0,x^0}$). De esta manera se necesitan criterios para asegurar que una solución dada no escape en tiempo finito en algún tiempo $T<t_1<\sup T$.

El lema de Gronwall es fundamental para estimar el crecimiento de soluciones de ecuaciones diferenciales.

Lema 1 ***Desigualdad generalizada de Gronwall.*** *Suponga que T es un intevalo, $a \in T$, $\beta(\cdot)$ es una función no negativa localmente integrable sobre T y $\alpha(\cdot)$, $\xi(\cdot)$ son funciones no negativas continuas sobre T tales que*

$$\xi(\cdot) \leq \alpha(t) + \left| \int_a^t \beta(r)\,\xi(r)\,dr \right|, \ t \in T$$

Entonces:

$$\xi(t) \leq \alpha(t) + \left| \int_a^t \alpha(r)\,\beta(r) \exp\left(\left| \int_r^t \beta(s)\,ds \right| \right) dr \right|, \ t \in T$$

Proposición 1 *Suponga $T \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto, $X \subset \Bbbk^n$ es abierto y $g : T \times X \to \Bbbk^n$ es acotada de manera a fín, esto es:*

$$\|g(t,x)\| \leq M(t)\,\|x\| + m(t), \ \ (t,x) \in T \times X,$$

donde $M(\cdot)$, $m(\cdot)$ son funciones no negativas localmente integrables sobre T . Entonces toda solución de $\dot{x}(t) = g(t, x(t))$ está acotada sobre todo intervalo finito (t_1, t_2), $t_1, t_2 \in T$, $t_1 < t_2$ sobre el cual está definida. Si además $X = \Bbbk^n$ entonces toda solución de $\dot{x}(t) = g(t, x(t))$ puede ser continuada sobre T.

Corolario 3 *Bajo las condiciones del corolario 9 con $X = \Bbbk^n$, si para todo subintervalo compacto $I \subset T$ existen constantes C_I y c_I tales que:*

$$\|f(t,x,u)\| \leq C_I\left(\|u\|^p + 1\right)\|x\| + c_I\left(\|u\|^p + 1\right), \ \ (t,x,u) \in I \times X \times U$$

entonces el sistema diferenciable $\sum = (T, U, \mathcal{U}, X, Y, \varphi, \eta)$ es completo y reversible.

2.2.1 Estados de equilibrio

Sea $\sum$ un sistema diferenciable y sea $u(\cdot) \in \mathcal{U}$. La fución de entrada $u(\cdot)$ define para cada tiempo $t \in T$ un *campo vectorial* $x \longmapsto f(t, x, u(t))$ sobre X. Son de particular importancia aquellos estados $\overline{x}$ para los cuales los campos vectoriales $x \longmapsto f(t, x, u(t))$ desaparecen para todos los tiempos $t \in T$:

$$f(t, \overline{x}, u(t)) = 0 \quad t \in T.$$

Estos estados son *puntos singulares* para todos los campos vectoriales $x \longmapsto (t, \overline{x}, u(t))$, $t \in T$. Dichos puntos representan el equilibrio del sistema en el sentido que si el estado en un tiempo inicial arbitrario $t_0 \in T$ es $\overline{x}$ y $\sum$ es controlado por $u(\cdot)$ entonces permanecerá en este estado para todo $t \in T_{t_0}$. La siguiente defínción es válida para sistemas dinámicos arbitrarios.

Definición 8 ***Estados de equilibrio*** *Sea $\sum$ un sistema dinámico y $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, entonces $\overline{x} \in X$ es un estado de equilibrio de $\sum$ bajo el control $u(\cdot)$ si*

$$\varphi(t; t_0, \overline{x}, u(\cdot)) = \overline{x}, \quad t_0, t \in T, \quad t \geq t_0$$

2.3 Propiedades de los sistemas

Con respecto al dominio del tiempo, se distingue entre sistemas *continuos en el tiempo* donde T es un intervalo acotado o no y sistemas *discretos en el tiempo* donde T es un subconjunto discreto de $\mathbb{R}$. Dominios en tiempo discreto suele ser $T = \mathbb{Z}, T = \mathbb{N}$ o una correspondiente secuencia de tiempo equidistante $\mathbb{Z}_\tau = \{k\tau,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{N}_\tau = \{k_\tau;\ k \in \mathbb{N}\}$ donde $\tau > 0$. Sistemas diferenciales con dominio de tiempo discreto son sistemas descritos por *ecuaciones en diferencias*

Ejemplo 2 ***Sistemas recursivos.*** *Sea U, X, Y conjuntos no vacíos, $T = \mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$ y*

$$f : T \times X \times U \to X \quad \eta : T \times X \times U \to Y$$

son dos mapeos arbitrairos. Para cualquier $u(\cdot) \in \mathcal{U} = U^T$, $t_0 \in T$, $x^0 \in X$ y sea $\varphi\left(t, t_0, x^0, u(\cdot)\right)$, $t \in T$, $t \geq t_0$ la única solución de la ecuación recursiva (o en diferencias)

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t))$$

con valor inicial $x(t_0) = x^0$.Entonces $\sum = (T, U, \mathcal{U}, X, Y, \varphi, \eta)$ es un sistema dinámico discreto en el tiempo. Todo sistema discreto en el tiempo con dominio como los definidos anteriormente puede ser descrito de esta forma(con posibles restricciones para $\mathcal{U}$) y en particualr, los autómatas pueden ser vistos como un particular tipo de sistemas recusivos

Aunque el estado de un sistema dinámico evoluciona en el tiempo, el sistema por sí mismo puede ser *invariante en el tiempo* en el sentido que el mapeo de transición de estados es invariante respecto a las variaciones de tiempo y el mapeo de salida no depende explícitamente del tiempo. Estos sistemas son analizados más fácilmente que los sistemas variantes en el tiempo y tal invariaza en el tiempo se asume con frecuencia aunque en realidad los sistemas dinámicos pueden cambiar lentamente por los efectos de crecimiento, envejecimiento, desgaste, etc. Si $T \in \mathbb{R}$, U es un conjunto no vacio y $\tau \in \mathbb{R}$, se denota por S_τ el operador de cambio sobre U^T definida por

$$(S_\tau u)(t) = \left\{ \begin{array}{cc} u(t-\tau) & \text{si } t - \tau \in T \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{array} \right\}$$

S_τ es llamada el cambio *derecho* o *hacia adelante* si $\tau > 0$ e *izquierdo* o *hacia atrás* si $\tau < 0$.

Definición 9 ***Sistema invariante en el tiempo.*** *Un sistema dinámico $\sum$ se dice que es invariante en el tiempo si satisface los siguientes axiomas*

i) $T \subset \mathbb{R}$ *contiene al 0 y es cerrado bajo la suma, es decir* $T + T \subset T$.

ii) $\mathcal{U}$ *es invariante bajo la variación derecha, es decir* $S_\tau \mathcal{U} \subset \mathcal{U}$ *para todo* $\tau \in T$, $\tau \geq 0$.

iii) Para cada $t_0, t, \tau \in T, t \geq t_0, \tau \geq 0$ *y cada* $x^0 \in X$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$

$$\varphi\left(t+\tau; t_0+\tau, x^0, S_\tau u(\cdot)\right) = \varphi\left(t; t_0, x^0, u(\cdot)\right).$$

iv) El mapeo de salida η *no depende del tiempo, es decir,* $\eta(t, x, u) = \eta(x, u)$, $t \in T$.

De *iii)* se ve que si $x(\cdot)$ es la respuesta del estado para $u(\cdot)$ comenzando en $\left(t_0, x^0\right)$, la respuesta del estado $\widetilde{x}(\cdot)$ para el control $\widetilde{u} = S_\tau u$ comenzando en $\left(t_0+\tau, x^0\right)$ está dada por $\widetilde{x}(t) = (S_\tau x)(t)$, $t \geq t_0 + \tau$.

El mapeo de transición de estados de un sistema invariante en el tiempo está completamente determinado por su mapeo de transición para el tiempo inicial fijo $t_0 = 0$

$$\varphi\left(t; x^0, u(\cdot)\right) = \varphi\left(t; 0, x^0, u(\cdot)\right), \quad \left(t, x^0, u(\cdot)\right) \in T \times X \times \mathcal{U}.$$

Un sistema diferenciable o recursivo

$$\begin{array}{ll} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), \ t \in \mathbb{R}_+) & x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), \ t \in \mathbb{N} \\ y(t) = \eta(t, x(t), u(t)) & y(t) = \eta(t, x(t), u(t)) \end{array}$$

es invariante en el tiempo si f y η no dependen explícitamente del tiempo.

Algunas veces es matemáticamente conveniente convertir un sistema diferencial o en diferencias variante en el tiempo en uno invariante en el tiempo introduciendo el tiempo como una nueva variable de estado $x_{n+1}(t) = t$. El sistema de ecuaciones se convierte en:

$$\begin{array}{ll} \dot{x}(t) = f(x_{n+1}(t), x(t), u(t)) & x(t+1) = f(x_{n+1}(t), x(t), u(t)) \\ \dot{x}_{n+1}(t) = 1 & x_{n+1}(t) + 1 \\ y(t) = \eta(x_{n+1}(t), x(t), u(t)), & y(t) = \eta(x_{n+1}(t), x(t), u(t)) \end{array}$$

Este método incrementa la dimensión del espacio de estados en uno.

Un sistema es llamado *finito, finito dimensional* o *infinito dimensional* dependiendo si su espaciode estados X es un conjunto o un vector de estados de dimensión finita o infinita

Definición 10 ***Sistema lineal.*** *Sea* $\mathbb{k}$ *un campo arbitrario . Un sistema dinámico* $\sum$ *se dice ser* $\mathbb{k}-$*lineal si*

i) U,$\mathcal{U}, X, Y$ *son espacios vectoriales sobre* $\mathbb{k}$.

ii) los mapeos

$$\begin{array}{c} \varphi(t; t_0, \cdot, \cdot) : X \times \mathcal{U} \to X \\ \eta(t, \cdot, \cdot) : X \times U \to Y \end{array}$$

son $\mathbb{k}-$*lineales para todo* $t, t_0 \in T, t \geq t_0$.

La condición *(ii) implica que*

$$\varphi(t; t_0, 0_X, 0_\mathcal{U}) = 0_X, \quad t, t_0 \in T, \quad t \geq t_0$$

donde 0_X es el origen en X y $0_\mathcal{U}$ el origen en $\mathcal{U}$(la función cero). Esto significa que 0_X es un estado de equilibrio de $\sum$ bajo el control $0_\mathcal{U}$ siempre que $\sum$ sea lineal

2.3.1 Linealización

A continuación se mostrará la forma en que un sistema lineal puede ser usado para aproximar el comportamiento de un sistema diferenciable no lineal cerca de una trayectoria o punto de equilibrio dados.

Sea $\sum$ un sistema dinámico diferenciable con ecuación de estado

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in T \tag{2.14}$$

y la ecuación de salida

$$y(t) = \eta(t, x(t), u(t)) \tag{2.15}$$

donde $t \in \mathbb{R}$ es un intervalo abierto, $U \in \mathbb{R}^m$ y $X \subset \mathbb{R}^n$ son abiertos, $Y = \mathbb{R}^p$, $\mathcal{U} = C(T, U)$. Sea $\widetilde{x}(\cdot)$ la trayectoria correspondiente a un control dado $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ y las condiciones iniciales $\left(t_0, \widetilde{x}^0\right) \in T \times X$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{x}}(t) &= f(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{u}(t)), \quad t \geq t_0, \quad t \in T \\ \widetilde{x}(t_0) &= \widetilde{x}^0 \end{aligned}$$

Se asume que las funciones $f : T \times X \times U \to \mathbb{R}^n$ y $\eta : T \times X \times U \to Y$ son continuas y contínuamente diferenciables respecto a (x, u) sobre $T \times X \times U$. Considerando las derivadas de Fréchet, mejor conocidas como Jacobianas

$$\begin{aligned} A(t) &= D_x f(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{u}(t)) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{u}(t))\right]_{n \times n} \\ B(t) &= D_u f(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{u}(t)) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_k}(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{u}(t))\right]_{n \times m} \\ C(t) &= D_x \eta(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{u}(t)) = \left[\frac{\partial \eta_i}{\partial x_j}(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{u}(t))\right]_{p \times n} \\ D(t) &= D_u \eta(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{u}(t)) = \left[\frac{\partial \eta_i}{\partial u_k}(t, \widetilde{x}(t), \widetilde{u}(t))\right]_{p \times m} \end{aligned} \tag{2.16}$$

El sistema lineal diferenciable descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t) x(t) + B(t) u(t) \\ y(t) &= C(t) x(t) + D(t) u(t) \end{aligned} \tag{2.17}$$

se dice que es la *linealización* de las ecuaciones 2.14 y 2.15 a través de $(\widetilde{x}(\cdot), \widetilde{u}(\cdot))$.

Sea $\xi^0 \in \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ y para todo $\epsilon > 0$ pequeño denotado por $x(t, \epsilon)$ la solución de la ecuación2.14 correspondiente al control $u(t, \epsilon) = \widetilde{u}(t) + \epsilon u(t)$ y la condición inicial $x(t_0, \epsilon) = \widetilde{x}^0 + \epsilon \xi^0$. Se sigue por los resultados básicos sobre la dependencia de soluciones con parámetros y condiciones iniciales que $x(t, \epsilon)$ es diferenciable respecto a ϵ en $\epsilon = 0$ y la derivada $\xi(t) = \dfrac{\partial x}{\partial \epsilon}(t, 0)$ satisface

$$\dot{\xi}(t) = A(t) \xi(t) + B(t) u(t), \quad t \in T, \ t \geq t_0$$

Si $\xi(\cdot)$ es una solución de 2.17 correspondiente al control $u(\cdot)$ y estado inicial ξ^0 entonces, para pequeños $\epsilon > 0$, $\widetilde{x}(t) + \epsilon \xi(t)$ es una aproximación de primer orden

de la solución de 2.14 correspondiente al control $\widetilde{u}(t) + \epsilon u(t)$ y es estado incial $\widetilde{x}^0 + \epsilon\xi^0$. Nótese que como $\epsilon \to 0$ esta aproximación es, en general, únicamente uniforme en t sobre un intervalo compacto.

El comportamiento de el sistema lineal 2.17 cerca del origen proporciona una aproximación del comportamiento del sistema no lineal 2.14, 2.15 en una vecindad suficientemente pequeña de la trayectoria $\widetilde{x}(t)$.

Como lo muestra la expresión 2.16 el modelo linealizado es, en general, variante en el tiempo *"aún si el sistema no lineal es invariante en el tiempo"* y esta es una de las principales razones de la importancia de los sistemas lineales variantes en el tiempo en la teorìa del control. No obstante, si se linealiza un sistema que es invariante en el tiempo, para un punto de equilibrio correspondiente a ciertas constantes de control el modelo linealizado será otra vez invariante en el tiempo.

2.4 Sistemas lineales

Asumir la linealidad de un sistema permite que cada estado y trayectoria de salida sean representados como una combinación lineal("superposición") de un conjunto fijo de trayectorias simples. El uso del principio de superposición para el análisis de sistemas lineales es el punto de partida. Se comienza considerando un sistema lineal general y se muestra que cada trayectoria puede ser descompuesta en un *movimiento libre* el cual depende únicamente del estado inical y un *movimiento forzado* que comienza en cero y depende sólo de la función de control. Se enfocará la atención en los sistemas lineales de dimensión finita invariantes en el tiempo descritos por ecuaciones diferenciales.

2.4.1 Sistemas lineales generales

Sea $\Bbbk$ un campo arbitrario y $\sum = (T, U, \mathcal{U}, X, Y, \varphi, \eta)$ un sistema $\Bbbk - lineal$, entonces para cada $t_0, t \in T, t \geq t_0$ y $\lambda_i \in \Bbbk$, $x_i \in X$, $u_i \in U$, $u_i(\cdot) \in \mathcal{U}$, $i = 1, ..., k$ se tiene

$$\varphi\left(t; t_0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i(\cdot)\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi(t; t_0, x_i, u_i(\cdot)) \tag{2.18}$$

$$\eta\left(t, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \eta(t, x_i, u_i) \tag{2.19}$$

Estas ecuaciones expresan el *principio de superposición* para el estado y la salida. Como un caso especial se obtiene el llamado *principio de descomposición*

$$\varphi\left(t; t_0, x^0, u(\cdot)\right) = \varphi\left(t; t_0, x^0, 0_{\mathcal{U}}\right) + \varphi(t; t_0, 0_X, u(\cdot)) \tag{2.20}$$

Esto muestra que cada trayectoria de un sistema lineal puede ser descompuesto en la suma de un movimiento libre $t \longmapsto \varphi\left(t; t_0, x^0, 0_{\mathcal{U}}\right)$ el cual depende sólo del estado inicial x^0 y un movimiento forzado $t \longmapsto \varphi\left(t; t_0, x^0, 0_X, u(\cdot)\right)$ el cual

depende únicamente del control $u(\cdot)$. Otra vez, como caso especial de 2.18, tomando $u_i(\cdot) = 0_{\mathcal{U}}$, se obtiene por la *ley de superposición del movimiento libre*

$$\varphi\left(t; t_0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, 0_{\mathcal{U}}\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi(t; t_0, x_i, 0_{\mathcal{U}}) \tag{2.21}$$

y tomando $x_i = 0_X$, la *ley de superposición de movimientos forzados*

$$\varphi\left(t; t_0, 0_X, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i(\cdot)\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi(t; t_0, 0_X, u_i(\cdot)) \tag{2.22}$$

Es sencillo ver que el principio general de superposición de las trayectorias de estados 2.18 es equivalente al principio de descomposición 2.20 junto con las leyes de superposición 2.21 y 2.22.

Las leyes de descomposición permiten introducir las siguientes dos familias de mapeos lineales. Para cualquier par de tiempos $(t, t_0) \in T_{\geq}^2$ se define el *operador de evolución* $\Phi(t, t_0) : X \to X$ como

$$\Phi(t, t_0)\, x = \varphi(t; t_0, x, 0_{\mathcal{U}}), \quad x \in X \tag{2.23}$$

y el *mapeo entrada-estado* $\Theta(t, t_0)\, u(\cdot) : \mathcal{U} \to X$ como

$$\Theta(t, t_0)\, u(\cdot) = \varphi(t; t_0, 0_X, u(\cdot)), \quad u(\cdot) \in \mathcal{U} \tag{2.24}$$

Los dos mapeos son lineales debido a 2.21 y 2.22. $\Phi(t, t_0)$ asocia cualquier estado x con el estado $x(t)$ en el tiempo t resultado del movimiento libre de $\sum$ comenzando en $x(t_0) = x$. $\Theta(t, t_0)$ mapea cualquier función de control $u(\cdot)$ a un estado $x(t)$ para el cual $\sum$ es conducido en el tiempo t por $u(\cdot)$ desde el estado inicial $x(t_0) = 0$. Por 2.17 todas las trayectorias $t \longmapsto \varphi\left(t; t_0, x^0, u(\cdot)\right)$ de $\sum$ están completamente determinadas por estas dos familias de operadores lineales

$$\varphi\left(t; t_0, x^0, u(\cdot)\right) = \Phi(t, t_0)\, x^0 + \Theta(t, t_0)\, u(\cdot), \quad (t, t_0) \in T_{\geq}^2.$$

Para todos los sistemas lineales el mapeo lineal $\Theta(t, t_0)$ puede ser expresado con la ayuda de los operadores $\Phi(t, s)_{(t,s)\in T_{\geq}^2}$. Por lo tanto, es de particular importancia estudiar la familia $\Phi(t, s)_{(t,s)\in T_{\geq}^2}$. Los axiomas del mapeo de transición de estados implican las siguientes ecuaciones básicas

$$\Phi(t, t) = I_X, \quad t \in T \tag{2.25}$$

$$\Phi(t_2, t_1) \circ \Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0), \quad t_0, t_1, t_2 \in T \quad t_0 \leq t_1 \leq t_2 \tag{2.26}$$

Una familia $(\Phi(t, s))_{(t,s)\in T_{\geq}^2}$ de operadores lineales sobre X con estas propiedades es llamada una *familia de operadores de evolución* sobre X. Si $\sum$ es invariante en el tiempo es posible fijar $t_0 = 0$ y obtener una familia de uno-paramétrica $(\Phi(t, s))_{t\in T_0}$ de operadores lineales $\Phi(t) : X \to X$ definidas por

$$\Phi(t)\, x = \Phi(t, 0)\, x = \varphi(t; 0, x, 0_{\mathcal{U}}), \quad t \in T_0 = \{t \in T; t \geq 0\} \tag{2.27}$$

Las ecuaciones 2.25 y 2.26 implican entonces

$$\Phi(0) = I_X \tag{2.28}$$

$$\Phi(t) \circ \Phi(s) = \Phi(t+s), \quad s,t \in T, \quad t.x \geq 0. \tag{2.29}$$

Una familia $(\Phi(t,s))_{t\in T_0}$ de operadores lineales sobre X con esas propiedades se llama *semigrupo de operadores lineales* sobre X. La teoría de semigrupos de operadores sobre un espacios normados proveen las bases matemáticas para el estudio de sistemas lineales invariantes en el tiempo de dimensión infinita.

El siguiente ejemplo de dimensión finita asocia las nociones abstractas anteriores con conceptos familiares de la teoría de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 3 ***Sistemas diferenciables lineales.*** *Sea $T \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $X = \Bbbk^n$, $U = \Bbbk^m$, $Y = \Bbbk^p$, $\mathcal{U}$ cualquier subespacio lineal de $L^1_{loc}(T, \Bbbk^m)$, es decir, $\mathcal{U} = PC(T, \Bbbk^m)$ y $A(\cdot) \in PC(T, \Bbbk^{n\times n})$, $B(\cdot) \in PC(T, \Bbbk^{n\times m})$, $C(\cdot) \in PC(T, \Bbbk^{p\times n})$, $D(\cdot) \in PC(T, \Bbbk^{p\times m})$. Por el corolario (1), existe una única solución al problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t), \quad t \in T \\ x(t_0) &= x^0 \end{aligned} \tag{2.30}$$

para cada $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $t_0 \in T$, $x^0 \in X$. Recordemos que la matriz fundamental $X(t, t_0)$ asociada a 2.30 es, por definición, la solución de la ecuación diferencial matricial

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A(t)\,X(t), \quad t \in T \\ x(t_0) &= I_n \end{aligned} \tag{2.31}$$

Esto significa que las columnas $x^j(t, t_0)$ de $X(t, t_0)$ resuelven los problemas de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)\,x(t), \quad t \in T \\ x(t_0) &= e^j \end{aligned}$$

donde e^j es la j-ésima columna de I_n, $j \in \underline{n}$. La fórmula de variación de constantes da la siguiente representación explícita de la solución $x(t) = \varphi\left(t; t_0, x^0, u(\cdot)\right)$ de 2.30

$$\varphi\left(t; t_0, x^0, u(\cdot)\right) = X(t, t_0)\,x^0 + \int_{t_0}^{t} X(t,s)\,B(s)\,u(s)\,ds, \quad t \in T \tag{2.32}$$

Si se hace

$$\eta(t, x, u) = C(t)\,x + D(t)\,u$$

entonces $\sum = (T, U, \mathcal{U}, X, Y, \varphi, \eta)$ es un sistema lineal diferenciable(definido por las funciones matriciales $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$, $D(\cdot)$). Dado que φ está definida sobre $T^2 \times X \times \mathcal{U}$, $\sum$ es completo y reversibles. Ahora se determinarán los operadores lineales $\Phi(t, t_0)$, $\Theta(t, t_0)$ asociados con $\sum$. Como una consecuencia inmediata de 2.23 y 2.32 se obtiene para todo $t_0, t \in T$

$$\Phi(t, t_0)\,x = X(t, t_0 x)$$

La matriz fundamental de 2.30 es precisamente la representación matricial de la evolución del operador $\Phi(t,t_0)$ respecto a la base estándar de $\Bbbk^n$. En lo que sigue se usará la misma notación $\Phi(t,t_0)$ para ambos operadores lineales y sus representaciones matriciales. Dado que $\Phi(t,t_0)\Phi(t_0,t) = I_n$, los operadores $\Phi(t,t_0), t,t_0 \in T$ son todos invertibles. De 2.24 y 2.32 se obtiene para todo $t_0, t \in T$

$$\Theta(t,t_0)u(\cdot) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)B(s)u(s)\,ds, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U} \tag{2.33}$$

Esto especifica la relación entre el operador entrada-estado $\Theta(t,t_0)$ y el operador de evolución $\Phi(t,s)$ para el sistema $\sum$. Un caso especial sucede cuando $T = \mathbb{R}$ y $A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$, $C(t) \equiv C$, $D(t) \equiv D$ son independientes del tiempo. En este caso el sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Sea e^{At} la matriz exponencial definida por la serie absolutamente convergente

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.35}$$

Entonces la matriz fundamental tiene la forma $X(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}$ y el mapeo de transición de estados está dado por

$$\varphi\left(t;t_0,x^0,u(\cdot)\right) = e^{A(t-t_0)}x^0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}Bu(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.36}$$

Esta fórmula muestra que el sistema $\sum$ es invariante en el tiempo, asociado con un semigrupo de operadores lineales $\Phi(t) = e^{At}$. Dado que $\sum$ es reversobñe este semigrupo puede ser extendido a un grupo uno-paramétrico $\Phi = \left(e^{At}\right)_{t\in\mathbb{R}}$ de operadores lineales sobre $\Bbbk^n$.

2.5 Estabilidad y eigenmovimientos

Idealmente se desearía calcular explícitamente todas las soluciones de cada ecuación diferencial o sistema de ecuaciones, sin embargo como se sabe actualmente, sólo algunas ecuaciones muy específicas lo permiten. De ahí la importancia del estudio de las propiedades cualitativas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales que resuelva explícitamente dicha ecuación. Esto marca el comienzo de la teoría moderna de las ecuaciones difereciales cuyos inicadores fueron A. M. Lyapuno y H. Poincaré, matemáticos, cuyos trabajos al inicio del siglo pasado han motivado investigaciones recientemente.

Se podría pensar en calcular numéricamente una ecuación diferencial y tomar toda la información apartir de los resultados obtenidos, sin embargo en varios problemas como los sistemas complejos, o los que involucran controles automáticos se requiere cierta información cualitativa acera de sus soluciones.

Más aún, deseamos saber si cierta propiedad de las soluciones de un sistema permance sin cambio alguno si el sistema sufre algún tipo de cambio(usualmente

llamado perturbación). En concreto, una solución númérica, y/o el cálculo de algunas soluciones específicas no proveen de una respuesta satisfactoria.

Este análisis cualitativo es importante dado que en la medición de las condiciones iniciales o la propia ecuación diferencial involucra una aproximación; en efecto, en casi cualquier modelo matemático de un sistema físico se tienen ligeras, en el mejor de los casos, incertidumbres. Por esto es importante el estudio de sensibilidad de un modelo particular a las pequeñas perturbaciones o cambios en las condiciones iniciales y/o en sus parámetros. Otro inconveniente en el uso de aproximaciones numéricas es que frecuentemente nos interesa mostrar que la solución de la ecuación diferencial tiende a cero cuando $t \to \infty$, una aproximación numérica sugerirá que esto es cierto, sin embargo no puede probarlo.

Un fenómeno cualitativo de gran interés práctico es la noción de estabilidad de un estado particular del sistema o de sus soluciones. Actualmente, el análisis de estabilidad se basa principalmente en estudiar las propiedades y condiciones bajo la cuales una solución es estable. La estabilidad de los sistemas lineales(el caso más sencillo) se ha desarrollado ámpliamente y permite investigar los sistemas *casi lineales* usando métodos analíticos. Tales sistemas no lineales son importantes ya que ningún sistema físico es lineal totalmente, la linealización de un sistema es una idealización de la realidad. El objetivo de estas investigaciones es encontrar bajo qué condiciones el añadir términos no lineales al modelo no se altera drásticamente el comportamiento del sistema lineal, o expresado de otra forma, ¿qué condiciones permiten que el sistema perturbado se comporte más o menos como el sistema linealizado?

Finalmente, algunos problemas no lineales no pueden ser linealizados adecuadamente bajo ciertas aplicaciones de control, por lo tanto es necesario manejar dicha no linealidad en el sistema de tal forma que se alcance el objetivo deseado.

2.5.1 Definiciones básicas de estabilidad

Visto desde una perspectiva geométrica, consideremos un sistema físico cuyas ecuaciones de movimiento están dadas por el sistema autónomo

$$x^{'} = f(x) \tag{2.37}$$

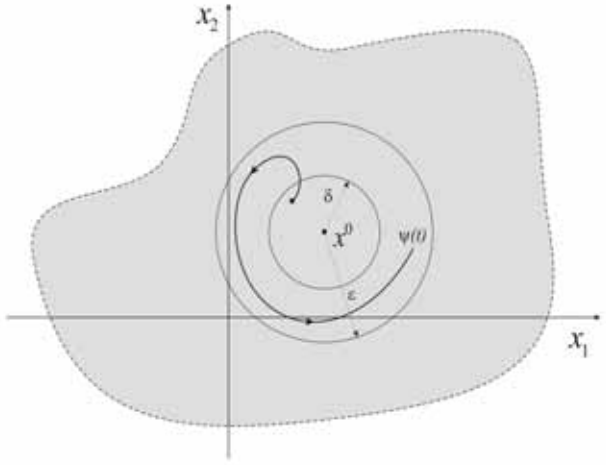
donde la función f con n componentes está definida en alguna región D de $\mathbb{R}^n$. Asumimos que $f \in C^1$, lo cual garantiza la existencia y unicidad de soluciones del problema de valor inicial. Entonces, las soluciones del sistema anterior pueden ser representadas como curvas en el espacio fase y su comportamiento puede ser descrito por tales curvas. Sea $x = \overline{x}$ un punto de equilibrio del sistema, entonces la solución constante $\varphi(t) \equiv \overline{x}$ es una solución del sistema 2.37. En el espacio fase la solución $\varphi(t) \equiv \overline{x}$ se representa como un punto aislado.

Ahora supongamos que el sistema se desplaza ligeramente del estado de equilibrio, es decir, consideremos una solución $\psi(t)$ de 2.37 que pase a través de x^0 en el tiempo t_0 donde la distancia euclidiana $\left\|x^0 - \overline{x}\right\|$ es pequeña. Se desea conocer qué sucede al sistema cuando comenzamos el movimiento desde

x^0 diferente de $\overline{x}$ pero cerca de él. ¿El movimiento resultante $\psi(t)$ permanecerá cerca del estado de equilibrio $\overline{x}$ para $t \geq t_0$? Si esto sucede, se puede decir, de manera muy general, que el sistema es estable para la solución $\varphi(t) \equiv \overline{x}$. Si el movimiento se mantiene cerca de la posición de equilibrio x_0 y además la solución $\psi(t)$ tiende a regresar a la posición de equilibrio cuando el tiempo t se incrementa infinitamente, entonces se dice que el sistema tiene *estabilidad asintótica* respecto a las soluciones constantes $\varphi(t) \equiv \overline{x}$.

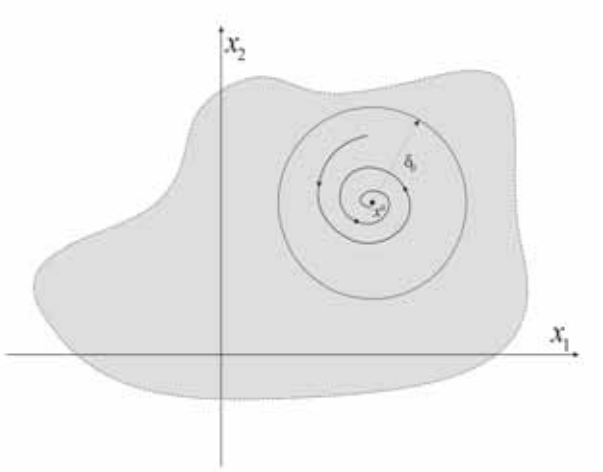
En cambio, si la solución $\psi(t)$ abandona cualquier pequeña vecindad alrededor de $\overline{x}$ se dice, a grandes rasgos, que el sistema presenta inestabilidad respecto a su solución constante $\varphi(t) \equiv \overline{x}$.

Definición 11 *La solución constante $\varphi(t) \equiv \overline{x}$ de 2.37 se dice que es estable si para cada número $\epsilon > 0$ podemos encontrar un númro $\delta > 0$(que depende de ϵ) tal que si $\psi(t)$ es cualquier solución de 2.37 se tiene*[5] *$\|\psi(t_0) - \overline{x}\| < \delta$, entonces la solución $\psi(t)$ existe para todo $t \geq t_0$ y $\|\psi(t) - \overline{x}\| < \epsilon$ para $t \geq t_0$.*



[5] Por conveniencia la norma es la distancia euclidiana que hace que la vecindad sea una esfera con cento en $\overline{x}$.

Definición 12 *La solución constante $\varphi(t) \equiv \overline{x}$ se dice que es asintóticamente estable si es estable y si existe un número $\delta_0 > 0$ tal que si $\psi(t)$ es una solución de 2.37 se tiene $\|\psi(t_0) - \overline{x}\| < \delta_0$, entonces $\lim_{t \to +\infty} \psi(t) = \overline{x}$.*



La solución constante $\varphi(t) \equiv \overline{x}$ se dice inestable si no es estable.

Notemos que debido a que el sistema 2.37 es autónomo, y por lo tanto invariante en el tiempo, los números δ, δ_0, mencionados en las definiciones anteriores, son independientes de t_0. En este caso la estabilidad y estabilidad asintótica se dicen que son *uniformes*.

Generalicemos el concepto de estabilidad para cualquier solución arbitraria del sistema no autónomo

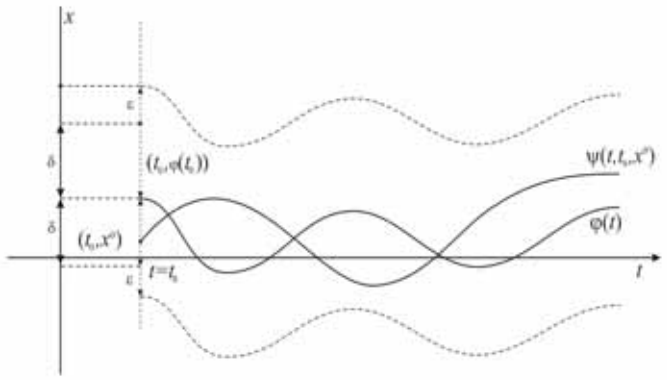
$$y' = f(t, x) \tag{2.38}$$

donde el vector f con n componentes está definido y es continuo en una región $D = \{(t, y) \,|0 \leq t \leq \infty, |x| < a\}$ de dimensión $n + 1$, donde a es una constante. Asumimos también que en todo punto de f, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ con $j = 1, ..., n$ son continuas en D y sea $\varphi(t)$ alguna solución de 2.38 para $0 \leq t \leq \infty$. Sea $\psi\left(t, t_0, x^0\right)$ donde $t_0 \geq 0$ una solución de 2.38 para la cual $\psi\left(t_0, t_0, x^0\right) = x^0$.

Definición 13 *Una solución $\varphi(t)$ de 2.38 se dice que es estable si para cada $\epsilon > 0$ y cada $t_0 \geq 0$ existe un $\delta > 0$ (δ ahora depende de ϵ y posiblemente de t_0) tal que si $|\varphi(t) - x_0| < \delta$, la solución $\psi\left(t, t_0, x^0\right)$ existe para $t > t_0$ y satisface $\left|\varphi(t) - \psi\left(t, t_0, x^0\right)\right| < \epsilon$ para $t \geq t_0$.*

Podemos ejemplificar este concepto de manera geométrica para el caso $n = 1$

con la siguiente figura



Se puede mostrar que si una solución es estable en el sentido arriba mencionado para una t_0 dada, entonces lo es también para cualquier otra condición inicial $t_1 \geq t_0$. Por esta razón, al analizar la estabilidad de una solución es posible hacerlo con un t_0 fijo, posiblemente $t_0 = 0$.

Definición 14 *La solución $\varphi(t)$ de 2.38 se dice que es asintóticamente estable si es estable y si existe*[6] *un $\delta_0 > 0$ tal que si $\left|\varphi(t_0) - x^0\right| < \delta_0$ la solución $\psi\left(t, t_0, x^0\right)$ se aproxima a la solución $\varphi(t)$ cuando $t \to \infty$, esto es*

$$\lim_{t \to +\infty} \left|\psi\left(t, t_0, x^0\right) - \varphi(t)\right| = 0$$

Podemos decir que ciertas ecuaciones diferenciales cuya propiedad particular es que para cada t_0, x^0, no únicamente para valores cercanos a x^0, la solución correspondiente $\psi\left(t, t_0, x^0\right)$ se aproxima a cero cuando $t \to \infty$. En este caso la solución cero es asintóticamente estable de manera global[7].

Si una solución $\varphi(t)$ es asintóticamente estable, pero no lo es globalmente, es decir, no todas las soluciones se aproximan a φ cuando $t \to \infty$, ¿cuál será la región de estabilidad asintótica? En otras palabras, dado un t_0 describir un conjunto de valores iniciales x^0 tales que el $\lim_{t \to +\infty} \left|\psi\left(t, t_0, x^0\right) - \varphi(t)\right| = 0$. Esto en en general un problema complicado de resolver pero muy común en la práctica.

2.5.2 Análisis espectral de sistemas diferenciables lineales

Sea $A \in \mathbb{k}^{n \times n}$ una matriz dada. Las trayectorias de estado del sistema libre sin salidas están dadas por

$$\dot{x} = Ax(t), \qquad t \in \mathbb{R} \tag{2.39}$$

[6] Notemos que δ_0 puede también depender de t_0.

[7] Las ecuaciones diferenciales lineales, como veremos adelante, cumplen la propiedad de estabilidad global asintótica en general, no obstante para sistemas no lineales no sucede así.

Notemos primero que el origen $\overline{x} = 0$ es siempre un punto singular del campo vectorial $x \mapsto Ax$ sobre $\mathbb{k}^n$ y es por lo tanto un punto de equilibrio de 2.39. Más generalmente $\overline{x} \in \mathbb{k}^n$ es un punto de equilibrio si y sólo si $A\overline{x} = 0$ es decir, el ker A es el conjunto de equilibrio de 2.39. Las trayectorias de 2.39 están descritas por el grupo de operadores lineales

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k, \qquad t \in \mathbb{R}$$

el cual tiene las siguientes propiedades.

Lema 2 *Si $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$, entonces para cada $s, t \in \mathbb{R}$ se tiene*

i) $\dfrac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$

ii) $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$

iii) $\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}$

iv) $e^{S^{-1}ASt} = S^{-1}e^{At}S,\ S \in \mathbf{GI}_n(\mathbb{k})$

Nuestro objetivo es mostrar que cada trayectoria de 2.39 puede ser representada como una superposición de un número finito de trayectorias relativamente simples, los *eigenmovimientos*. Estos eigenmovimientos son determinados fácilmente una vez que la base de los eigenvectores generalizados de A ha sido encontrada. Antes de enunciar con mayor detalle este concepto, recordemos algunos resultados del álgebra lineal sobre el análisis espectral.

Supóngase que $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ entonces $\mathbb{C}^n$ es el espacio de estados y $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Sea $\sigma(A)$ es espectro de A, es decir el conjunto de eigenvalores

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \det(\lambda I_n - A) = 0\}$$

$\sigma(A)$ es el conjunto de raíces del polinomio característico de A

$$\chi_A(s) = \det(sI_n - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0$$

Factorizando $\chi_A(s) \in \mathbb{C}[s]$ de acuerdo con el Terorema fundamenteal del álgebra obtenemos

$$\chi_A(s)] = \prod_{j=1}^{l} (s - \lambda_j)^{m(\lambda_j)}, \qquad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ para } i = j$$

$m(\lambda_j)$ se dice que es la *multiplicidad algebraica* del eigenvalor λ_j mientras $\dim \ker(\lambda_j I_n - A) \leq m(\lambda j)$ es su *multiplicidad geométrica.* La siguiente descomposición es básica para nuestro análisis

Lema 3 (Descomposición espectral) *Si $\lambda_1, ..., \lambda_l$ son los distintos eigenvalores de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con multiplicidades algebraicas $m(\lambda_1), ..., m(\lambda_l)$ entonces*

$$\mathbb{C}^n = \ker(\lambda_1 I_n - A)^{m(\lambda_1)} \oplus ... \oplus \ker(\lambda_l I_n - A)^{m(\lambda_l)} \tag{2.40}$$

es decir $\mathbb{C}^n$ *es la suma directa de los eigenespacios generalizados* $\ker(\lambda_j I_n - A)^{m(\lambda_j)}$, $j \in \underline{l}$. *Más aún* $\dim\ker(\lambda_j I_n - A)^{m(\lambda_j)} = m(\lambda_j)$ *para cada* $j \in \underline{l}$. $z \in \mathbb{C}^n$ *se dice que es un vector generalizado de orden* $m \geq 1$ *de* A *si*

$$(\lambda I_n - A)^m z = 0 \qquad y \qquad (\lambda I_n - A)^{m-1} z \neq 0$$

Por tanto los elementos no cero del $\ker(\lambda_j I_n - A)^{m(\lambda_1)}$ son los eigenvectores generalizados de orden $\leq m(\lambda_j)$. Las proyecciones correspondientes a la descomposición 2.40

$$\begin{array}{c} P_j : \mathbb{C}^n \longrightarrow \ker(\lambda_j I_n - A)^{m(\lambda_j)}, \qquad j \in \underline{l} \\ x = x^1 \oplus ... \oplus x^l \mapsto x^j \end{array}$$

son llamadas *eigenproyecciones de* A. Las siguientes propiedades de P_j, $j \in \underline{l}$ son inmediatas de la definición anterior

$$P_j^2 = P_j, \quad P_j P_k = 0 \text{ si } j \neq k, \quad \sum_{j=1}^{l} P_j = I_n \tag{2.41}$$

Además,

$$AP_j = P_j A = \lambda_j P_j + N_j, \quad j \in \underline{l}$$

donde $N_j = (A - \lambda_j I_n) P_j$ es nilpotente. N_j es llamado *eigennilpotente* correspondiente al eigenvalor λ_j de A. Añadiendo estas igualdades y usando 2.41 obtenemos la representación espectral de A

$$A = A\sum_{j=1}^{l} P_j = \sum_{j=1}^{l} (\lambda_j P_j + N_j)$$

Si $N_j = 0$, λ_j se dice que es *semi-simple*. A es diagonalizable si y sólo si cada eigenvalor es semi-simple y en este caso

$$A = A\sum_{j=1}^{l} P_j = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j P_j$$

Ahora regresemos al movimientro libre del sistema 2.39. Un estado inicial $z \in \ker(\lambda I_n - A)^m$ surge del siguiente eigenmovimiento generalizado de 2.39

$$e^{At} z = e^{\lambda t} e^{(A-\lambda I)^t} z = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j z, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.42}$$

La trayectoria permanece en el subespacio lineal generado por $z, Az, ..., A^{m-1}z$ para todo $t \geq 0$. En particular, si z es un eigenvector, $Az = \lambda z$, entonces

$$e^{At} z = e^{\lambda t} z, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{2.43}$$

permance siempre en el subespacio complejo de dimensión uno a través de z. Estas trayectorias son llamadas *eigenmovimientos* del sistema 2.39.

Como funciones del tiempo, cualquier eigenmovimiento generalizado de orden m es el producto de la exponencial $e^{\lambda t}$ y un vector polinomial

$$\sum_{j=0}^{m-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I_n)^j z \in \mathbb{C}^n [t]$$

de grado $m-1$. Si $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ la parte exponencial determina el comportamiento extremo de la trayectoria. $\left\| e^{At} z \right\|$ tiende a cero o a infinito dependiendo de si $\operatorname{Re}\lambda < 0$ o $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Nota 2 *Si $\lambda_0 = 0 \in \sigma(a)$ los eigenvectores asociados son puntos de equilibiro de 2.39. Si z es un eigenvector generalizado asociado de orden m entonces el correspondiente eigenmovimiento generalizado depende polinomialmente del tiempo, $z(t) = e^{At} z = \sum_{j=0}^{m-1} (1/j!) A^j z t^j$.*

Ya que por el Lema anterior cada estado incial puede ser representado como una suma de eigenvectores generalizados, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 4 *Cada trayectoria del sistema libre 2.39 es una superposición de los eigenmovimientos generalizados. Más precisamente, si $P_1, ..., P_l$ son las eigenproyecciones de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ correspondientes a los eigenvalores distintos $\lambda_1, ..., \lambda_l$ con multiplicidad algebráica $m(\lambda_1), ..., m(\lambda_l)$ entonces*

$$e^{At} x^0 = \sum_{j=1}^{l} e^{\lambda_j t} \sum_{k=0}^{m(\lambda_j)-1} \tfrac{t^k}{k!} (A - \lambda_j I_n)^k P_j x^0, \qquad t \geq 0, x^0 \in \mathbb{C}^n$$

En particular, si A es diagonalizable entonces

$$e^{At} x^0 = \sum_{j=1}^{l} e^{\lambda_j t} P_j x^0, \qquad t \geq 0, x^0 \in \mathbb{C}^n$$

La fórmula siguiente proporciona un método para calcular e^{At} en el caso de ser diagonizable. Si $\left(z^1, ..., z^n\right)$ es una base de eigenvectores de A, $Az^i = \lambda_i z^i$ entonces $S = \left[z^1, ..., z^n\right] \in \mathbf{GI}n(\mathbb{C})$ satisface

$$e^{At} = S \; diag\left(e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}\right) S^{-1}$$

Para el caso general, recordemos que si $J(\lambda, m)$ es un bloque de Jordan de orden $m \in \mathbb{N}$, es decir

$$J(\lambda, m) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times m}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{N}$$

Entonces

$$e^{J(\lambda,m)t} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t/1! & t^2/2! & \cdots & t^{m-1}/(m-1)! \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & t^2/2! \\ & 0 & & \ddots & t/1! \\ & & & & 1 \end{bmatrix},$$
$$t \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{N}$$

Ahora supongase que $S^{-1}AS$ está en la forma canónica de Jordan

$$S^{-1}AS = \oplus_{j=1}^{l} \oplus_{k=1}^{k_j} J(\lambda_j, m_j k)$$

donde $m(\lambda_j) = \sum_{k=1}^{k_j} m_j k$ es la multiplicidad algebraica de el eigenvalor $\lambda_j \in \sigma(A)$ y $\oplus$ denota la suma directa de matrices. Entonces

$$e^{At} = S\left[\oplus_{j=1}^{l} \oplus_{k=1}^{k_j} e^{J(\lambda_j, m_j k)t}\right] S^{-1}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

A partir de ahora, se supondrá que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Los eigenmovimientos reales o modos del sistema 2.39 se obtienen tomando en cuenta las partes real e imaginaria de los eigenmovimientos complejos. Si $\lambda \in \sigma(A)$ es real y z un eigenvector real para λ, entonces el eigenmovimiento asociado a 2.43 es real. Considerando que si $\lambda = \gamma + i\omega \in \sigma(A)$ no es real ($\omega \neq 0$) y $z = (z_i) \in \mathbb{C}^n$ es un eigenvector asociado entonces $\overline{\lambda} = \gamma - \omega \in \sigma(A)$ y el vector conjugado complejo $\overline{z} = (\overline{z}_i) \in \mathbb{C}^n$ es un eigenvector de A para $\overline{\lambda}$.

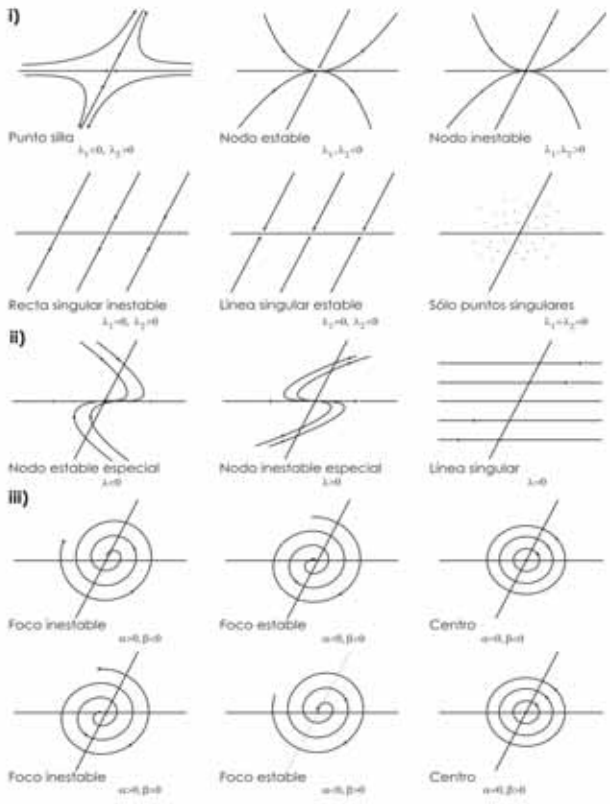
Tomando Re $z = (1/2)(z + \overline{z}) \in \mathbb{R}^n$ y Im $z = (1/2i)(z + \overline{z}) \in \mathbb{R}^n$ como estados iniciales obtenemos los siguientes eigenmovimientos reales de 2.39

$$e^{At}(\operatorname{Re} z) = \operatorname{Re}\left(e^{At}z\right) = \operatorname{Re}\left(e^{\lambda t}z\right) = e^{\gamma t}\left[(\cos\omega t)\operatorname{Re} z - (\sin\omega t)\operatorname{Im} z\right]$$

$$e^{At}(\operatorname{Im} z) = \operatorname{Im}\left(e^{At}z\right) = \operatorname{Im}\left(e^{\lambda t}z\right) = e^{\gamma t}\left[(\sin\omega t)\operatorname{Re} z + (\cos\omega t)\operatorname{Im} z\right]$$

Existe una diferencia cualitativa entre los modos correspondientes a los valores reales e imaginarios de los eigenvalores. En el caso real tenemos una trayectoria de dimensión uno a lo largo del eje real $\mathbb{R}z$ que decrece(se contrae) si $\lambda < 0$, constante si $\lambda = 0$ y creciente(se expande) si $\lambda > 0$. En el caso complejo se tiene un movimiento oscilatorio de dimensión dos en el plano generado por Re z, Im $z \in \mathbb{R}^n$. Este movimiento es decreciente si Re $\lambda < 0$ y creciente si Re $\lambda > 0$

Algunos eigenmovimientos típicos son



Eigenmovimientos reales generalizados se obtienen tomando las partes real e imanginaria de los eigenmovimientos complejos generalizados 2.42. Si $\lambda \in \sigma(A)$ es real y z es un eigenvector real generalizado de orden m para λ, entonces 2.42 es un eigenmovimiento real generalizado que permanece para todo $t \geq 0$ en el subespacio lineal de dimensión m

$$span_{\mathbb{R}} \left\{ z, Az, ..., A^{m-1}z \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

Si $\lambda = \gamma + i\omega \in \sigma(A)$, $\omega \neq 0$ y $z \in \mathbb{C}^n$ es un eigenvector generalizado asociado de orden m entonces obtendremos dos *eigenmovimientos reales generalizados* con el par $\lambda, \overline{\lambda} \in \sigma(A)$ y el eigenvector generalizado z

$$\begin{aligned} e^{At} \operatorname{Re} z &= \operatorname{Re}\left(e^{At} z\right) = \operatorname{Re} e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I_n)^j z \\ &= e^{\gamma t} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t^j}{j!} \left[(\cos \omega t) \operatorname{Re}(A - \lambda I_n)^j z - (\sin \omega t) \operatorname{Im}(A - \lambda I_n)^j z \right], \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$$e^{At}\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}\left(e^{At}z\right) = \operatorname{Im} e^{\lambda t}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{t^j}{j!}\left(A-\lambda I_n\right)^j z$$

$$= e^{\gamma t}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{t^j}{j!}\left[(\cos\omega t)\operatorname{Im}\left(A-\lambda I_n\right)^j z + (\sin\omega t)\operatorname{Re}\left(A-\lambda I_n\right)^j z\right], \quad t\geq 0$$

Ambas trayectorias son válidas para todo $t\geq 0$ en el subespacio de dimensión $2m$

$$span_{\mathbb{R}}\left\{\operatorname{Re}\left(A-\lambda I_n\right)^j z,\ \operatorname{Im}\left(A-\lambda I_n\right)^j;\ \ j=0,...,m-1\right\}$$

Dado que A es real, su espectro puede se escrito de la forma

$$\sigma(A)=\left\{\rho_1,...,\rho_r,\lambda_1,...,\lambda_c,\overline{\lambda}_1,...,\overline{\lambda}_c\right\}$$

donde $\rho_i\in\mathbb{R}$, $i\in\underline{r}$ y $\lambda_i\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $i\in\underline{c}$. La multiplicidad algebráica de λ_i y $\overline{\lambda}_i$ son la misma. Además, si $z^1,...,z^{m(\lambda_i)}$ es una base del $\ker\left(\lambda_i I_n-A\right)^{m(\lambda_i)}$ entonces $\overline{z^1},...,\overline{z^{m(\lambda_i)}}$ es una base del $\ker\left(\overline{\lambda_i}I_n-A\right)^{m\left(\overline{\lambda_i}\right)}$ y $\operatorname{Re}z^1,...,\operatorname{Re}z^{m(\lambda_i)}$, $\operatorname{Im}z^1,...,\operatorname{Im}z^{m(\lambda_i)}\in\mathbb{R}^n$ es una base(sobre $\mathbb{R}$) del subespacio lineal real de dimensión $2m\left(\lambda_i\right)$

$$\mathbb{R}^n\cap\left[\ker\left(\lambda_i I_n-A\right)^{m(\lambda_i)}\oplus\ker\left(\overline{\lambda_i}I_n-A\right)^{m\left(\overline{\lambda_i}\right)}\right]=\ker_{\mathbb{R}}\left(\left|\lambda_i\right|^2 I_n-2\left(\operatorname{Re}\lambda_i\right)A+A^2\right)^{m(\lambda_i)}$$

La versión real de la descomposición espectral 2.40 es

$$\mathbb{R}^n=\oplus_{i=1}^r\ker_{\mathbb{R}}\left(\rho_i I_n-A\right)^{m(\rho_i)}\oplus\oplus_{i=1}^c\ker_{\mathbb{R}}\left(\left|\lambda_i\right|^2 I_n-2\left(\operatorname{Re}\lambda_i\right)A+A^2\right)^{m(\lambda_i)}$$

Como consecuencia se obtiene el siguiente corolario que es la versión real del corolario arriba descrito

Corolario 5 *Sea $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, entonces cada trayectoria real $e^{At}x^0$, $x^0\in\mathbb{R}^n$ de 2.39 es una superposición de los eigenmovimientos generalizados reales(modos).*

Por superposición de los eigenmovimientos del sistema 2.39, diferentes patrones de movimientos libres alrededor del origen pueden ser generados dependiendo del número de eigenmovimientos crecientes, decrecientes, periódicos o estacionarios del sistema. Para un sistema lineal de dimensión dos es posible dar una clasificación completa del patrón de flujo alrededor del estado de equilibrio $\overline{x}=0$. Sea $\left(z^1,\ z^2\right)$ una base de $\mathbb{R}^2$ tal que la representación matricial de $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ respecto a esta base está en la forma canónica de Jordan. Por tanto, hay tres tipos de matrices de 2×2 con forma de Jordan para los reales

$$i)\ \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\qquad ii)\ \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\qquad iii)\ \begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}$$

donde $\lambda_1,\lambda_2,\lambda,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Los correspondientes movimientos libres a través de cualquier punto inicial $a\in\mathbb{R}^2$ son

$$i)\ \begin{bmatrix}a_1e^{\lambda_1 t}\\ a_2e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}\qquad ii)\ \begin{bmatrix}a_1e^{\lambda t}+a_2te^{\lambda t}\\ a_2e^{\lambda t}\end{bmatrix}\qquad iii)\ \begin{bmatrix}a_1e^{\alpha t}\cos\beta t-a_2e^{\alpha t}\sin\beta t\\ a_1e^{\alpha t}\sin\beta t+a_2e^{\alpha t}\cos\beta t\end{bmatrix}$$

Como resultado tenemos que para cualquier $A \in \mathbb{R}^2$ el retrato fase de $\dot{x} = Ax$ alrededor del origen coincide cualitativamente exactamente con uno de los patrones mostrados anteriormente. Las primeras seis figuras corresponden al caso (i), las siguientes tres figuras al caso (ii) y las úlitmas seis al caso (iii). Más precisamente, el retrato fase particular dependerá de los vectores z^1, z^2 y de la magnitud de λ_1 y $\lambda_2, \lambda, \alpha$ y β.

Para obtener una representación del flujo de un sistema diferenciable no lineal invariante en el tiempo con espacio de estados en $\mathbb{R}^2$, el primer paso es determinar el retrato fase de su linealización alrededor de cada uno de sus estados de quilibrio. El segundo paso es obtener las características globales tales como ciclos límite, conexiones entre puntos silla(separatrices), conexiones al infinito(órbitas no acotadas), órbitas periódicas, etc. Existe una teoría cualitativa muy rica de los sistemas diferenciales en el plano.

Capítulo 3

Álgebra diferencial y planitud

3.1 Introducción

En varias aplicaciones en ingeniería no se dispone de las mediciones del vector de estado completo del sistema debido a que la instrumentación puede ser excesivamente costosa o incluso que no existan sensores adecuados para su determinación, lo que limitaría en primer momento las tareas de monitoreo y control. Ello motiva al empleo de *estimadores o reconstructores* de estados a partir de las mediciones disponibles, para lo cual ya se han desarrollado diversos enfoques y soluciones [33], [14]. El diseño de criterios que permitan definir si un sistema es controlable parcial o totalmente es vital para proceder a la implementación de controladores de sistemas.

Para resolver lo anterior se han desarrollado diferentes metodologías que han permitido inferir u observar estados a partir de mediciones disponibles en el sistema y determinar las condiciones de controlabilidad del mismo, tales son los esquemas clásicos como el filtro de Wiener, el filtro de Kalman u observadores de tipo Luenberger.

Un sistema no forzado se dice que es *observable* si y sólo si es posible determinar cualquier estado(inicial arbitrario) $x(t) = x_t$ usando únicamente un registro finito $y(\tau)$ para $t \leq \tau \leq T$ de las salidas.

Sea el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ y $m < n$.

Se desea expresar los estados del sistema $\dot{x}$ en función de las salidas y, esto

es $x = C^{-1}y$, para lo cual hacemos

$$\begin{aligned} y &= Cx \\ \dot{y} &= C\dot{x} = CAx \\ \ddot{y} &= CA\dot{x} = CAAx = CA^2x \\ y''' &= CA^3x \\ &\dots \\ y^n &= CA^nx \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$y = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dots \\ y^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^n \end{bmatrix} = \mathcal{O}$$

$\mathcal{O}$ es la *matriz de observabilidad*.

No obstante, la matriz C no siempre corresponde con el número total de estados, por lo que y no representará todas las salidas del sistema, por lo tanto se requerirá inferir otras salidas $\widehat{x}$, tales que $u = f(y) = f(C\widehat{x})$. Una ecuación para estimar estados es:

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}\widehat{x} + \widehat{B}u + ky \tag{3.1}$$

Existe un error de estimación $e = x - \widehat{x}$ para el cual es posible encontrar su dinámica $\dot{e} = \dot{x} - \dot{\widehat{x}}$. Dado que $\dot{x} = Ax + Bu$ y $\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}\widehat{x} + \widehat{B}u + ky$ se escribe:

$$\dot{e} = Ax + Bu - \widehat{A}\widehat{x} + \widehat{B}u + ky$$

como $\widehat{x} = x - e$ y $y = Cx$ nos queda:

$$\dot{e} = Ax + Bu - \widehat{A}(x - e) + \widehat{B}u + kCx$$

la cual puede expresarse como:

$$\dot{e} = \widehat{A}e + \left[A - kC - \widehat{A}\right]x + \left[B - \widehat{B}\right]u$$

Si $\widehat{B} = B$ y $\widehat{A} = A - kC$ entonces $\dot{e} = \widehat{A}e = (A - kC)e$, y para que el error sea estable hacemos $\widehat{A} < 0$.

Tomemos la ecuación 3.1 y reescribámosla de la forma:

$$\dot{\widehat{x}} = (A - kC)\widehat{x} + Bu + ky$$

la cual puede ser expresada como:

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + Bu + k(y - C\widehat{x})$$

Esta última ecuación se le conoce como *observador tipo Luenberger.*

Sin embargo, antes de proceder a diseñar una metodología de observación y/o control, se debe verificar si efectivamente las variables de estado del sistema bajo estudio son observables dado el conjunto de mediciones disponibles. Las metodologías para verificar esto, como ya vimos, son los criterios o pruebas de observabilidad y controlabilidad [21]. Varios planteamientos han sido diseñados y propuestos para la síntesis de observadores, en el caso de sistemas no lineales se tienen pruebas basadas en aplicar criterios algebráicos de observabilidad y controlabilidad lineal a los sistemas linealizados por series de Taylor, no obstante estos criterios sólo presentan validez local. También se han presentado criterios de observabilidad para sistemas no lineales utilizando herramientas de geometría diferencial, pero esto no garantiza que las transformaciones(difeomorfismos) empleadas sean suprayectivas e invertibles.

A principios de los 90 una variedad de planteamientos han sido propuestos para la síntesis de observadores en sistemas lineales y no lineales utilizando el enfoque del *álgebra diferencial* [7], [22], [23], [24]. M. Fliess es el primero en introducir el enfoque del álgebra diferencial en la teoría del control para sistemas lineales y no lineales [11]. Una de las características de importancia de este enfoque es que evitan ecuaciones implícitas y esto representa una ventaja al tratar ciertos problemas, además que los resultados obtenidos son más generales y por lo tanto son válidos en el dominio de los campos diferenciales que describen a los sistemas dinámicos [18]. Con el álgebra diferencial surgen nuevos conceptos tales como el de sistemas diferencialmente planos, sistemas diferencialmente no planos y sistemas Luivilianos [10], [19].

En lo que sigue plantearemos la teoría básica del álgebra diferencial [19] y la utilizaremos para analizar la observabilidad de un sistema biológico modelado a través de ecuaciones diferenciales ordinarias.

3.2 Notación y definiciones básicas del álgebra diferencial

A continuación se presentan las definiciones y conceptos básicos del álgebra diferencial aplicados a la teoría del control[1].

Definición 15 *La pareja* (K, δ) *donde* δ *es la derivada sobre el campo* K *recibe el nombre de campo diferencial. Si además el operador derivada* δ *es único entonces se dice que el campo diferencial es ordinario.*

Ejemplo 4 *El operador* $\delta : \mathbb{R}(x) \rightarrow \mathbb{R}(x)$ *definido de forma usual, es una derivada sobre* $\mathbb{R}(x)$*, por lo tanto* $(\mathbb{R}(x), \delta)$ *determina un campo diferencial.*

Definición 16 *Sea* (K, δ) *un campo diferencial, al subconjunto* $C_K = \{c \in K : \delta(c) = 0\}$ *de* K *se le da el nombre de campo de constantes de* K*.*

[1] Esta teoría es desarrollada con detalle en [25].

Ejemplo 5 *Sea* $(\mathbb{R}(x), \delta)$ *un campo diferencial con* $\delta : \mathbb{R}(x) \to \mathbb{R}(x)$ *definido de la forma usual, si tomamos al subconjunto* $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}(x)$*, es claro que* $\delta(\mathbb{R}) = 0$.

Ejemplo 6 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *y* $\mathbb{C}$ *son campos triviales de constantes.*

Definición 17 *Una extensión de campos diferenciales* H/k *está dada por dos campos diferenciales* H *y* k*, tal que:*

- k *es un subcampo de* H
- *el operador derivada definido en* k *es una restricción de* H *en* k *del operador derivada definido en* H*.*

Ejemplo 7 $\mathbb{R}\langle e^t \rangle / \mathbb{R}$ *es una extensión de campos diferenciales.*

Definición 18 *Un campo de Hardy* H *es un conjunto de gérmenes de funciones de valor real sobre vecindades borrosas de* $+\infty$ *en* $\mathbb{R}$ *(o lo que es lo mismo, sobre semilíneas positivas en* $\mathbb{R}$*), el cual es cerrado bajo la derivación, y además forma un campo bajo las operaciones usuales de adición y multiplicación.*

Ejemplo 8 *Los ejemplos más simples de campos de Hardy son:* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *y* $\mathbb{R}(x)$ *(campo de funciones racionales), donde cada número real es identificado como un germen constante y* x *es el germen determinado por la función identidad sobre* $\mathbb{R}$*. Otro ejemplo está dado por el campo L-Hardy, el cual consiste de funciones logarítmico-exponenciales sobre variables en un campo de Hardy.*

Nota 3 *El campo de constantes* C_H *está contenido en todo campo de Hardy* H*.*

Nota 4 *Sean* H *un campo de Hardy y* $f \in H$*,* $f \neq 0$*. Entonces* H *contiene un elemento* $1/f$*, lo cual implica que* $f(t) \neq 0$ *para un* $t \in \mathbb{R}$ *suficientemente grande. Dado que* $f' \in H$*,* f *es diferenciable para todo* $t \in \mathbb{R}$ *suficientemente grande, por lo tanto* $f(t)$ *es continua, y además es siempre positiva o siempre negativa o nula para todo* t *suficientemente grande, lo misma será cierto para* $f'(t)$ *puesto que* H *es cerrado bajo la derivación lo cual implica que cada* $f \in H$ *es monótono para todo* t *suficientemente grande. En particular, para cada* $f \in H$*, el* $\lim_{t \to +\infty} f(t)$ *existe como un elemento del conjunto* $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$*.*

Definición 19 *Se define un sistema* H/k *como una extensión de campos diferenciales finitamente generada.*

Ejemplo 9 *Sea* H/k *una extensión de campos diferenciales generada por las cuatro variables* x_1, x_2, x_3, x_4 *relacionadas por las dos ecuaciones diferenciales siguientes*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + \ddot{x}_3 \dot{x}_4 &= 0 \\ \dot{x}_2 + \left(x_1 + \ddot{x}_3 \dot{x}_4 \right) x_4 &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $k = \mathbb{R}$ *y* $H = \mathbb{R}\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$*. Entonces la extensión diferencial* H/k *es infinitamente generada, ya que el número de variables es finito, y además están relacionadas por un número finito de ecuaciones diferenciales, por lo tanto la extensión* H/k *así definida es un sistema.*

Definición 20 *Una dinámica es definida como una extensión diferencial algebraica y finitamente generada $H/k\langle u\rangle$ del campo diferencial $k\langle u\rangle$, donde $k\langle u\rangle$ denota al campo diferencial generado por k y elementos de un conjunto finito $u = \langle u_1, u_2, ..., u_m\rangle$ de cantidades diferenciales.*

Ejemplo 10 *Considerando el ejemplo anterior y haciendo $u_1 = x_3$ y $u_2 = \dot{x}_4$. La extensión $H/k\langle u\rangle$ es diferencialmente algebraica y tiene la siguiente representación*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\ddot{u}_1 u_2 \\ \dot{x}_2 &= -\left(x_1 + \ddot{u}_1 x_4\right) x_4 \\ \dot{x}_4 &= u_2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

De donde se deduce que la dimensión de la dinámica es 3 y (x_1, x_2, x_4) es un estado generalizado.

Definición 21 *Sea $\{u, y\}$ un subconjunto del campo diferencial H de la dinámica dada por $H/k\langle u\rangle$. Decimos que un elemento $x \in H$ es observable respecto de $\{u, y\}$ si este es diferencialmente algebraico sobre $k\langle u, y\rangle$, de lo cual se desprende que un estado x se dice que es observable si y solamente si es observable con respecto a $\{u, y\}$. Una dinámica $H/k\langle u\rangle$ con salida y en H se dice que es algebraicamente observable si y solamente si cualquier estado tiene esta propiedad.*

Ejemplo 11 *Sea la dinámica diferencial $H/k\langle u\rangle$ una entrada-una salida dada por:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 \\ \dot{x}_2 &= u + x_2 \\ y &= x_1 + x_2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde $k\langle u\rangle = \mathbb{R}\langle u\rangle$, $H = \mathbb{R}\langle x_1, x_2, u\rangle$. Es claro que los estados x_1, x_2 son observables ya que ambos satisfacen un polinomio diferencial sobre $k\langle u, y\rangle$ de forma respectiva, esto es

- *Para x_2 se tiene que $y = x_1 + x_2 \Longrightarrow \dot{y} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \Longrightarrow \dot{y} = \dot{x}_2 = u + x_2$, entonces $\dot{y} - u - x_2 = 0$.*
- *Para x_1 se tiene que $y = x_1 + x_2 \Longrightarrow y - x_1 - x_2 = 0$, entonces $y - x_1 - \dot{y} - u = 0$.*

Definición 22 *Sea un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado por*

$$G\left(t, x, y, \dot{y}, ..., y^{(m)}, Q\right) = 0 \tag{3.5}$$

donde $x = [x_1, x_2, ..., x_n] \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados y $Q = [q_1, q_2, ..., q_n] \in \mathbb{R}^l$ es el vector de parámetros constantes. Si es posible encontrar un mapeo suave $W : \mathbb{R}^j \to \mathbb{R}^l$ tal que

$$Q = W\left(y, \dot{y}, \ddot{y}, ..., y^{(j)}\right)$$

Entonces el vector de parámetros Q se dice ser algebráicamente identificable con respecto a la salida disponible y.

Nota 5 *De manera general se puede decir que si es posible expresar el vector de parámetros Q como función de la salida y de sus derivadas, finitas en el tiempo, entonces se dice que el sistema es algebráicamente identificable con respecto a la salida y.*

Ejemplo 12 *Sea el sistema dado por*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_1 \\ y &= x_2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

De la salida y así definida es claro que el parámetro a satisface que

$$a = \frac{\ddot{y} - \dot{y}}{y}, \quad y \neq 0 \tag{3.7}$$

Por lo tanto el parámetro a es algebráicamente identificable.

Definición 23 *Sea el sistema dado por*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x, \overline{u}) \\ y &= h(x, u) \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde $x(t) = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\intercal} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\overline{u}(t) = (u, f(t)) \in \mathbb{R}^{m-\mu} \times \mathbb{R}^{\mu}$ donde u es el vector de entrada y $f(t)$ es el vector de fallas, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salida, A y h son funciones vectoriales analíticas. Un sistema como 3.8 se dice ser diagnosticable si f es algebráicamente observable con respecto a u y y.

Ejemplo 13 *Sea el sistema dado por*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (x_1 + x_2)(u + f) \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

es claro que el sistema es diagnosticable, ya que

$$f = \frac{\dot{y} - u}{y} - u, \quad y \neq 0$$

Nota 6 *La propiedad de diagnosticabilidad sobre un sistema $\sum$ no implica que el sistema $\sum$ sea observable y viceversa, como se muestra a continuación.*
Sea el sistema dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + u + f \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

El sistema con salida y así definida es diagnosticable, ya que $f = \dot{y} - y - u$, *pero el sistema no es observable con respecto a* u *e* y, *ya que* x_1 *no es observable. Por otra parte sea el sistema dado por*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_2 + f\left(x_1 + f x_2\right) \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

En este caso el sistema no es diagnosticable con respectoa u *e* y, *sin embargo, es observable ya que* $x_1 = y$ *y* $x_2 = \dot{y} - u$.

Definición 24 *El número entero de variables, las cuales no pueden ser expresadas en términos de las salidas y un número finito de sus derivadas en el tiempo, es conocido como el defecto del sistema no plano, es decir, sea el sistema dado por* H/k *y además sea* $y = (y_1, ..., y_m)$ *un subconjunto de* H, *tal que* y *es una base de trascendencia diferencial de* H/k, *entonces al entero, que hace mínimo el grado de trascendencia diferencial de* $H/k\langle y\rangle$ *se le da el nombre de defecto algebraico.*

Ejemplo 14 *Sea* H/k *la extensión de campos difernciales generada por las variables* x_1, x_2 *relacionadas por la ecuación diferencial*

$$\dot{x}_1 = x_1 + \left(\dot{x}_2\right)^3 \tag{3.9}$$

donde $k = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{R}\langle x_1, x_2\rangle$. *Entonces* H/k *determina un sistema con un defecto algebraico igual a uno puesto que la solución no puede ser expresada sin la integración de al menos una de las variables.*

Definición 25 *Si existe una base de trascendencia diferencial* $y = (y_1, ..., y_m)$ *de* H/k *tal que* $H = k\langle y\rangle$, *entonces a esta base de trascendencia diferencial* y *se le define como salida linealizable o salida plana del sistema* H/k.

Ejemplo 15 *Sea* H/k *el campo diferencial generado por las variables* x_1, x_2, x_3, u *las cuales están relacionadas por las siguientes ecuaciones diferenciales*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde $k = \mathbb{R}$ *y* $H = \mathbb{R}\langle x_1, x_2, x_3, u\rangle$, *entonces* $y = x_1$ *es una salida plana o salida linealizante, ya que es fácil verificar que* $x_1 = y$; $x_2 = \dot{y} - y^2$; $x_3 = \ddot{y} - 2y\dot{y}$; $u = y^{(3)} - 2\dot{y}^2 - 2y\ddot{y}$.

Definición 26 *Un sistema* H/k *se denomina diferencialmente plano si y solamente si su defecto algebraico diferencial es igual a cero.*

Ejemplo 16 *Sea H/k el campo diferencial generado por las variables x_1, x_2, x_3, u relacionadas por las ecuaciones diferenciales*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde $k = \mathbb{R}$ y $H = \mathbb{R}\langle x_1, x_2, x_3, u\rangle$. Entonces H/k determina un sistema según la definición 5. Por otra parte, sea la salida definida por

$$y = h(x) = x_1$$

Entonces

$$\begin{aligned} y &= x_1 \\ \dot{y} &= x_1 = x_2 + x_1^2 \\ &\Longrightarrow \quad x_2 = \dot{y} - y^2 \\ x_3 &= \dot{x}_2 = \ddot{y} - 2y\dot{y} \\ &\Longrightarrow \quad x_3 = \ddot{y} - 2y\dot{y} \\ u &= \dot{x}_3 = y^{(3)} - 2\dot{y}^2 - 2y\ddot{y} \\ &\Longrightarrow \quad u = y^{(3)} - 2\dot{y}^2 - 2y\ddot{y} \end{aligned}$$

Por lo tanto la salida $y = x_1$ así definida, resulta ser una salida plana o base de trascendencia de H/k, ya que $H = k\langle y\rangle$. Lo cual implica que el defecto del sistema anterior es igual a cero, y por lo tanto el sistema es diferencialmente plano. Las componentes de y se denominan salidas planas del sistema o salidas linealizantes.

Definición 27 *Un sistema H/k es diferencialmente no plano si y solamente si su defecto algebraico es diferente de cero.*

Ejemplo 17 *Sea H/k el campo diferencial generado por las variables x_1, x_2, x_3, u relacionadas por las ecuaciones diferenciales siguientes*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_3^2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \\ y &= x_2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde $k = \mathbb{R}$ y $H = \mathbb{R}\langle x_1, x_2, x_3, u\rangle$, entonces H/k determina un sistema.

Considerando el sistema anterior y la salida definida por $y = x_2$ se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_2 \\ x_3 &= \dot{y} \\ u &= \ddot{y} \\ \dot{x}_1 &= x_2 + x_3^2 \\ \dot{x}_1 &= y + \dot{y}^2 \end{aligned}$$

Entonces el sistema anterior tiene un defecto algebraico igual a uno, puesto que x_1 es la única variable del sistema que no puede ser representada como una función algebraica diferencial de la salida y. Así, el sistema anterior es no plano.

Definición 28 *Seal el sistema H/k y supongamos que M es un campo intermedio de H/k, (es decir, $k \subset M \subset H$) tal que M/k es un subsistema plano de H/k, entonces diremos que H/k es Liouvilliano si los elementos que pertenecen a $H - M$ pueden ser obtenidos por una adjunción de una integral o exponencial de integrales de elementos del subcampo plano M de H.*

Ejemplo 18 *Sea el sistema H/k no lineal definido por 3.12. Del ejemplo anterior se tiene que el subsistema plano M/k del sistema 3.12 está dado por*

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde $M = \mathbb{R}\langle x_2, x_3, u\rangle$ con salida plana $y = x_2$ y x_1 es la única variable que no pertenece al subsistema plano, sin embargo puede ser obtenida por la relación integral

$$x_1 = \int \left[x_2(t) + x_3^2(t)\right] dt = \int \left[y(t) + \dot{y}^2(t)\right] dt \tag{3.14}$$

Esto es, x_1 obtenida por una integral de elementos del campo plano M, o de forma equivalente, por una integral elemental de una función diferencial de y. Por lo tanto el sistema no lineal es Liouvilliano.

Capítulo 4

Oscilaciones de calcio

4.1 Introducción

En [26] se menciona una amplia variedad de fenómenos biológicos que proporcionan claros ejemplos de control, incluyendo regulación de genes, transducción de señales, mecanismos de retroalimentación hormonal, inmunológica y cardiovascular; control muscular, locomoción, atención y conciencia, dinámica de poblaciones y epidemias. La biología molecular, la biología integrativa, y el procesamiento de imagenes médicas son áreas del conocimiento que representan sistemas biológicos clásicos y han demostrado que los principios de control pueden ser utilizados para entender su naturaleza y construir un sistema de ingeniería sobre ellos.

Una forma de ver la vida a nivel celular es el considerarla como una red inalámbrica de interacciones entre proteínas, DNA, pequeñas moléculas relacionadas en la transferencia de señales y la transferencia de energía. El estudio de estas redes celulares conduce a la formulación de varias preguntas, tales como: ¿Es posible caracterizar estos comportamientos en términos de la teoría de control?, ¿Las variables de estado del sistema como concentraciones de proteína, RNA, otras sustancias químicas, etc. de qué manera se pueden estimar? Generalmente esta clase de interrogantes pueden ser aclaradas por medio de la identificiación y observación lo cual constituye una parte importante de la teoría del control.

Las propiedades dinámicas de estos sistemas: estabilidad, presencia de comportamientos oscilatorios, etc. son de importancia y las técnicas usadas por la teoría del control jugarán un papel importante en el análisis de dichos sistemas biológicos. El medio ambiente celular contiene perturbaciones o ruido en varias formas, y al mismo tiempo se presentan variaciones en distintos componentes químicos. El lazo retroalimentado está presente en la célula y ayuda a regular apropiadamente estas variaciones.

Los organismos vivos usan ondas que se propagan a través de medios excitables para transportar información. Las ondas de activación eléctrica en el

corazón, la propagación de potenciales de acción a través de axones de neuronas, la liberación de calcio durante la fertilización de ovocitos son algunos ejemplos de esto. La excitabilidad del medio es uno de los factores fundamentales que hacen posible la propagación en estos casos. Los sistemas químicos y físicos también pueden ser excitables y presentar comportamientos espacio temporales muy similares a los de los sistemas biológicos antes mencionados.

El ion calcio, Ca^{2+}, es un mensajero secundario usado tanto a nivel intracelular como intercelular por una enorme variedad de células, constituye un ejemplo paradigmático del uso de la interacción entre dinámica y geometría para generar distintos tipos de respuestas. El calcio está involucrado en el inicio de la vida y en la muerte celular, participa en la contracción muscular, en particular, en la del músculo cardıaco, en la transmisión de señales neuronales y en los procesos asociados a la memoria [6]. La capacidad del calcio para transmitir información debe, por lo tanto, ser versátil y específica a la vez. Para ello las células explotan al máximo la variedad de comportamientos a los que la distribución no homogénea de los componentes involucrados en su transporte puede dar lugar. Por ejemplo, en los músculos, una elevación localizada de la concentración de calcio da lugar a la relajación muscular mediante la apertura de canales de potasio sensibles al calcio. La elevación global de esta concentración, por otro lado, da lugar a la contracción del tejido [6]. Por lo tanto, la información de las señales de calcio está contenida tanto en la dinámica temporal como en la distribución espacial de su concentración.

Las células en las que más se ha estudiado la dinámica espacio temporal del calcio son los miocitos y ovocitos. La variedad de señales observadas en ovocitos inmaduros, las que van desde comportamientos espacialmente localizados hasta ondas globales que se propagan por toda la célula, es consecuencia del hecho de que el calcio involucrado en las mismas es liberado desde reservorios internos a través de canales que están distribuidos de forma espacialmente no homogénea. Uno de los rasgos más característicos de los canales involucrados en la liberación de calcio desde compartimientos intracelulares es el hecho de que su probabilidad de apertura es modulada por la concetración de calcio. Esto provee a la célula de un intrincado mecanismo *no lineal* de regulación que se manifiesta en un fenómeno conocido como "liberación de calcio inducida por calcio". De este modo el citosol[1] funciona como un medio excitable en lo que se refiere a la propagación de las señales de calcio. Existe pues, una importante relación entre la dinámica y el medio físico en que se desenvuelve el sistema que puede tener implicaciones relevantes en los mecanismos de señalización por calcio.

Oscilaciones periódicas en las concentraciones de calcio son observadas en todos los niveles de organización biológica, con periodos que fluctuan desde rangos pequeños hasta años. Estudios experimentales y teóricos han descubierto los mecanismos que gobiernan la mayoría de estos fenómenos oscilatorios. Ritmos celulares de varios periodos están asociados con la regulación de la actividad enzimática, recepción, transporte o ritmos genéticos de naturaleza no eléctrica y

[1] El citosol es el medio intracelular, está separado del medio extracelular por la membrana plasmática y contiene varios compartimientos internos encargados de diferentes funciones celulares.

con la regulación de conductancias iónicas en células eléctricamente excitables. Es evidente que para la señalización celular es importante no sólo los estados estacionarios, también lo son los multiestables, periódicos, multirrímicos y procesos oscilatorios no periódicos.

Durante los últimos 15 años el fenómeno de las oscilaciones intracelulares de calcio Ca^{2+} ha sido un buen ejemplo de un comportamiento oscilatorio a nivel celular. Estas oscilaciones son observadas en distintos tipos de células con diferentes periodos, lo cual ocurre espontáneamente o cuando la célula es estimulada por una hormona o un neurotransmisor. Las oscilaciones de calcio juegan un rol importante en la transducción de señales desde los receptores de la membrana celular hasta las encimas y genes, controlando la compleja red bioquímica de la célula. En prácticamente cualquier tipo de célula la oscilación de Ca^{2+} juega un rol importante en el control del comportamiento celular, funcionando como un agente de señalización para una variedad de procesos celulares tales como la secreción química, la división y movimiento celular. Distintos modelos de oscilaciones de Ca^{2+} han sido propuestos y exhiben una diversidad de respuestas, tanto estados estacionarios, oscilaciones que brincan, multirrítmicas o aquellas que presentan caos.

4.2 Modelo de oscilaciones de Ca^{2+}

4.2.1 Mecanismos involucrados en el sistema

En la mayoría de las células estímulos externos disparan la síntesis de inositol 1,4,5-trifosfato IP_3 un mensajero intracelular que ata a los receptores localizados en la membrana del retículo endoplásmico con lo que inicia la liberación de Ca^{2+} en citosol. Como la liberación de Ca^{2+} a través del canal *receptor*/Ca^{2+} de IP_3 es activada por el mismo Ca^{2+}, entonces la liberación de Ca^{2+} posee una naturaleza autocatalítica la cual es responsable de las oscilaciones de Ca^{2+} bajo condiciones adecuadas. Este fenómeno por el cual el Ca^{2+} citosólico activa su propia liberación desde el interior celular es conocido como *inducción* Ca^{2+} *liberación* Ca^{2+} y denominado *CIRC*[2].

Huart y colaboradores [9].proponen un modelo que es extensión del propuesto por Dupont y Goldbeter(1993) [4] para contabilizar la existencia de oscilaciones simples de Ca^{2+} en respuesta a la estimulación extracelular. El modelo original únicamente involucraba dos variables, la concentración de Ca^{2+} en citosol y la concentración intravesicular. La liberación de Ca^{2+} desde los depósitos internos dentro del citosol es activado por IP_3 y calcio citosólico, tal como un proceso autocatalítico de IP_3 sensible al CIRC es el centro del mecanismo oscilatorio. Oscilaciones de Ca^{2+} en este modelo básico no requieren una variación periódica de IP_3, congruente con las observaciones que muestran la ocurrencia de picos repetitivos de Ca^{2+} en presencia de un nivel constante de IP_3. No osbtante que la CIRC es el mecanismo oscilatorio primario, la concentración de IP_3 probablemente evoluciona de forma no monótona durante el

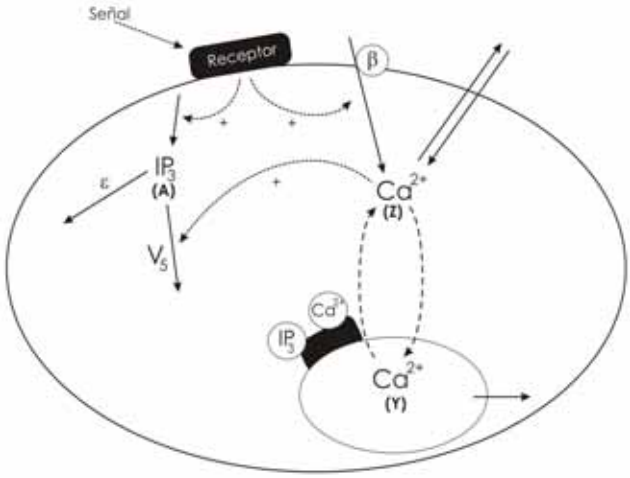
[2] Ca^{2+}-induced Ca^{2+}-release.

tiempo. IP_3 es sintetizado por la fosfolipasa C(PLC) en respuesta a la estimulación externa y metabolizado en IP_2 por una 5-fosfatasa y en IP_4 por 3-kinasa. Una variación oscilatoria de IP_3 puede resultar de controlar cualquiera de esas 3 enzimas por Ca^{2+}.

En apoyo a tal posibilidad, algunos experimentos reportan la actividad de PLC estimulada por Ca^{2+}, y la actividad de 3-kinasa por Ca^{2+}. Estimulación de la actividad PLC por Ca^{2+} ha sido tomada en cuenta en algunos modelos teóricos, algunos de ellos pueden exhibir un comportamiento oscilatorio tipo ráfaga o explosión[3] también llamado mixed-mode, así como caos. El nivel de Ca^{2+} citosólico regresa en ambos casos a su valor basal entre picos sucesivos de Ca^{2+}. Tal patrón temporal no se asemeja al comportamiento visto en hepatocitos estimulados por distintos exitadores. Con estos exitadores, la dinámica de bursting en hepatocitos cambia de una fase silenciosa a una fase activa con pequeñas amplitudes en las oscilaciones de Ca^{2+} alrededor de un nivel elevado de Ca^{2+}. Otro tipo de oscilaciones complejas puede obtenerse en simulaciones numéricas al extender el modelo basado en CIRC tomando en cuenta la estimulación de la actividad de IP_3 Kinasa debido al Ca^{2+}.

Un nuevo modelo es presentado y se investiga la ocurrencia de oscilaciones complejas en este modelo extendido el cual incorpora el bombeo de Ca^{2+}, su intercambio con el medio externo, así como la entrada estimulo-activación de Ca^{2+}.

En el siguiente esquema muestra los elementos involucrados en el modelo



4.2.2 Modelo matemático

Houart, Dupont y Goldbeter [16] caracterizan la dinámica de las oscilaciones de Ca^{2+} por medio de un modelo que combina el mecanismo CIRC al nivel de

[3]Este comportamiento es descrito por medio del término *bursting* el cual utilizaremos evitando su traducción literal.

receptores de IP_3 y la degradación de IP_3 por Ca^{2+} *estimulado*. Con él se investiga las condiciones en las cuales el fenómeno oscilatorio complejo ocurre y se caracterizan ámpliamente los distintos comportamientos dinámicos que pueden obtenerse, es decir, oscilaciones periódicas simples, los ciclos límites, oscilaciones cuasiperiódicas, el fenómeno de *bursting* y el caos determinístico. Además se investiga la relación entre el nivel de estimulación y la frecuencia de las oscilaciones de Ca^{2+} en el caso del comportamiento periódico para determinar si el modelo puede aumentar el incremento de la frecuencia de oscilaciones de Ca^{2+} con el grado de estimulación.

El modelo que se propone contiene tres variables que son las concentraciones libres de Ca^{2+} en:

- Citosol (Z)
- Interna (Y)
- IP_3 (A)

La evolución en el tiempo de estas tres variables está gobernada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= V_{in} - V_2 + V_3 + K_f Y - kZ \\ \frac{dY}{dt} &= V_2 - V_3 - K_f Y \\ \frac{dA}{dt} &= \beta V_4 - V_5 - \varepsilon A \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde

$$\begin{aligned} V_{in} &= V_0 + V_1 \beta \\ V_2 &= V_{M2} \frac{Z^2}{K_2^2 + Z^2} \\ V_3 &= V_{M3} \frac{Z^m}{K_Z^m + Z^m} \frac{Y^2}{K_Y^2 + Y^2} \frac{A^4}{K_A^4 + A^4} \\ V_5 &= V_{M5} \frac{A^p}{K_5^p + A^p} \frac{Z^n}{K_d^n + Z^n} \end{aligned}$$

V_0 es la constante de entrada de Ca^{2+} desde el medio extracelular y V_1 es la tasa máxima estímulo-inducida de Ca^{2+} desde el medio extracelular. El parámetro β refleja el grado de estimulación de la célula, el cual varía desde 0 hasta 1. Las tasas V_2 y V_3 son, respectivamente, la de bombeo de Ca^{2+} citosólico al interior y la de liberación de Ca^{2+} desde este depósito interno al cytosol en un proceso activado por calcio citosólico (CIRC), V_{M2} y V_{M3} denotan los valores máximos de dichas tasas. Los parámetros K_2, K_Y, K_Z, K_A son constantes que delimitan el bombeo, liberación y activación por Ca^{2+} y por IP_3. k_f es una tasa constante que mide el filtrado de Y en Z; k se refiere al transporte de Ca^{2+}citosólico hacia

el medio extracelular. V_4 es la tasa máxima de la síntesis estímulo-inducida de IP_3. V_5 es la tasa de fosforilación de IP_3 por la 3-kinasa y es caracterizada por un valor máximo V_{M5} y una constante de saturación media K_5

4.3 Bursting, caos y cuasiperiodicidad

Oscilaciones complejas de Ca^{2+} son observadas usualmente en respuesta a la estimulación externa, oscilaciones complejas hans ido reportadas en experimentos realizados con hepatocitos como respuesta a una variedad de exitadores.

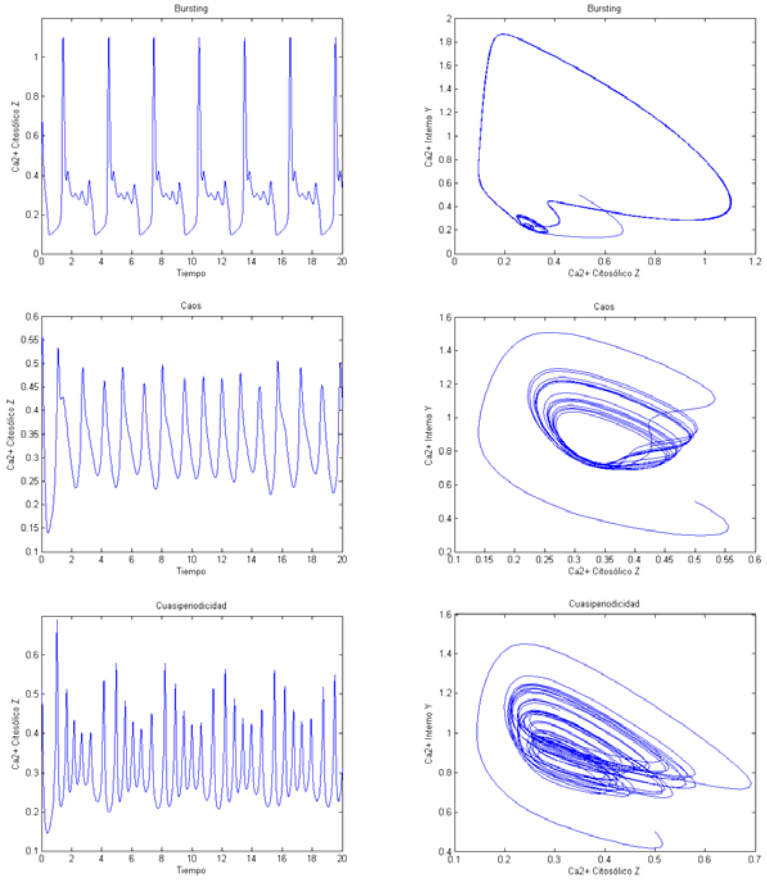
Una inspección detallada del comportamiento dinámico se realiza en [16] y se descubren las regiones de las oscilaciones complejas de Ca^{2+}, que incluyen *(a)*bursting, *(b)*caos y *(c)*cuasiperiodicidad. Tres conjuntos de parámetros corresponden a estos comportamientos oscilatorios complejos y se enlistan a continuación

Parámetros	Bursting	Caos	Cuasiperiodicidad
β	0.46	0.65	0.51
K_2	0.1	0.1	0.1
K_5	1	0.3194	0.3
K_A	0.1	0.1	0.2
K_d	0.6	1	0.5
K_y	0.2	0.3	0.2
K_z	0.3	0.6	0.5
k	10	10	10
k_f	1	1	1
ε	1	13	0.1
n	2	4	4
m	4	2	2
p	1	1	2
V_f	1	1	2
V_0	2	2	2
V_1	2	2	2
V_{M2}	6	6	6
V_{M3}	20	30	20
V_4	2.5	3	5
V_{M5}	30	50	30

Para oscilaciones del tipo bursting, picos de amplitud grande de Ca^{2+} son seguidos por pequeñas variaciones de Ca^{2+} alrededor de cierto nivel. Oscilaciones aperiódicas, caóticas son usualmente de amplitud reducida y nunca experimentan largos trayectos en el espacio fase comparado con el caso de bursting. Un típico atractor corresponde a la dinámica del caso caótico. Oscilaciones cuasiperiódicas están caracterizadas por la existencia de múltiples frecuencias y han sido reportadas escasamente en sistemas bioquímicos.

El comportamiento dinámico de los distintos tipos de oscilaciones se muestra

en la siguiente figura



De acuerdo a los experimentos realizados la variable medible es la concentración de Ca^{2+} en citosol, por tanto este estado será de importancia en nuestro análisis.

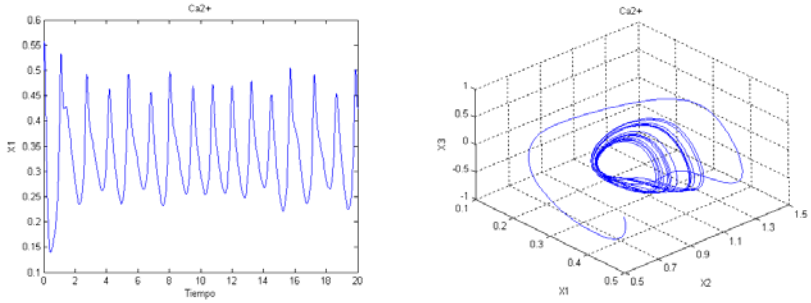
4.4 Análisis de la dinámica libre del sistema de Ca^{2+}

Para realizar el análisis de la dinámica libre del sistema, comportamiento a lazo-abierto, nos hemos enfocado en el caso caótico, tomando el valor de los parámetros correspondientes a este comportamiento. Tomemos el sistema 4.1 y

reescribase de la forma $\dot{x} = f(x)$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= V_{in} - V_2 + V_3 + K_f x_2 - k x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= V_2 - V_3 - K_f x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= \beta V_4 - V_5 - \varepsilon x_3 \end{aligned} \tag{4.2}$$

La solución del sistema lo realizaremos utilizando cálculo númerico, por medio del método de Runge-Kutta de cuarto y quinto orden[4]. La solución $x(t) = \varphi\left(t; t_0, x^0\right)$ con condiciones iniciales $x^0(0) = (0.5, 0.5, 0.5)$ durante un periodo de tiempo $t \in [0, 20]$ fue las siguiente[5]



Los estados de equilibrio $\overline{x}$ del sistema son aquellos estados para los cuales $f(t, \overline{x}) = 0$. Los puntos de equilibrio del sistema 4.2 se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas siguiente

$$\begin{aligned} V_{in} - V_2 + V_3 + K_f x_2 - k x_1 &= 0 \\ V_2 - V_3 - K_f x_2 &= 0 \\ \beta V_4 - V_5 - \varepsilon x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

El estado de equilibrio[6] resultante es $\overline{x} = (0.33, 0.7812, 0.1365)$.

Por otro lado, consideremos la linealización alrededor del punto de equilibrio

$$D_x f\left(t, \widetilde{x}(t)\right) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(t, \widetilde{x}(t)\right)\right]_{n \times n}$$

[4] *ode45* es una de las funciones que MatLab proporciona para la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias. ode45 usa métodos de integración Runge-Kutta-Fehlberg con tamaño de paso automático.

[5] El código correspondiente al sistema 4.2 puede consultarse en el apéndice *sistema de ecuaciones diferenciales.*

[6] MatLab utiliza *fsolve* para resolver sistemas de ecuaciones no lineales de varias variables. *fsolve* intenta resolver ecuaciones de la forma $F(X) = 0$ donde F y X son vectores o matrices.

Adicionalmente *fsolve* devuelve el valor de la matriz Jacobiana de la función vectorial F evaluada en $\widetilde{x}$.

El código correspondiente al sistema 4.3 puede consultarse en el apéndice *sistema de ecuaciones algebráico.*

es decir

$$D_x f\left(t,\overline{x}\right)=\left\{\begin{array}{ccc}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(t,\overline{x}\right) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\left(t,\overline{x}\right) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3}\left(t,\overline{x}\right)\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(t,\overline{x}\right) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\left(t,\overline{x}\right) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3}\left(t,\overline{x}\right)\\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1}\left(t,\overline{x}\right) & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2}\left(t,\overline{x}\right) & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3}\left(t,\overline{x}\right)\end{array}\right\}$$

de donde se sigue

$$D_x f\left(t,\overline{x}\right)=\left\{\begin{array}{ccc}9.1341 & 2.5510 & 30.8906\\ -19.1341 & -2.5510 & -30.8906\\ -2.1019 & 0 & -13.9005\end{array}\right\}$$

Los eigenvalores correspondientes de $D_x f\left(t,\overline{x}\right)$ permiten determinar la estabilidad local del sistema, estos son

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1.6333+5.5530i\\ \lambda_2 &= 1.6333-5.5530i\\ \lambda_3 &= -10.584\end{aligned}$$

Debido a que $\mathrm{Re}\left(\lambda_{1,2}\right)>0$ el sistema es localmente inestable.

4.5 Análisis de bifurcación

Tres parámetros son de interés para el desarrollo del sistema, β que refleja el grado de estimulación de la célula, el cual varía desde 0 hasta 1, k_f que es la tasa constante que mide el filtrado de Ca^{2+} interno en citosol y k que se refiere al transporte de Ca^{2+}citosólico hacia el medio extracelular. El cambio en los valores de estos parámetros permite identificar el grado de sensibilidad del sistema. Nuestro objetivo es identificar si tales variaciones generan nuevos puntos de equilibrio en el sistema lo cuales difieran significativamente del punto de equilibrio $\overline{x}=(0.33,0.7812,0.1365)$.

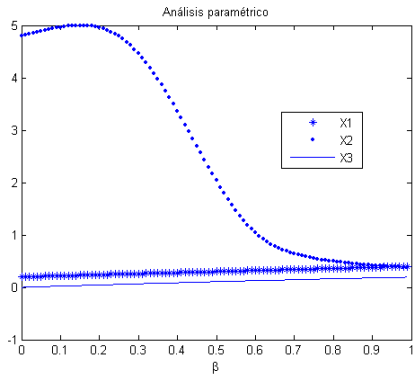
4.5.1 Variaciones paramétricas

Variación de β

El parámetro β toma valores dentro del intervalo $[0,1]$. Utilizaremos un β_i diferente cada vez y resolveremos el sistema algebraico 4.3 con condiciones iniciales $(0.5,0.5,0.5,)$, así se obtendrán distintos $\overline{x}_i=\left(x_1^{'},x_2^{'},x_3^{'}\right)$. Cada β_i puede ser tomado según la expresión recursiva $\beta_{i+1}=\beta i+\Delta\beta$, donde $\Delta\beta$ puede ser tomado tan pequeño como se desee.

El valor inicial del parámetro es $\beta=0.65$; después de recorrer β por todo el intervalo con $\Delta\beta=0.01$ obtenemos las siguientes variantes en los puntos de

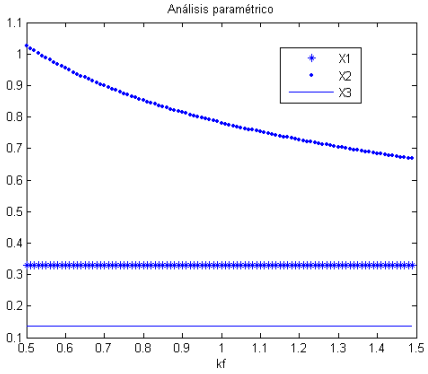
equilibrio



Observemos que la variable x_2 presenta cambios respecto al valor 0.7812 correspondiente al punto de equilibirio $\overline{x} = (0.33, 0.7812, 0.1365)$. Así, puede decirse de manera preliminar que x_2 es sensible a las variaciones del parámetro β.

Variaciones de k_f

El valor inicial del parámetro $kf = 1$.Consideraremos distintos valores dentro del intervalo $[0.5, 1.5]$, procediendo de manera similar obtenemos

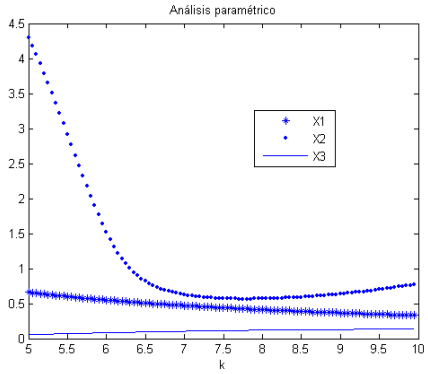


Se puede observar que las variaciones no son significativas respecto al punto de equilibrio original, por lo tanto el sistema 4.2 no es sensible al parámetro k_f

Variaciones de k

Como último parámetro a analizar es k cuyo valor inicial es 10 y varía dentro del intervalo $[5, 10]$, resolviendo el sistema 4.2 con las condiciones iniciales

planteadas y para distintos ki tenemos



La variable x_2 es ligeramente sensible respecto a las variaciones del parámetro k.

Como conclusión podemos mencionar que el sistema es un tanto sensible a las variaciones de los parámetros β y k pero sólo para la variable x_2 que es la concentración interna de Ca^{2+}, no obstante el grado de sensibilidad no queda bien establecido.

Procederemos a continuación a analizar el sistema de oscilaciones de Ca^{2+} incluyendo dos nuevas ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x} = \alpha\left(x - x_r\right)$$

una para cada parámetro que hemos considerado que determinan un grado de sensibilidad en el sistema 4.2 y revisaremos los cambios cualitativos de las soluciones y espacio fase resultante.

4.5.2 Sistema parametrizado

Suponemos que el sistema 4.2 es sensible a las variaciones de los parámetros β y k, por lo tanto es importante conocer la dinámica del sistema aumentando dos nuevas ecuaciones diferenciales correspondientes a cada uno de los parámetros. Tenemos entonces las ecuaciones

$$\frac{d\beta}{dt} = -\alpha\left(\beta - \beta_r\right) \tag{4.4}$$

$$\frac{dk}{dt} = -\gamma\left(k - k_r\right) \tag{4.5}$$

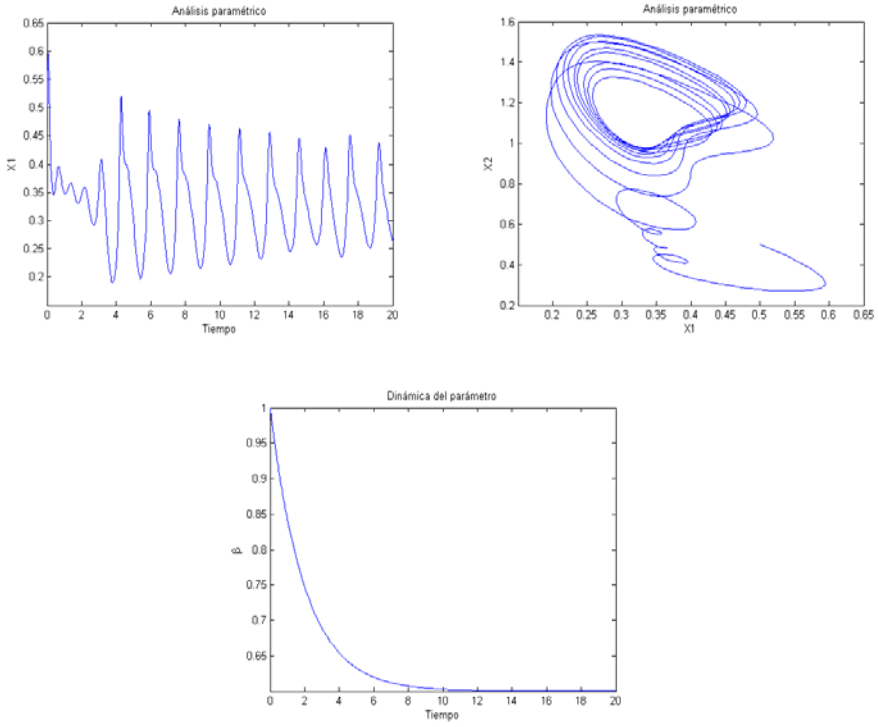
que representan la dinámica de β y k.

Procederemos a resolver el nuevo sistema, agregando primero la ecuación 4.4 al sistema 4.2, con lo que tenemos el sistema de 4 ecuaciones diferenciales

ordinarias siguiente

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= V_{in} - V_2 + V_3 + K_f x_2 - k x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= V_2 - V_3 - K_f x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= \beta V_4 - V_5 - \varepsilon x_3 \\ \frac{d\beta}{dt} &= -\alpha\left(\beta - \beta_r\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Resolvamos este sistema usando las condiciones inciales $x^0 = (0.5, 0.5, 0.5, 1)$. La solución del sistema, el pláno fase $x_1 - x_2$ y la dinámica de β son las siguientes



El punto de equilibrio del sistema 4.6 es $\overline{x} = (0.3200, 1.0352, 0.1271, 0.60)$ y su linealización correspondiente es

$$D_x f\left(t, \overline{x}\right) \left\{ \begin{array}{cccc} 8.5213 & 1.6632 & 38.6317 & 2.0 \\ -18.5213 & 1.6632 & -38.6317 & 0 \\ -1.827 & 0 & -13.8312 & 3.0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{array} \right\}$$

Los eigenvalores de $D_x f\,(t, \overline{x})$ son

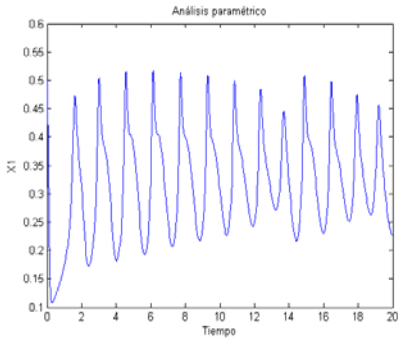
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -10.0247 \\ \lambda_2 &= 1.5258 + 4.5409i \\ \lambda_3 &= 1.5258 - 4.5409i \\ \lambda_4 &= -0.50 \end{aligned}$$

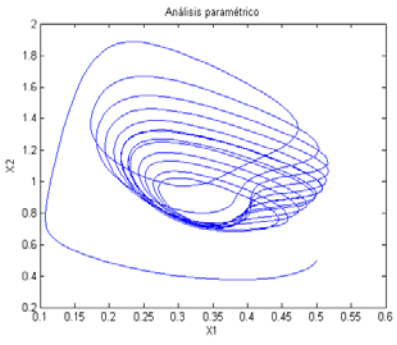
como $\mathrm{Re}\,(\lambda_{2,3}) > 0$ el sistema es localmente inestable.

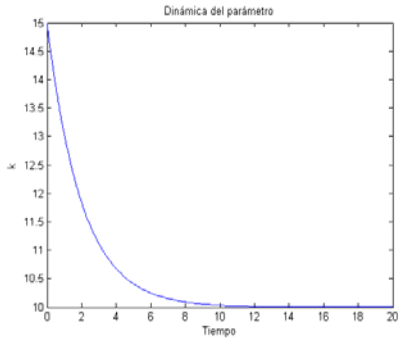
Ahora, agregemos la ecuación 4.5 al sistema 4.2

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= V_{in} - V_2 + V_3 + K_f x_2 - k x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= V_2 - V_3 - K_f x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= \beta V_4 - V_5 - \varepsilon x_3 \\ \frac{dk}{dt} &= -\gamma\,(k - k_r) \end{aligned} \tag{4.7}$$

y al resolverlo con las condiciones inciales $x^0 = (0.5, 0.5, 0.5, 15)$ tenemos







El punto de equilibrio del sistema 4.7 es

$$\overline{x} = (0.3300, 0.7812, 0.1365, 10.0)$$

con linealización

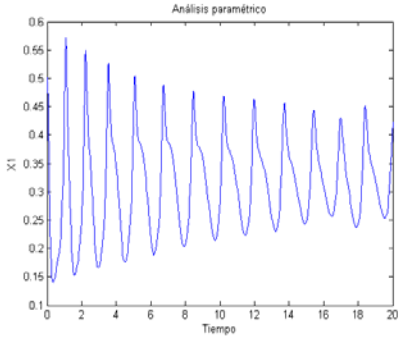
$$D_x f\left(t, \overline{x}\right) = \left\{ \begin{array}{cccc} 9.1341 & 2.5510 & 30.8906 & -0.33 \\ -19.1341 & -2.5510 & -30.8906 & 0 \\ -2.1019 & 0 & -13.9005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{array} \right\}$$

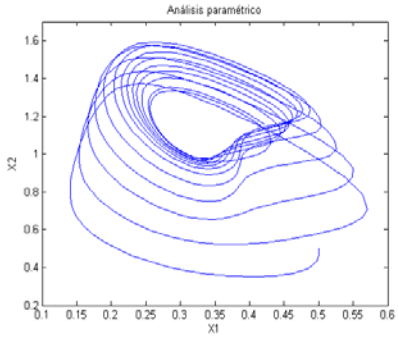
y eigenvalores

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1.6333 + 5.5530i \\ \lambda_2 &= 1.6333 - 5.5530i \\ \lambda_3 &= -10.5841 \\ \lambda_4 &= -0.5 \end{aligned}$$

Dado $\mathrm{Re}\left(\lambda_{1,2}\right) > 0$ el sistema es localmente inestable

Finalmente agregaremos las ecuaciones 4.4 y 4.5 al sistema 4.2, resolviendo con condiciones iniciales $x^0 = (0.5, 0.5, 0, 1, 15)$ nos da





El punto de equilibrio obtenido es

$$\overline{x} = (0.3200, 1.0352, 0.1271, 0.60, 10.0)$$

Al linealizar el sistema alrededor de $\overline{x}$ tenemos

$$D_x f\left(t, \overline{x}\right) = \left\{ \begin{array}{ccccc} 8.5213 & 1.6632 & 38.6317 & 2.0 & -0.32 \\ -18.5213 & -1.6632 & -38.6317 & 0 & 0 \\ -1.8270 & 0 & -13.8312 & 3.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{array} \right\}$$

Los eigenvalores correspondientes son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -10.0247 \\ \lambda_2 &= 1.5258 + 4.5409i \\ \lambda_3 &= 1.5258 - 4.5409i \\ \lambda_4 &= -0.50 \\ \lambda_5 &= -0.50 \end{aligned}$$

dado que $\mathrm{Re}\,(\lambda_{2,4}) > 0$ el sistema es localmente inestable.

Despues del análisis de bifurcación podemos concluir que el sistema aunque es sensible de cierta forma a la variación de los parámetros β y k, éstos no representan un factor trascendente en la dinámica del sistema dado que ante tales variaciones la dinámica no se ve considerablemente alterada.

4.6 Pruebas de controlabilidad y observabilidad

Como se mencionó en el capítulo 1, las pruebas de controlabilidad y observabilidad permiten conocer si el sistema puede llevarse a cierta dinámica deseada y además, si esto es posible, por medio de la entrada de control y su salidas.

Para realizar lo anterior escribamos el sistema 4.2 de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}\,(t) &= Ax\,(t) + Bu\,(t)\,, \quad t \in \mathbb{R} \\ y\,(t) &= Cx\,(t) + Du\,(t)\,. \end{aligned}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q\times p}$.

Considerando esta linealización al rededor del punto de equilibrio $\overline{x} = (0.33, 0.7812, 0.1365)$ y la entrada de control entrada de control $u = V_{in}$, la salida medible será $y = x_1$ con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}\,(t) &= \begin{bmatrix} 9.1341 & 2.5510 & 30.8906 \\ -19.1341 & -2.5510 & -30.8906 \\ -2.1019 & 0 & -13.9005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y\,(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matriz de controlabilidad

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix},\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}^{n\times np},$$

tiene la forma

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 9.1341 & 67.3 \\ 0 & 19.134 & 190.9 \\ 0 & -2.101 & 10 \end{bmatrix}$$

cuyo rango $\rho\,(\mathcal{C}) = 3$ el cual es el mismo que la dimensión del sistema, por lo tanto el sistema es controlable localmente.

La matriz de observabilidad

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix},\ \mathcal{O} \in \mathbb{R}^{nq\times n},$$

nos queda

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9.1341 & 2.5510 & 30.8906 \\ 67.3139 & 16.7935 & -266.0389 \end{bmatrix}$$

la cual es de rango $\rho(\mathcal{O}) = 3$, con lo que el sistema es observable de manera local.

Podemos decir por lo tanto que el sistema no obstante de ser localmente inestable, puede ser controlable y estabilizable localmente alrededor del punto de equilibrio.

Capítulo 5

Control del sistema de oscilaciones de Ca^{2+}

5.1 Introducción

Los objetivos del control en los procesos celulares pueden ser la exitación o supresión de oscilaciones, entrenamiento y sincronización o transiciones de un estado caótico a oscilaciones periódicas y viceversa. Una propiedad especial del ion de Ca^{2+} es la flexibilidad de funciones que desempeña, tal es que para concentraciones elevadas por un periodo largo tiempo podría resultar letal para la célula[6] debido a la formación de sales insolubles de Ca^{2+}. Este efecto dañino puede evitarse por medio de un comportamiento oscilatorio que permita a la célula usar al Ca^{2+} como un mensajero intracelular y evitar estas concentraciones altas que podrían aniquilarla. Varios procesos bioquímicos son regulados por la concentración de calcio libre en la célula, por lo que los niveles de Ca^{2+} deben estar estrictamente regulados bajo circunstancias normales y ante circunstancias impredecibles. Una interrupción en el ritmos de los procesos celulares que traspacen la frontera de un ritmo normal pueden traer consecuencias importantes. Por tanto es necesario desarrollar una ley eficiente de control para la dinámica no lineal en la señalización del calcio intracelular.

Controlar este tipo de sistemas que conllevan varios parámetros respresenta un reto a pesar de que el sistema esté descrito por ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Puebla [28] desarrolla una ley de control retroalimentado para modificar el comportamiento de las oscilaciones intracelulares de calcio y propone una estructura para la síntesis de controladores retroalimentados la cual toma en cuenta la naturaleza no lineal del fenómeno.

Una dificultad en los modelos de señalización de calcio es la incertidumbre de los valores de las tasas constantes, parámetros cinéticos y el coeficiente de difusión. No obstante, la teoría del control tiene un fundamento matemático sólido y varios puntos importantes como robustez en modelos imperfectos y la estimación de parámetros inciertos son manejados adecuadamente. Desde

el punto de vista del control, se requiere identificar las variables medibles del sistema y las variables manipulables. Primeramente la concentración de calcio citosólico libre debe ser considerado como una variable dinámica medible, debido a que es la variable más comunmente cuantificable, posteriormente se considera que una entrada de control externa provoca un influjo de Ca^{2+} el cual al provenir del exterior celular se sabe que afecta la frecuencia en las oscilaciones de Ca^{2+}.

La razón principal de contruir una ley de control es la de regular las oscilaciones caóticas de calcio por medio de la manipulación de Ca^{2+}. Primeramente se diseñará un esquema de control de modo deslizante de alto orden[3] y su desempeño será evaluado en los siguientes objetivos de control:

1. Regulación o supresión de las oscilaciones periódicas de Ca^{2+},
2. Trasladar un comportamiento periódico a una oscilación de Ca^{2+} diferente.,
3. Sincronización de dos osciladores caóticos de Ca^{2+}.

Para poner en marcha el esquema de control se han hecho las siguientes suposiciones:

- Es posible medir la concentración de calcio en citosol x_1.
- Las tasas constantes y los valores cinéticos presentan incertidumbres o son desconocidos

La acción de control u es introducida en la variable x_1 en lugar de V_{in}. El incremento/decremento de la suma $V_0 + V_1\beta$ conduce a la modificación del comportamiento oscilatorio. En particular un incremento en β debido a la estimulación por una seña externa o un incremento en V_0 origina un incremento en Ca^{2+} extracelular lo cual puede disparar oscilaciones. La importancia de la regulación de las oscilaciones de Ca^{2+} radica en el papel fundamental del ion de Ca^{2+} en el control de varias funciones celulares.

Existen hasta el momento contribuciones importantes que han mejorado la concepción de las funciones de regulación en el Ca^{2+} intracelular, investigaciones de tipo experimental se deben a Berride y Dupond, en cuanto al modelado a Goldbeter, Sneyd, Keizer y contribuciones de control a Marhl [20], Goldbeter y Puebla .

5.2 Diseño de una ley de control retroalimentado no lineal

Esquemas de control de modo deslizante han mostrado varias desventajas al tratar incertidumbre y su velocidad de convergencia sobre otras técnicas como aquellas que se basan en la teoría de Lyapunov, linealización retroalimentada y linealización extendida[3]. Por otra parte, controladores de modo deslizante tienen la principal desventaja en que la trayectoria a lazo cerrado de la solución

diseñada no es robusta respecto a los disturbios sobre un intervalo de tiempo precedente al movimiento deslizante. Los controladores deslizantes clásicos son robustos en el caso de tener pequeños disturbios, con esto el controlador diseñado asegura ser óptimo únicamente después de entrar al modo deslizante. Para evitar las deventajas anteriores se han propuesto técnicas de modo deslizante de alto orden [31], [29], [17].

El esquema de control que proponemos considera una potencia fraccional del valor absoluto del error de segumiento, unido a la función signo, esta estrucctura provee varias ventajas como la simplificación de la ley de control, alta precisión y prevención del *chattering*[1]. A continuación desarrollaremos una estrategia de control no lineal por retroalimentación para controlar y sincronizar el modelo de oscilaciones de Ca^{2+}.

Para diseñar el controlador seleccionamos la concentración de Ca^{2+} libre x_1 como la variable dinámica medible, debido a que es un cantidad frecuentemente utilizada[2]. Por otra parte, consideraremos un influjo externo de Ca^{2+} como entrada de control. Influjos de Ca^{2+} desde el exterior celular, se sabe, afecta la frecuencia de las oscilaciones de Ca^{2+}, así $u = V_{in}$.

Entonces, la primera ecuación del sistema 4.2 se reescribe

$$\frac{dx_1}{dt} = u - V_2 + V_3 + K_f x_2 - k x_1 \tag{5.1}$$

La entrada de control V_{in} es una variable importante para la manipulación experimental.

Se sigue entonces que

$$y = h\left(x\right) = x_1 \tag{5.2}$$

es la variable medible del sistema.

Dado que existen importantes incertidumbres en las tasas constantes y en los valores cinéticos, las ecuaciónes anteriores pueden ser escritas como

$$\frac{dx_1}{dt} = f\left(x\right) + g\left(x\right) u \tag{5.3}$$

$$f\left(x\right) = V_2 + V_3 + K_f x_2 - k x_1$$

La función $f\left(x\right)$ contiene incertidumbres relativas a los parámetros cinéticos.Por otro lado, consideramos para este caso $g\left(x\right) = 1$. En una situación extrema se asumiría que la función $f\left(x\right)$ se desconoce. La salida de los sistemas dinámicos puede ser obtenida de las ecuaciones 5.1 y 5.2:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial h}{dx}\left(f\left(x\right) + g\left(x\right) u\right) \tag{5.4}$$

[1] El Chattering consiste en el error debido a las variaciones obtenidas por el ajuste. Veáse [31], pp. 282-283.

[2] La cual puede ser medida por medio de coloraciones fluorescentes.

Sea $y_{ref} = x_{1,ref}$ una trayectoria deseada y $\dot{y}_{ref}$ la variable respecto al tiempo de la trayectoria deseada. Una trayectoria deslizante propuesta es

$$\dot{y}_{ref} = \delta_1 (y - y_{ref}) + \delta_2 \int_0^t \left\{ sign (y - y_{ref}) |y - y_{ref}|^{1/p} \right\} d\tau \tag{5.5}$$

donde δ_1, δ_2 son parámetros del control.

Definimos $e = y - y_{ref}$ como el error de la trayectoria, con lo que tenemos que la dinámica del este error está gobernada por

$$\dot{e} = \frac{\partial h}{dx} \left(f(x) + u - \delta_1 (y - y_{ref}) - \delta_2 \int_0^t \left\{ sign (y - y_{ref}) |y - y_{ref}|^{1/p} \right\} d\tau \right) \tag{5.6}$$

entonces una ley de control ideal esta dada por

$$\begin{aligned} u &= -\left(\frac{\partial h}{dx} g(x) \right)^{-1} \left(\frac{\partial h}{dx} f(x) + \omega \right)^{-1} \\ \omega &= -\delta_1 (y - y_{ref}) - \delta_2 \int_0^t \left\{ sign (y - y_{ref}) |y - y_{ref}|^{1/p} \right\} d\tau \end{aligned} \tag{5.7}$$

La ley de control anterior conduce a $e \to 0$, cuando $t \to \infty$, es decir, que $y \to y_{ref}$.

La síntesis de una ley de control ideal requiere de precisar el término $f(x)$ para llevarse a cabo, sin embargo es incierta. Utilizando las propiedades de la contribución que proporciona la integral de alto orden en un modo deslizante, el conocimiento del término no lineal $f(x)$ puede ser descartado, tal que un controlador libre puede ser propuesto como

$$\begin{aligned} u &= -\left(\frac{\partial h}{dx} g(x) \right)^{-1} (\omega) \\ \omega &= -\delta_1 (y - y_{ref}) - \delta_2 \int_0^t \left\{ sign (y - y_{ref}) |y - y_{ref}|^{1/p} \right\} d\tau \end{aligned} \tag{5.8}$$

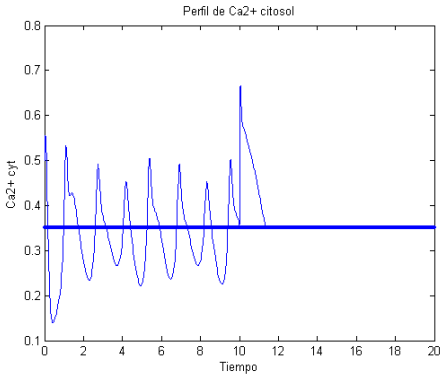
En resumen, la ley de control está compuesta por un modelo deslizante de alto orden y sólo utiliza las medidas de Ca^{2+}.

5.3 Aplicación de la ley de control

Por medio de simulaciones numéricas mostraremos el desempeño de la ley de control propuesta. Los parámetros del modelo δ_1, δ_2 dependerán de los objetivos de control, el valor para el parámetro p es 2 y la acción de control comienza en el tiempo $t = 10$ en todos los casos.

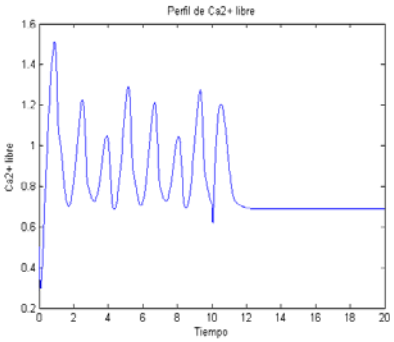
5.3.1 Regulación de Ca^{2+} intracelular

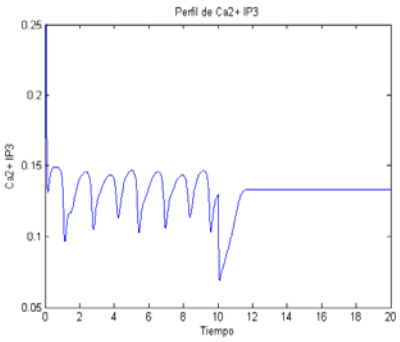
Se desea controlar el comportamiento del sistema a un valor de referencia $Ca_r^{2+} = 0.35$. En este caso se han tomado los valores de los parámetros $\delta_1 = 25$ y $\delta_2 = 25$ con lo que se obtuvieron los siguientes resultados



Notemos que el controlador propuesto mantiene la concentraciaón de Ca^{2+} alrededor de una pequeña vecindad del valor de referencia por medio de las oscilaciones complejas del influjo de Ca^{2+}. Al incrementar los parámetros de control podemos suprimir por completo la dinámica no lineal de Ca^{2+} intracelular con una amplitud grande en la oscilación del influjo de Ca^{2+}. Es interesante hacer notar que las oscilaciones complejas de la señal de Ca^{2+} conducen a una salida estacionaria de la concentración de Ca^{2+} intracelular.

Podemos regular la variable x_1 no obstante los otros dos estados podrían no regularse bajo la ley de control, las simulaciones realizadas se muestran a continuación



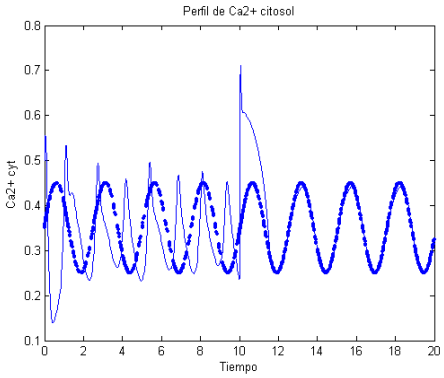


Los estados x_2, x_3 también se regularon, por lo tanto el sistema es estabilizable.

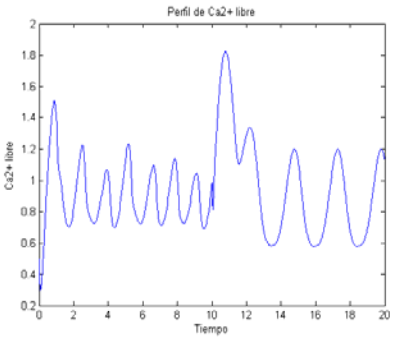
5.3.2 Seguimiento de Ca^{2+} intracelular

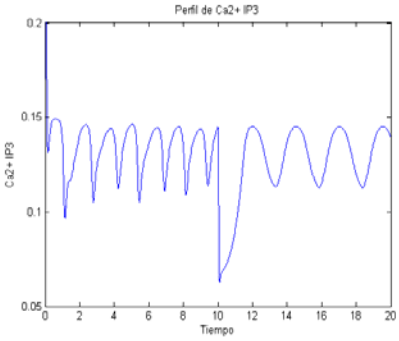
En este caso se desea controlar el comportamiento del sistema hacia una señal sinusoidal $Ca_r^{2+} = 0.35 + \sin(0.35t)$. Los parámetros de control están dados por

$\delta_1 = 25$ y $\delta_2 = 25$. Los resultados de la simulación son los siguientes



Los estados x_2, x_3 siguieron la trayectoria de referencia





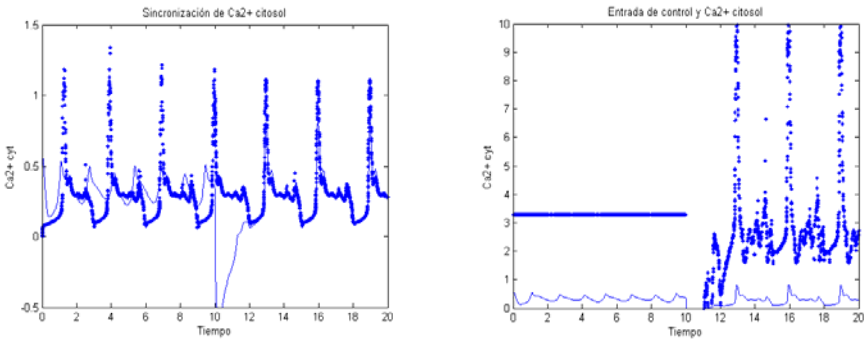
De lo anterior podemos observar que las entradas de control constituyen un influjo periódico de Ca^{2+}. Tales resultados indican que la señal de oscilaciones de Ca^{2+} motivada por un estímulo externo requiere la variación periódica del influjo de Ca^{2+}. Esta afirmación puede estar relacionada con las observaciones realizadas en numerosos estudios experimentales y teóricos que conducen a un sistema oscilatorio por medio de una entrada periódica produciendo un comportamiento periódico simple o complejo.[20], [30].

5.3.3 Sincronización de calcio Ca^{2+}

Consideremos ahora la sincronización de dos modelos de calcio intracelular Ca^{2+}.

La sincronización de Ca^{2+} intracelular se sabe que ocurre en un número grande de células, las cuales frecuentemente están asociados con la dispersión de ondas dentro del medio intracelular [27], [20]. El primer oscilador es considerado el subsistema maestro y el segundo será el subsistema esclavo. El objetivo de sincronización es que el oscilador esclavo siga la dinámica descrita por el

oscilador maestro. Los parámetros de control están dados por $\delta_1 = 25$ y $\delta_2 = 25$. Los resultados de la simulación numérica son los siguientes



La sincronización se obtiene manipulando el influjo oscilatorio de Ca^{2+} que es muy parecido a la oscilación básica de Ca^{2+}. La señal utilizada puede considerarse como una señal adyacente, la cual estimula la oscilación sincronizada, es decir, estimula la célula para oscilar con el mismo patrón temporal que su vecino [20], [30].

5.3.4 Conclusiones

Hemos mostrado que el desempeño del esquema de control propuesto es satisfactorio para las tres tareas propuestas y las venjas de utilizar este modelo de control deslizante de alto orden en un sistema biológico son:

- Es robusto contra las incertidumbres del modelo,
- Es sencillo en su diseño.

Capítulo 6

Observación del sistema de oscilaciones de Ca^{2+}

6.1 Enfoque algebráico diferencial del sistema

Retomemos el sistema de oscilaciones de Ca^{2+}

$$\begin{aligned}\frac{dZ}{dt} &= V_{in} - V_2 + V_3 + K_f Y - kZ \\ \frac{dY}{dt} &= V_2 - V_3 - K_f Y \\ \frac{dA}{dt} &= \beta V_4 - V_5 - \varepsilon A\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}V_{in} &= V_0 + V_1\beta \\ V_2 &= V_{M2}\frac{Z^2}{K_2^2 + Z_2} \\ V_3 &= V_{M3}\frac{Z^m}{K_Z^m + Z^m}\frac{Y^2}{K_Y^2 + Y^2}\frac{A^4}{K_A^4 + A^4} \\ V_5 &= V_{M5}\frac{A^p}{K_5^p + A^p}\frac{Z^n}{K_d^n + Z^n}\end{aligned}$$

Considemos la entrada de control $u = V_{in}$ y la salida medible $y = Z$, por tanto

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= u - V_2 + V_3 + K_f Y - kZ \\ \dot{Y} &= V_2 - V_3 - K_f Y \\ \dot{A} &= \beta V_4 - V_5 - \varepsilon A \\ \dot{y} &= \dot{Z}\end{aligned}$$

Deseamos expresar $\dot{Z}$, $\dot{Y}$, $\dot{A}$ como funciones de y y/o un conjunto finito de sus derivadas. Entonces es claro ver que

$$\dot{Z} = u - V_2 + V_3 + K_f Y - kZ$$

equivale a escribir

$$\dot{y} = u - V_2 + V_3 + K_f Y - ky \tag{6.1}$$

de donde

$$\dot{y} = u - \left[V_{M2}\frac{y^2}{K_2^2 + y_2}\right] + \left[V_{M3}\frac{y^m}{K_Z^m + y^m}\frac{Y^2}{K_Y^2 + Y^2}\frac{A^4}{K_A^4 + A^4}\right] + k_f Y - k_y$$

Además $\dot{Y}$ y $\dot{A}$ pueden expresarse como

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= V_2 - V_3 - K_f Y \\ &= \left[V_{M2}\frac{y^2}{K_2^2 + y_2}\right] - \left[V_{M3}\frac{y^m}{K_Z^m + y^m}\frac{Y^2}{K_Y^2 + Y^2}\frac{A^4}{K_A^4 + A^4}\right] - k_f Y\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \beta V_4 - V_5 - \varepsilon A \\ &= \beta V_4 - \left[V_{M5}\frac{A^p}{K_5^p + A^p}\frac{y^n}{K_d^n + y^n}\right] - \varepsilon A\end{aligned}$$

Entonces nos queda que

$$\begin{aligned}V_2 &= V_{M2}\frac{y^2}{K_2^2 + y_2} = f(y) \\ V_3 &= V_{M3}\frac{y^m}{K_Z^m + y^m}\frac{Y^2}{K_Y^2 + Y^2}\frac{A^4}{K_A^4 + A^4} \\ &= f_1(y)\, g(Y)\, h(A) \\ V_5 &= V_{M5}\frac{A^p}{K_5^p + A^p}\frac{y^n}{K_d^n + y^n} \\ &= f_2(y)\, h_1(A)\end{aligned}$$

Reescribiendo lo anterior llegamos a

$$\dot{y} = u - f(y) + f_1(y)\, g(Y)\, h(A) + k_f Y - k_y \tag{6.2}$$

$$\dot{Y} = f(y) - f_1(y)\, g(Y)\, h(A) - k_f Y \tag{6.3}$$

$$\dot{A} = \beta V_4 + f_2(y)\, h_1(A) \tag{6.4}$$

Ahora, despejando $f_1(y)\, g(Y)\, h(A)$ de 6.2 tenemos que

$$\dot{y} - u + f(y) - k_f Y + k_y = f_1(y)\, g(Y)\, h(A)$$

y al ser sustituido en 6.3

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= f(y) - \left[\dot{y} - u + f(y) - k_f Y + k_y\right] - k_f Y \\ &= u - \dot{y} - k_y\end{aligned}$$

o bien

$$Y = \int u - \dot{y} - k_y$$

Existen dos estados del sistema que pueden ser expresados en términos de y o un conjunto finito de sus derivadas, los cuales son Z y Y, no así para el estado A. Entonces desde la perspectiva algebráico diferencial se dice que el sistema de oscilaciones de Ca^{2+} es un sistema Liouvilliano, y existe un defecto algebráico uno correspondiente a la tercera variable. El sistema es observable para los dos primeros estados, no obstante, el tercer estado del sistema no es algebraicamente observable. Sin embargo, se mostró que hay observación local y por las condiciones particulares de las trayectorias, el proceso de sincronización por medio de observadores puede llevarse acabo.

6.2 Sincronización usando observadores

Metodologías utilizadas para sincronizar usando esquemas de control deslizante de alto orden se muestran en [1], [2], [37]. En lo que sigue realizaremos la sincronización de dos sistemas de oscilaciones de Ca^{2+} con la misma estructura pero que se desarrollan bajo distintas condiciones iniciales. Usaremos para esto dos distintas metodologías, una a través del modo deslizante de alto orden y la otra usando un observador del tipo Luenberger, y compararemos el desempeño de ambas sincronizaciones.

6.2.1 Sincronización usando un esquema de modo deslizante

Para el esquema de control desarrollado anterirormente y considerando que el sistema de oscilaciones de Ca^{2+} es un sistema Luivilliano definimos

$$u_1 = kp_1 \left|y - y_{ref}\right|^{1/p} sign\left(y - y_{ref}\right)$$

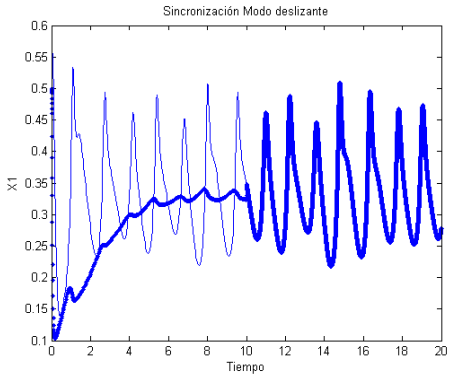
$$u_2 = kp_2 \left|y - y_{ref}\right|^{1/p} sign\left(y - y_{ref}\right)$$

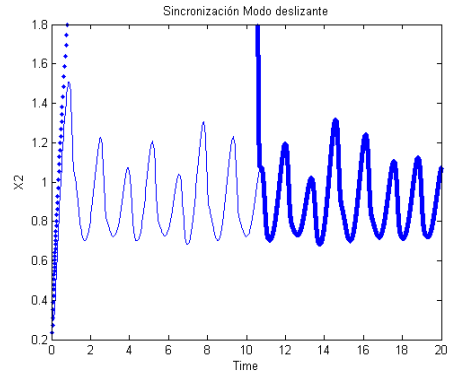
$$u_3 = kp_3 \left|y - y_{ref}\right|^{1/p} sign\left(y - y_{ref}\right)$$

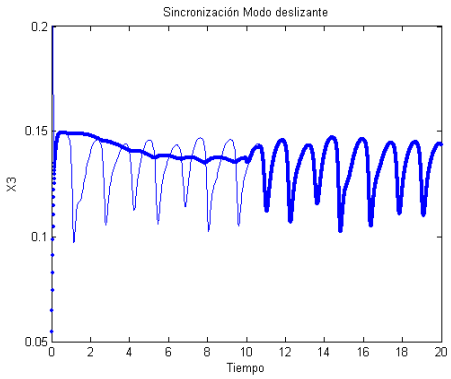
con $kp_1 = 50$, $kp_2 = -500$, $kp_3 = -1$, $p = 3$.

Tomando las condiciones inciales $x^0 = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0, 0)$ e iniciando la acción de control al tiempo $t = 10$ la simulación numérica tiene los siguientes

resultados



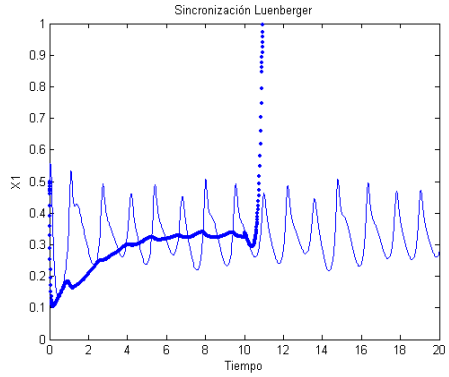


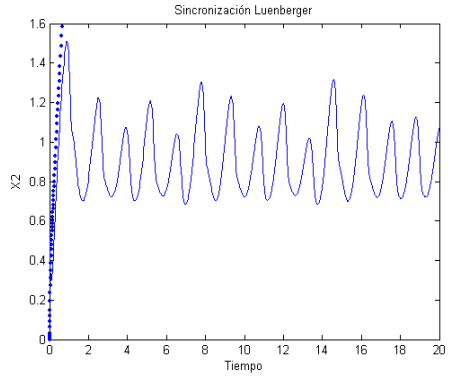


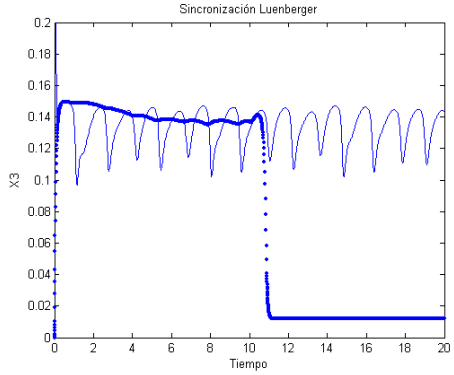
El sistema esclavo sigue la dinámica del sistema maestro una vez que inicia la acción de control, por lo tanto el desempeño del esquema de control propuesto es adecuado.

6.2.2 Sincronización usando un esquema Luenberger

Un esquema de control de tipo Luenberger con valores en las ganancias $kp_1 = 50$, $kp_2 = -500$, usando sólo el error $e = y - y_{ref}$ en lugar de las acciones de control u_1, u_2, u_3, y resuelto para las condiciones iniciales $x^0 = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0, 0)$ genera







La sincronización usando este esquema de control no puede llevarse acabo.

Notemos que valores adecuados en las ganancias k_{pi} conducirán a un mejor desempleño del esquema de control utilizado. Hasta el momento no existe una metodología que determine la forma de encontrar tales valores en las ganancias y con el cual se asegure el desempeño óptimo de algún cierto esquema de control.

Así, la sincronización, por medio de observadores que se propone tiene un mejor desempeño que el modelo de tipo Luenberger para los valores de las ganancias propuestos, sin que ello signifique que no existan valores adecuados para este esquema de control o que sean difíciles de encontrar.

Bibliografía

[1] Agiza H., Yassen M., "*Synchronization of Rossler and Chen chaotic dynamical systems using active control*", Physics Letters A, 2001, pp. 191-197.

[2] Aguilar R., Martínez R., "*Discrete algebraic estimator design for non-linear Liouvillian systems with sampled output: Application to a class of stirred bioreactor*", Chemical Engineering Journal, CEJ 4756, 2006, pp. 1-6.

[3] Aguilar R., Alvarez, J., *"Sliding mode control scheme for a class of continuous chemical reactors"*, IEEE procedings of Control Theory Applied, vol. 149, pp. 263-268

[4] Borghans, J., Dupont, G., Goldbeter, A., *"Complex intracellular calcium oscillations. A theoretical explortation of possible mechanisms",* Biophysical Chemistry, vol. 66 pp 25-41, 1997.

[5] Brauer F., Nohel J., *"The qualitative theory of ordinary differential equations. An introduction",* Dover Publications, New York, 1989.

[6] Berridge M.J., Bootman M.D., Lipp P., *"Calcium -a life and death signal"*, Nature 395:645, 1998.

[7] Diop S. "*The Algebraic theory of nonlinear observability revisited*", Proceedings of the 40th IEEE, Conference on decision an control, 2001, pp. 2550-2555.

[8] Goldbeter, A. *"Biochemical Oscillations and Cellular Rhythms",* Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[9] Huart, G., Dupont, G., Goldbeter, A., *"Bursting, Chaos and Birhythmicity Originating from self-modulation of the Inositol 1,4,5-trisphosphate signal in a model for intracellular Ca^{2+} oscillations"*, Bulletin of Mathematical Biology, 1999, vol. 61, 509-530.

[10] Fliess, M. "*Generalized controller canonical forms for linear an nonlinear dynamics*", IEEE Transactions on automatic control, vol. 35, 1990, pp. 994-1001.

[11] Fliess M., Levine J., Martin Ph., Rouchon P., "*Flatness and defect on nonlinear systems: Introductory theory and examples*", CAS Internal J., 1994.

[12] Friedland B., *"Control system design. An introduction to estate-space methods",* Mc.Graw-Hill, 1a. edición, U.S.A., 1987.

[13] Fradkov A. L., Pogromsky A. Yu., *"Introduction to control of oscillations and chaos"*, World Scientific Publishing Co., 1998.

[14] Isidori A., "*Nonlinear control systems*", 3a. ed., Springer-Verlag, 1996.

[15] Hinrichsen, D., Pritchard, A„ *"Mathematical System Theory I. Modeling, State Space Analysis, Stability and Robustness",* Springer-Verlag, 2005.

[16] Hourat G, Dupont G, Goldbeter A, *"Bursting, chaos and birhythmicity originating from a self-modulation of the inositol 1,4,5-trisphosphate signal in a model for intracelular Ca^{2+} oscillations",* Bull Math Biol 61:507, 1999.

[17] Levant, A., *"Universal single-input-single-output sliding mode controllers with finite-time convergence",* IEEE Automatic Control, vol. 46, pp. 1447-1451.

[18] Martin Ph., Rouchon P., "*Systémes plats: planification et suivi de trajectories*", École des mines de Paris, Centre Automatique et Systémes, Journées X-UPS, 1999.

[19] Martin Ph., Murray R., Rouchon P., "*Flat systems, equivalence and trayectory generation*", École des mines de Paris, Centre Automatique et Systémes, Technical report, 2003.

[20] Marhl, M., Schuster S., *"Under what conditions signal transduction pathways are highly flexible in response to external forcing?, a case study on calcium oscillations",* Journal of Theory Biology, vol. 224, pp. 491.

[21] Martinez R., De León Morales J., "*Observers for a multi-input multi-output bilinear system class: A differential algebraic approach*", Math. Comput. Modelling, vol. 20, no. 12, 1994, pp125-132.

[22] Martinez R., De León Morales J., "*Nonlinear estimators: A differnetial algebraic approach*", Appl. Math. Lett., vol. 9, no. 4, 1996, pp. 21-25.

[23] Martinez R., Diop S., "*Diagnosis of nonlinear systems using an unknown-input observer: an algebraic and differential approach*", IEEE proceedings Control Thoery Appl., vol. 151, no. 1, 2004, pp. 130-135.

[24] Martínez C., De León Morales J., Martínez R., "*Estimation and nonlinear control of a class of continuous stirred tank reactors. A differential algebraic approach*", Proceedings of the A.C.C., 1997, pp. 3390-3394.

[25] Mendoza J., *"Observadores de orden reducido para sistemas diferencialmente no planos y de Liuoville"*, Tesis de grado para doctor en ciencias, CINVESTAV, I.P.N., México, 2005.

[26] Murray, R., et. al., "*Control in an information rich world. Report of the panel on future directions in control, dynamis, and systems*", Universidad de Maryland, E.U.A., 2002.

[27] Per, M., Marhl, M., *"Synchronization of regular and chaotic oscillations: the role of local divergence and the solw passage effect"*, Int. J. Bif. Chaos, vol. 14, pp. 2735-2751.

[28] Puebla H., "*Controlling intracellular calcium oscillations and waves*", Journal of Biological Systems, vol. 13, no. 2, 2005, pp. 173-190.

[29] Scarry, J.C., Ziniber, A., Mills, R.E., Rios-Bolivar, M., Ferrara, A., Giacomini, L., *"Dynamical adaptive first and second order sliding backstepping control of nonlinear non-triangular uncertain systems",* Journal of Dynamical Systems Measurement ,.Control Trans. ASME, vol. 122, pp.746-752.

[30] Schuster, S., Marhl, M., Hofer, T., *"Modeling of simple and complex calcium oscillations: fron single-cell responses to intracellular signaling",* Eur. J. Biochem., vol 269, pp. 1333.

[31] Sira-Ramirez, H. *"Dynamic second order sliding-mode contrl of the Hovercraft vessel",* IEEE transactions on Control Systems Technology, vol. 10, pp. 860-865.

[32] Slotine, J.J., Li, W., *"Applied Nonlinaer Control", Prentice Hall, 1991.*

[33] Sontag E. D., "*Mathematical control theory. Deterministic finite dimestional systems*", Springer-Verlag, New York, 1998.

[34] Trentelman Harry, Stoorvogel Anton, *"Control Theory for Linear Systems",* Springer Verlag, Londres 2001.

[35] Vincent U.E. , "*Synchronization of Rikitake chaotic attractor using active control*", Physics Letters A., 2005, pp. 133-138.

[36] Youming Lei, Wei Xu, Hongchan Zheng, "*Synchronization of two chaotic nonlinear gyros using active control*", Physics Letters A, 2005, pp.153-158.

[37] Yan, J.J., Hung M.L., Chiang, T.Y., Yang, Y.S., *"Robust synchronization of chaotic systems via adaptive sliding mode control",* Physics Letters A,

Apéndice A

Códigos en Matlab

A.1 Sistema de ecuaciones diferenciales

```
%Oscilaciones caoticas
function f = Calcio3(t,x);
f=zeros(3,1);

%--------- parametros sistema Ca2+ ------------
 beta = 0.65;   K2 = 0.1;
 K5 = 0.3194;   Ka = 0.1;
 Kd = 1;        Ky = 0.3;
 Kz = 0.6;      k = 10;
 kf = 1;        e = 13;
 n = 4;         m = 2;
 p = 1;         Vo = 2;
 V1 = 2;        Vm2 = 6;
 Vm3 = 30;      V4 = 3;
 Vm5 = 50;
%-----------------------------------------------
%Ecuaciones diferenciales:
 f(1)=[ Vo + beta*V1 ] - [ Vm2*(x(1)^2/(K2^2+x(1)^2)) ] ...
       + [ Vm3*(x(1)^m/(Kz^m+x(1)^m))*(x(2)^2/(Ky^2+x(2)^2)) ...
       *(x(3)^4/(Ka^4+x(3)^4)) ] + [ kf*x(2) - k*x(1) ];
 f(2)=[ Vm2*(x(1)^2/(K2^2+x(1)^2)) ] ...
       - [ Vm3*(x(1)^m/(Kz^m+x(1)^m))*(x(2)^2/(Ky^2+x(2)^2))
       *(x(3)^4/(Ka^4+x(3)^4)) ] - [ kf*x(2) ];
 f(3)=[ beta*V4] - [ Vm5*(x(3)^p/(K5^p+x(3)^p)) ...
       *(x(1)^n/(Kd^n+x(1)^n)) ] - [ e*x(3) ];
```

A.2 Sistema de ecuaciones algebraicas

```
%Oscilaciones caoticas
%Ecuaciones algebraicas
function f = Calcio3a(x);

%--------- parametros sistema Ca2+ ------------
 beta = 0.65;   K2 = 0.1;
 K5 = 0.3194;   Ka = 0.1;
 Kd = 1;        Ky = 0.3;
 Kz = 0.6;      k = 10;
 kf = 1;        e = 13;
 n = 4;         m = 2;
 p = 1;         Vo = 2;
 V1 = 2;        Vm2 = 6;
 Vm3 = 30;       V4 = 3;
 Vm5 = 50;
%-----------------------------------------
% Ecuaciones algebraicas
 f=[...
    [Vo + beta*V1 ] - [ Vm2*(x(1)^2/(K2^2+x(1)^2)) ] ...
       + [ Vm3*(x(1)^m/(Kz^m+x(1)^m))*(x(2)^2/(Ky^2+x(2)^2)) ...
       *(x(3)^4/(Ka^4+x(3)^4)) ] + [ kf*x(2) - k*x(1) ];
    [Vm2*(x(1)^2/(K2^2+x(1)^2)) ] ...
        - [ Vm3*(x(1)^m/(Kz^m+x(1)^m))*(x(2)^2/(Ky^2+x(2)^2))...
        *(x(3)^4/(Ka^4+x(3)^4)) ] - [ kf*x(2) ];
    [beta*V4] - [ Vm5*(x(3)^p/(K5^p+x(3)^p))...
        *(x(1)^n/(Kd^n+x(1)^n)) ] - [ e*x(3) ] ...
   ]
```

A.3 Análisis de bifurcación

A.3.1 Variación de parámetros β, k, k_f

```
function R=rescal(min,max,inc)
param=min;
i=1;
while ~(param > max)
    res(i,:)=[param fsolve(@(x) Calcio3ap(x,param),[0.5 0.5 0.5]);];
    param= param + inc;
    i=i+1;
    save('anabif.txt','res','-ascii');
end
plot(res(:,1),res(:,2),'*')
hold on
```

```
plot(res(:,1),res(:,3),'.')
hold on
plot(res(:,1),res(:,4),'-')
```

A.3.2 Sistema parametrizado

```
%Oscilaciones caoticas
%Sistema parametrizado
function f = Calcio3_bk(t,x);
f=zeros(5,1)
%--------- parametros sistema Ca2+ ------------
 %beta = 0.65;  K2 = 0.1;
 K5 = 0.3194;   Ka = 0.1;
 Kd = 1;        Ky = 0.3;
 Kz = 0.6;     %k = 10;
 kf = 1;        e = 13;
 n = 4;         m = 2;
 p = 1;         Vo = 2;
 V1 = 2;        Vm2 = 6;
 Vm3 = 30;      V4 = 3;
 Vm5 = 50;
%----------------------------------------
%Ecuaciones diferenciales:
 f(1)=[ Vo + x(4)*V1 ] - [ Vm2*(x(1)^2/(K2^2+x(1)^2)) ] ...
   + [ Vm3*(x(1)^m/(Kz^m+x(1)^m))*(x(2)^2/(Ky^2+x(2)^2)) ...
   *(x(3)^4/(Ka^4+x(3)^4)) ] + [ kf*x(2) - x(5)*x(1) ];
 f(2)=[ Vm2*(x(1)^2/(K2^2+x(1)^2)) ] ...
   - [ Vm3*(x(1)^m/(Kz^m+x(1)^m))*(x(2)^2/(Ky^2+x(2)^2)) ...
   *(x(3)^4/(Ka^4+x(3)^4)) ] - [ kf*x(2) ];
 f(3)=[ x(4)*V4] - [ Vm5*(x(3)^p/(K5^p+x(3)^p)) ...
   *(x(1)^n/(Kd^n+x(1)^n)) ] - [ e*x(3) ];
 f(4)=[ -0.5*(x(4)-0.6) ];
 f(5)=[ -0.5*(x(5)-10) ];
```

A.4 Objetivos de control

A.4.1 Regulación

```
function dx = regula(t,x);
dx = zeros(4,1);
%--------- parametros sistema Ca2+ ------------
beta = 0.65; K2 = 0.1;
K5 = 0.3194; Ka = 0.1;
Kd = 1;      Ky = 0.3;
```

```
Kz = 0.6;    k = 10;
kf = 1;      e = 13;
n = 4;       m = 2;
p = 1;       Vo = 2;
V1 = 2;      Vm2 = 6;
Vm3 = 30;    V4 = 3;
Vm5 = 50;
%-------------------------------------------
Vin = Vo + beta*V1;
% variable medida (calcio en el cytosol)
y1 = x(1);
% regulacion
y1ref = 0.35;
% se\U{f1}al de error
e1=y1 - y1ref;
% accion de control
kp1 = 25;
kp2 = 25;
% Inicio del controlador
if (t>=10)
 u1=-kp1*e1 - kp2*x(4);
else
 u1=Vin;
end
% ---------- sistema de oscilaciones Ca2+ ----------
V2 = Vm2*(x(1)^2/(K2*K2+x(1)^2));
V3 = Vm3*(x(1)^m/(Kz^m+x(1)^m)*x(2)^2/(Ky*Ky+x(2)^2) ...
     *x(3)^4/(Ka^4+x(3)^4));
V5 = Vm5*(x(3)^p/(K5^p+x(3))*x(1)^n/(Kd^n+x(1)^n));
dx(1) = u1 - V2 + V3 + kf*x(2) -k*x(1);
dx(2) = V2 - V3 - kf*x(2);
dx(3) = beta*V4 - V5 - e*x(3);
dx(4) = sign(e1)*((abs(e1))^(0.5));
% -------------------------------------------------
plot(t,y1ref,'.');
hold on
```

A.4.2 Seguimiento

```
function dx = seguim(t,x);
dx = zeros(4,1);
% ---------- parametros sistema Ca2+ ----------
beta = 0.65;  K2 = 0.1;
K5 = 0.3194;  Ka = 0.1;
Kd = 1;       Ky = 0.3;
```

```
Kz = 0.6;     k = 10;
kf = 1;       e = 13;
n = 4;        m = 2;
p = 1;        Vo = 2;
V1 = 2;       Vm2 = 6;
Vm3 = 30;     V4 = 3;
Vm5 = 50;
% ------------------------------------------
Vin =  Vo + beta*V1;
% variable medida (calcio en el cytosol)
y1 = x(1);
% seguimiento
y1ref = 0.35 + 0.1*sin(2.5*t);
% senal de error
e1=y1 - y1ref;
% parametros de control
kp1 = 25.0;
kp2 = 25.0;
% Inicio del controlador
if (t>=10)
    u1=-kp1*e1 - kp2*x(4);
else
    u1=Vin;
end
% ---------- sistema de oscilaciones ca2+ ----------
V2 = Vm2*(x(1)^2/(K2*K2+x(1)^2));
V3 = Vm3*(x(1)^m/(Kz^m+x(1)^m)*x(2)^2/(Ky*Ky+x(2)^2)
     *x(3)^4/(Ka^4+x(3)^4));
V5 = Vm5*(x(3)^p/(K5^p+x(3))*x(1)^n/(Kd^n+x(1)^n));
dx(1) = u1 - V2 + V3 + kf*x(2) -k*x(1);
dx(2) = V2 - V3 - kf*x(2);
dx(3) = beta*V4 - V5 - e*x(3);
dx(4) = sign(e1)*((abs(e1))^(0.5));
% ------------------------------------------------
plot(t,y1ref,'.');
hold on
```

A.4.3 Sincronización

```
function dx = sincro(t,x);
dx = zeros(7,1);
% ---------- parametros sistema maestro Ca2+ ----------
beta = 0.65;  K2 = 0.1;
K5 = 0.3194;  Ka = 0.1;
Kd = 1;       Ky = 0.3;
```

```
Kz = 0.6;     k = 10;
kf = 1;       e = 13;
n = 4;        m = 2;
p = 1;        Vo = 2;
V1 = 2;       Vm2 = 6;
Vm3 = 30;     V4 = 3;
Vm5 = 50;
% ------------------------------------------------
% ---------- parametros sistema esclavo Ca2+ ---------
betae = 0.46; K2e = 0.1;
K5e = 1.0;    Kae = 0.1;
Kde = 0.6;    Kye = 0.2;
Kze = 0.3;    ke = 10;
kfe = 1;      ee = 1;
ne = 2;       me = 4;
pe = 1;       Voe = 2;
V1e = 2;      Vm2e = 6;
Vm3e = 20;    V4e = 2.5;
Vm5e = 30;
% ------------------------------------------------
Vin =  Vo + beta*V1;
Vine =  Voe + betae*V1e;
% variable medida (calcio en el cytosol)
y1 = x(1);
% sincronizacion
y1ref = x(4);
%senal de error
e1=y1 - y1ref;
% accion de control
kp1 = 25.0;
kp2 = 25.0;
% Inicio del controlador
if (t>=10)
    u1=-kp1*e1 - kp2*x(7);
else
    u1=Vin;
end
% ---------- sistema maestro de oscilaciones ca2+ ----------
V2 = Vm2*(x(1)^2/(K2*K2+x(1)^2));
V3 = Vm3*(x(1)^m/(Kz^m+x(1)^m)*x(2)^2/(Ky*Ky+x(2)^2) ...
     *x(3)^4/(Ka^4+x(3)^4));
V5 = Vm5*(x(3)^p/(K5^p+x(3))*x(1)^n/(Kd^n+x(1)^n));

dx(1) = u1 - V2 + V3 + kf*x(2) -k*x(1);
dx(2) = V2 - V3 - kf*x(2);
dx(3) = beta*V4 - V5 - e*x(3);
```

```
% ---------------------------------------------------------
% ---------- sistema esclavo de oscilaciones ca2+ ----------
V2e = Vm2e*(x(4)^2/(K2e*K2e+x(4)^2));
V3e = Vm3e*(x(4)^me/(Kze^me+x(4)^me)*x(5)^2/(Kye*Kye+x(5)^2) ...
      *x(6)^4/(Kae^4+x(6)^4));
V5e = Vm5e*(x(6)^pe/(K5e^pe+x(6))*x(4)^ne/(Kde^ne+x(4)^ne));

dx(4) = Vine - V2e + V3e + kfe*x(5) - ke*x(4);
dx(5) = V2e - V3e - kfe*x(5);
dx(6) = betae*V4e - V5e - ee*x(6);
dx(7) = sign(e1)*((abs(e1))^(0.5));
% ---------------------------------------------------------
plot(t,u1,'.');
hold on
```

A.5 Observación

A.5.1 Sincronización usando modo deslizante

```
function dy = Obsliding(t,y);
dy = zeros(6,1)
%-------------- parametros del sistema Ca2+ ---------------
beta = 0.65;  K2 = 0.1;
K5 = 0.3194;  Ka = 0.1;
Kd = 1;       Ky = 0.3;
Kz = 0.6;     k = 10;
kf = 1;       e = 13;
n = 4;        m = 2;
p = 1;        Vo = 2;
V1 = 2;       Vm2 = 6;
Vm3 = 30;     V4 = 3;
Vm5 = 50;
%-----------------------------------------------------------
% senal de error
e1 = y(1) - y(4);

%funcion signo
signe1=sign(e1);
%-------------- parametros del sistema --------------------
Vin =  Vo + beta*V1;
V2 = Vm2*(y(1)^2/(K2*K2+y(1)^2));
V3 = Vm3*(y(1)^m/(Kz^m+y(1)^m)*y(2)^2/(Ky*Ky+y(2)^2) ...
     *y(3)^4/(Ka^4+y(3)^4));
V5 = Vm5*(y(3)^p/(K5^p+y(3))*y(1)^n/(Kd^n+y(1)^n));
```

```
V2e = Vm2*(y(4)^2/(K2*K2+y(4)^2));
V3e = Vm3*(y(4)^m/(Kz^m+y(4)^m)*y(2)^2/(Ky*Ky+y(5)^2) ...
      *y(6)^4/(Ka^4+y(6)^4));
V5e = Vm5*(y(6)^p/(K5^p+y(6))*y(4)^n/(Kd^n+y(4)^n));
%-------------------------------------------------------------

u1 = abs(e1)^0.333;
u2 = abs(y(1)-y(4))^0.333;
u3 = abs(y(1)-y(4))^0.333;

%--------- sistema de oscilaciones de Ca2+ ----------------
dy(1) = Vin - V2 + V3 + kf*y(2) -k*y(1);
dy(2) = V2 - V3 - kf*y(2);
dy(3) = beta*V4 - V5 -e*y(3);
%-------------------------------------------------------------
%----------- sistema usando observadores ------------------
dy(4) = Vin - V2e + V3e + kf*y(5) -k*y(4);
dy(5) = V2e - V3e - kf*y(5);
dy(6) = beta*V4 - V5e -e*y(6);
%-------------------------------------------------------------
%------------- activacion del controlador -----------------
if t > 10
dy(4) = Vin - V2e + V3e + kf*y(5) -k*y(4) + 50*u1*signe1;
dy(5) = V2e - V3e - kf*y(5) - 500*u2*signe1;
dy(6) = beta*V4 - V5e -e*y(6) - u3*signe1;
end
%-------------------------------------------------------------
%plot(t,u1,t,u2,t,u3)
plot(t,e1)
hold on
```

A.5.2 Sincronización usando modo Luenberger

```
function dy = Obslbgr(t,y);
dy = zeros(6,1)
%-------------- parametros del sistema Ca2+ ---------------
beta = 0.65;  K2 = 0.1;
K5 = 0.3194;  Ka = 0.1;
Kd = 1;       Ky = 0.3;
Kz = 0.6;     k = 10;
kf = 1;       e = 13;
n = 4;        m = 2;
p = 1;        Vo = 2;
V1 = 2;       Vm2 = 6;
```

```
Vm3 = 30;     V4 = 3;
Vm5 = 50;
%-------------------------------------------------------
% senal de error
e1 = y(1) - y(4);
%funcion signo
signe1=sign(e1);
%-------------- parametros del sistema --------------------
Vin =  Vo + beta*V1;
V2 = Vm2*(y(1)^2/(K2*K2+y(1)^2));
V3 = Vm3*(y(1)^m/(Kz^m+y(1)^m)*y(2)^2/(Ky*Ky+y(2)^2) ...
     *y(3)^4/(Ka^4+y(3)^4));
V5 = Vm5*(y(3)^p/(K5^p+y(3))*y(1)^n/(Kd^n+y(1)^n));
V2e = Vm2*(y(4)^2/(K2*K2+y(4)^2));
V3e = Vm3*(y(4)^m/(Kz^m+y(4)^m)*y(2)^2/(Ky*Ky+y(5)^2) ...
      *y(6)^4/(Ka^4+y(6)^4));
V5e = Vm5*(y(6)^p/(K5^p+y(6))*y(4)^n/(Kd^n+y(4)^n));
%-------------------------------------------------------

u1 = abs(e1)^0.333;
u2 = abs(y(1)-y(4))^0.333;
u3 = abs(y(1)-y(4))^0.333;

%--------- sistema de oscilaciones de ca ------------------
dy(1) = Vin - V2 + V3 + kf*y(2) -k*y(1);
dy(2) = V2 - V3 - kf*y(2);
dy(3) = beta*V4 - V5 -e*y(3);
%-------------------------------------------------------
%--------- sistema usando observadores --------------------
dy(4) = Vin - V2e + V3e + kf*y(5) -k*y(4);
dy(5) = V2e - V3e - kf*y(5);
dy(6) = beta*V4 - V5e -e*y(6);
%-------------------------------------------------------
%------------- activacion del controlador -----------------
if t > 10
dy(4) = Vin - V2e + V3e + kf*y(5) -k*y(4) + 50*e1;
dy(5) = V2e - V3e - kf*y(5) -500*e1;
dy(6) = beta*V4 - V5e -e*y(6);
end
%-------------------------------------------------------
%plot(t,u1,t,u2,t,u3)
plot(t,e1)
hold on
```