DOI: 10.24275/uama.6743.11787

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
POSGRADO EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL

Análisis de las variables para el control de vibraciones verticales en losas macizas de concreto reforzado por actividades humanas

TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE: MAESTRO EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL

P R E S E N T A:

ROBERTO RASHID CERVANTES DOMÍNGUEZ

Asesores:

DR. GELACIO JUÁREZ LUNA

DR. OMAR CABALLERO GARATACHEA

Ciudad de México, México, Diciembre de 2022

AGRADECIMIENTOS

A mi madre, Patricia Jardón, por todo su apoyo que me ha brindado a lo largo de mi vida.

A mi padre, Roberto Nahum, que durante la realización de este trabajo dejó este mundo, pero me dio la fuerza para finalizar este trabajo.

A mis hermanas, Fadia y Zobeida, por sus consejos y apoyo a lo largo de mi vida.

A mi abuela, Francisca Jardón, por educarme durante mi niñez y su apoyo a lo largo de mi vida.

A mi perro, Malik, por su compañía incondicional en las madrugadas mientras trabajaba.

Al Dr. Gelacio Juárez Luna y Dr. Omar Caballero Garatachea por su apoyo, compresión y la oportunidad de trabajar con ellos para finalizar mis estudios de maestría.

A mi "*Alma mater*" Universidad Autónoma Metropolitana – Unidad Azcapotzalco, por abrirme las puertas una vez más y ofrecerme la oportunidad de seguir creciendo profesionalmente.

A mis profesores de la licenciatura en Ingeniería Civil de la Universidad Autónoma Metropolitana, sus enseñanzas fueron esenciales para mi desarrollo en el posgrado en Ingeniería Estructural.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico brindado durante la realización de este trabajo. Al área de estructuras de la Universidad Autónoma Metropolitana por ofrecer una educación de calidad que me ha permitido el desarrollo personal y profesional.

Contenido

1 INTRODUCCIÓN 1
1.1 Introducción 1
1.1.1 Frecuencia natural 2
1.1.2 Funciones de carga dinámica 5
1.1.3 Relación de amortiguamiento 10
1.1.4 Respuesta dinámica en términos de la aceleración 11
1.1.5 Evaluación de vibraciones en sistemas de piso 12
1.2 Justificación 15
1.3 Objetivos 17
1.3.1 Generales 17
1.3.2 Particulares 17
2 ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DINÁMICA EN TÉRMINOS DE LA ACELERACIÓN DE LOSAS DE CONCRETO REFORZADO 18
2.1 Introducción 18
2.2 Características y propiedades de la estructura de estudio 18
2.3 Análisis y evaluación de vibraciones por el correr de una persona 20
2.4 Análisis y evaluación de vibraciones por el salto uniforme de un conjunto de personas 25
2.5 Análisis y evaluación de vibraciones por el balanceo de un conjunto de personas 31
2.6 Análisis y evaluación de vibraciones por el caminar de una persona 37
3 INFLUENCIA DE SUS ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN LOSA DE CONCRETO REFORZADO PARA CONTROLAR LA ACELERACIÓN MÁXIMA PRODUCIDA POR ACTIVIDADES HUMANAS 44
3.1 Introducción 44
3.2 Evaluación de la aceleración máxima en losa de concreto reforzado ante la influencia de sus elementos estructurales principales 44
3.2.1 Influencia del espesor de la losa 44
3.2.2 Influencia del incremento de la sección en trabes principales 46
3.2.3 Influencia del incremento de la sección en columnas 50
3.2.4 Influencia del espesor de la losa únicamente considerando concreto ligero 52
3.3 Evaluación de la aceleración máxima en losa de concreto reforzado ante la influencia de elementos estructurales secundarios 54
3.3.1 Introducción 54
3.3.2 Dimensiones de trabes secundarias de concreto reforzado y acero 54
3.3.3 Influencia de trabes secundarias de concreto y acero ante carga dinámica puntual 56

3.3.4 Influencia de trabes secundarias de acero sobrediseñadas ante carga dinámica puntual 58

3.3.5 Influencia de trabes secundarias de concreto y acero ante carga dinámica distribuida 59

3.3.6 Influencia de trabes secundarias de acero sobrediseñadas ante carga dinámica distribuida 61

3.4 Influencia en el incremento de carga en tablero adyacente al tablero de estudio ante carga dinámica puntual 62

4 ANÁLISIS DE MASA MODAL Y FRECUENCIA NATURAL PARA TRABES Y LOSAS DE CONCRETO REFORZADO CON DISTINTAS CONDICIONES DE APOYO 64

4.1 Introducción 64

4.2 Funciones de forma para sistemas con masa y rigidez modal distribuida 64

4.2.1 Masa modal para sistemas generalizados de 1GDL 66

4.3 Calibración de parámetros de losa y trabes de concreto reforzado 67

4.4 Análisis de la relación de masa modal β_{mod} de trabes de concreto reforzado con distintos tipos de apoyo 72

4.5 Análisis de la relación de masa modal β_{mod} de losa de concreto reforzado con distintos tipos de apoyo 74

4.6 Análisis de la frecuencia natural para losas y trabes de concreto reforzado con distintos tipos de apoyo 77

4.6.1 Evaluación de la frecuencia natural 78

5 ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DINÁMICA EN TÉRMINOS DE LA ACELERACIÓN DE LOSAS DE CONCRETO REFORZADO MEDIANTE EXPRESIONES ANALÍTICAS 79

5.1 Introducción 79

5.2 Formulación analítica para el cálculo de la aceleración en losas de concreto reforzado en dos direcciones 79

5.3 Aceleración máxima analítica por el caminar de una persona 82

5.3.1 Análisis de la aceleración máxima analítica ante el incremento de sus elementos estructurales principales 87

6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 89

6.1 Conclusiones 89

6.2 Recomendaciones 90

6.3 Trabajos futuros 91

Referencias 92

RESUMEN

En el presente trabajo se proporcionan recomendaciones y metodologías para el análisis de vibraciones verticales en losas macizas de concreto reforzado ante actividades humanas. Principalmente se analizan las vibraciones debido a las actividades del correr, salto, balanceo y caminar humano.

En las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto (NTCC-21, 2021) se incluyen disposiciones actuales a las vibraciones estructurales que incluyen un método simplificado para determinar la intensidad perceptible de vibración debido a actividades humanas. Sin embargo, no se especifica el sistema de piso al que se refiere ni el tipo de actividad humana al que es aplicable. Por lo que, el objetivo de este trabajo es desarrollar expresiones prácticas y recomendaciones de diseño para el análisis de losas macizas de concreto reforzado ante vibraciones dinámicas producidas por actividades humanas, evaluando las variables que influyen en las vibraciones, basado en pruebas experimentales y modelos de elementos finitos en 3 dimensiones.

El material presentado en esta tesis se divide en cinco capítulos:

- En el capítulo 1 se desarrolla una introducción sobre los conceptos básicos para el análisis dinámico en losas macizas de concreto reforzado ante actividades humanas, así como las variables principales para el análisis y las funciones de carga dinámicas que representan cada tipo de actividad humana para su aplicación en modelos numéricos.
- En el capítulo 2 se presentan las características y propiedades de la estructura de estudio, el análisis y la evaluación de vibraciones ente el correr, salto, balanceo y caminar humano por medio de modelos numéricos.
- En el capítulo 3 se analizan las aceleraciones máximas en la losa maciza de concreto reforzado al modificar los elementos estructurales principales y al añadir elementos como trabes secundarias de concreto reforzado y acero estructural.
- Con la finalidad de ampliar el estudio realizado en el capítulo anterior, en el capítulo 4 se realiza un estudio particular de la masa modal y frecuencia natural de trabes y losas con distintos tipos de apoyo mediante métodos analíticos y numéricos.
- Por último, en el capítulo 5 se evalúan expresiones analíticas para el cálculo de la aceleración máxima, a_{max}, basadas en la solución general de sistemas amortiguados de 1GDL ante carga armónica; principalmente se comparan los valores obtenidos analíticamente con valores numéricos y experimentales proporcionados por Caballero (2020), particularmente para la actividad del caminar de una persona.

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción

Las losas o sistemas de piso son elementos estructurales que se utilizan en edificaciones estructuradas a base de marcos de acero, concreto reforzado y muros de mampostería o concreto. Transmiten cargas en su plano y perpendicular a éste. Específicamente para su uso en edificaciones, cargan en su plano al transmitir las fuerzas inerciales de cada nivel hacia su perímetro de apoyo y cargan perpendicularmente en su plano al soportar las cargas gravitacionales a las que se someten. Se someten a dos tipos de carga: estáticas y dinámicas; las cargas estáticas son constantes y no dependen del tiempo; por otra parte, las cargas dinámicas dependen del tiempo y pueden ser móviles o inmóviles. Existen dos tipos de cargas dinámicas verticales que actúan en los sistemas de piso como lo son: maquinaria y actividad humana. El primer tipo se caracteriza por contener amplitudes y fuerzas de excitación extremas; el segundo tipo se divide en caminar de una persona y actividad rítmica. En el primer caso se debe al caminar de una persona que se desplaza sobre la superficie del sistema de piso y la segunda a la actividad de un conjunto de personas de manera móvil o inmóvil.

En México uno de los sistemas de piso más utilizados son las losas macizas de concreto reforzado en dos direcciones, las cuales comúnmente no son analizadas por vibraciones verticales ante actividades humanas. Actualmente, se hace la revisión por deflexión máxima en el estado límite de servicio con el objetivo de mantener la integridad de la estructura y evitar incomodidad de los ocupantes; sin embargo, cumplir con esta condición no es suficiente para garantizar comodidad. Por otro lado, se tiene un amplio estudio y análisis de este tipo de cargas para losas de concreto colado sobre lámina de acero realizado por Gallegos (2020).

Las losas macizas de concreto reforzado en dos direcciones son losas rectangulares que tienen ciertas proporciones geométricas y están apoyadas en sus cuatro bordes por vigas monolíticas de concreto reforzado, muros o vigas de acero de tal manera que trabajan en dos direcciones. Al aplicarse una carga perpendicular al plano de la losa, ésta tiende a flexionarse formando una superficie cóncava debido a los momentos generados en las dos direcciones principales debido de las cargas aplicadas. La carga que toma la franja en la dirección larga (l_b) se transfiere a las vigas B1 y en la dirección corta (l_a) por las vigas B2 (Figura 1.1). Para resistir estos momentos, la losa debe reforzarse en estas dos direcciones con barras de acero para tomar las cargas y transmitirlas a los bordes donde se soporta (Nilson, 1999).

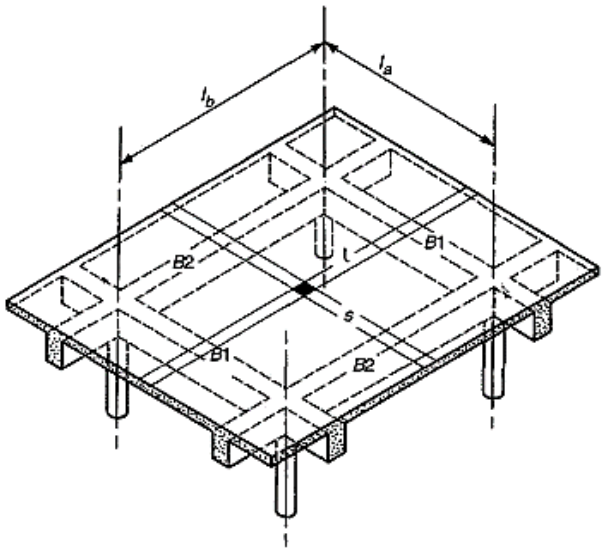


Figura 1.1. Losa maciza en dos direcciones apoyada sobre columnas con vigas (tomada de Nilson, 1999).

Las variables principales para el análisis de vibración en losas macizas de concreto reforzado ante actividades humanas son la carga dinámica, la frecuencia natural fundamental (f_n), la aceleración máxima (a_{max}) y la fracción de amortiguamiento (ξ) con los cuales se calcula la respuesta dinámica comúnmente en términos de la aceleración a_{max}.

1.1.1 Frecuencia natural

La frecuencia natural fundamental (f_n) es una característica dinámica de una estructura que depende de su masa y su rigidez; para un sistema de piso su cálculo se basa en procedimientos que se derivan de la teoría de placas, de la idealización de modelos dinámicos equivalentes o de métodos numéricos aproximados.

Obtención de la f_n con base en la teoría de placas

En la teoría clásica de placas se realiza un análisis de una placa homogénea con espesor uniforme y se aplica al problema de una placa rectangular simplemente apoyada en todos los bordes, obteniendo la ecuación diferencial clásica de movimiento para el desplazamiento transversal *w*:

$$D\nabla^4 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1}$$

donde:

$$\nabla^4 = \nabla^2\nabla^2 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{1.2}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)} \tag{1.3}$$

Para las ecuaciones 1.1 a 1.3, *D* representa la rigidez a flexión de la placa, *w* el desplazamiento de la placa, ρ el peso volumétrico del material, *h* el espesor de la placa, *t* el tiempo, *E* el módulo de elasticidad del material, υ el coeficiente de Poisson del material y ∇^2 el operador Laplaciano. Cuando se asumen vibraciones libres, el movimiento se expresa como:

$$w = Wcos(\omega t) \tag{1.4}$$

donde ω es la frecuencia circular (rad/unidad de tiempo) y W es una función para la posición de coordenadas. Sustituyendo la ecuación (1.4) en la ecuación (1.1) se obtiene:

$$(\nabla^4 - k)W = 0 \tag{1.5}$$

donde *k* es un parámetro de conveniencia que depende de las condiciones de borde de la placa definido como:

$$k^4 = \frac{\rho\omega^2}{D} \tag{1.6}$$

Una vez obtenida la frecuencia circular ω y la rigidez a flexión de la placa D, se aplica el método de Rayleigh-Schmidt para la obtención de frecuencias naturales de placas con la ecuación (1.7), donde *l* denota al lado corto o largo de la placa, según el tipo de frecuencia que se requiera (Leissa, 1969).

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D}}\omega l^2 \tag{1.7}$$

El método para la obtención de frecuencias naturales de una placa a través de la teoría clásica de placas es complejo, por lo que se optarán otras metodologías más simplificadas mediante modelos equivalentes.

Obtención de la f_n mediante modelos dinámicos equivalentes de un grado de libertad

Es posible idealizar estructuras con una masa *m* concentrada misma que se apoya a un resorte sin masa con rigidez *k*, a estos se les conoce como sistemas de un grado de libertad (S1GDL). Obsérvese el sistema masa-resorte amortiguador de la Figura 1.2, el cual es un S1GDL clásico sólo si el resorte y el amortiguador no tienen masa, que la masa es rígida y que el movimiento total se desarrolla en la dirección horizontal sometido a una excitación debido a la fuerza lateral $p(t)$. En la Figura 1.2b se muestran las fuerzas actuantes sobre la masa *m*: la fuerza *ku* equivale a la fuerza restauradora elástica (f_s) que ejerce el resorte lineal de rigidez *k*, $c\dot{u}$ es la fuerza restauradora del amortiguamiento (f_D) debido a un amortiguamiento viscoso lineal y en la Figura 1.2c se muestra la fuerza inercial $m\ddot{u}$ debido a la generada por la superficie de contacto de la masa. Para este caso en particular, *u* indica el desplazamiento relativo de la masa con respecto al apoyo, el cual es considerado como el único grado de libertad para el análisis dinámico (Chopra, 2014).

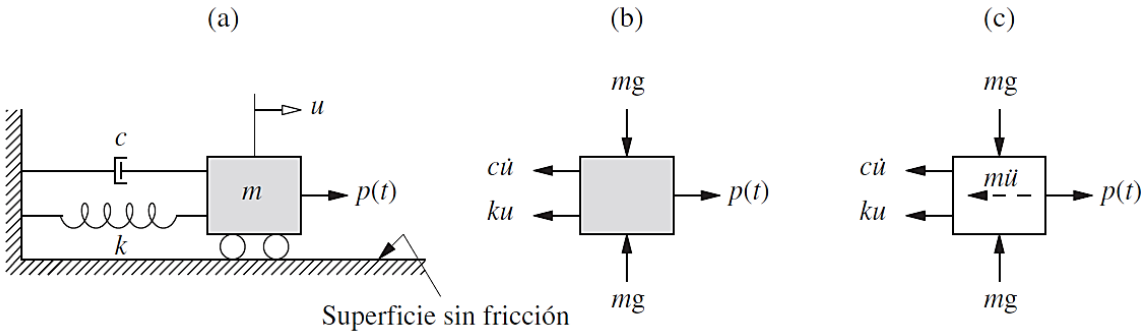


Figura 1.2. Sistema masa-resorte amortiguador (Chopra, 2014).

La frecuencia del n-ésimo modo de vibración para una trabe con sección uniforme en vibración libre elástica es:

$$f_n = \frac{\kappa_n}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \tag{1.8}$$

donde:

$EI =$ rigidez a flexión dinámica del elemento [Nm^2]
$m =$ masa efectiva [kg/m]
$L =$ longitud del elemento [m]
$\kappa_n =$ constante que representa las condiciones de apoyo de la viga para el n-ésimo modo de vibración.

Valores estándar para la constante κ_n para elementos con distintas condiciones de frontera se enlistan en la Tabla 1.1. Para determinar la frecuencia natural en el primero modo ($f_0 = f_n$) de una trabe simplemente apoyada sujeta a una carga uniformemente distribuida ($\kappa_1 = \pi^2$), se calcula la deflexión máxima δ_{max} ,ec. (1.9), causada por el peso propio de una masa distribuida por unidad de longitud m y otras cargas que se puedan considerar permanentes, donde g= 9.81 m/s^2. Sustituyendo el valor de κ_1 en la ecuación (1.8) y m de la ecuación (1.9) se obtiene la ecuación (1.10), donde δ_{max} se expresa en mm. Utilizando diferentes condiciones de apoyo y realizando el procedimiento anterior, es posible obtener un numerador de aproximadamente 18.

Tabla 1.1. Coeficientes κ_n para trabes uniformes (tomado de Smith et al., 2009).

Condiciones de apoyo	κ_n para el modo n		
	n=1	n=2	n=3
Articulado/articulado (simplemente apoyado)	π^2	$4\pi^2$	$9\pi^2$
Empotrado en ambos extremos	22.4	61.7	121
Empotrado/libre (cantiliver)	3.52	22	61.7

$$\delta_{max} = \frac{5mgL^4}{384EI} \tag{1.9}$$

$$f_n = \frac{17.8}{\sqrt{\delta_{max}}} \approx \frac{18}{\sqrt{\delta_{max}}} \tag{1.10}$$

La ecuación (1.10) se puede aplicar como una expresión general para determinar la frecuencia fundamental del elemento, incluso cuando la condición de apoyo no sea simple, pero respetando el valor apropiado de δ_{max} según la condición de apoyo que se tenga (Smith et al., 2009).

Por otra parte, se demuestra que con la ecuación (1.10) es posible obtener la frecuencia fundamental de un sistema de piso si se consideran las sumas de las deflexiones máximas de los elementos estructurales que lo conforman, como se muestra en la ecuación (1.11), conocida como la relación de Dunkerley. Dicha ecuación se puede reescribir como la ecuación (1.12) para la obtención de la frecuencia fundamental del sistema considerando las deformaciones por cortante para determinar de las deflexiones en el centro del claro del elemento dependiendo de sus condiciones de apoyo (Murray et al., 1997).

Smith et al. (2009) presenta una ecuación similar a la ecuación (1.11) con una ligera diferencia en cuanto a las variables posteriores a la igualdad, ya que se consideran tres variables: la suma de las componentes de las frecuencias de la losa, la trabe secundaria y las trabes principales. Como ejemplo de aplicación, la ecuación (1.12) se utiliza para determinar la f_n en sistemas de losacero (AISC, 1997) donde se presentan procedimientos prácticos para el análisis de las vibraciones en sistemas de piso debido a actividades humanas, el cual será la base para el presente trabajo en conjunto de otras metodologías propuestas por otros autores para el análisis y evaluación de vibraciones para distintas actividades humanas a partir de funciones de carga dinámicas.

$$\frac{1}{{f_n}^2} = \frac{1}{{f_j}^2} + \frac{1}{{f_g}^2} \tag{1.11}$$

$$f_n = 0.18\sqrt{\frac{g}{(\Delta_j + \Delta_g)}} \tag{1.12}$$

Donde:

$f_n =$ frecuencia natural [Hz]
$f_j =$ frecuencia fundamental de la viga [Hz]
$f_g =$ frecuencia fundamental de la franja de la losa [Hz]
$\Delta_j, \Delta_g =$ Deflexiones máximas de la viga principal y franja de la losa debido a una carga distribuida, respectivamente.

1.1.2 Funciones de carga dinámica

Las cargas dinámicas principales que actúan en sistemas de piso se deben a maquinaria o actividad humana y se clasifican como armónicas, periódicas, transitorias e impulsivas. Las cargas armónicas varían según una función sinusoidal (Figura 1.3a), son causadas por máquinas como generadores o vibradores y actividades humanas rítmicas de trabajo y eventos sociales; las cargas periódicas exhiben variación en el tiempo el cual se repite regularmente en intervalos llamados periodos (Figura 1.3b), son causadas por máquinas con más de una masa desequilibrada, partes oscilantes y partes que impactan periódicamente o actividades humanas como el caminar, saltar, bailar y excitaciones arbitrarias; las cargas transitorias no muestran periodicidad y la duración de la carga es arbitraria (Figura 1.3c), son causadas por viento, oleaje, sismo, etc.; las cargas impulsivas son de carácter transitorio (Figura 1.3d), son causadas por maquinaria, trabajos de construcción, impactos, ondas expansivas y colapso repentino de elementos estructurales o actividades humanas como el correr, saltos o impactos de carga de tacón (Bachmann et al., 1987; Caballero, 2020). Para este trabajo se analizará únicamente las cargas dinámicas debido a actividades humanas.

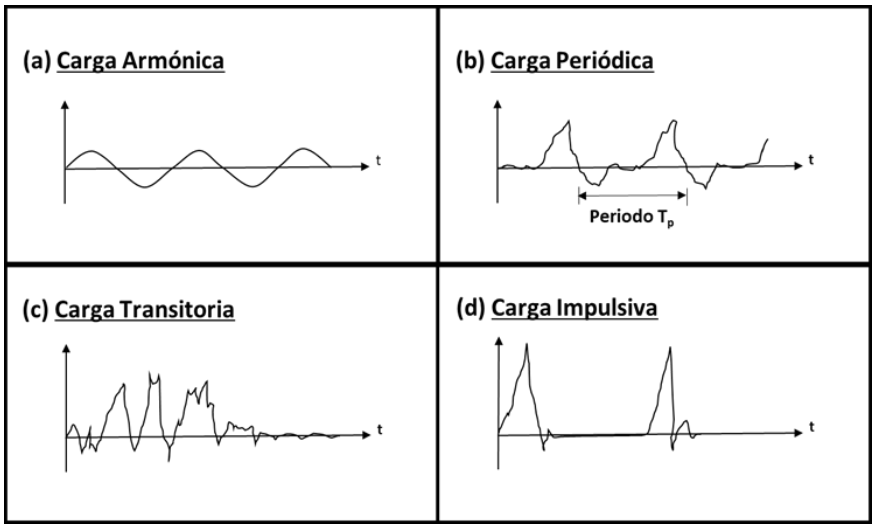


Figura 1.3. Funciones típicas de cargas dinámicas (tomadas de Bachmann et al., 1987).

Funciones de carga dinámica representativas de actividades humanas

Para evaluar las cargas dinámicas sobre los sistemas de piso, en este caso debidas a actividades humanas, se utilizan funciones o curvas de la fuerza contra el tiempo, por ejemplo, fuerzas debido a baile, salto y otras actividades rítmicas. Este tipo de actividades se modelan como una función armónica, donde el factor *a* que multiplica a la fuerza estática para obtener la fuerza dinámica varía en función de la actividad (Figura 1.4a); fuerzas debido al caminar (Figura 1.4b) donde el primer y segundo pico corresponde al golpe del talón y al contacto de los dedos del pie, respectivamente; fuerzas de impacto de talón (Figura 1.4c) las cuales su duración es menor en comparación con el

periodo fundamental del sistema de piso y se obtienen distintas fuerzas máximas para cada evento obtenidas de pruebas de impacto de talón. (Ellingwood y Tallin, 1984).

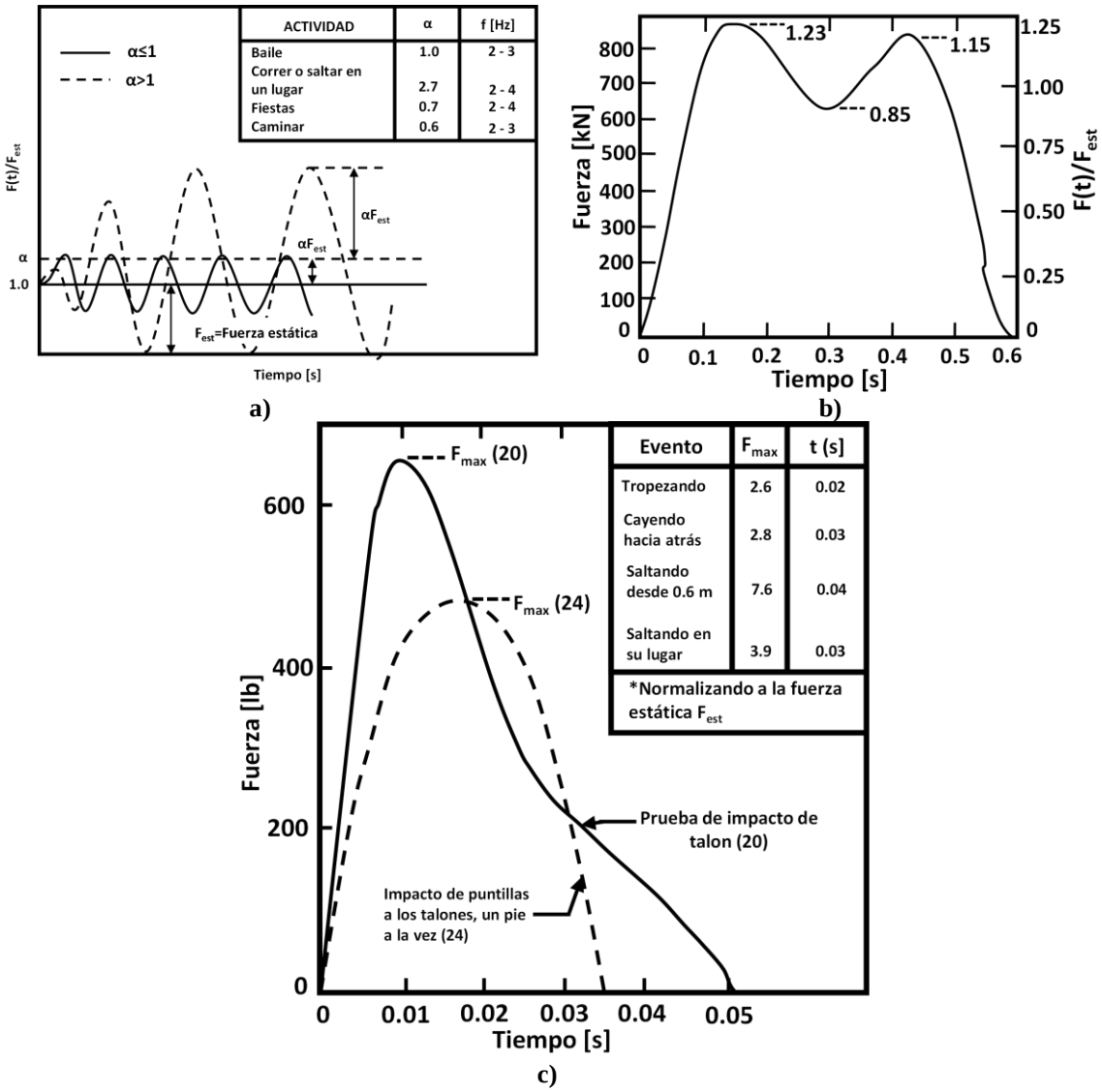


Figura 1.4. Curvas fuerza contra tiempo por: a) actividades rítmicas b) caminar y c) impacto de talón (tomada de Ellingwood y Tallin, 1984).

En el caso de funciones que representen de manera adecuada el caminar de personas, Bachmann y Ammann (1987) presentan una función en la cual durante la actividad considera el tiempo de contacto de cada pie y el de ambos en función de su carga (Figura 1.5) usando como base la función de la Figura 1.4b.

Varela (2004) presenta una combinación de funciones de carga armónica como las mostradas en la Figura 1.4, la función que propone considera una función debido al caminar (Figura 1.4b) más una carga de impacto (Figura 1.4c) como se muestra en la Figura 1.6. La diferencia entre la función presentada por Bachmann y Ammann (1987) con respecto a esta, es que se considera un fuerza impulsiva al inicio de cada paso del caminar (Caballero, 2020).

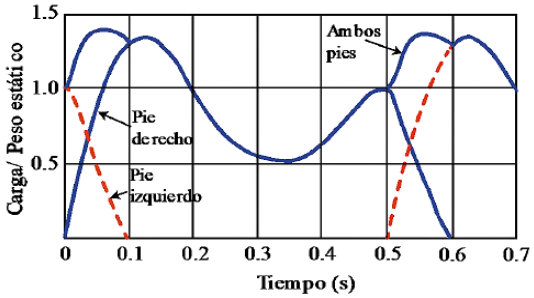


Figura 1.5. Carga dinámica que representa el caminar de una persona (observada en Caballero, 2020 tomada de Bachmann y Ammann, 1987).

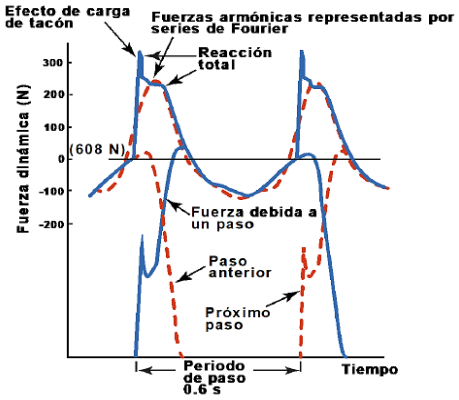


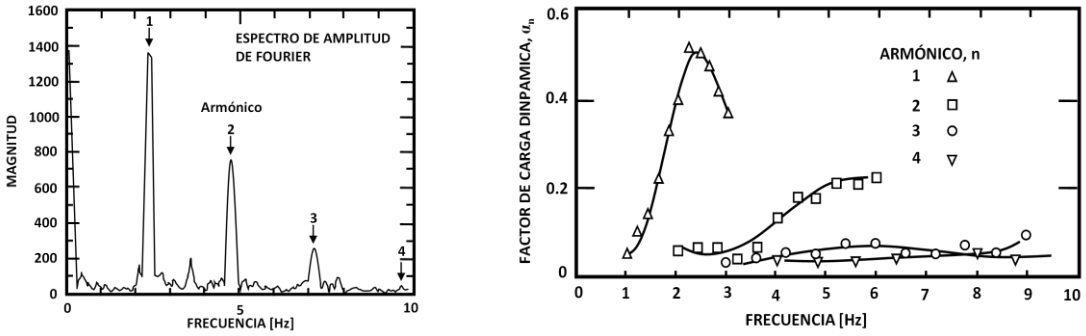
Figura 1.6. Carga dinámica que representa el caminar de una persona más una carga de impacto (observada en Caballero, 2020 tomada de Varela, 2004).

Las funciones propuestas por Bachmann y Ammann (1987) y Varela (2004) se han obtenido mediante modelos experimentales calibrados para así obtener una combinación de funciones matemáticas del tipo trigonométricas (series de Fourier) que caracterice adecuadamente la actividad de estudio. Un ejemplo del desarrollo de estas expresiones para la representación de fuerzas se presenta en Rainer et al. (1986), donde se evalúa las fuerzas dinámicas producidas por una o más personas caminando, corriendo o saltando en pasarelas. Como ejemplo, para la actividad del caminar se obtuvo el registro de la fuerza inducida en el centro del claro del elemento de prueba y los factores de carga dinámica como se muestra en la Figura 1.7; de igual manera obtuvieron registros para las otras actividades y como resultado se obtuvo la ecuación (1.13) que representa dichas actividades:

$$F(t) = P\left(1 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i sen[2\pi i f_s t + \phi_i]\right) \tag{1.13}$$

donde:

$F(t)$= carga dinámica en función del tiempo
P= peso estático de la persona
i= número del armónico
α_i= factor de carga dinámica o coeficiente dinámico del i-ésimo armónico
f_s= frecuencia de la actividad [Hz]
ϕ_i= ángulo de desfasamiento del i-ésimo armónico con respecto al primer armónico
t= tiempo
N= número total de armónicos.



a) **b)**

Figura 1.7. Obtención de coeficientes de carga dinámica con base en experimento del caminar de una persona (tomada de Rainer et al., 1986).

Murray et al. (1997) presenta una función de carga para el caminar de persona similar a la ecuación (1.13), donde la fuerza dependiente del tiempo se puede representar mediante la serie de Fourier:

$$F(t) = P\left(1 + \sum \alpha_i cos[2\pi i f_s t + \phi_i]\right) \tag{1.14}$$

donde:

P= peso de la persona
f_s= frecuencia de paso de la actividad [Hz]

Tomando en consideración que la frecuencia de excitación más baja es la que influye ampliamente en la respuesta dinámica de un sistema de piso (AISC, 1997) se tiene:

$$F(t) = P\alpha_i \cos\,(2\pi i f_s t) \tag{1.15}$$

donde los valores de f_s, i y α_i se resume en la Tabla 1.2.

Tabla 1.2. Elementos para definición funciones de carga (observadas en Caballero, 2020 tomadas de AISC, 1997).

Frecuencia de funciones de carga y coeficientes dinámicos α_i						
Armónico *i*	**Caminar de persona**		**Aeróbicos**		**Baile de personas**	
	f_s [Hz]	**α_i**	**f_s [Hz]**	**α_i**	**f_s [Hz]**	**α_i**
1	1.6-2.2	0.5	2-2.75	1.5	1.5-3	0.5
2	3.2-4.4	0.2	4-5.5	0.6	-	-
3	4.8-6.6	0.1	6.8-2.5	0.1	-	-
4	6.4-8.8	0.05	-	-	-	-
***Coeficiente dinámico = Fuerza sinusoidal máxima/peso de personas**						

Posteriormente, Bachmann et al. (1995**)** proponen representar las actividades humanas con funciones de carga uniformemente distribuidas obteniendo la ecuación (1.16).

$$F(t) = w_p + \sum_{i=1}^{n} w_p \alpha_i sen[2\pi i f_s t - \phi_i] \quad (1.16)$$

Donde:

w_p= peso de la persona por unidad de área
ϕ_i= ángulo de desfasamiento del i-ésimo armónico con respecto al primer armónico
n= número total de armónicos.

Los valores de las variables α_i y ϕ_i para cada armónico de la ecuación (1.16) obtenidos experimentalmente se muestra en la Tabla 1.3; dichos valores son en función de la densidad de diseño de personas y la frecuencia de paso para cada tipo de actividad.

Tabla 1.3. Actividades y coeficientes para definición de cargas representativas de actividades humanas (observadas en Caballero, 2020 tomadas de Bachmann *et al.*, 1995).

Tipo de actividad	**Frecuencia de paso [Hz]**		**Coeficiente de Fourier y ángulo de desfasamiento**					**Densidad de diseño (personas/m²)**
			α_1	α_2	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	
Caminar	Vertical	2.00	0.40	0.10	$\pi/2$	0.10	$\pi/2$	~1
		2.40	0.50					
	Hacia adelante	2.00	0.20	0.10				
	Lateral	2.00	$\alpha_{1/2}$=0.1	$\alpha_{3/2}$=0.1				
			$\alpha_{1/2}$=0.1					
Correr	-	2.0-3.0	1.60	0.70	-	0.20	-	-
Saltar	Normal	2.00	1.80	1.30	*)	0.70	*)	En entrenamientos ~ 0.25 (en casos extremos hasta 0.5), $\phi_2=\phi_3=\pi(1-f_s t_s)$
		3.00	1.70	1.10	*)	0.50	*)	
	Alto	2.00	1.90	1.60	*)	1.10	*)	
		3.00	1.80	1.30	*)	0.80	*)	
Baile	-	2.0-3.0	0.50	0.15	-	0.10	-	~ 4 (en casos extremos hasta 6)
Balanceo y aplausos de pie	-	1.60	0.17	0.10	-	0.04	-	Asientos libres ~ 4 (en casos extremos hasta 6), asientos fijos ~ 2 a 3
		2.40	0.38	0.12		0.02		
Aplausos	Normal	1.60	0.024	0.010	-	0.009	-	~ 2 a 3
		2.40	0.047	0.024		0.015		
	Intensivo	2.00	0.170	0.047		0.037		
Balanceo lateral del cuerpo	Sentado	0.60	$\alpha_{1/2}$=0.4	-	-	-	-	~ 3 a 4
	De pie	0.6	$\alpha_{1/2}$=0.5					

1.1.3 Relación de amortiguamiento

El amortiguamiento para el análisis de vibraciones en losas es el amortiguamiento modal (ξ) y es la relación entre el amortiguamiento real y el crítico en porcentaje. El amortiguamiento depende de elementos estructurales y no estructurales para la disipación de energía cuando el sistema de piso se encuentra en movimiento incluyendo los contenidos soportados por la losa. Es importante considerar el fenómeno de resonancia en un sistema de piso, en la Figura 1.8 se muestra la amplitud de la relación de aceleración a la fuerza sinusoidal en el eje vertical y la relación de frecuencia natural a la frecuencia forzada en el eje horizontal. Cuando la relación de frecuencias toma el valor de uno, ocurre el fenómeno de resonancia (Hewitt y Murray, 2004).

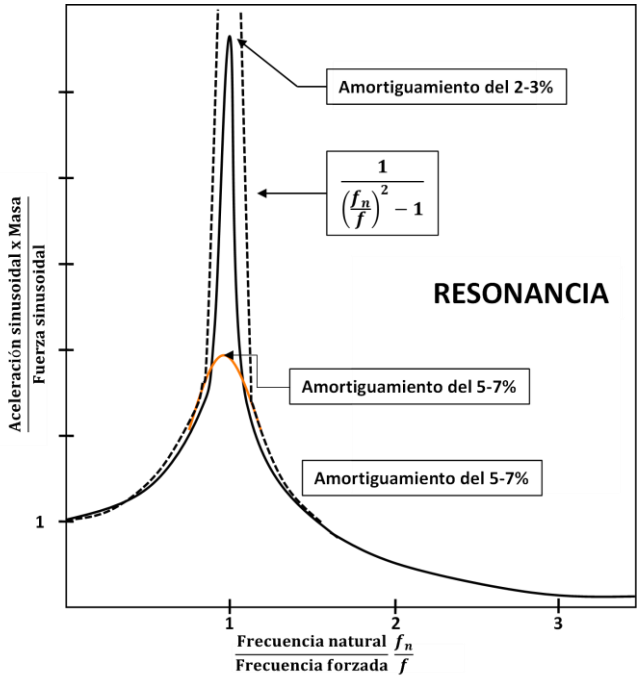


Figura 1.8. Amplitud de la relación de aceleraciones vs. la relación de frecuencia natural a la frecuencia forzada (tomada de Hewitt y Murray, 2004).

Con base en resultados experimentales, Hewitt y Murray (2004) recomiendan valores de la relación de amortiguamiento mostrado en la Tabla 1.4 para sistemas de losacero.

Tabla 1.4. Valores de la relación de amortiguamiento ξ para oficinas (Hewitt y Murray 2004).

Oficinas	ξ (%)
Con muros divisorios	5.0
Con aparatos electrónicos	2.0-2.5
Con espacios abiertos	2.5-3.0
Con estudio y/o biblioteca	3.0-4.0

En el manual de HIVOSS (2007), el amortiguamiento se recomienda calcular a partir de la suma de tres amortiguamientos estructurales (D_i); donde D_1 es debido a la fricción interna dentro de la estructura del piso o en las conexiones del piso a otros elementos estructurales, D_2 debido a muebles y equipos y el amortiguamiento D_3 debido a acabados como se observa en la Tabla 1.5. En este trabajo se utilizan los valores enlistados en la Tabla 1.5 para análisis posteriores de sistemas de piso, ya que se consideran más factores que influyen en el amortiguamiento natural de una estructura.

Tabla 1.5. Valores de amortiguamiento (HIVOSS, 2007).

Tipo de amortiguamiento		ξ (%)
Estructural D1	Madera	6.0
	Concreto	2.0
	Acero	1.0
	Acero-Concreto	1.0
Debida a muebles D2	Oficina tradicional con 1 a 3 personas con muros divisorios	2.0
	Oficinas sin papeles	0
	Oficinas con áreas abiertas	1.0
	Librería	1.0
	Casas	1.0
	Escuelas	0
	Gimnasia	0
Debida a acabados D3	Plafón	1.0
	Acabados ligeros en piso	0
	Acabados en baños	1.0
Amortiguamiento total = D1+D2+D3		

1.1.4 Respuesta dinámica en términos de la aceleración

La respuesta dinámica de sistemas de piso ante actividades humanas se puede evaluar en términos de desplazamiento, velocidad o aceleración. La velocidad la cual está más relacionada con la energía involucrada en el movimiento se puede utilizar para definir la magnitud de la vibración; sin embargo, los instrumentos para medir la aceleración son más utilizados. Por lo que, las normas vigentes se basan en la evaluación de vibraciones en sistemas de piso debido a actividades humanas en términos de aceleración. Para el análisis de vibraciones debido a maquinaria se debe de analizar cualquier modo de vibración de la estructura debido a las bajas y altas frecuencias que excitan a la estructura. En la práctica, por lo general, para el análisis de vibraciones debido a actividades humanas únicamente se consideran los modos de vibración con frecuencias bajas, *i.e.* el modo fundamental. Lo anterior debido a que los modos superiores de vibración son excitados solo por componentes de fuerzas armónicas relativamente pequeñas en comparación con los modos de vibración más bajos (Murray et al., 1997).

Durante la medición de las aceleraciones debido a las vibraciones en los sistemas de piso se pueden presentar máximos de la respuesta no representativos por lo que se recomienda expresar la aceleración en términos de una medida promedio, en la práctica la medida que más se usa es el valor cuadrático medio o *rms* (root-mean-square por sus siglas en inglés) y se expresa matemáticamente con la ecuación (1.17).

$$a_{rms} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T a(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.17}$$

Donde *a(t)* es la aceleración tiempo-historia del análisis dinámico paso a paso y T es un periodo de tiempo determinado. Para un movimiento continuo sinusoidal en la parte estacionaria (Figura 1.9b)

la magnitud de a_{rms} es el máximo de la amplitud de la aceleración, $a_{max}/\sqrt{2} \approx 0.707 a_{max}$ (Hicks, 2004).

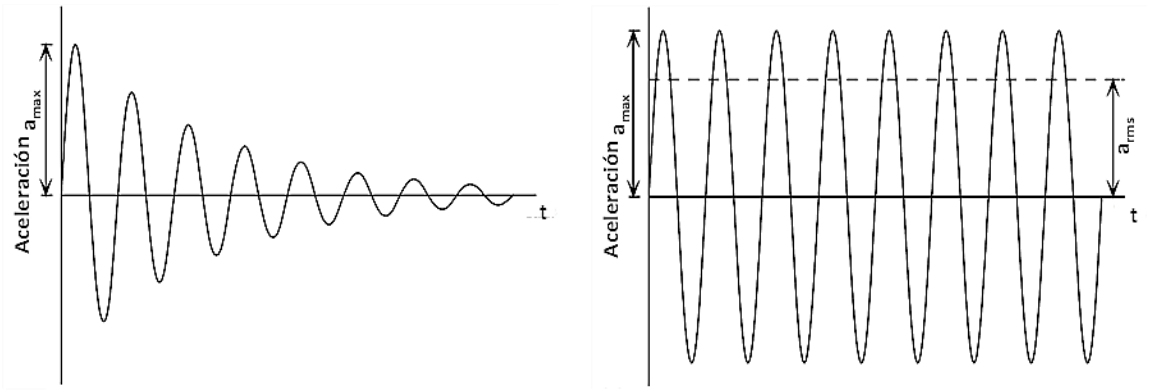


Figura 1.9. Representación de movimiento senoidal: a) respuesta transitoria y b) respuesta estacionaria continua (tomadas de Hicks, 2004).

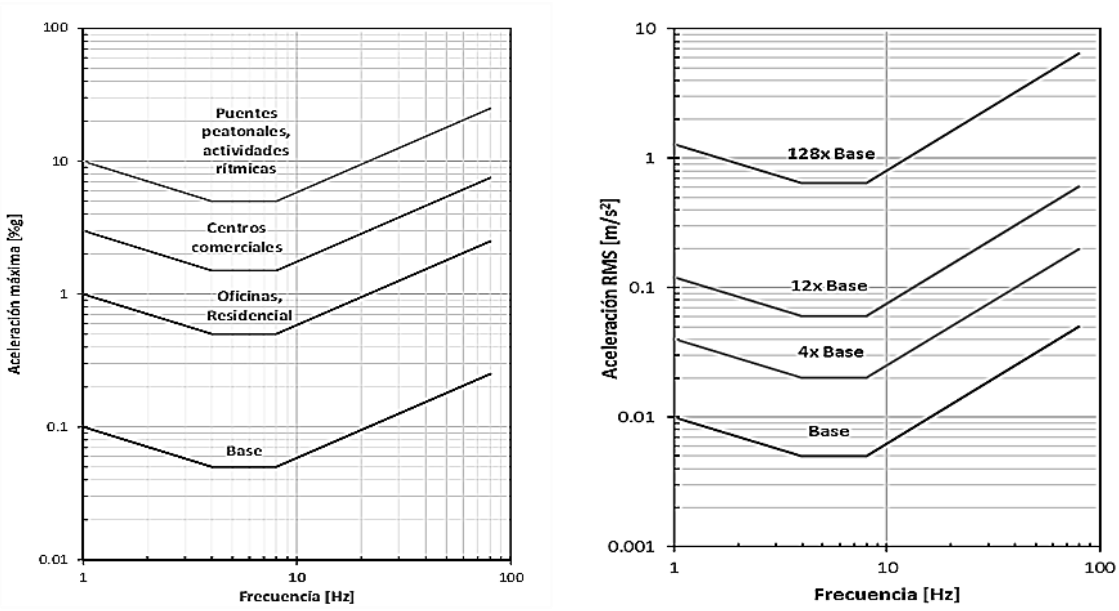
La respuesta obtenida en la parte estacionaria o estable (Figura 1.9b) del movimiento debido a las actividades humanas resulta ser más incómodo para la percepción humana en comparación de la parte transitoria causado por un impacto poco frecuente (Figura 1.9a); por lo que es necesario evaluar dichas respuestas en umbrales de percepción humana debido al movimiento en los sistemas de piso debido a las actividades humanas (Murray et al., 1997).

Las variables necesarias para realizar la evaluación de vibraciones en sistemas de piso son: a_{max} o a_{rms} , f_n y ξ; en la literatura se presentan diversos tipos de nomogramas para la evaluación de vibraciones en sistemas de piso en función de la a_{max} o a_{rms}. Para este trabajo se estudian funciones de cargas dinámicas del tipo armónica, periódica y transitoria; los resultados obtenidos se validan evaluando la a_{max} y a_{rms} en los nomogramas que se presentan en la siguiente sección.

1.1.5 Evaluación de vibraciones en sistemas de piso

El criterio usado en la guía de diseño número 11 del AISC (1997) para la evaluación de vibraciones en sistemas de piso se basa en límites de aceleraciones ajustados por el tipo de ocupación del sistema estructural (Allen y Murray, 1993) como se muestra en la Figura 1.10a. En la norma ISO 2631-2 (1989) se sugiere considerar estos límites en términos de a_{rms} como un múltiplo de la curva base que se expresa en términos de la a_{max} de la manera siguiente: 10 para oficinas o residencias; 30 para centros comerciales o puentes en interiores y 100 para puentes en exteriores (AISC, 1997). Actualmente se encuentra la versión de la guía de diseño número 11 del AISC (2016); sin embargo, no se observa una modificación significante en cuanto a las expresiones y coeficientes, por lo que en este trabajo se emplea la versión del AISC (1997).

Hicks (2004) propone realizar la evaluación en términos de a_{rms} como se muestra en la Figura 1.10b. De igual manera, a partir de la curva base ISO se definen límites en función del uso destinado con un multiplicador de la curva base; estos límites se muestran en la Tabla 1.6 para cada tipo de ocupación, uso, hora del día y tipo de vibración. En las últimas dos columnas de la misma tabla se muestran los límites del parámetro de perceptibilidad *KB* propuesto en DIN 4150-2 (1975) del que se habla más adelante.



a) b)

Figura 1.10. Aceleración máxima recomendada para comodidad humana para vibraciones debidas a actividades humanas: a) Allen y Murray (1993); ISO 2631-2 (1989), b) Hicks (2004); ISO 2631-2 (1989).

Tabla 1.6. Parámetros de aceptabilidad como una función del entorno y del tipo de vibración (Hicks, 2004).

		Coeficientes para curva base BS6472 (similares ANSI/ISO)		DIN 4150-2: 1975, parámetro de perceptibilidad KB	
Lugar	**Tiempo**	**Vibración continua**	**Vibración transitoria**	**Vibración continua**	**Vibración transitoria**
Áreas críticas de trabajo	**Día**	1	1	0.1-0.6	4-12
	Noche	1	1	0.1-0.4	0.15-0.4
Residencial	**Día**	2-4	60-90	0.2	4
	Noche	1.4	20	0.15	0.15
Oficina	**Día**	4	128	0.4	12
	Noche	4	128	0.3	0.3
Industrial	**Día**	8	128	0.6	12
	Noche	8	128	0.4	0.4

Además, en la guía de diseño del AISC (1997), se presentan límites de aceleración para vibraciones debido a actividades rítmicas como un criterio de diseño en base al NBC (1990) para evitar problemas de fatiga estructural debido a aceleraciones cíclicas en el sistema de piso como se enlistan en la Tabla 1.7 y se muestran en la Figura 1.11.

Tabla 1.7. Aceleraciones límite para actividades rítmicas (AISC, 1997).

Tipo de actividad u ocupación	Límite de aceleración [%g]
Oficina o residencial	0.4-0.7
Comedor o gimnasio	1.5-2.5
Actividad rítmica	4-7

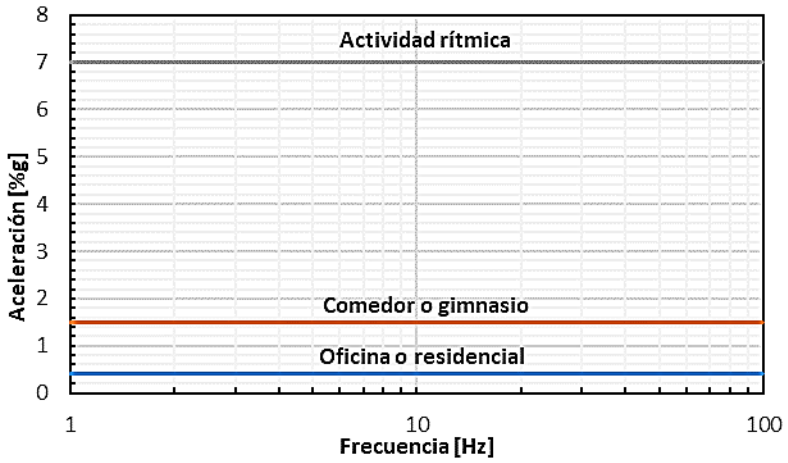


Figura 1.11. Aceleraciones límite para actividades rítmicas para evitar problemas de fatiga estructural (tomada del AISC, 1997).

Evaluación mediante el parámetro de perceptibilidad *KB* (Bachmann y Ammann, 1987)

Bachmann y Ammann (1987) proponen medir empíricamente la perceptibilidad humana ante a las vibraciones en sistemas de piso mediante el parámetro *KB* (ec. 1.18), el cual se obtiene a partir de la amplitud máxima del desplazamiento (d_{max}) ya sea en términos de velocidad máxima (v_{max}) o aceleración máxima (a_{max}) si la vibración es armónica del sistema que se analice con la ecuación (1.19).

$$KB = d_{max} \cdot \frac{0.8{f_n}^2}{\sqrt{1 + 0.032{f_n}^2}} \tag{1.18}$$

$$d_{max} = \frac{v_{max}}{2\pi f_n} = \frac{a_{max}}{2\pi {f_n}^2} \tag{1.19}$$

Donde:

d_{max}= amplitud máxima del desplazamiento [mm]

f_n= frecuencia natural del sistema de piso [Hz]

v_{max}= velocidad máxima obtenida del análisis [mm/s]

a_{max}= aceleración máxima obtenida del análisis [mm/s^2]

Una vez obtenido el valor del parámetro *KB* correspondiente de la vibración que se está analizando se compara con valores aceptables establecidos en Bachmann y Ammann (1987) como se muestra en la Tabla 1.8. Este parámetro, además de los nomogramas anteriormente mostrados, se utilizará para comparar los resultados que se obtengan con el parámetro *K* (ec. 1.20), propuesto en las NTCC-21 (2021), con sus correspondientes límites mostrados en la Tabla 1.9, del cual se hace mención en la justificación del presente trabajo.

Tabla 1.8. Intensidades de KB aceptables para edificios residenciales (Bachmann y Ammann, 1987).

Zonas de construcción (zona en uso y en desarrollo dentro de un radio donde se emiten vibraciones)	Tiempo	Intensidad KB aceptable	
		Continuo o repetidamente	Poco frecuente
Zonas únicamente de uso residencial, urbanización y complejo vacacional	Día	0.2 (0.15*)	4
	Noche	0.15 (0.1*)	0.15
Centros urbanos, pueblos y pequeños negocios	Día	0.3 (0.2*)	8
	Noche	0.2	0.2
Negocios y comercio (incluyendo oficinas)	Día	0.4	12
	Noche	0.3	0.3
Industrial	Día	0.6	12
	Noche	0.4	0.4
Zonas de excepción (según el contenido residencial)	Día	0.1/0.6	4/12
	Noche	0.1/0.4	0.15/0.4
(*) Los valores en paréntesis se deben cumplir si los edificios se excitan horizontalmente con una frecuencia menor a ~ 5 Hz			

1.2 Justificación

Las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto (NTCC-21, 2021), contemplan únicamente el diseño de losas de concreto, ya sea losas macizas (reforzadas, coladas sobre láminas de acero acanaladas y corrugadas, losas planas y postensadas) así como de losas aligeradas (encasetonadas), debido a que son las más usuales para las edificaciones no solo en la Ciudad de México, sino en todo el país.

Los sistemas de piso a base de losas macizas de concreto reforzado apoyadas sobre trabes son sistemas estructurales con rigidez alta, lo cual sugiere que no se desarrollan problemas de vibración por actividades humanas para este tipo de sistemas; sin embargo, para este trabajo se plantea la hipótesis de que se pueden desarrollar vibraciones considerables como consecuencia del movimiento vertical que pueden ser incómodas para sus ocupantes. De modo que es necesario evaluar la vibración vertical de una losa maciza apoyada sobre trabes ante distintas actividades humanas con procedimientos analíticos y numéricos para simplificar el análisis.

Se observa en los artículos consultados, así como en la norma aplicable que no existen estudios de vibración en los sistemas de piso a base de losa maciza ante la actividad humana. Las NTCC-21 (2021) hace mención en el apartado 14.4 “Vibración” referente a actividades rítmicas únicamente, no a la vibración del sistema de piso ocasionado por el caminar humano, además, no se especifica el sistema de piso al que se refiere su recomendación. Adicional a esto, en dichas Normas no se incluye expresiones o procedimientos analíticos para analizar las losas macizas ante vibraciones debido al caminar humano.

El numeral 14 “Estados límite de servicio” apartado 14.4 “Vibración”, subapartado 14.4.1 “Criterio general” de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto se señala lo siguiente: *“Los sistemas de piso susceptibles a vibración se diseñarán para que*

las vibraciones no tengan efectos indeseables en los usuarios de los edificios. Cuando la frecuencia de vibración fundamental de un sistema estructural, utilizado para actividades rítmicas (como danza, conciertos, ejercicios a saltos o gimnásticos) sea menor que 6 Hz, se investigarán los posibles efectos de resonancia por medio de un análisis dinámico… "

En el subapartado 14.4.2 "Percepción humana" se menciona lo siguiente:

"La sensibilidad humana a la vibración estructural es principalmente función de la aceleración. Usualmente se cuantifica en términos de la amplitud y de la frecuencia, empleando un factor de sensibilidad K, definido como:

$$K = \frac{d}{\sqrt{2}} \frac{f^2}{\sqrt[2]{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}} \tag{1.20}$$

donde:

d= amplitud de la vibración [mm]
f= frecuencia [Hz]
f_0= 10 Hz.

En la tabla 14.4.1 se relacionan valores de K y la intensidad perceptible de vibración. El intervalo de sensibilidad se ha dividido en nueve clases, de A-I. Estas clases se correlacionan con los efectos psicológicos de la vibración sobre los humanos. Movimientos en las clases A, B, C y D generalmente se consideran como aceptables; vibraciones en las clases E y F pueden ser no placenteras, pero se consideran soportables; vibraciones en las clases G, H e I no son soportables y deben evitarse"

Tabla 1.9. Percepción humana de vibraciones estructurales (Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto, 2021).

K	Clase	Percepción Humana
K<0.1	A	Imperceptible
0.1≤K<0.25	B	Ligeramente perceptible
0.25≤K<0.63	C	Perceptible
0.63≤K<1.6	D	Fácilmente perceptible
1.6≤K<4	E	Fuertemente perceptible
4≤K<10	F	Muy fuertemente perceptible
10≤K<25	G	
25≤K<63	H	
63≤K	I	

Esta expresión *K*, dada en la ecuación (1.20) de las NTCC-21 (2021), se evalúa y compara con otros nomogramas que se basan en la frecuencia y la aceleración. Además de esto, en la literatura se describen procedimientos para analizar losas de frecuencia alta, con lo cual se podrá hacer un estudio comparativo de los resultados que se obtengan y los procedimientos de la guía 11 del AISC (1997).

1.3 Objetivos

1.3.1 Generales

El objetivo de este trabajo es desarrollar recomendaciones de diseño para el análisis de losas macizas de concreto reforzado ante vibraciones dinámicas producidas por actividades humanas, evaluando las variables que influyen en las vibraciones, basándose en pruebas experimentales y modelos de elementos finitos en 3 dimensiones.

1.3.2 Particulares

- Evaluar diferentes funciones que representen el caminar de personas, mediante calibración numérica y experimental.
- Evaluar los criterios descritos en las NTCC-21 (2021) para el análisis de vibraciones mediante análisis analíticos y numéricos.
- Estudio paramétrico para evaluar la influencia en la frecuencia natural y en la aceleración de: sección de vigas principales, sección de columnas, espesor de losa maciza, inclusión de vigas secundarias de concreto reforzado y acero estructural, uso de concreto ligero.
- Análisis de la masa modal y frecuencia natural, para trabes y losas con distintas condiciones de apoyo mediante expresiones analíticas y modelos numéricos.
- Análisis de la aceleración máxima en losa maciza de concreto reforzado mediante expresiones analíticas y su comparativa con resultados de pruebas experimentales y modelos numéricos.
- Estudio paramétrico para evaluar la influencia en la relación de masa modal y en la aceleración de: sección de vigas principales, sección de columnas, espesor de losa maciza.
- Recomendaciones: modelado del sistema de piso, análisis y diseño por vibración, y control de la aceleración.

2 ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DINÁMICA EN TÉRMINOS DE LA ACELERACIÓN DE LOSAS DE CONCRETO REFORZADO

2.1 Introducción

Caballero (2020) realizó un estudio numérico-experimental de losas de concreto reforzado sujetas a vibración por actividades humana en la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, la cual se tomará como base para el presente trabajo para la evaluación de funciones de carga en los modelos numéricos para distintos tipos de actividades humanas, las cuales experimenta el sistema durante su uso diario. Del sistema de estudio, se calibran los modelos numéricos realizados con el programa SAP 2000 (2014) con los resultados experimentales obtenidos de dicho estudio. Se utilizan las especificaciones propuestas en la guía de diseño 11 del AISC (1997) y las NTCC-21 (2021) para el sistema de piso de concreto reforzado. Principalmente se realiza un análisis comparativo en términos de la frecuencia natural y la carga dinámica, para posteriormente realizar una evaluación de la susceptibilidad ante vibraciones excesivas mediante umbrales de comodidad establecidos en las especificaciones mencionadas.

2.2 Características y propiedades de la estructura de estudio

La losa de concreto reforzado que estudia Caballero (2020) se encuentra ubicada en el nivel 1 del edificio P4 de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco la cual está destinada a uso de oficinas. La losa es rectangular de concreto reforzada clase 1 de 5.60 m x 6.20 m de claros con espesor de 13 cm y se encuentra apoyada perimetralmente sobre trabes mostrado en la Figura 2.1. Este tablero tiene una zona que se utiliza como cubículo de alumnos y otra zona que se utiliza como pasillo, estas zonas están divididas por un muro de material ligero. La resistencia a compresión media del concreto es de f'_c=460 kg/cm^2, al cual se le consideró un peso volumétrico de 2400 kg/m^3. El acero de refuerzo longitudinal se consideró un esfuerzo de fluencia de f_y=2400 kg/cm^2. Las dimensiones de las trabes T-01 son de 25 cm de base y 60 cm de peralte, para el caso de las trabes T-02 las dimensiones son de 25 cm de base y 45 cm de peralte y las columnas tienen de base 40 cm y 60 cm de peralte; a estos elementos, así como a la losa, se les asignó las propiedades del concreto mencionado anteriormente. El módulo de elasticidad de la losa, así como el de las trabes se calculó con la ecuación (2.1) la cual es obtenida de las NTCC-21 (2021) y es aplicable para concretos de alta resistencia obteniendo un valor de E_{cc}=292304 kg/cm^2.

$$E_{cc} = 8500\sqrt{f'_c} + 110{,}000 \tag{2.1}$$

Con las propiedades de los elementos estructurales del sistema definidos, se realizaron dos tipos de modelos en SAP 2000 (2014): continuo y aislado (Figura 2.2) con elementos finitos tipo membrana, veinte elementos por borde y con apoyos rígidos para el modelado de las losas. El número de divisiones por borde se basa en los resultados obtenidos en la sección 4.3 del presente trabajo, en donde se demuestra que distintos parámetros debido a una carga armónica convergen a partir de las ocho divisiones por borde. El modelo continuo corresponde a la planta mostrada en la Figura 2.1 y el aislado al tablero de estudio; esto para obtener las frecuencias naturales de cada modelo y determinar si con el modelo aislado es suficiente para realizar el análisis de funciones ante vibraciones por actividades humanas. Se buscaron que frecuencias y modos del modelo continuo correspondían al del modelo aislado (Tabla 2.1). La frecuencia natural del sistema aislado y continuo tienen una diferencia del 1.7%. De acuerdo con la Figura 2.2, el modo 3 del sistema continuo corresponde al modo fundamental del tablero aislado con una diferencia entre sus frecuencias del 5%. La frecuencia del modo 2 del sistema aislado correspondiente al modo 11 del sistema continuo, con una diferencia del 1%; la frecuencia del modo 3 del sistema aislado correspondiente al modo 10 del sistema continuo,

tiene una diferencia del 4%. La frecuencia natural experimental, f_{nexp}=14.06 Hz calculada por Caballero (2020), tiene una diferencia del 6.4% y 4.7% con respecto a la frecuencia natural del tablero aislado y continuo, respectivamente. Por lo que se considera que los modelos están calibrados y se opta por el uso del tablero aislado para el análisis de vibraciones debido a su simplicidad.

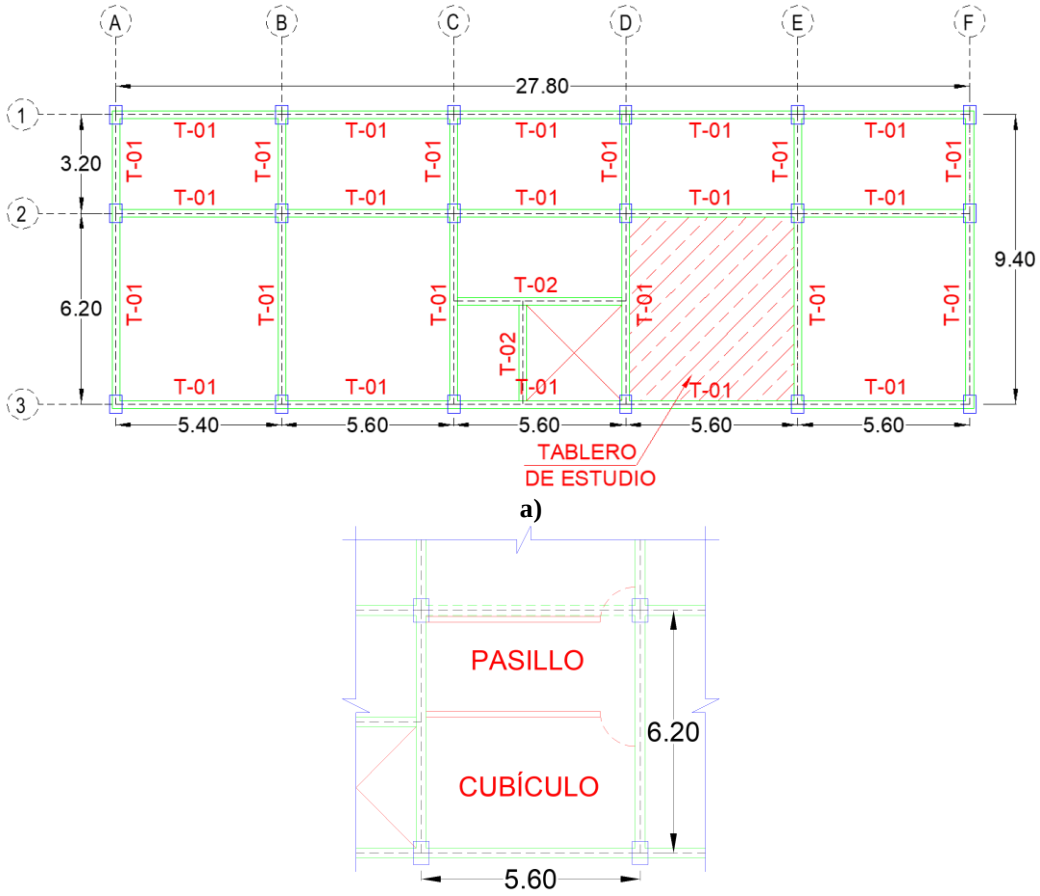
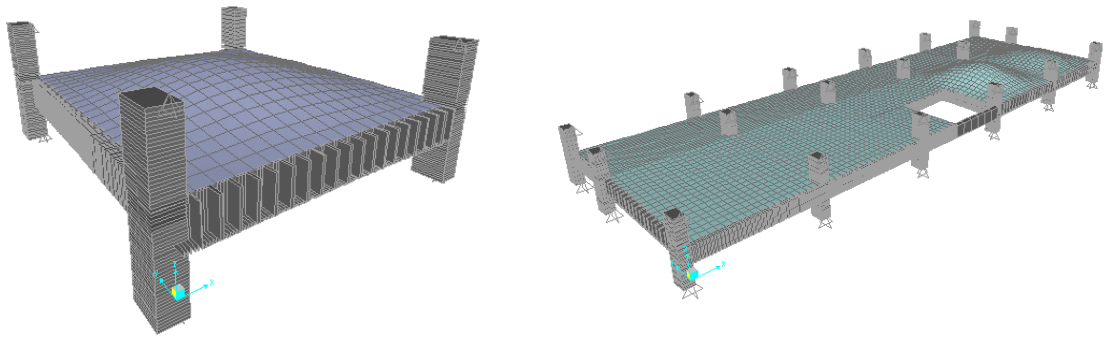


Figura 2.1. Geometría y ubicación de tablero estudiado: a) planta de edificio y b) uso del tablero (tomada de Caballero, 2020).



a) **b)**

Figura 2.2. Modelos numéricos de losa de concreto reforzado: a) Modelo aislado (modo 1) y b) Modelo continuo (modo 3).

2.3 Análisis y evaluación de vibraciones por el correr de una persona

Para la respuesta máxima de la losa en términos de a/g se realizó un análisis paso a paso, considerando la actividad del correr de varias personas con la función de la ecuación (1.16). En la Tabla 2.2 se enlistan los coeficientes de carga para obtener la función de carga (Figura 2.3). La frecuencia de paso propuesta tiene un valor de 2.3 Hz y una densidad de 0 personas/m^2 de acuerdo con lo establecido en la Tabla 1.3. El valor de la carga se consideró el peso de la persona 6, mostrado en la Tabla 2.3, y se aplicó en el nodo central del tablero para la obtención de las aceleraciones.

Tabla 2.1. Frecuencias en cada modo del modelo aislado y continuo.

Modo	Modelo Continuo	Modelo Aislado
	Frecuencia [Hz]	Frecuencia [Hz]
1	14.716	14.963
2	15.117	29.765
3	15.687	31.356
4	15.958	47.046
5	21.122	48.963
6	28.301	49.835
7	28.935	52.092
8	29.461	52.807
9	29.897	61.008
10	30.026	61.085
11	30.113	73.922
12	30.449	74.742

Tabla 2.2. Coeficientes de cargas dinámicas (tomado de Bachmann et al., 1995).

Concepto		Correr de una persona
Frecuencia de paso	f_s [Hz]	2.3
Coeficientes de Fourier	α_1	1.6
	α_2	0.7
	α_3	0.2
Ángulo de fase	ϕ_1	0
	ϕ_2	0
	ϕ_3	0

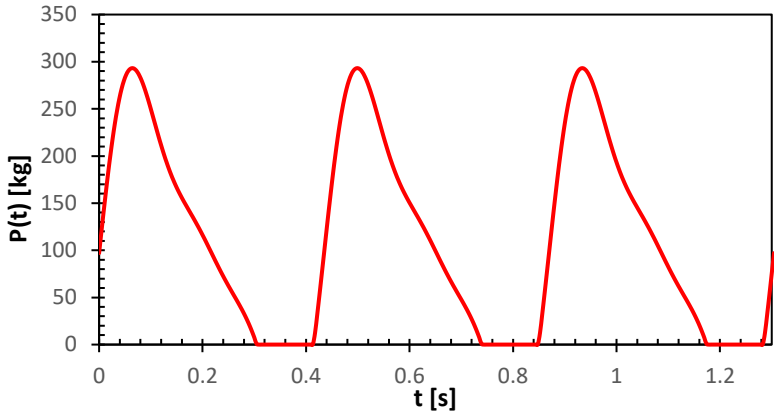


Figura 2.3. Función de carga en 3 ciclos para el correr de una persona.

Las cargas muertas adicionales consideradas en el análisis por efectos de amortiguamiento, conforme a lo mostrado en la Tabla 1.5, se enlistan en la Tabla 2.4. Una vez definida la función de carga y las cargas muertas adicionales en el modelo numérico del sistema aislado se procedió a la revisión de las aceleraciones debido a dicha actividad. Al graficar las aceleraciones con respecto al tiempo correspondientes al nodo de estudio se obtuvo lo mostrado en la Figura 2.4. La diferencia que se tiene en porcentaje de los resultados experimentales para la respuesta máxima en términos de *a/g* con respecto al modelo numérico es del 8%, como se muestra en la Tabla 2.5, y el valor obtenido del a_{rms} es de 28.769 cm/s^2.

Tabla 2.3. Pesos de personas para pruebas experimentales ante actividades humanas (tomado de Caballero, 2020).

Persona	W [kg]
1	74
2	66
3	71
4	79
5	61
6	97
7	77
8	72
9	64
10	60
11	78

Tabla 2.4. Cargas muertas adicionales en losa maciza de concreto reforzado (tomado de Caballero, 2020).

Concepto	W [kg/m^2]
$W_{instalación}$	20
$W_{plafond}$	20
W_{loseta}	20
$W_{oficina}$	30
$W_{adicional}$	90

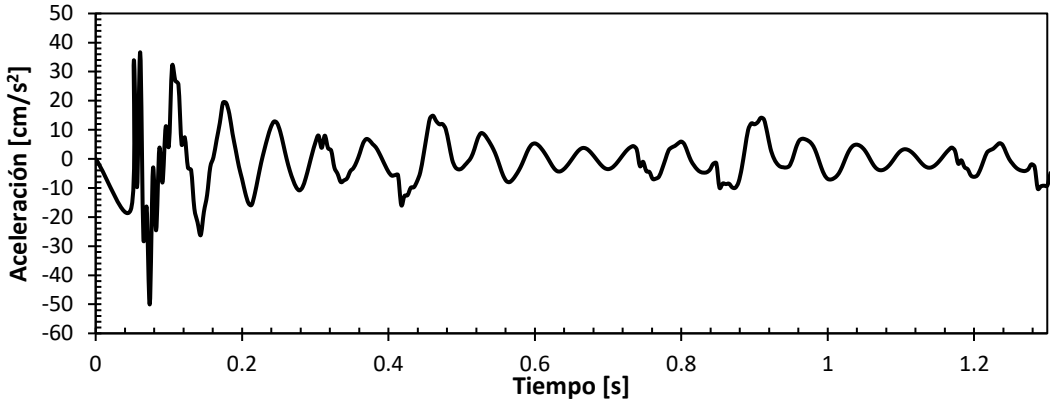


Figura 2.4. Aceleraciones obtenidas del análisis dinámico paso a paso en el nodo central de la losa de concreto reforzado.

Tabla 2.5. Comparación entre solución numérica y experimental debido al correr de una persona.

Tipo de carga	Numérico			Experimental			Diferencia	
	f_n [Hz]	a_{max}/g [%]	a_{max} [cm/s²]	f_n [Hz]	a_{max}/g [%]	a_{max} [cm/s²]	a_{max} [%]	f_n [%]
Correr de una persona	14.96	5.09	49.958	14.06	4.7	46.107	8.0	6.4

Evaluación de la perceptibilidad de vibraciones debido al correr de una persona

AISC (1997)

Teniendo el modelo calibrado con los resultados experimentales presentados en Caballero (2020), se procedió a realizar la evaluación de las aceleraciones máximas (Tabla 2.5) en el nomograma mostrado en la Figura 1.10a, para determinar si la aceleración supera el límite para el uso de oficinas y resulte ser incómodo para sus ocupantes (Figura 2.5). Como se observa, la aceleración máxima obtenida en porcentaje de g debido al correr de una persona en el centro de la losa supera el límite para el uso de oficinas o residencial.

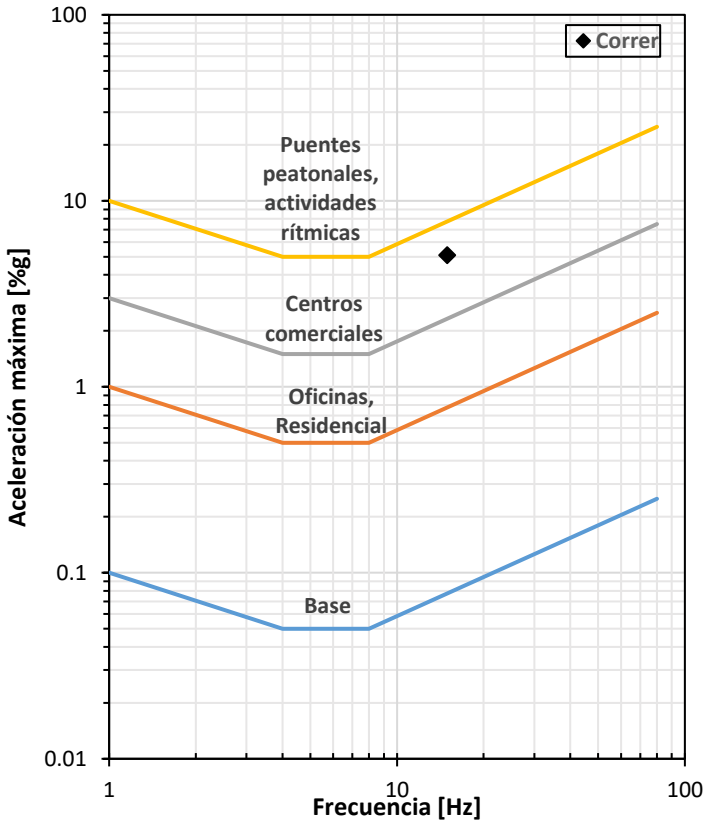


Figura 2.5. Evaluación de aceleración máxima para la función correr de una persona en losa de concreto reforzado.

Utilizando los límites de la Tabla 1.7 se realizó, de igual manera, la evaluación de las aceleraciones máximas, usando la gráfica de la Figura 1.11 y utilizando la aceleración máxima obtenida en porcentaje de la gravedad (Figura 2.6) para evitar problemas de fatiga estructural. Para este caso se observa que, de igual manera a lo mostrado anteriormente, la aceleración supera el límite para el uso de oficinas o residencial.

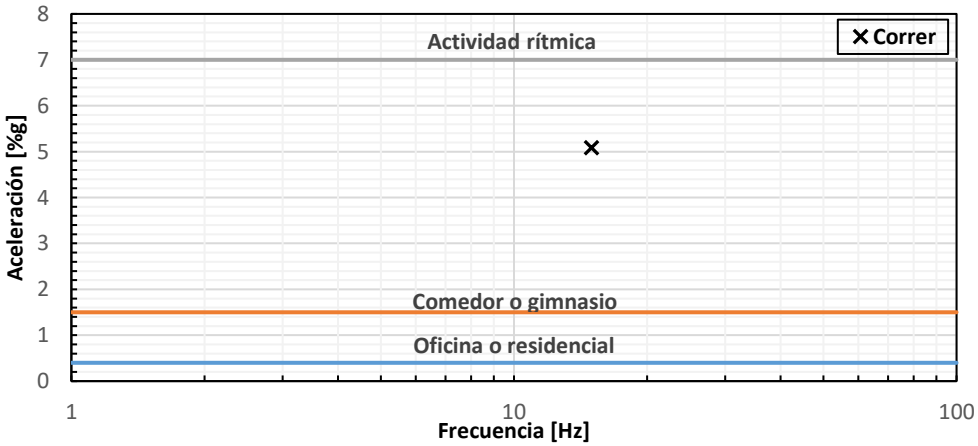


Figura 2.6. Evaluación de aceleraciones límite para el correr de una persona en losa de concreto reforzado para evitar problemas de fatiga estructural.

Es importante señalar que, a pesar de que la aceleración máxima debido a este tipo de actividad supera el límite de uso de oficinas, la cual es poco usual para el uso destinado de la losa de estudio, esta no excede el límite de actividades rítmicas en ambas evaluaciones (Figura 2.5 y Figura 2.6), por lo que no se tendrían problemas de vibración en caso de que el uso de dicha losa llegase a cambiar.

ISO 2631-2 (1989)

El nomograma de la ISO 2631-2 (1989) que se muestra en la Figura 1.10b para la evaluación de aceleraciones límite en términos de *rms*. De acuerdo con la Tabla 1.6 se obtiene que la aceleración con un valor de a_{rms}=28.769 cm/s^2 no supera el límite de 128 veces la curva base, el cual es el límite para el uso de oficinas o industrial y para un tipo de vibración transitoria. Sin embargo, se excede el límite de 4 veces la curva base cuando la vibración es continua.

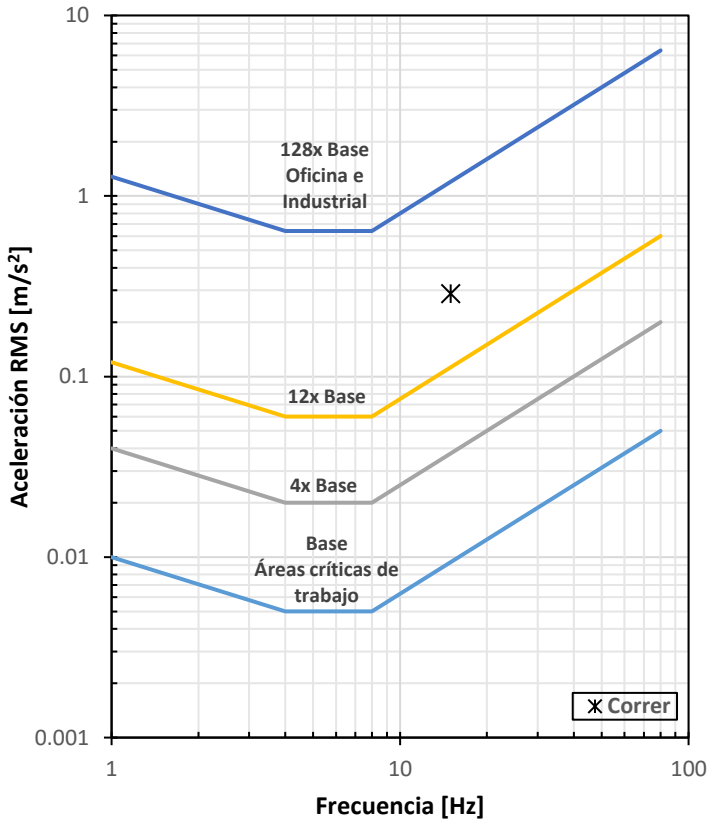


Figura 2.7. Evaluación de aceleración máxima en términos de *rms* para la función correr de una persona en losa de concreto reforzado.

Parámetro *KB*, Bachmann y Ammann (1987)

La frecuencia natural y la aceleración máxima del modelo numérico son f_n=14.963 Hz y la a_{max}=49.411 cm/s^2, respectivamente. Se sustituyen estos valores en la ecuación (1.19) en términos de aceleración para obtener la amplitud máxima del desplazamiento, por lo tanto:

$$d_{max} = \frac{a_{max}}{2\pi f_n{}^2} = \frac{494.411\ mm/s^2}{2\pi(14.963\ Hz)^2} = 0.0565mm$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (1.20) se tiene:

$$KB = d_{max} \cdot \frac{0.8{f_n}^2}{\sqrt{1 + 0.032{f_n}^2}} = 0.0565mm \cdot \frac{0.8(14.963\ Hz)^2}{\sqrt{1 + 0.032(14.963\ Hz)^2}} = 3.543\frac{mm}{s}$$

Se observa que el parámetro KB tiene unidades de velocidad, esto no se menciona en Bachmann y Ammann (1987), ya que este valor es tratado como un parámetro adimensional para realizar la evaluación con lo mostrado en la Tabla 1.8. Evaluando el valor obtenido para el uso de oficinas considerando una vibración transitoria (poco frecuente), y durante el día, ya que la vibración analizada se encuentra actuante en el centro de la losa de estudio, este valor es aceptable siendo menor al valor de 12 mostrado en dicha tabla.

Factor *K*, NTCC-21 (2021)

Para este caso, las NTCC-21 (2021) no proporcionan cómo obtener el desplazamiento *d*; sin embargo, se usa el valor de d_{max} proporcionado por Bachmann y Ammann (1987) con la ecuación (1.19) como se realizó anteriormente. Con dicho valor de desplazamiento, frecuencia natural y aceleración máxima determinados se sustituyen en la ecuación (1.20) con f_0= 10 Hz, por lo tanto:

$$K = \frac{d}{\sqrt{2}}\frac{f^2}{\sqrt[2]{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}} = K = \frac{0.0565mm}{\sqrt{2}}\frac{(14.963\ Hz)^2}{\sqrt[2]{1 + \left(\frac{14.963\ Hz}{10\ Hz}\right)^2}} = 4.972\frac{mm}{s^2}$$

En este caso se observa que las unidades del factor de sensibilidad *K* se encuentra en términos de aceleración, el cual no es mencionado en las NTCC-21 (2021) , y no es congruente con el parámetro KB, el cual está en términos de velocidad. Realizando la evaluación dicho valor para determinar la intensidad perceptible de vibración mostrado en la Tabla 1.9, se determina que la vibración es de clase F, muy fuertemente perceptible.

Evaluando esta actividad con los nomogramas del AISC (1997), la aceleración excede los límites para el uso de oficinas; sin embargo, no excede el límite de actividades rítmicas, por lo que no se tendrían problemas en la losa si se llevase a cabo esta actividad, esto es congruente con el resultado obtenido de la ISO 2631-2 (1989) y el parámetro *KB*; por lo que, el resultado obtenido con el factor *K* en este caso no es congruente con estos tipos de evaluaciones.

2.4 Análisis y evaluación de vibraciones por el salto uniforme de un conjunto de personas

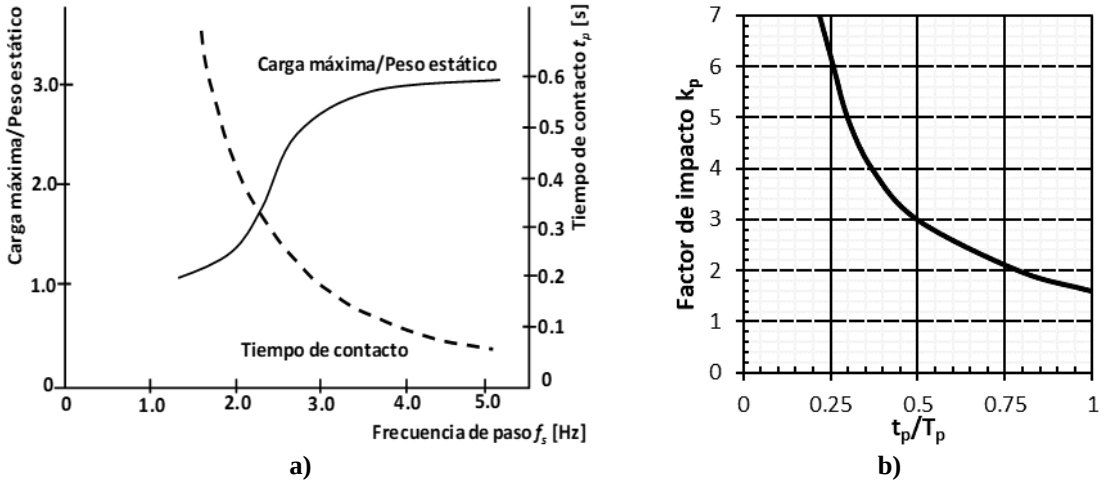
Para modelar este tipo de actividad se consideró la función propuesta por Bachmann y Ammann (1987), la cual representa únicamente una carga máxima mediante una secuencia de pulsos semisinusoidales, *i.e.*:

$$F_P(t) = \begin{cases} k_p G sen\left(\pi\ {}^{t}/_{t_p}\right) & si\ t \le t_p \\ 0 & si\ t_p < t \le T_p \end{cases} \qquad (2.2)$$

donde:

$F_{P,max}$= carga dinámica máxima
G= peso de la persona [kgf]
k_p= $F_{P,max}(t)/G$ = factor de impacto dinámico
t_p= tiempo de con tacto [s]
T_p= $1/f_s$= periodo de ritmo [s]
f_s= frecuencia del salto [Hz]

El valor del tiempo de contacto (t_p) es de 0.18 s, obtenido del promedio de valores experimentales para un cierto tiempo de contacto y frecuencia de paso de acuerdo con Bachmann y Ammann (1987) (Figura 2.8a); f_s es igual a 3 Hz (Bachmann *et al.*, 1995). Con dicho valor de f_s se obtienen resultados más conservadores, ya que el modelo semisinusoidal produce un factor de impacto 30% mayor; el factor k_p se obtiene a partir de la relación de t_p/T_p, como se muestra en la Figura 2.8b, de la cual se obtiene un valor de k_p= 4.5 aproximadamente. Sin embargo, de acuerdo con pruebas experimentales, este valor se encuentra entre 6 y 7, por lo que se utilizan valores de k_p= 4.5, 6 y 7 para comparar las aceleraciones calculadas numéricamente con las experimentales (Bachmann y Ammann, 1987).



a) **b)**

Figura 2.8. a) Tiempo de contacto y carga máxima en función de la carga estática y la frecuencia del paso, b)Factor de impacto dinámico en función de la relación del tiempo de contacto (tomado de Bachmann y Ammann, 1987).

Con lo definido anteriormente, se asignaron los pesos de las personas 1, 3, 8 y 9 enlistadas en la Tabla 2.3, modelando 4 funciones de carga para representar el salto uniforme (Figura 2.9). La zona de aplicación de estas cargas se realizó como se observa en la Figura 2.10.

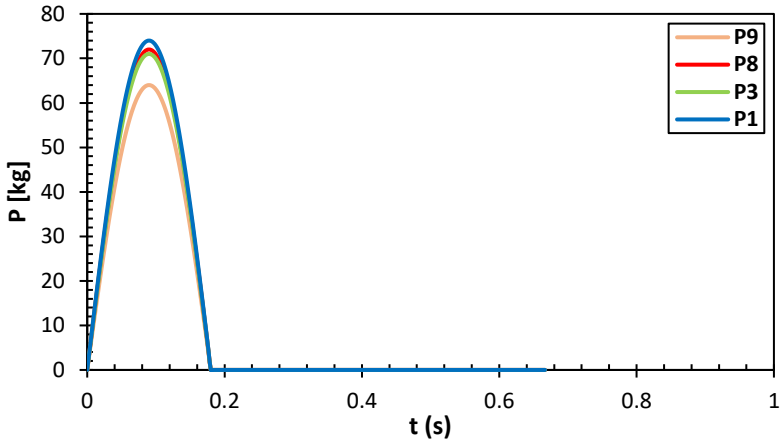


Figura 2.9. Funciones de carga para el salto uniforme de un conjunto de 4 personas sin factor k_p.

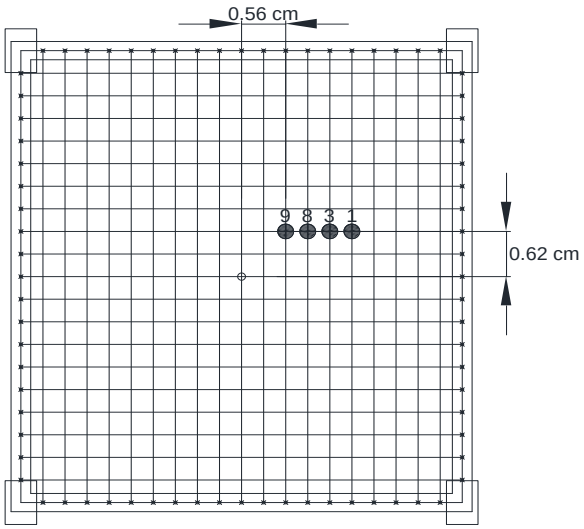


Figura 2.10. Zona de aplicación de cargas para el salto uniforme de un conjunto de 4 personas.

Para el modelo se usaron las características geométricas y propiedades mecánicas de la losa indicados en la sección 2.2, con una relación de amortiguamiento ξ de 0.05, conforme a la Tabla 1.5. Las aceleraciones experimentales reportadas por Caballero (2020) se compararon con las aceleraciones calculadas numéricamente. En la Figura 2.11 se presentan las aceleraciones obtenidas para valores de $k_p = 4.5$, 6 y 7, obteniendo aceleraciones máximas de 55.85 cm/s^2, 74.46 cm/s^2 y 86.87 cm/s^2, respectivamente. En la Tabla 2.6 se enlistan los valores obtenidos experimental y numéricamente, tomando el valor de aceleración mayor con $k_p = 7$, se tiene una diferencia del 29.7% con respecto a la aceleración experimental. A pesar de que exista una diferencia significativa con respecto a los resultados experimentales, es posible utilizar esta función para modelar el salto uniforme de un conjunto de personas y tener una aproximación de la respuesta dinámica, considerando un valor más alto de k_p, ya que este valor es el que define la respuesta máxima para la función mostrada en la ecuación (2.2).

Tabla 2.6. Comparación entre solución numérica y experimental debido al salto uniforme de un conjunto de 4 personas.

Tipo de carga	Numérico			Experimental			Diferencia	
	f_n [Hz]	a_{max}/g [%]	a_{max} [cm/s^2]	f_n [Hz]	a_{max}/g [%]	a_{max} [cm/s^2]	a_{max} [%]	f_n [%]
Salto uniforme de un conjunto de personas	14.96	8.9	86.87	14.06	12.6	123.6	29.7	6.4

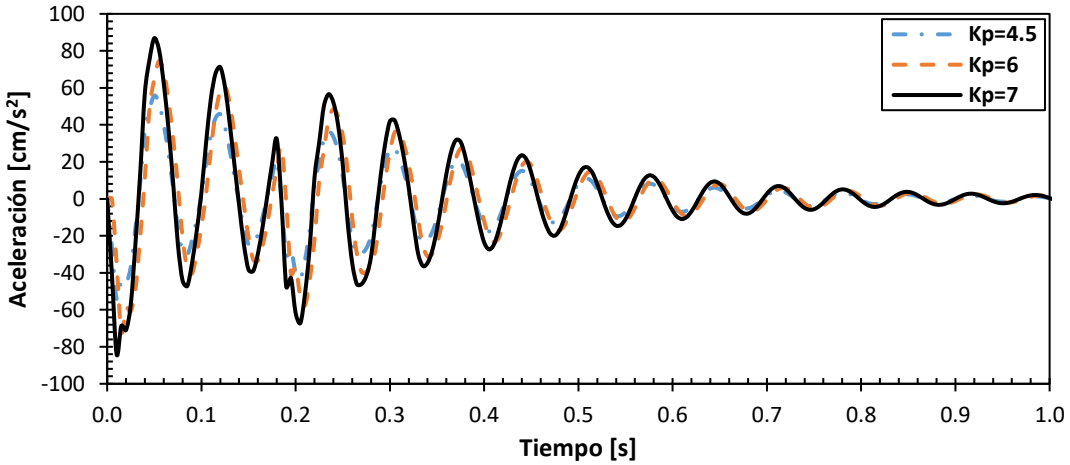


Figura 2.11. Registro de aceleraciones obtenidas en el análisis paso a paso para el salto uniforme de un conjunto de personas con distintos valores de k_p.

Evaluación de la perceptibilidad de vibraciones debido al salto uniforme de un conjunto de personas

AISC (1997)

De manera similar a como se realizó la evaluación con la función correr de una persona en el apartado 2.1.1; y con los nomogramas de las Figuras 1.10a y 1.11, se realizó la evaluación con la aceleración máxima numérica obtenida en la Tabla 2.6. Se observa que las aceleraciones máximas registradas en el centro de la losa son mayores al límite para uso de oficinas y actividades rítmicas en el sistema de piso de estudio, por lo que el sistema de piso es susceptible a vibraciones incómodas.

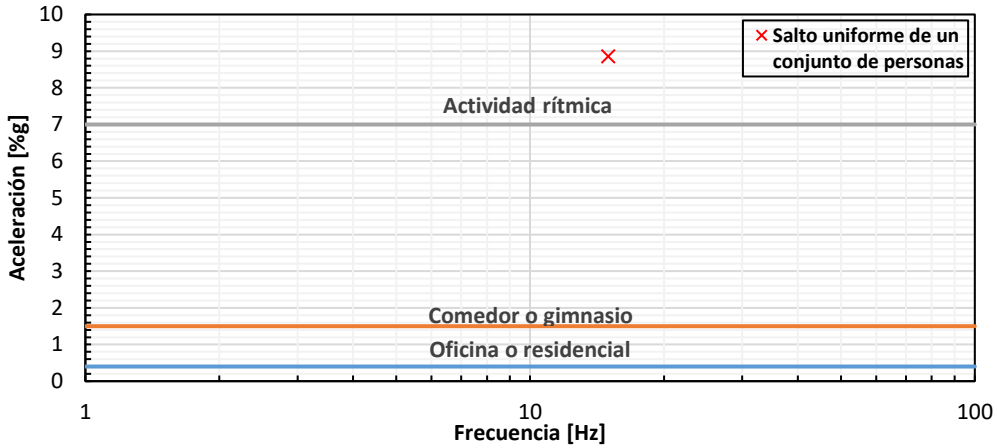


Figura 2.12. Evaluación de aceleraciones límite para el salto uniforme de un conjunto de personas en losa de concreto reforzado para evitar problemas de fatiga estructural.

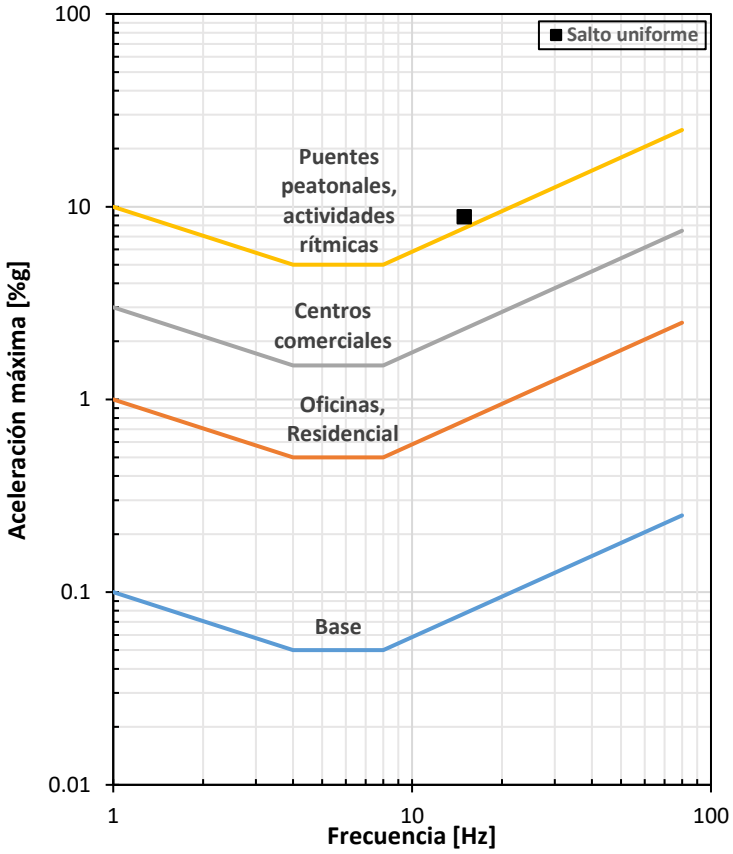


Figura 2.13. Evaluación de aceleración máxima para la función salto uniforme de un conjunto de personas en losa de concreto reforzado.

ISO 2631-2 (1989)

Evaluando en el nomograma de la Figura 1.10b, el valor obtenido de a_{rms} para un ciclo, 27.43 cm/s^2, no supera el límite de aceleraciones cuadráticas medias para vibraciones transitorias para el uso de oficinas (Tabla 1.6) durante el día o la noche. Sin embargo, se supera el límite para una vibración continua y con un uso de oficina.

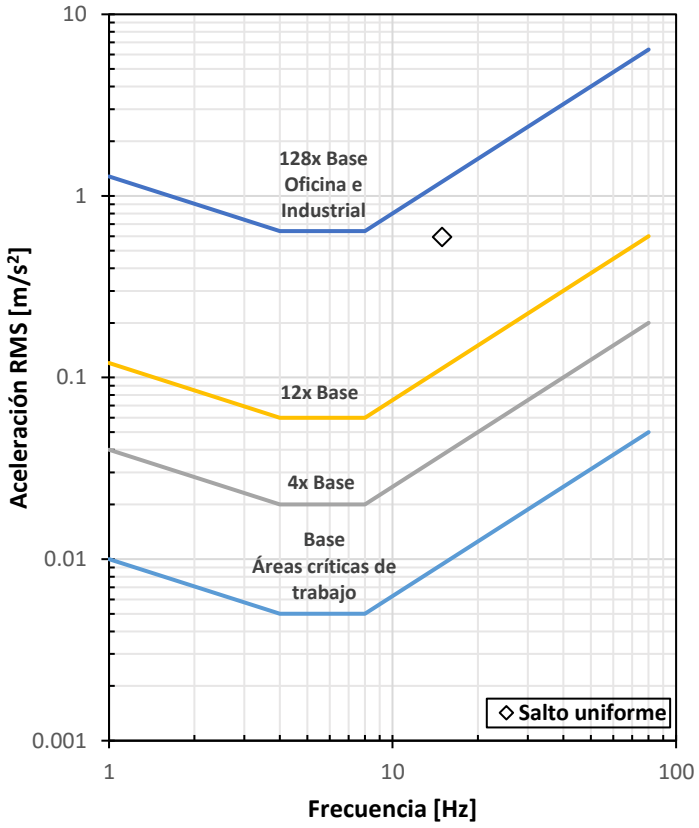


Figura 2.14. Evaluación de aceleración máxima en términos de rms para la función salto uniforme de un conjunto de personas en losa de concreto reforzado.

Parámetros *KB* (Bachmann y Ammann, 1987) y factor *K* (NTCC-21, 2021)

Con la f_n y la a_{max} obtenido del valor numérico con el factor de impacto $k_p = 7$, se evaluó la función con las ecucación (1.19) y (1.20) siguiendo el procedimiento mostrado detalladamente con la función correr de una persona, se obtienen los valores de K y KB mostrados en la Tabla 2.7.

Tabla 2.7. Obtención de parámetros KB (Bachmann y Ammann, 1987) y K (NTCC-21, 2021) para el salto uniforme de un conjunto de personas.

Tipo de evaluación	f_n [Hz]	a_{max} [cm/s^2]	d_{max} [mm]	f_{10} [Hz]	K [mm/s^2]	KB [mm/s]	Percepción Humana
NTCC-21 (2021)	14.96	86.87	0.1	10	8.65	-	Muy fuertemente perceptible
Bachmann y Ammann (1987)				-	-	6.16	Aceptable

Evaluando el parámetro *K*, se determina que la vibración es de clase F, y es muy fuertemente perceptible de acuerdo con la Tabla 1.9 (NTCC-21, 2021). En el caso del parámetro *KB*, evaluando el valor obtenido para el uso de oficinas, considerando una vibración transitoria (poco frecuente) y durante el día, ya que la vibración analizada se encuentra actuante en el centro de la losa de estudio, este valor es aceptable, siendo menor al valor de 12, el cual se muestra en la Tabla 1.8.

Para este tipo de carga, con la evaluación del parámetro *KB* y el nomograma de la ISO 2631-2 (1989), la vibración es aceptable; sin embargo, con el parámetro *K* y los nomogramas del AISC (1997) se determina que la vibración no es aceptable. Al sobrepasar los límites de vibración en específico en el nomograma de la Figura 2.12, el cual indica los límites para evitar problemas de fatiga, los resultados obtenidos con el parámetro *K* únicamente en este caso concuerda, ya que el valor de la aceleración es alto.

2.5 Análisis y evaluación de vibraciones por el balanceo de un conjunto de personas

Caballero (2020) realizó pruebas experimentales debido a este tipo de actividad humana con una densidad de 3-4 personas/m^2 y obteniendo una aceleración máxima de 12.75 cm/s^2. Posteriormente, se realizó el modelo numérico con la losa de estudio, usando la ecuación (1.16), los coeficientes de Fourier y la densidad de personas mostrados en la Tabla 1.3 (Bachmann et al., 1995). El valor del peso es de 72.64 kg, el cual es el promedio de los pesos registrados en la Tabla 2.3; para calibrar el modelo con los resultados experimentales se consideraron ambas densidades de personas para la actividad (Tabla 1.3) y se usaron los coeficientes de Fourier y frecuencia de paso mostrados en la Tabla 2.8.

Tabla 2.8. Parámetros de la función para el balanceo de un conjunto de personas.

Tipo de actividad	Coeficientes de Fourier y ángulos de desfasamiento						Frecuencia de paso
Balanceo de un conjunto de personas	α_1	α_2	α_3	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	f_s [Hz]
	0.5	0	0	0	0	0	0.6

Con la función de la ecuación (1.16) y los parámetros definidos se realizó un primer análisis para obtener la aceleración máxima aplicando la carga distribuida como se muestra en la Figura 2.16; sin embargo, las aceleraciones fueron mayores con respecto a los resultados obtenidos del modelo experimental. Dicha ecuación está compuesta por la carga estática correspondiente al peso de la persona y una combinación de fuerzas armónicas dependientes del tiempo de aplicación representado por series de Fourier; por lo que se realizó un análisis idealizado como un sistema de un grado de libertad (Figura 2.15), para revisar la contribución de esta carga estática en la función específicamente para este tipo de actividad y así reducir el valor de la aceleración máxima obtenida.

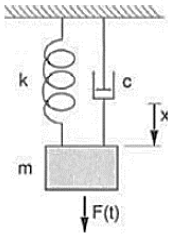


Figura 2.15. Idealización de la losa como un sistema de un grado de libertad para el cálculo de la aceleración.

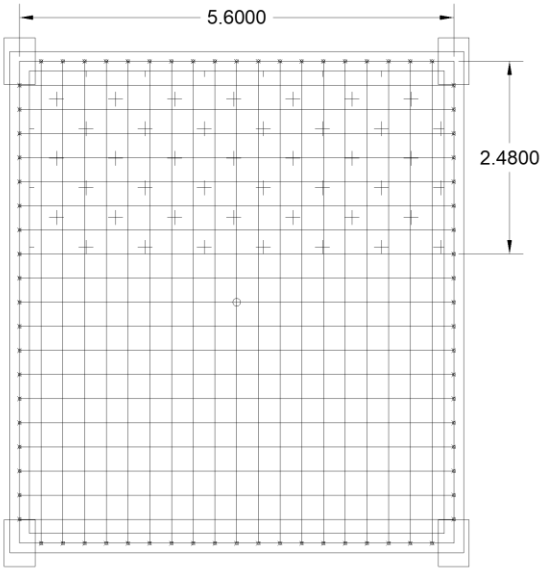


Figura 2.16. Zona de aplicación de la carga para el balanceo de un conjunto de personas.

Analizando el sistema en base al desplazamiento estático causado por *m* y el desplazamiento dinámico causado por *F(t)*, que en este caso se refiere a la función que caracteriza la actividad humana (ec. 1.16), se obtiene la ecuación de equilibrio siguiente:

$$k\left(u_{est,m} + u_{est,p} + \bar{u}\right) + m\ddot{u} + c\dot{u} - mg - F(t) = 0 \ ;$$

$$\text{con: } ku_{est,m} = W;\ ku_{est,p} = w_p \ ;$$

$$W + w_p + k\bar{u} + m\ddot{u} + c\dot{u} - W - F(t) = 0 \ ;$$

$$W + w_p + k\bar{u} + m\ddot{u} + c\dot{u} - W - \left[w_p + \sum_{i=1}^{n} w_p \alpha_i sen[2\pi i f_s t - \phi_i]\right] = 0 \ ;$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} w_p \alpha_i sen[2\pi i f_s t - \phi_i] \qquad (2.3)$$

donde

m=	masa del sistema
$\ddot{u}$=	aceleración
c=	coeficiente de amortiguamiento
$\dot{u}$=	velocidad
k=	rigidez del resorte
$\bar{u}$=	desplazamiento dinámico
W=	peso del sistema
w_p=	peso de la persona por unidad de área
$u_{est,m}$=	desplazamiento estático causado por el sistema
$u_{est,p}$=	desplazamiento estático causado por el peso de la persona

De acuerdo con la ecuación (2.3), el peso estático en el primer término de la ecuación (1.16) se equilibra con el peso del sistema más el peso de la persona cuando se encuentra en la losa estáticamente, por lo que es posible descartar el primer término de la ecuación (1.16), ya que la función que representa este tipo de actividad está dada por la ecuación (2.4). Dicha función en conjunto con la propuesta por Bachmann et al. (1995) se analizarán en el modelo numérico y las aceleraciones obtenidas se comparan con las experimentales obtenidas por Caballero (2020).

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} w_p \alpha_i sen[2\pi i f_s t - \phi_i] \tag{2.4}$$

Se construyeron las funciones para ambos casos, sin considerar el peso de la persona por unidad de área, ya que es la variable que se modifica para cada densidad de persona y función, según sea el caso. En la Figura 2.17 se muestran las funciones para tres ciclos, en la Figura 2.17a si se considera la contribución del peso de la persona estático (ec. 1.16) la función inicia en el valor de uno, por lo que durante el análisis el programa inicia con el 100% de la carga de la persona y la mantiene constante en cada paso de carga. En el caso de la función de la ecuación (2.4), representado en la Figura 2.17b, la función inicia en cero, por lo que no se inicia la función con un máximo de carga.

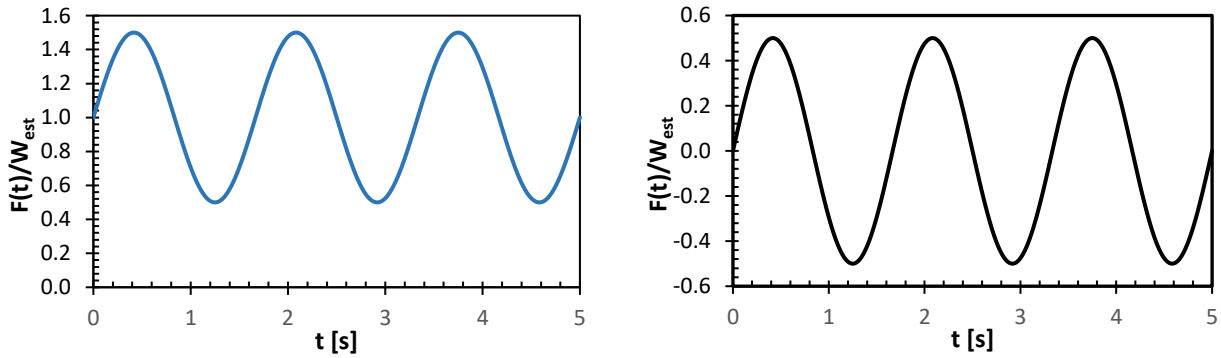
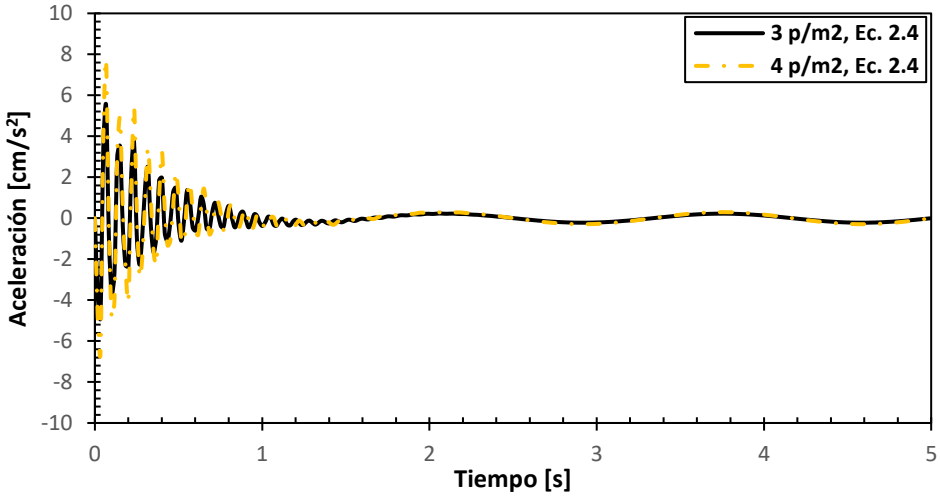
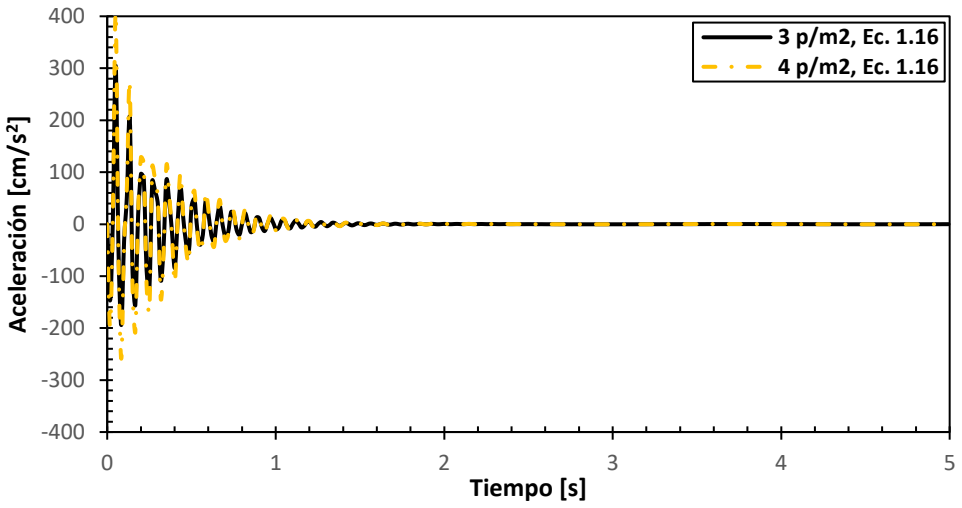


Figura 2.17. Funciones unitarias para el balanceo de un conjunto de personas: a) ec. (1.16) y b) ec. (2.4).





b)

Figura 2.18. Aceleraciones obtenidas debido al balanceo de un conjunto de personas: a) ec. (2.4) y b) ec. (1.16).

Las aceleraciones obtenidas para cada ecuación y densidad de personas se muestran en la Figura 2.18, donde se observa la respuesta de la estructura en el estado forzado debido a la carga de excitación previo a $t = 1$ y transitoria posterior al mismo instante de tiempo debido al amortiguamiento del sistema. Para ambas respuestas se tiene una diferencia considerable en cuanto a los máximos de cada ciclo para las distintas densidades de personas utilizados. En la Figura 2.18a, que corresponde a los resultados obtenidos con la ecuación (2.4), se obtuvieron aceleraciones máximas con una densidad de 3 y 4 personas/m^2 con una diferencia con respecto a la medición experimental del 57% y 40%, respectivamente. En la Figura 2.18b, correspondiente a la ecuación (1.16), se obtuvieron aceleraciones 20 y 30 veces mayores con respecto a la aceleración experimental para cada valor de densidad de personas, respectivamente. Los resultados obtenidos con una densidad de 4 personas/m^2 se utilizará para la evaluación con los umbrales de comodidad, ya que el porcentaje de diferencia es menor con respecto a la aceleración experimental. Los resultados resumidos se enlistan en la Tabla 2.9.

Tabla 2.9. Frecuencias y aceleraciones máximas obtenidas de cada modelo numérico y experimentalmente.

Tipo de carga: Salto uniforme de un conjunto de personas				
Descripción	**Densidad [p/m^2]**	**f_n [Hz]**	**a_{max} [cm/s^2]**	**a_{max}/g [%]**
Experimental	3-4	14.060	12.75	1.3
Modelo Numérico con ecuación (1.16)	3	14.963	305.11	31.1
	4	14.963	406.81	41.5
Modelo Numérico con ecuación (2.4)	3	14.963	5.52	0.6
	4	14.963	7.69	0.8

Evaluación de la perceptibilidad de vibraciones debido al balanceo de un conjunto de personas

AISC (1997)

Evaluando la aceleración máxima en los nomogramas de las Figuras 2.19 y 2.20, se observa que con el valor de $a_{max}/g = 0.8\%$ obtenido del modelo numérico con la ecuación (2.4) es posible tener problemas de fatiga, ya que se supera el límite; sin embargo, no se excede el límite de aceleración para actividades rítmicas (Figura 2.20).

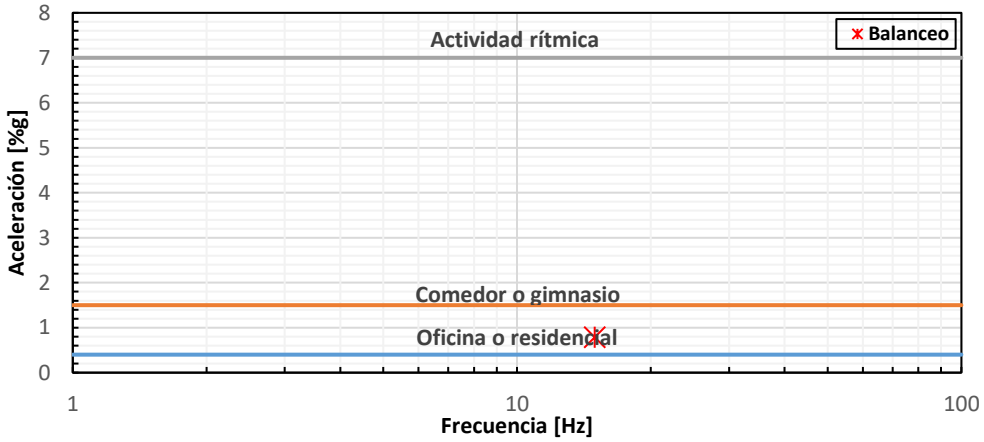


Figura 2.19. Evaluación de aceleraciones límite para el balanceo de un conjunto de personas en losa de concreto reforzado para evitar problemas de fatiga estructural.

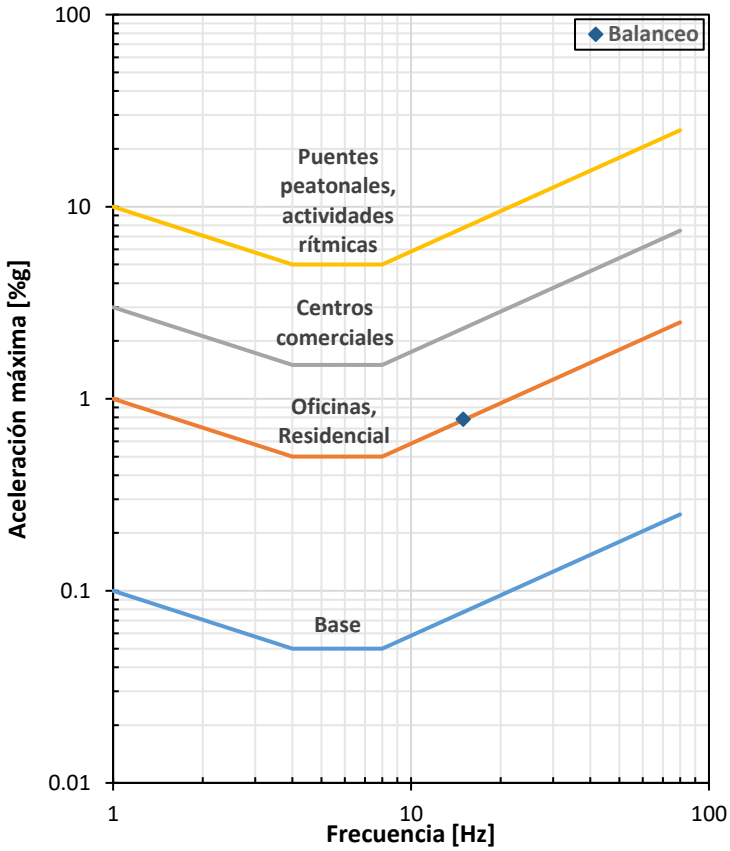


Figura 2.20. Evaluación de aceleración máxima para la función balanceo de un conjunto de personas en losa de concreto reforzado.

ISO 2631-2 (1989)

El valor obtenido de a_{rms} para un ciclo es de 5.272 cm/s^2, evaluando dicho valor y la frecuencia natural del sistema se observa que la aceleración está por debajo de 128 veces la curva base, de acuerdo con la Tabla 1.6, corresponde al límite de aceleraciones para el uso de oficinas y vibraciones transitorias. Sin embargo, se excede el límite de 4 veces la curva base cuando la vibración es continua.

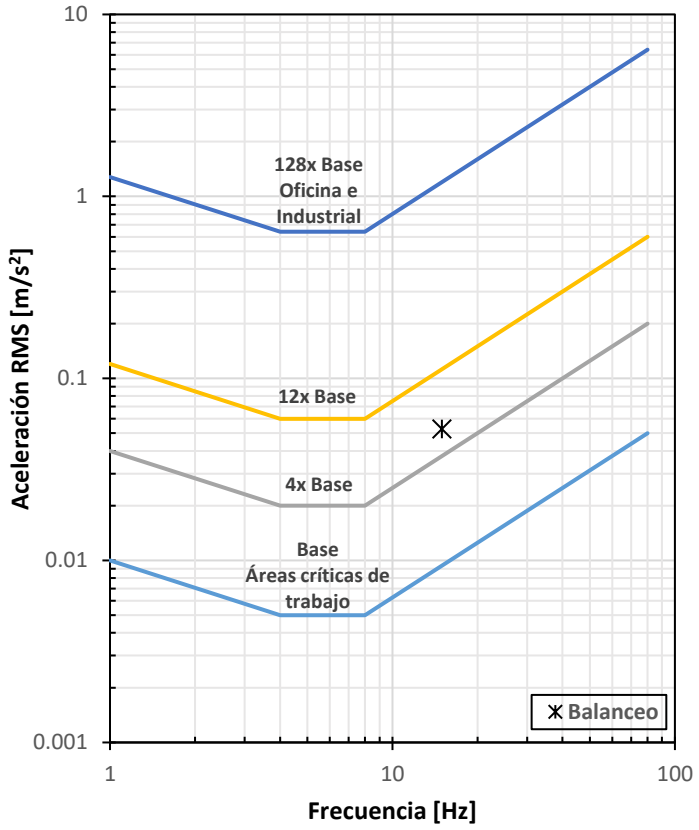


Figura 2.21. Evaluación de aceleración máxima en términos de rms para la función balanceo de un conjunto de personas en losa de concreto reforzado.

Parámetro *KB* (Bachmann y Ammann, 1987) y factor *K* (NTCC-21, 2021)

Con la aceleración máxima obtenida de la ecuación (2.4) y para una densidad de 4 personas/m^2, se obtuvieron los resultados enlistados en la Tabla 2.10. Con los límites de *K* de la Tabla 1.9, se determina que la vibración es tipo D, fácilmente perceptible. En el caso del *KB*, con los límites mostrados en la Tabla 1.8, se determina que la vibración no excede el límite para el uso de oficinas durante el día.

Tabla 2.10. Obtención de parámetros KB (Bachmann y Ammann, 1987) y K (NTCC-21, 2021) para el balanceo de un conjunto de personas.

Tipo de evaluación	f_n [Hz]	a_{max} [cm/s^2]	d_{max} [mm]	f_{10} [Hz]	K [mm/s^2]	KB [mm/s]	Percepción Humana
NTCC-21 (2021)	14.96	7.69	0.0087	10	0.765	-	Fácilmente perceptible
Bachmann y Ammann (1987)				-	-	0.001	Aceptable

Para este tipo de actividad se recomienda el uso de la ecuación (2.4), la cual no considera el peso estático, esto para tener aceleraciones más realistas; ya que las aceleraciones obtenidas con la ecuación (1.16), que es la propuesta por Bachmann et al. (1995), son considerablemente mayores con respecto a las experimentales obtenidas por Caballero (2020).

Con respecto a los resultados obtenidos en las evaluaciones, en los nomogramas del AISC (1997) se tiene como resultado que las vibraciones desarrolladas en el sistema de piso pueden ser incómodas para sus ocupantes además de que podría ocasionar problemas de fatiga. Con el nomograma de la ISO 2631-2 (1989) y el parámetro *KB*, se tiene como resultado que no se tienen problemas con la vibración. Para este tipo de actividad, con el valor del factor *K* no se determina si se tendrán problemas a largo plazo, ya que únicamente se determina que la vibración es fácilmente perceptible, por lo que es recomendable evaluar esta actividad con el nomograma de la Figura 2.19, propuesto en el AISC (1997).

2.6 Análisis y evaluación de vibraciones por el caminar de una persona

Para representar el caminar humano en un modelo numérico, se propuso aplicar una carga puntual mediante una función de carga dinámica considerando el peso de la persona, en este caso se aplicó la carga puntual en el centro de la losa de estudio para obtener las aceleraciones correspondientes a este tipo de actividad. En esta investigación, se evaluaron cuatro funciones de carga para modelar el caminar humano (Tabla 2.11) las cuales se definen en la sección 1.1.2. Los coeficientes dinámicos de las funciones [1-3] son los definidos en el AISC (1997), los cuales se enlistan en la Tabla 2.12. En la función [4], los coeficientes para cada armónico se obtuvieron con lo obtenido experimentalmente por Rainer et al. (1986) conforme a lo mostrado en la Figura 2.22. Los ángulos de fase de la función [2] son los definidos en Bachmann et al. (1995), ya que en el manual del AISC (1997) no se tienen definidos dichos valores; para la función [3], la cual es la misma ecuación que la función [2], se decidió usar los valores propuestos por Mello et al. (2008), conforme a la Tabla 2.13, ya que se busca analizar el uso de distintos ángulos de fase para una misma ecuación y su influencia en las aceleraciones obtenidas en el modelo numérico; los mismos valores de ángulos de fase se aplicaron para la función [4], ya que en Rainer et al. (1986) no se definen estos valores. Para cada función se consideró el peso de la persona 6, conforme a la Tabla 2.3, con una frecuencia de paso $f_s = 2.1\ Hz$ de acuerdo con lo reportado por Caballero (2020).

Una vez definidas las funciones (Figura 2.23), se obtendrán las aceleraciones máximas de cada función y se compararán con las aceleraciones máximas experimentales obtenidas por Caballero (2020), para determinar qué función es la que representa mejor el caminar humano.

Tabla 2.11. Coeficientes y ángulos de fase de cargas dinámicas para el caminar humano.

Concepto		[1] Ec. (1.15) (AISC, 1997)	[2] Ec. (1.14) (AISC, 1997)	[3] Ec. (1.14) (AISC, 1997)	[4] Ec. (1.16) (Rainer, 1986)
Frecuencia de paso	f_s [Hz]	2.1	2.1	2.1	2.1
Coeficiente dinámico	α_1	0.5	0.5	0.5	0.41
	α_2	-	0.2	0.2	0.1
	α_3	-	0.1	0.1	0.1
	α_4	-	0.05	0.05	0.05
Ángulo de fase	ϕ_1	-	0	0	0
	ϕ_2	-	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$
	ϕ_3	-	$\pi/2$	π	π
	ϕ_4	-	$\pi/2$	$3\pi/2$	$3\pi/2$

Tabla 2.12. Frecuencias forzadas (f) y coeficientes dinámicos (α_i) (tomado del AISC, 1997).

Armónico *i*	Caminar humano		Clase de aerobics		Baile grupal	
	f [Hz]	α_i	*f* [Hz]	α_i	*f* [Hz]	α_i
1	1.6-2.2	0.5	2-2.75	1.5	1.5-3	0.5
2	3.2-4.4	0.2	4-5.5	0.6	-	-
3	4.8-6.6	0.1	6-8.25	0.1	-	-
4	6.4-8.8	0.05	-	-	-	-
***coeficiente dinámico = carga sinusoidal máx/peso de persona(s)**						

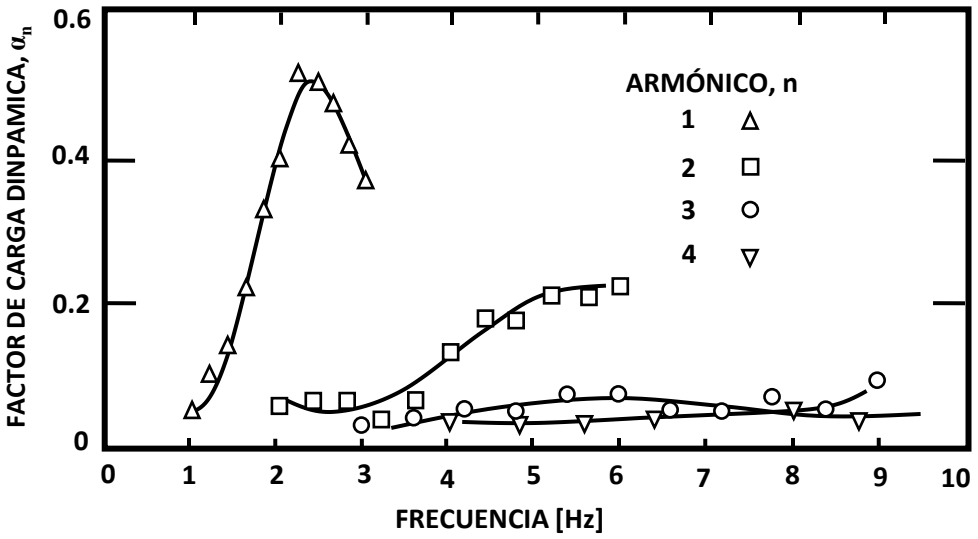


Figura 2.22. Coeficientes dinámicos promedio para el caminar humano (tomado de Rainer et al., 1986).

Tabla 2.13. Frecuencias forzadas (f_s) y coeficientes dinámicos (α_i) (tomado de Mello et al., 2008).

Armónico *i*	Caminar humano			
	f_s [Hz]	α_i	Φ	
			LM-II y LM-III	LM-IV
1	1.6-2.2	0.5	0	0
2	3.2-4.4	0.2	$\pi/2$	$\pi/2$
3	4.8-6.6	0.1	$\pi/2$	π
4	6.4-8.8	0.005	$\pi/2$	$3\pi/2$

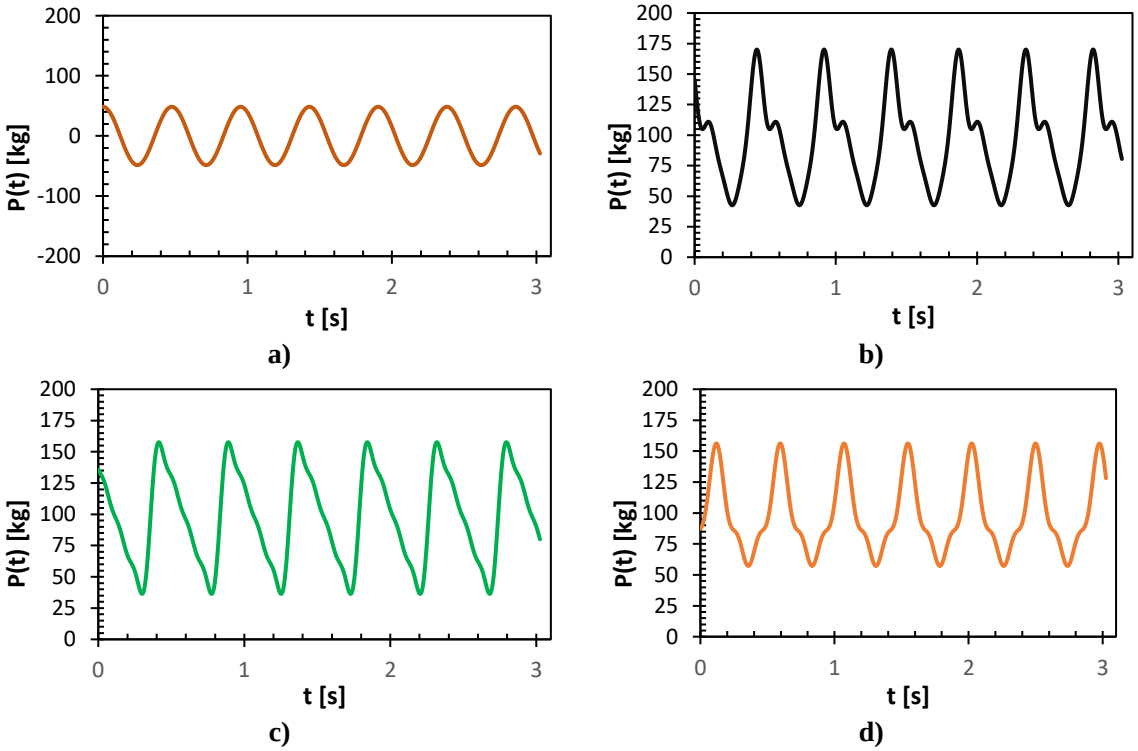


Figura 2.23. Funciones de carga para representar el caminar humano: a) función [1], b) función [2], c) función [3] y d) función [4].

Para cada función se registraron las aceleraciones en el centro de la losa, donde se aplicó la carga dinámica puntual, realizando un análisis dinámico paso a paso con las propiedades del modelo numérico $f_s = 14.963\ Hz$ y $\xi = 0.05$. El registro de aceleraciones numéricas obtenido se muestra en la Figura 2.24, donde se observa que las aceleraciones menores se obtuvieron con la función [1], dada por la ecuación (1.15) (Figura 2.24a) y las aceleraciones mayores con la función [2], dada por la ecuación (1.14) (Figura 2.24b). Como se mencionó anteriormente, se realizó una comparativa de las aceleraciones obtenidas en el modelo numérico con el registro de aceleraciones experimentales obtenido por Caballero (2020), donde se obtuvieron dos mediciones de aceleraciones mediante un sensor ubicado en el centro de la losa de la Figura 2.1, debido al caminar de una persona. Para cada medición se obtuvo la aceleración máxima registrada en la parte estable y la aceleración cuadrática media; se obtuvieron ambas variables de igual manera para obtener un porcentaje de diferencia y se graficaron el registro de las aceleraciones numéricas con las experimentales, para observar qué función se asemeja más con ambas mediciones experimentales. En el caso de la función [1] se obtuvo una diferencia del 2% y 1% con respecto a la medición experimental 1 para la aceleración máxima y aceleración cuadrática media, respectivamente, y del 39% y 25% para la medición experimental 2. La función [2] tiene una diferencia mayor, para la medición uno con un 48% y 110% para la medición dos; la función [3] con una diferencia del 29% para la medición uno y 82% para la medición dos; y la función [4] con una diferencia del 27% para la medición uno y 79% para la medición dos, todos estos porcentajes de diferencia son con respecto a la aceleración máxima (ver Tabla 2.14). Graficando ambas mediciones experimentales y superponiendo el registro de aceleraciones obtenido para la función [1] (Figura 2.25), es claro que la función se asemeja más a la medición uno, donde se obtuvo un menor porcentaje de diferencia en cuanto a aceleraciones máximas y aceleraciones cuadráticas medias obtenidas, por lo que se concluye que esta función es la que mejor representa el caminar humano y haciendo uso de un solo armónico como se estipula en el manual del AISC (1997), donde

se menciona lo siguiente: *"sólo es necesario usar un armónico para definir la función con la ecuación (1.15), ya que todas las demás vibraciones armónicas son pequeñas en comparación con el armónico asociado a la resonancia"*. Caso contrario a las otras funciones, donde es necesario cuatro armónicos para definir las funciones que representarán el caminar humano y donde se obtienen valores de carga mayores, como se observa en la Figura 2.23, estos los valores máximos rondan los 150 kg, mientras que para la función [1] es de aproximadamente 50 kg.

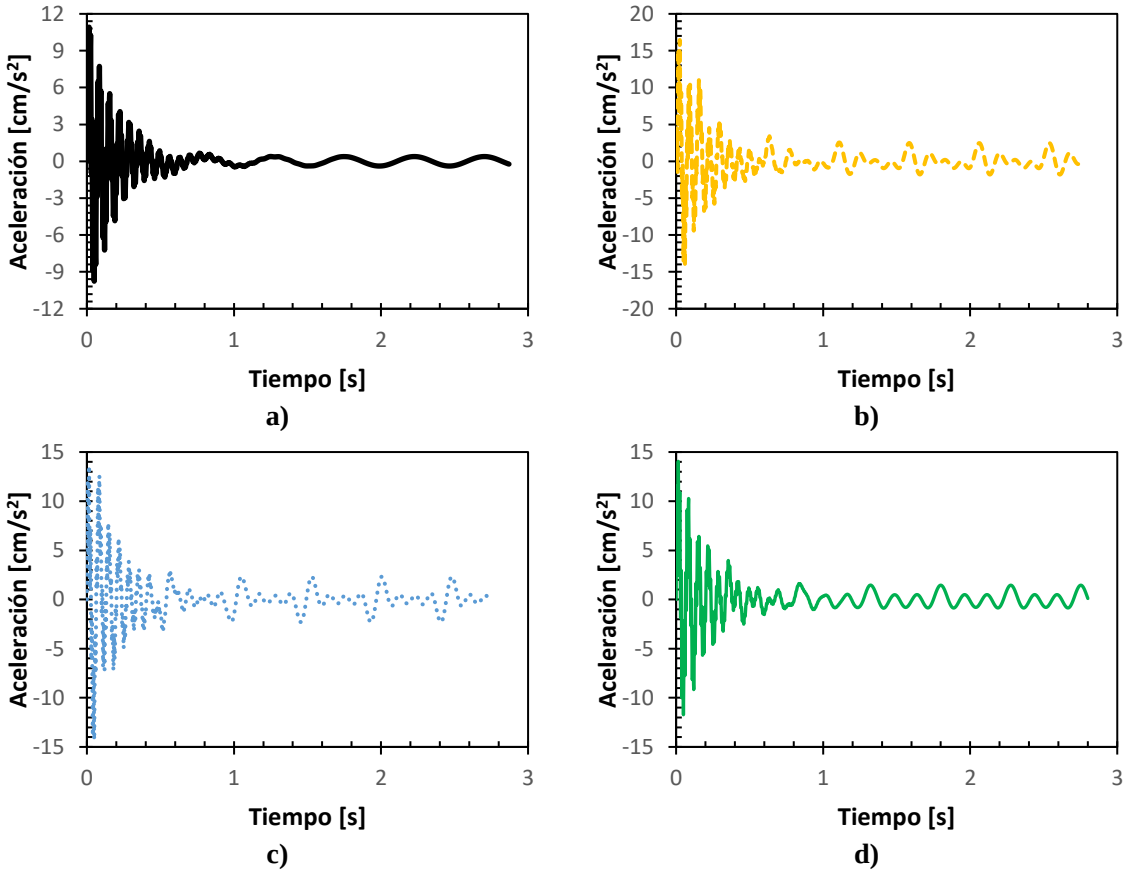


Figura 2.24. Registro de aceleraciones para cada función debido al caminar humano: a) función [1], b) función [2], c) función [3] y d) función [4].

Tabla 2.14. Aceleraciones debido al caminar humano experimentales y numéricas.

Descripción	Experimental		Numérico			
	Medición 1	Medición 2	[1] Ec. (1.15)	[2] Ec. (1.14)	[3] Ec. (1.14)	[4] Ec. (1.16)
a_{max} [cm/s^2]	11.1	7.84	10.92	16.47	14.28	14.06
a_{rms} [cm/s^2]	7.28	5.75	7.21	10.43	9.43	8.53

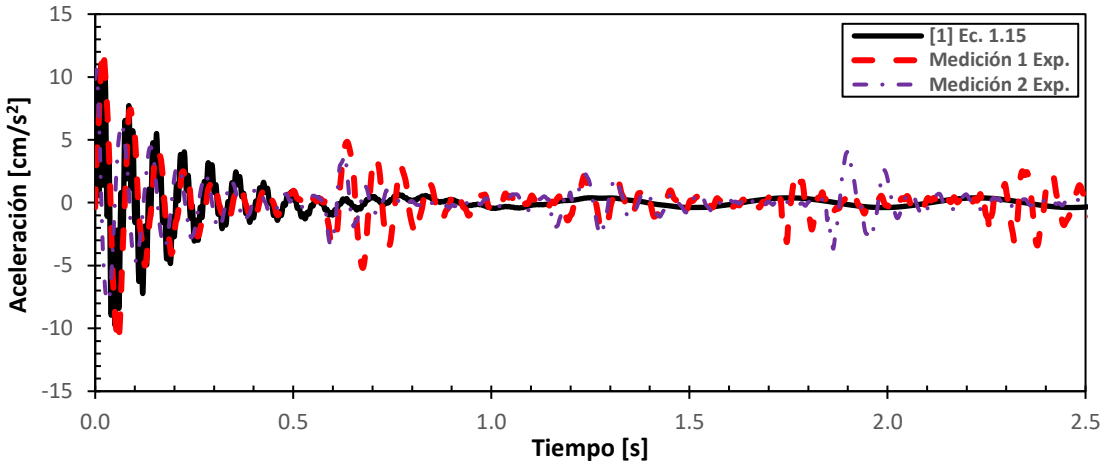


Figura 2.25. Registro de aceleraciones obtenidas numérica y experimentalmente por el caminar humano.

Evaluación de la perceptibilidad de vibraciones debido al caminar de una persona

Para la evaluación de este tipo de actividad, se consideró únicamente las aceleraciones numéricas obtenidas con la función [1], ya que es la que se aproxima más a las aceleraciones experimentales obtenidas por Caballero (2020).

AISC (1997)

Al realizar la evaluación, se observa que las aceleraciones no exceden el límite del uso de oficina o residencial, por lo cual no se tendrían problemas de fatiga estructural (Figura 2.26). En la evaluación con el nomograma la Figura 1.10a, en términos de la gravedad, la aceleración excede el límite para el uso de oficinas, por lo que las aceleraciones calculadas son incómodas para sus ocupantes (Figura 2.27). Para ambos nomogramas se evaluó el valor de 1.113g, que corresponde a la aceleración máxima en términos de g obtenida en la Tabla 2.14.

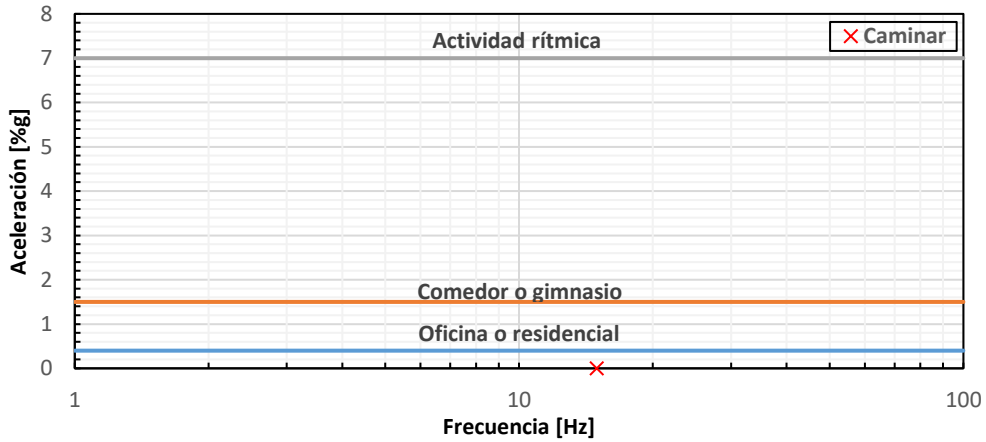


Figura 2.26. Evaluación de aceleraciones límite para el caminar humano en losa de concreto reforzado para evitar problemas de fatiga estructural.

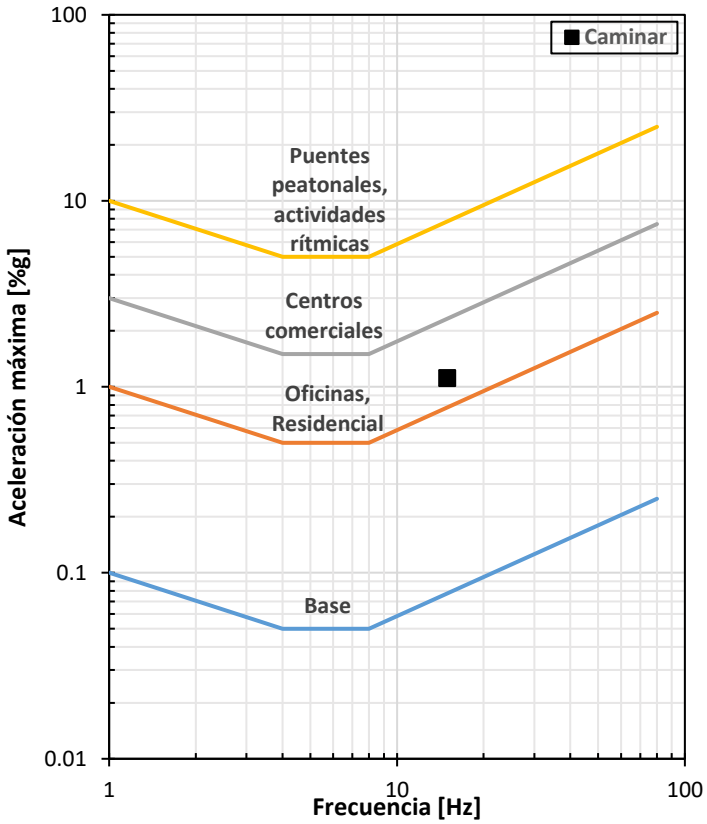


Figura 2.27. Evaluación de aceleración máxima para el caminar humano en losa de concreto reforzado.

ISO 2631-2 (1989)

Con el valor obtenido de a_{rms} de 7.21 cm/s^2 que se muestra en la Tabla 2.14 y evaluando dicho valor en la Figura 2.28 con la frecuencia natural del sistema, el punto se ubica por debajo de 12 veces la curva base, la cual corresponde al límite de uso residencial para una vibración de acuerdo con la Tabla 1.6. Sin embargo, dicho valor se encuentra por encima de 4 veces la curva base, la cual corresponde al uso de oficinas para una vibración continua. Por lo que se determina que la vibración para este caso excede los límites para el uso al que se encuentra destinado la losa de estudio.

Parámetro *KB* (Bachmann y Ammann, 1987) y factor *K* (NTCC-21, 2021)

Usando los valores de a_{max} y frecuencia natural del sistema se obtiene la amplitud máxima del desplazamiento, este valor se sustituye en las ecuaciones (1.18) y (1.20) para definir los valores de el parámetro *KB* y el factor *K*, respectivamente. Los resultados obtenidos se enlistan en la Tabla 2.15. El valor obtenido del factor *K* es de 1.087 mm/s^2, de acuerdo con las NTCC-21 (2021), este valor corresponde a una vibración clase D, que es fácilmente perceptible. Para el parámetro *KB* se obtiene un valor de 0.774 mm/s^2, el cual corresponde a una intensidad de la vibración no aceptable, ya que excede el límite para el uso de oficinas para una vibración continua, de acuerdo con la Tabla 1.6.

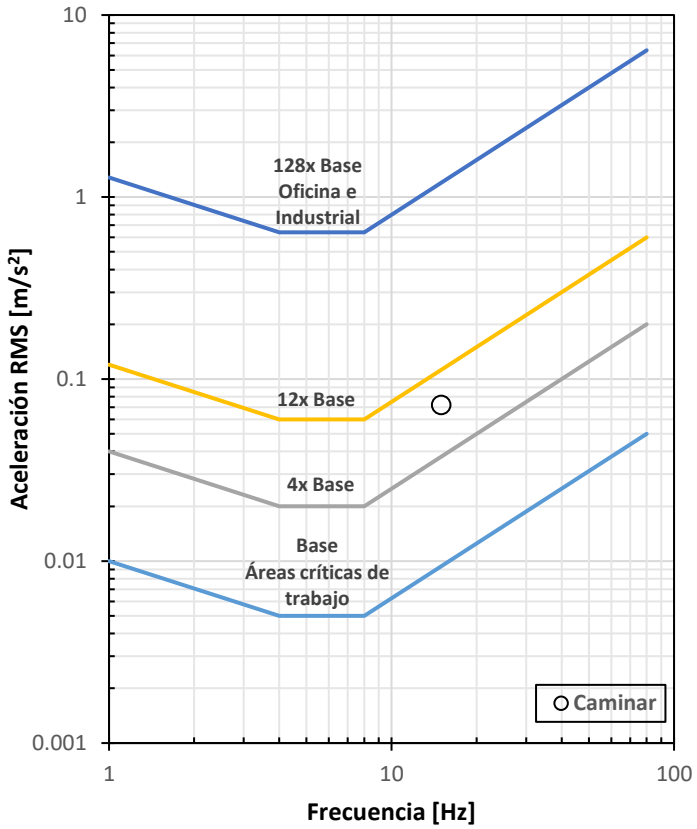


Figura 2.28. Evaluación de aceleración máxima en términos de rms para el caminar de una persona en losa de concreto reforzado.

Tabla 2.15. Obtención de parámetros KB (Bachmann y Ammann, 1987) y K (NTCC-21, 2021) para el caminar humano.

Tipo de evaluación	f_n [Hz]	a_{max} [cm/s^2]	d_{max} [mm]	f_{10} [Hz]	K [mm/s^2]	KB [mm/s]	Percepción Humana
NTCC-21 (2021)	14.96	10.92	0.0124	10	1.087	-	Fácilmente perceptible
Bachmann y Ammann (1987)				-	-	0.774	No aceptable

Con los resultados obtenidos mediante los distintos tipos de evaluaciones para el caminar humano en losa de concreto reforzado, se observa que la vibración no cumple con los límites establecidos por el AISC (1997), en el nomograma de la Figura 2.27; sin embargo, no se supera el límite para tener problemas de fatiga estructural (Figura 2.26). Además, la vibración excede los límites establecidos por la ISO 2631-2 (1989) y el parámetro *KB* (Bachmann y Ammann, 1987). El parámetro *K* propuesto en las NTCC-21 (2021) no sobrestima la vibración ocasionada por este tipo de actividad, lo cual es congruente con los resultados obtenidos con los distintos tipos de evaluación.

3 INFLUENCIA DE SUS ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN LOSA DE CONCRETO REFORZADO PARA CONTROLAR LA ACELERACIÓN MÁXIMA PRODUCIDA POR ACTIVIDADES HUMANAS

3.1 Introducción

Empleando el modelo numérico del tablero aislado, mostrado en la Figura 2.2a, se realiza un estudio paramétrico para controlar la aceleración máxima, variando los elementos estructurales principales, tales como el espesor de la losa, sección de las trabes, sección de columnas, considerando concreto normal y ligero. En los modelos numéricos se asignaron las cargas dinámicas debido al caminar de una persona (puntual) y balanceo de un conjunto de personas (distribuida) previamente definidas en el capítulo 2. Se evalúa la variación de la aceleración máxima absoluta en el centro del claro de la losa de concreto reforzado, pues es la variable con la que se determina si el sistema de piso es confortable ante actividades humanas. El concreto ligero es un material de peso reducido a diferencia del concreto normal, ya que se constituye de agregados ligeros alcanzando una resistencia a la compresión de 70-500 kg/cm^2 y un peso volumétrico de 500-2100 kg/m^3. Además, es un material el cual no transmite vibraciones y tiene una excelente resistencia al impacto. El módulo de elasticidad en concretos de agregados ligeros presenta valores menores con respecto al concreto de agregado normal y es complicado de definir, ya que tiene un amplio rango de variación y depende del tipo de agregado ligero que se utilice, peso volumétrico y resistencia a la compresión (Ayala, 1969). Por lo tanto, en los modelos numéricos se considera el módulo de elasticidad y resistencia a compresión del concreto de peso normal, pero se modifica el peso volumétrico que corresponda al de un concreto ligero para el análisis de vibraciones debido a actividades humanas.

Se estudian cuatro consideraciones adicionales para reducir las aceleraciones, las cuales son: uso de concreto ligero en la losa de concreto reforzado manteniendo el concreto normal en las trabes y columnas, adición de trabes secundarias de concreto reforzado, adición de trabes secundarias de acero del tipo armadura de alma abierta (joist en el idioma inglés) y adición de trabes secundarias de acero tipo IR. Esto se realiza para determinar la opción más adecuada para disminuir las aceleraciones debido a estos dos tipos de vibraciones.

3.2 Evaluación de la aceleración máxima en losa de concreto reforzado ante la influencia de sus elementos estructurales principales

3.2.1 Influencia del espesor de la losa

Al espesor inicial de 13 cm de la losa se dieron incrementos de 2 cm hasta llegar a un espesor de 23 cm, *i.e.*, 15, 17, 19, 21 y 23 cm. Se consideró dos tipos de concreto en toda la estructura: normal y ligero, cuyas propiedades mecánicas se enlistan en la Tabla 3.1. Es importante mencionar que la losa de 19 cm con concreto ligero tiene el peso equivalente a la losa original de 13 cm con concreto normal. En los modelos numéricos con concreto normal se obtuvo una reducción de la aceleración del 34.36% al 75.76% y del 33.14% al 50.69% ante carga puntual y distribuida, respectivamente. Con concreto ligero, se observó la misma tendencia; sin embargo, se obtuvo una reducción de la aceleración, la cual es menor en comparación con concreto normal para ambas cargas (Figura 3.1). Sin embargo, cuando la losa es de 19 cm de espesor con concreto ligero, el peso de la estructura es de 24.8 ton, cuando la losa es de 13 cm con concreto normal es de 25.1 ton, con una diferencia del 1.1%. Por lo que el uso de concreto ligero favorece al peso de la estructura teniendo pesos equivalentes con espesores mayores en la losa. El uso de concreto normal para incrementar el espesor de la losa no es una opción viable, pues produciría un diseño más costoso por el incremento de fuerzas gravitacionales y laterales.

Simultáneamente se registraron los periodos, frecuencias y desplazamientos en el centro de la losa en cada incremento para ambas cargas; se observa que con cada incremento se disminuye el periodo, aumentan las frecuencias y disminuye el desplazamiento debido al aumento de rigidez del sistema de piso, conforme a la Tablas 3.2 y 3.3.

Tabla 3.1. Propiedades mecánicas del concreto normal y ligero.

Tipo de concreto	Variable	Magnitud
Normal	f'c [kg/cm^2]	460
	E [kgf/cm^2]	292304.69
	ϒ [kg/cm^3]	2.40E-03
Ligero	f'c [kg/cm^2]	460
	E [kgf/cm^2]	292304.69
	ϒ [kg/cm^3]	1.60E-03

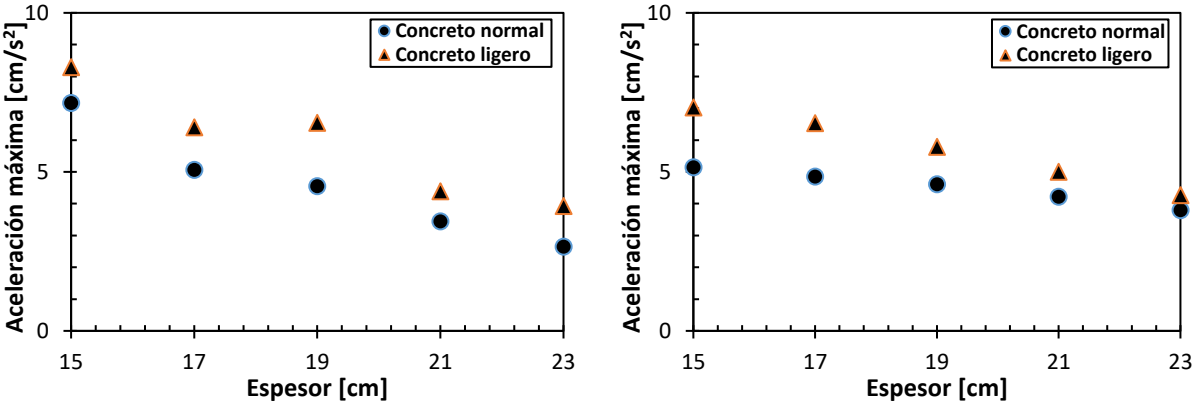


Figura 3.1. Variación de la aceleración contra el incremento del espesor de la losa con concreto normal y ligero ante carga: a) puntual y b) distribuida.

Tabla 3.2. Variación de periodos, frecuencias, aceleraciones y desplazamientos ante el incremento del espesor de la losa debido a la carga dinámica puntual.

Concepto	Modelo	Espesor [cm]	T_0 [s]	f_n [Hz]	a_{max} [cm/s^2]	Δa [%]	δ_{maxCL} [cm]
Incremento del espesor de la losa de concreto reforzado	Concreto normal	13	0.067	14.963	10.919	NA	0.0035
		15	0.061	16.276	7.167	-34.36	0.0025
		17	0.058	17.389	5.060	-53.66	0.0018
		19	0.054	18.367	4.550	-58.33	0.0014
		21	0.052	19.253	3.441	-68.48	0.0011
		23	0.050	20.067	2.647	-75.76	0.0009
	Concreto ligero	13	0.058	17.384	11.918	NA	0.0035
		15	0.053	19.013	8.286	-24.12	0.0025
		17	0.049	20.404	6.402	-41.37	0.0018
		19	0.046	21.633	6.541	-40.10	0.0014
		21	0.044	22.748	4.386	-59.83	0.0011
		23	0.042	23.774	3.924	-64.06	0.0009

Tabla 3.3. Variación de periodos, frecuencias, aceleraciones y desplazamientos ante el incremento del espesor de la losa debido a la carga dinámica distribuida.

Concepto	Modelo	Espesor (cm)	T_0 [s]	f_n [Hz]	a_{max} [cm/s^2]	Δa [%]	δ_{maxCL} [cm]
Incremento del espesor de la losa de concreto reforzado	Concreto normal	13	0.067	14.963	7.686	NA	0.0251
		15	0.067	14.828	5.139	-33.14	0.0187
		17	0.063	15.967	4.853	-36.86	0.0148
		19	0.059	16.977	4.603	-40.11	0.0120
		21	0.056	17.896	4.216	-45.15	0.0099
		23	0.053	18.745	3.790	-50.69	0.0083
	Concreto ligero	13	0.066	15.160	7.043	NA	0.0250
		15	0.060	16.770	7.020	-8.66	0.0188
		17	0.055	18.169	6.528	-15.07	0.0147
		19	0.051	19.420	5.781	-24.79	0.0120
		21	0.049	20.566	4.996	-34.99	0.0099
		23	0.046	21.627	4.261	-44.56	0.0084

3.2.2 Influencia del incremento de la sección en trabes principales

En este caso se modificó la sección de las trabes principales en incrementos de 5 cm, tanto en el peralte como en la base, siendo la sección inicial de 60 x 25 cm; primero se realizó la modificación en ambos claros de la losa de concreto reforzado y, posteriormente, en cada claro independiente. Los resultados obtenidos de los incrementos de la sección de las trabes principales se muestran en la Figura 3.2 y se enlistan en las Tablas 3.4 y 3.5, donde se observa que al incrementar la sección de las trabes en ambas direcciones con concreto normal para la carga dinámica puntual, ocurre una disminución de la aceleración, obtenida inicialmente en la sección 2.6, cuyo valor es 10.92 cm/s^2. Sin embargo, conforme se aumenta la sección, se tiene un incremento del 10.47%, y con concreto ligero, en cada incremento de la sección se obtuvo un incremento de la aceleración hasta un 86.54% (Tabla 3.4). Para el caso de la carga distribuida con concreto normal, el porcentaje de decremento máximo registrado fue del 27.36% cuando la sección es de 75 x 40 cm; con concreto ligero la tendencia es variable, ya que se obtuvieron decrementos e incrementos de la aceleración con un decremento máximo del 4.08% cuando la sección es de 65 x 30 cm (Tabla 3.5).

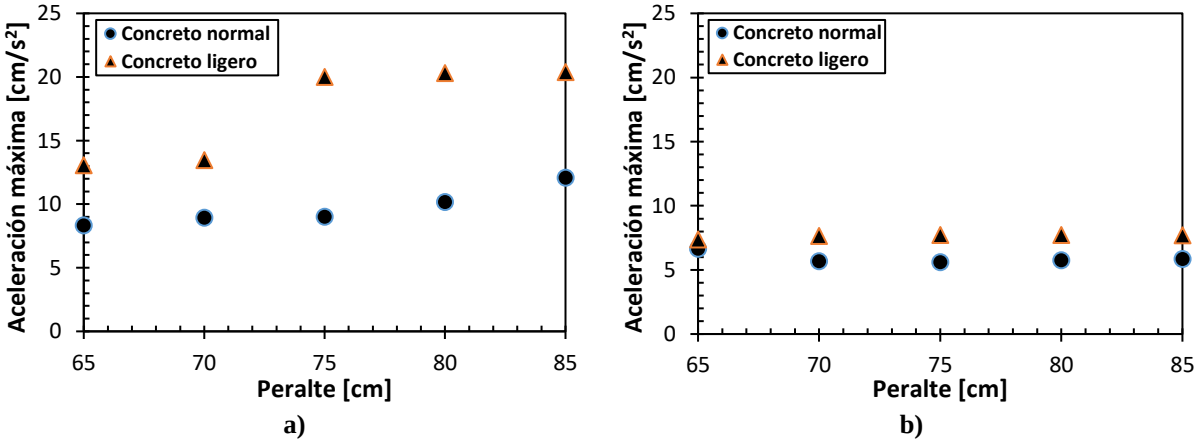


Figura 3.2. Variación de la aceleración contra el incremento del peralte de las trabes principales en ambos claros con concreto normal y ligero ante carga: a) puntual y b) distribuida.

Tabla 3.4. Variación de periodos, frecuencias, aceleraciones y desplazamientos ante el incremento de sección en trabes principales en ambos claros debido a la carga dinámica puntual.

Concepto	Modelo	Peralte [cm]	Base [cm]	T_0 [s]	f_n [Hz]	a_{max} [cm/s^2]	Δa [%]	δ_{maxCL} [cm]
Incremento de sección en trabes principales en ambos claros	Concreto normal	65	30	0.063	15.990	8.321	-23.79	0.0033
		70	35	0.060	16.757	8.922	-18.29	0.0031
		75	40	0.058	17.315	9.013	-17.46	0.0030
		80	45	0.056	17.719	10.166	-6.90	0.0029
		85	50	0.056	18.016	12.063	+10.47	0.0029
	Concreto ligero	65	30	0.054	18.577	13.044	+19.46	0.0033
		70	35	0.051	19.469	13.463	+23.30	0.0031
		75	40	0.050	20.117	20.002	+83.19	0.0030
		80	45	0.049	20.587	20.304	+85.95	0.0029
		85	50	0.048	20.932	20.369	+86.54	0.0029

Tabla 3.5. Variación de periodos, frecuencias, aceleraciones y desplazamientos ante el incremento de sección en trabes principales en ambos claros debido a la carga dinámica distribuida.

Concepto	Modelo	Peralte [cm]	Base [cm]	T_0 [s]	f_n [Hz]	a_{max} [cm/s^2]	Δa [%]	δ_{maxCL} [cm]
Incremento de sección en trabes principales en ambos claros	Concreto normal	65	30	0.069	14.444	6.634	-13.68	0.0220
		70	35	0.066	15.150	5.678	-26.12	0.0201
		75	40	0.064	15.665	5.583	-27.36	0.0189
		80	45	0.062	16.039	5.744	-25.26	0.0180
		85	50	0.061	16.314	5.839	-24.04	0.0174
	Concreto ligero	65	30	0.062	16.220	7.372	-4.08	0.0220
		70	35	0.059	17.016	7.629	-0.74	0.0201
		75	40	0.057	17.597	7.707	+0.29	0.0189
		80	45	0.055	18.019	7.711	+0.32	0.0180
		85	50	0.055	18.330	7.686	-0.005	0.0173

Como se mencionó anteriormente, la sección de las trabes principales se modificó en cada claro, siguiendo el procedimiento anterior con concreto normal, ya que se obtuvieron menores aceleraciones en el análisis anterior; esto para analizar la variación de la aceleración cuando se aumenta el peralte de las trabes en cada claro de la losa de forma independiente. Con la carga dinámica puntual se observaron incrementos de la aceleración en ambos claros, conforme a la Figura 3.3a y Tabla 3.6, donde la aceleración aumentó desde un 13.28% hasta un 23.47% y del 12.80% al 13.33% para el claro a_1 y a_2, respectivamente. Por otra parte, con la carga dinámica distribuida se observaron reducciones de la aceleración similares para ambos claros de acuerdo con la Figura 3.3b y Tabla 3.7, donde la aceleración se reducía conforme se aumentaba la sección de las trabes desde un 6% hasta un 22%.

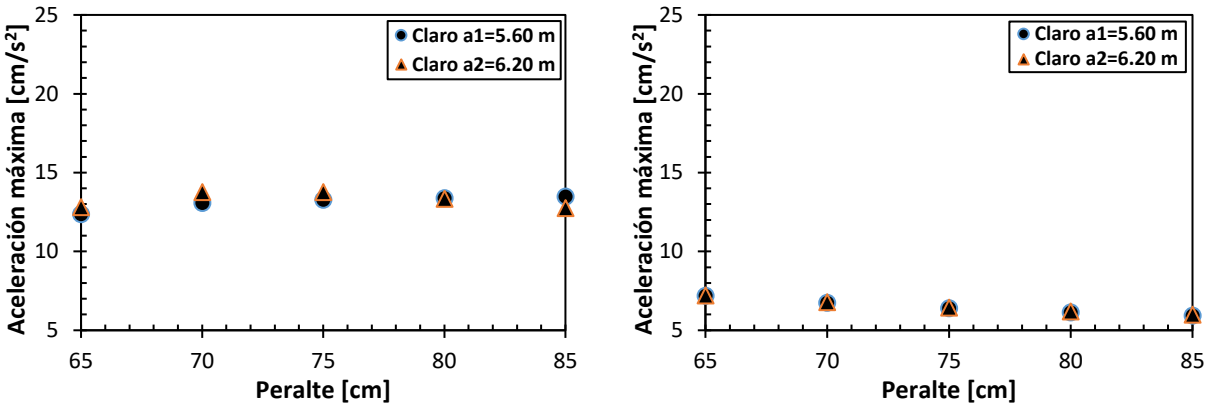


Figura 3.3. Variación de la aceleración contra el incremento del peralte de las trabes principales en cada claro con concreto normal ante carga: a) puntual y b) distribuida.

Tabla 3.6. Variación de periodos, frecuencias, aceleraciones y desplazamientos ante el incremento de sección en trabes principales en cada claro con concreto normal debido a la carga dinámica puntual.

Concepto	Modelo	Peralte [cm]	Base [cm]	T_0 [s]	f_n [Hz]	a_{max} [cm/s²]	Δa [%]	δ_{maxCL} [cm]
Incremento de la sección en trabes principales para el claro a1 y a2 con concreto normal	Claro a_1=5.60 m	65	30	0.065	15.391	12.370	+13.28	0.0035
		70	35	0.064	15.705	13.078	+19.78	0.0034
		75	40	0.063	15.929	13.270	+21.53	0.0033
		80	45	0.062	16.090	13.372	+22.47	0.0033
		85	50	0.062	16.208	13.481	+23.47	0.0033
	Claro a_2=6.20 m	65	30	0.064	15.567	12.803	+17.26	0.0034
		70	35	0.062	16.033	13.770	+26.11	0.0033
		75	40	0.061	16.378	13.765	+26.07	0.0032
		80	45	0.060	16.630	13.325	+22.04	0.0031
		85	50	0.059	16.815	12.748	+16.75	0.0030

Tabla 3.7. Variación de periodos, frecuencias, aceleraciones y desplazamientos ante el incremento de sección en trabes principales en cada claro con concreto normal debido a la carga dinámica distribuida.

Concepto	Modelo	Peralte [cm]	Base [cm]	T_0 [s]	f_n [Hz]	a_{max} [cm/s²]	Δa [%]	δ_{maxCL} [cm]
Incremento de la sección en trabes principales para el claro a1 y a2 con concreto normal	Claro a_1=5.60 m	65	30	0.072	13.914	7.180	-6.58	0.0234
		70	35	0.070	14.217	6.745	-12.24	0.0221
		75	40	0.069	14.435	6.400	-16.73	0.0213
		80	45	0.069	14.593	6.133	-20.12	0.0207
		85	50	0.068	14.707	5.928	-22.87	0.0202
	Claro a_2=6.20 m	65	30	0.071	14.034	7.206	-6.24	0.0236
		70	35	0.069	14.444	6.781	-11.78	0.0225
		75	40	0.068	14.746	6.441	-16.20	0.0218
		80	45	0.067	14.966	6.181	-19.58	0.0213
		85	50	0.066	15.127	5.984	-22.14	0.0210

Con los resultados obtenidos de este estudio, aumentar la sección de las trabes principales que soportan en el sistema de piso para disminuir las aceleraciones en el centro de la losa influye considerablemente, ya que al aumentar la rigidez se disminuyen los periodos del sistema y aumentan las frecuencias, por lo que la aceleración disminuye. En las Figuras 3.4a y 3.4b se presenta la evaluación con el nomograma del AISC (1997) para la carga puntual y distribuida, respectivamente. Se evalúa la aceleración máxima en porcentaje de la gravedad del modelo base, obtenido en el capítulo 2, para cada tipo de carga y las aceleraciones enlistadas en las Tablas 3.6 y 3.7 con concreto normal, ya que con este tipo de concreto se obtuvieron menores aceleraciones con respecto a las Tablas 3.4y 3.5. La terminología utilizada en las Figura 3.4a y Figura 3.4b es la siguiente: carga puntual (CP) y carga distribuida (CD); trabes con sección 65 x 30 cm (T1) y sucesivamente hasta la sección 85 x 50 cm (T5); incremento aplicado en ambos claros de la losa (AC); incremento aplicado en el claro a1 (CA1) y claro a2 (CA2). Cuando se aumenta la sección de las trabes en ambos claros simultáneamente, con la carga puntual las aceleraciones disminuyen, aunque se mantienen por encima del límite para uso de oficinas y para la carga distribuida las aceleraciones se encuentran por debajo del límite cuando la sección es a partir de 70 x 35 cm. Aumentando la sección de las trabes en el claro a1 o a2 con ambos tipos de carga, se obtienen aceleraciones ligeramente mayores en comparación con el caso anterior. En general, se recomienda aumentar la sección de las trabes en ambos claros con concreto normal para reducir las aceleraciones debido a las vibraciones causadas por ambos tipos de carga dinámica en losa de concreto reforzado, pues esta se reduce hasta un 27.36%.

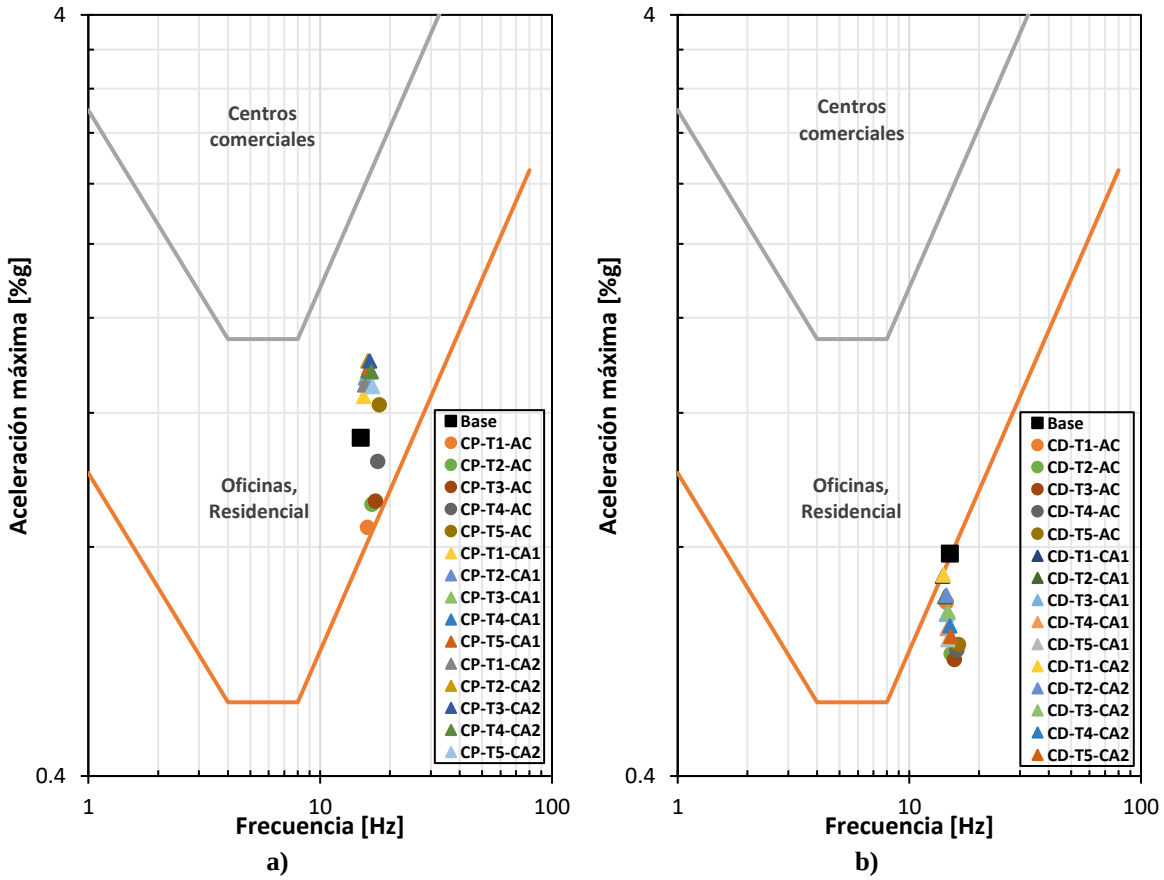


Figura 3.4. Evaluación de aceleración máxima en losa con concreto normal ante carga: a) puntual y b) distribuida.

3.2.3 Influencia del incremento de la sección en columnas

La sección transversal de la columna se incrementó con respecto a la sección inicial, 40 x 60 cm, con incrementos de 5 cm hasta tener una sección de 65 x 85 cm. Se evaluó concreto normal y concreto ligero, manteniendo las secciones iniciales de las trabes y losa con concreto normal para ambos tipos de carga dinámica. Con la carga dinámica puntual se obtiene una disminución de la aceleración lineal a partir de la segunda iteración desde el 29.90% hasta un 37.95% utilizando concreto normal. Por el contrario, con concreto ligero, la aceleración se incrementó hasta un 103.98%, como se muestra en la Figura 3.5a y se enlista en la Tabla 3.8. Para el tipo de carga dinámica distribuida se obtuvieron menores aceleraciones con concreto ligero; sin embargo, éstas aumentaban en cada incremento de la sección, teniendo una disminución del 10.92% hasta un 8.18%. Con concreto normal se disminuyó la aceleración un 2.34% hasta un 7.34% para la primera y última iteración, respectivamente, como se ilustra en la Figura 3.5b y enlista en la Tabla 3.9. Los desplazamientos en el centro de la losa con la carga dinámica distribuida disminuyen al aumentar la sección con ambos tipos de concreto; lo cual se atribuye a que este tipo de carga dinámica actúa en un área y no únicamente en un punto, como es el caso de la carga dinámica puntual, donde los desplazamientos se mantuvieron constantes. En general, la influencia al incrementar la sección de las columnas con concreto normal reduce la aceleración en el centro de la losa de hasta un 37.95%; sin embargo, el peso de la estructura se incrementaría.

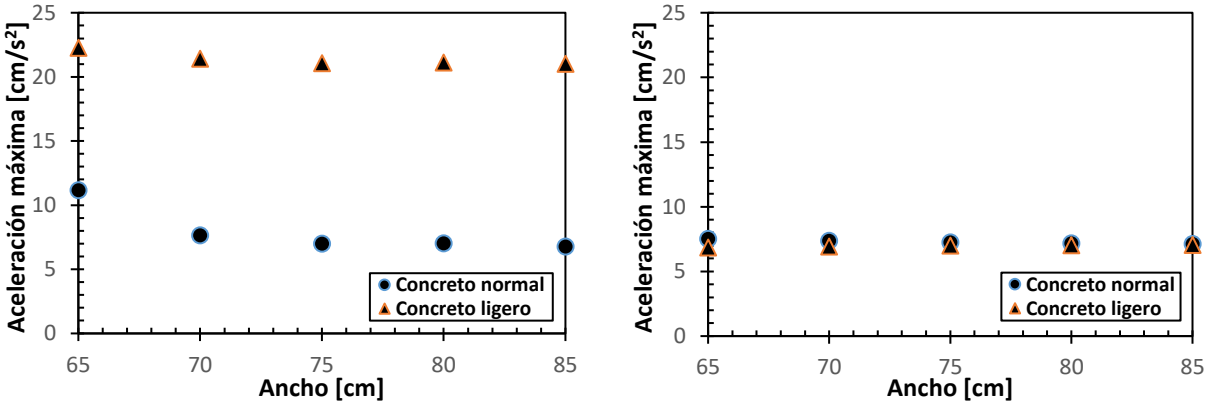


Figura 3.5. Variación de la aceleración contra el incremento de la sección en columnas con concreto normal y ligero ante carga: a) puntual y b) distribuida.

Tabla 3.8. Variación de periodos, frecuencias, aceleraciones y desplazamientos ante el incremento de sección en columnas con concreto normal y ligero debido a la carga dinámica puntual.

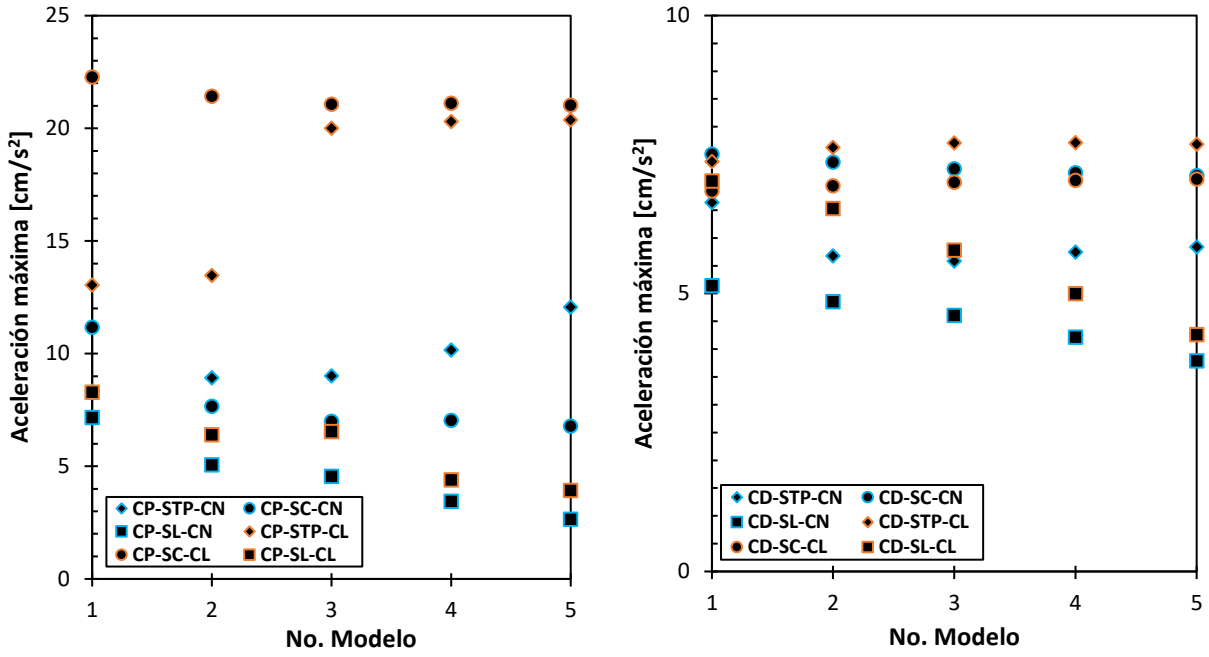
Concepto	Modelo	Peralte [cm]	Base [cm]	T_0 [s]	f_n [Hz]	a_{max} [cm/s^2]	Δa [%]	δ_{maxCL} [cm]
Variación de sección en columnas	Concreto normal	45	65	0.066	15.092	11.163	+2.24	0.0035
		50	70	0.066	15.187	7.655	-29.90	0.0035
		55	75	0.066	15.266	6.987	-36.01	0.0035
		60	80	0.065	15.307	7.031	-35.61	0.0035
		65	85	0.065	15.337	6.775	-37.95	0.0035
	Concreto ligero	45	65	0.057	17.532	22.272	+103.98	0.0035
		50	70	0.057	17.643	21.420	+96.17	0.0035
		55	75	0.056	17.733	21.074	+93.00	0.0035
		60	80	0.056	17.781	21.108	+93.31	0.0035
		65	85	0.056	17.816	21.029	+92.59	0.0035

Tabla 3.9. Variación de periodos, frecuencias, aceleraciones y desplazamientos ante el incremento de sección en columnas con concreto normal y ligero debido a la carga dinámica distribuida.

Concepto	Modelo	Peralte [cm]	Base [cm]	T_0 [s]	f_n [Hz]	a_{max} [cm/s^2]	Δa [%]	δ_{maxCL} [cm]
Variación de sección en columnas	Concreto normal	45	65	0.073	13.623	7.506	-2.34	0.0247
		50	70	0.073	13.713	7.363	-4.20	0.0243
		55	75	0.073	13.786	7.241	-5.78	0.0240
		60	80	0.072	13.825	7.173	-6.68	0.0239
		65	85	0.072	13.853	7.122	-7.34	0.0238
	Concreto ligero	45	65	0.065	15.297	6.847	-10.92	0.0246
		50	70	0.065	15.398	6.934	-9.78	0.0242
		55	75	0.065	15.482	7.002	-8.91	0.0240
		60	80	0.064	15.526	7.035	-8.48	0.0238
		65	85	0.064	15.558	7.057	-8.18	0.0237

Como se observa, existe una influencia significativa al incrementar las secciones de los elementos estructurales que soportan al sistema de piso, con respecto a la aceleración debido a las cargas dinámicas: puntual (CP) y distribuida (CD), de las secciones 3.2.1 a 3.2.3. En la Figura 3.6 se presenta un resumen de los resultados obtenidos por cada modelo; para el caso de las trabes principales únicamente se presentan las aceleraciones obtenidas al incrementar su sección en ambos claros simultáneamente, ya que se obtuvieron mejores resultados a diferencia de incrementar la sección únicamente en un claro. En la Figura 3.6a y b, los puntos con contorno azul y naranja representan el concreto normal (CN) y concreto ligero (CL), respectivamente. Los rombos indican el incremento de la sección en trabes principales (STP), los círculos el incremento de la sección en columnas (SC) y los cuadrados el incremento en la sección (espesor) de la losa (SL).

Ahora bien, con respecto a la Figura 3.6, se observó un aumento de la aceleración al incrementar la sección de las trabes principales en cada modelo al utilizar concreto ligero y normal; sin embargo, las aceleraciones obtenidas con este último fueron menores a las aceleraciones del modelo base. En cambio, incrementando la sección de las columnas con la carga puntual se observó un incremento y decremento de la aceleración con concreto ligero y normal, respectivamente; con la carga distribuida, la aceleración se mantuvo ligeramente constante con ambos tipos de concreto. Por lo que, la aceleración disminuye al modificar estos elementos con concreto normal; sin embargo, no se observó una disminución considerable del periodo fundamental, además de que el peso de la estructura se incrementaría. En definitiva, incrementar la sección de la losa con ambos tipos de concreto es la mejor alternativa para reducir la aceleración con las cargas dinámicas consideradas, ya que se aumenta la rigidez del sistema de piso y, en consecuencia, se disminuyen los periodos fundamentales. La aceleración disminuye un 49% y 36% en promedio para ambos tipos de carga dinámica con el concreto normal y ligero, respectivamente (Tablas 3.2 y 3.3).



a) **b)**

Figura 3.6. Variación de la aceleración máxima contra el número de modelo al variar la sección de los elementos estructurales principales ante carga: a) puntual y b) distribuida.

3.2.4 Influencia del espesor de la losa únicamente considerando concreto ligero

En la sección 3.2.1 se determinó la influencia que tiene el modificar el espesor de la losa considerando toda la estructura con concreto normal y ligero. En este caso se siguió la misma metodología, pero considerando concreto ligero únicamente en la losa, manteniendo concreto normal tanto en columnas como en trabes principales, para analizar la influencia que se tiene al utilizar este tipo de concreto para los dos tipos de carga dinámica: puntual y distribuida como una opción para reducir las aceleraciones en un sistema de piso susceptible a este tipo de vibraciones.

En la Figura 3.7a se muestran los resultados obtenidos con la carga puntual, de acuerdo con la Tabla 3.10 se tiene un aumento en la aceleración del 38.67% con el espesor original de la losa que es de 13 cm; sin embargo, la aceleración comienza a reducirse al aumentar el espesor de la losa desde un 22.55% hasta un 59.18% para el primer y último incremento, respectivamente. Comparando dichos resultados con respecto a la Tabla 3.2 de la sección 3.2.1, no se observa una diferencia considerable en cuanto a periodos, frecuencias y aceleraciones; excepto en la aceleración cuando se tiene un espesor de 19 cm teniendo una disminución del 48.34% (Tabla 3.10) contra el 40.10% (Tabla 3.2); análogamente, se tiene una disminución cuando el espesor es de 23 cm con un 59.18% (Tabla 3.10) contra el 64.06% (Tabla 3.2), cuando se analiza el sistema completo con concreto ligero y la losa con concreto ligero, respectivamente.

En la Figura 3.7b y la Tabla 3.11 se presentan los resultados obtenidos con la carga dinámica distribuida, se tiene una reducción de la aceleración a partir del espesor original de la losa desde un 8.09% hasta un 45.11% en la última iteración. Comparando dichos resultados con la Tabla 3.3, se tienen porcentajes similares de disminución de la aceleración entre el 8% y 45%; excepto cuando el espesor de la losa es de 15 cm con una disminución del 9.40% (Tabla 3.11) con respecto al 8.66%

(Tabla 3.3), con el sistema completo con concreto ligero y la losa con concreto ligero, respectivamente.

Como se observa, se obtienen aceleraciones máximas similares en el centro de la losa cuando la estructura se analiza completamente con concreto ligero (sección 3.2.1) o únicamente en la losa, pero manteniendo el concreto de peso normal en los elementos que la soportan. Por lo que, una alternativa para disminuir las aceleraciones en una losa de concreto reforzado existente susceptible a vibraciones, es incrementar el espesor de la losa y sustituir la misma con concreto ligero; ya que de esta manera se disminuyen las aceleraciones debido a estos dos tipos de vibraciones (caminar y balanceo) y se aligera el peso de la estructura.

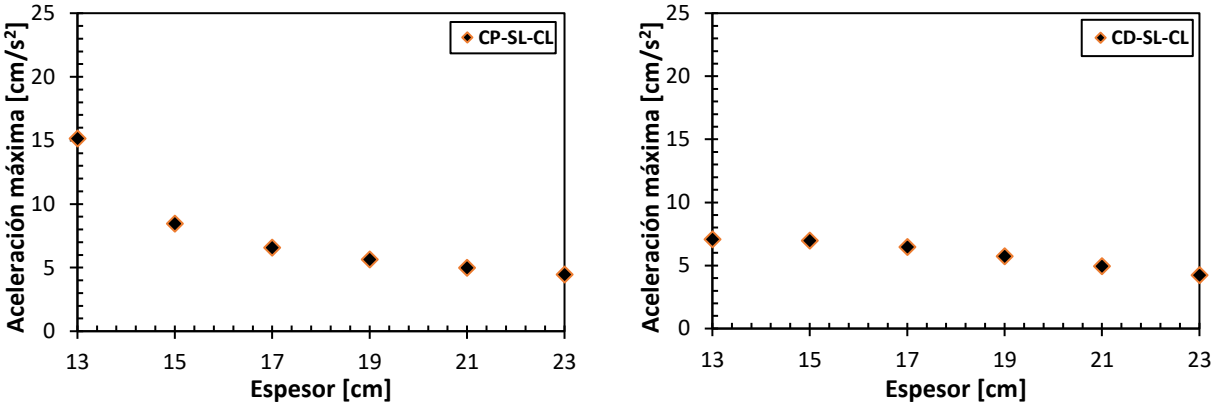


Figura 3.7. Variación de la aceleración contra el incremento del espesor de la losa con concreto ligero ante carga: a) puntual y b) distribuida.

Tabla 3.10. Variación de periodos, frecuencias, aceleraciones y desplazamientos ante el incremento del espesor de la losa con concreto ligero debido a la carga dinámica puntual.

Concepto	Espesor [cm]	T_0 [s]	f_n [Hz]	a_{max} [cm/s^2]	Δa [%]	δ_{maxCL} [cm]
Incremento de sección en losa con concreto reforzado ligero	13	0.058	17.364	15.141	+38.67	0.0035
	15	0.053	18.979	8.457	-22.55	0.0025
	17	0.049	20.354	6.567	-39.86	0.0018
	19	0.046	21.564	5.641	-48.34	0.0014
	21	0.044	22.656	4.988	-54.32	0.0011
	23	0.042	23.659	4.457	-59.18	0.0009

Tabla 3.11. Variación de periodos, frecuencias, aceleraciones y desplazamientos ante el incremento del espesor de la losa con concreto ligero debido a la carga dinámica distribuida.

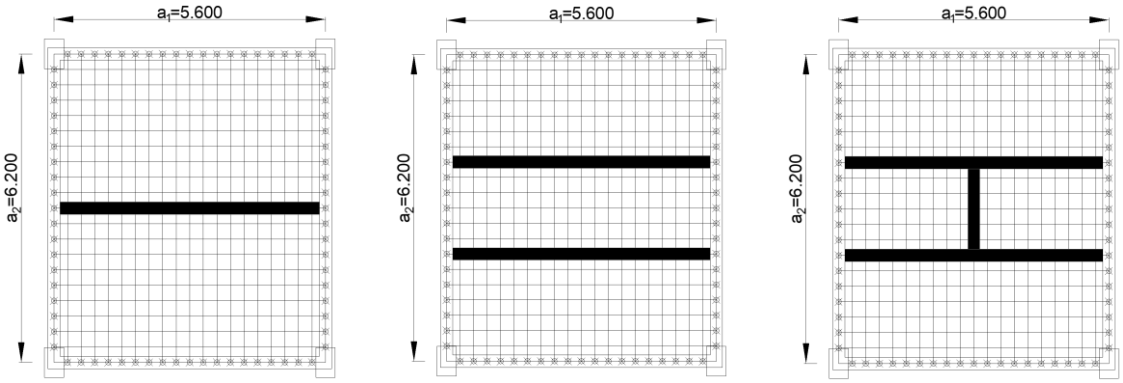
Concepto	Espesor [cm]	T_0 [s]	f_n [Hz]	a_{max} [cm/s^2]	Δa [%]	δ_{maxCL} [cm]
Incremento de sección en losa con concreto reforzado ligero	13	0.066	15.147	7.064	-8.09	0.0250
	15	0.060	16.746	6.963	-9.40	0.0188
	17	0.055	18.133	6.471	-15.81	0.0147
	19	0.052	19.370	5.727	-25.49	0.0119
	21	0.049	20.498	4.948	-35.63	0.0099
	23	0.046	21.540	4.219	-45.11	0.0084

3.3 Evaluación de la aceleración máxima en losa de concreto reforzado ante la influencia de elementos estructurales secundarios

3.3.1 Introducción

En la sección 3.2 se determinó la influencia que se tiene al modificar las secciones o el tipo de material de los elementos estructurales principales que soportan al sistema de piso, para disminuir las aceleraciones producidas por los dos tipos de carga dinámica en el centro de la losa de concreto reforzado. En esta sección, se analiza la aceleración máxima en el centro de la losa de concreto reforzado cuando se añaden trabes secundarias de concreto reforzado (CR) o de acero del tipo armadura de alma abierta (AAA) o perfil I rectangular (IR); manteniendo las dimensiones y materiales originales de los elementos estructurales principales, *i.e.*, trabes, columnas y losa. Se utilizaron tres configuraciones para las trabes secundarias paralelas al claro corto de la losa, colocando primero una trabe al centro de la losa, dos trabes únicamente a los tercios de la losa y, finalmente, una trabe perpendicular a estas como se muestra en la Figura 3.8.

La selección del tipo de trabes secundarias de acero se debe a que se busca disminuir la aceleración máxima debida a estos dos tipos de cargas dinámicas; pero sin modificar considerablemente el peso original de la estructura, como una alternativa de reforzamiento en caso de que se tenga una losa de concreto reforzado maciza susceptible a vibraciones, como es el caso de este trabajo. Por lo que se analizan parámetros clave para cada configuración y para cada tipo de trabe, *i.e.*, periodo y frecuencia fundamental; aceleración máxima; desplazamiento máximo en el centro de la losa y peso de la estructura.



a) **b)** **c)**

Figura 3.8. Ubicación de trabes secundarias: a) una trabe, b) dos trabes y c) tres trabes.

3.3.2 Dimensiones de trabes secundarias de concreto reforzado y acero

Las dimensiones de las trabes secundarias de CR para cada configuración son las mismas a las trabes principales, es decir, 60 x 25 cm. Para las trabes secundarias de acero, se realizó un análisis por cargas verticales, considerando la sobrecarga muerta y la carga viva máxima para el uso de oficinas. La trabe de acero tipo AAA se compone de ángulos dobles en la cuerda superior, cuerda inferior y en las celosías con un peralte de 60 cm (Figura 3.9), las secciones obtenidas por cada elemento con su respectiva relación demanda-capacidad se enlistan en la Tabla 3.12. Como se observa, las cuerdas y celosías con las dimensiones propuestas cumplen con los requerimientos para resistir las demandas debido a la carga axial, momento y cortante. Por otro lado, se seleccionó el perfil IR 12 x 19 para las trabes IR secundarias, las dimensiones se enlistan en la Tabla 3.13. Se consideró acero A992 de grado 50 para ambos tipos de trabes secundarias de acero. Para modelar las trabes secundarias en el modelo del tablero aislado, los desplazamientos y giros de los nodos de la losa se acoplan con los nodos de

las trabes secundarias asignando constraints. Además, para las trabes de acero tipo AAA se libera el giro y torsión, ya que este tipo de trabes trabajan únicamente a fuerzas axiales.

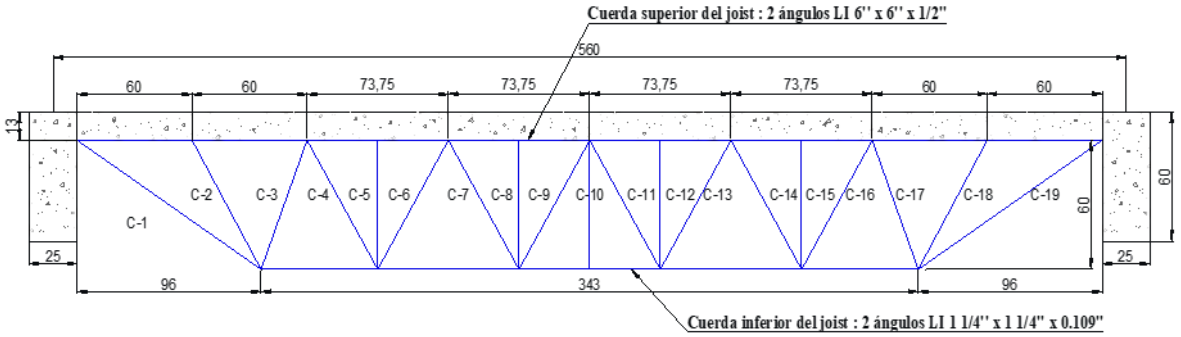


Figura 3.9. Geometría y longitudes de la trabe tipo AAA (cotas en cm).

Tabla 3.12. Secciones y relaciones demanda-capacidad de los elementos de la trabe de acero tipo AAA.

Elemento	Sección	Índice de capacidad total
Cuerda superior	2 LI 3'' x 3/16''	0.448
Cuerda inferior	2 LI 1-1/2'' x 1/4''	0.611
C-1	2 LI 1-1/2'' x 1/4'''	0.442
C-2	2 LI 1'' x 0.109'''	0.377
C-3	2 LI 1-1/2'' x 1/4'''	0.233
C-4	2 LI 1'' x 0.109'''	0.415
C-5	2 LI 1'' x 0.109'''	0.044
C-6	2 LI 1'' x 0.109'''	0.645
C-7	2 LI 1'' x 0.109'''	0.207
C-8	2 LI 1'' x 0.109'''	0.081
C-9	2 LI 1'' x 0.109'''	0.070
C-10	2 LI 1'' x 0.109'''	0.004
C-11	2 LI 1'' x 0.109'''	0.070
C-12	2 LI 1'' x 0.109'''	0.089
C-13	2 LI 1'' x 0.109'''	0.207
C-14	2 LI 1'' x 0.109'''	0.645
C-15	2 LI 1'' x 0.109'''	0.044
C-16	2 LI 1'' x 0.109'''	0.415
C-17	2 LI 1-1/2'' x 1/4'''	0.233
C-18	2 LI 1'' x 0.109'''	0.377
C-19	2 LI 1-1/2'' x 1/4'''	0.442

Tabla 3.13. Dimensiones de la trabe de acero tipo IR.

Elemento trabe tipo IR	Dimensiones [mm]
d	310
h_w	276
t_w	6
b_f	102
t_f	8.9

Posteriormente se realiza otro análisis, únicamente modificando los dos tipos de trabes secundarias de acero, pero manteniendo la configuración de las trabes secundarias (Figura 3.8) y la geometría de la trabe tipo AAA (Figura 3.9). Para esto, se aumenta la rigidez con las dimensiones enlistadas en la Tabla 3.14. En el caso de la trabe IR, se seleccionó el perfil IR 24 x 55, ya que se buscó un perfil con un peralte similar al de las trabes principales de CR y la trabe secundaria tipo AAA. Para este análisis se considera el mismo tipo de acero como en el caso anterior.

Tabla 3.14. Dimensiones de trabes de acero con mayor rigidez.

Trabe tipo	Concepto	Dimensiones
Armadura de alma abierta (AAA)	**Cuerda superior (2 LI)**	4'' x 1/2''
	Cuerda inferior (2 LI)	4'' x 1/2''
	Celosías (2 LI)	1-1/2'' x 1/4''
I rectangular (IR)	**d**	600 mm
	h_w	548 mm
	t_w	10.1 mm
	b_f	179 mm
	t_f	12.9 mm

3.3.3 Influencia de trabes secundarias de concreto y acero ante carga dinámica puntual

En el caso de la carga dinámica puntual, la cual se aplica en el centro de la losa, se obtuvieron resultados variables para cada configuración y tipo de trabe secundaria. De acuerdo con la Tabla 3.15, con una trabe secundaria (Figura 3.8a), la aceleración se disminuye un 77.50%, 43.50% y 32% con la trabe de CR, AAA e IR, respectivamente. Con dos trabes secundarias (Figura 3.8b) se obtienen aceleraciones mayores en comparación con el caso anterior, teniendo una reducción del 23.65%, 10.71% y 27.13%, respectivamente. Con tres trabes secundarias (Figura 3.8c), la aceleración se reduce un 80.77%, 53.10% y 44.44%, respectivamente.

Además, la zona de amplitud máxima modal (Figura 3.10) se mantuvo en el centro de la losa en cada configuración; por ende, los resultados obtenidos con la ubicación de las dos trabes secundarias a los tercios del claro largo de la losa concuerdan con esta analogía. Estos resultados se muestran en la Figura 3.11a, donde se observa que, para los tres tipos de trabes, se sigue la misma tendencia a medida que se aumenta el número de trabes para este tipo de carga dinámica y la aceleración disminuye en comparación con el modelo base en cada modelo.

Por otra parte, se observó que los periodos y frecuencias se disminuyeron con respecto al modelo base, ya que la rigidez aumenta al agregar las trabes secundarias. Esta reducción es mayor cuando se usan trabes secundarias de CR, ya que tienen una mayor rigidez e inercia que las trabes secundarias de acero. Sin embargo, el peso propio de la estructura aumenta significativamente con las trabes secundarias de CR, ya que el peso se aumenta desde un 8% hasta un 19%; mientras que el peso con las trabes secundarias de acero aumenta únicamente en promedio desde un 0.5% hasta un 1.21%.

En general, la inclusión de trabes secundarias con los tres tipos de configuraciones y trabes propuestos tiene una influencia significativa para reducir las aceleraciones inducidas por las vibraciones debido al caminar humano (carga dinámica puntual). Sin embargo, con los resultados obtenidos se demuestra que, agregando una trabe secundaria al sistema de piso paralela al claro corto de la losa, se obtienen reducciones considerables de la aceleración y se obtienen frecuencias mayores. Por otro lado, agregando trabes secundarias de acero, se tiene una reducción de aceleraciones y se aligera el peso

de la estructura considerablemente; por lo que es posible utilizar estos tipos de elementos como una forma de reforzamiento de una losa existente con problemas de vibraciones.

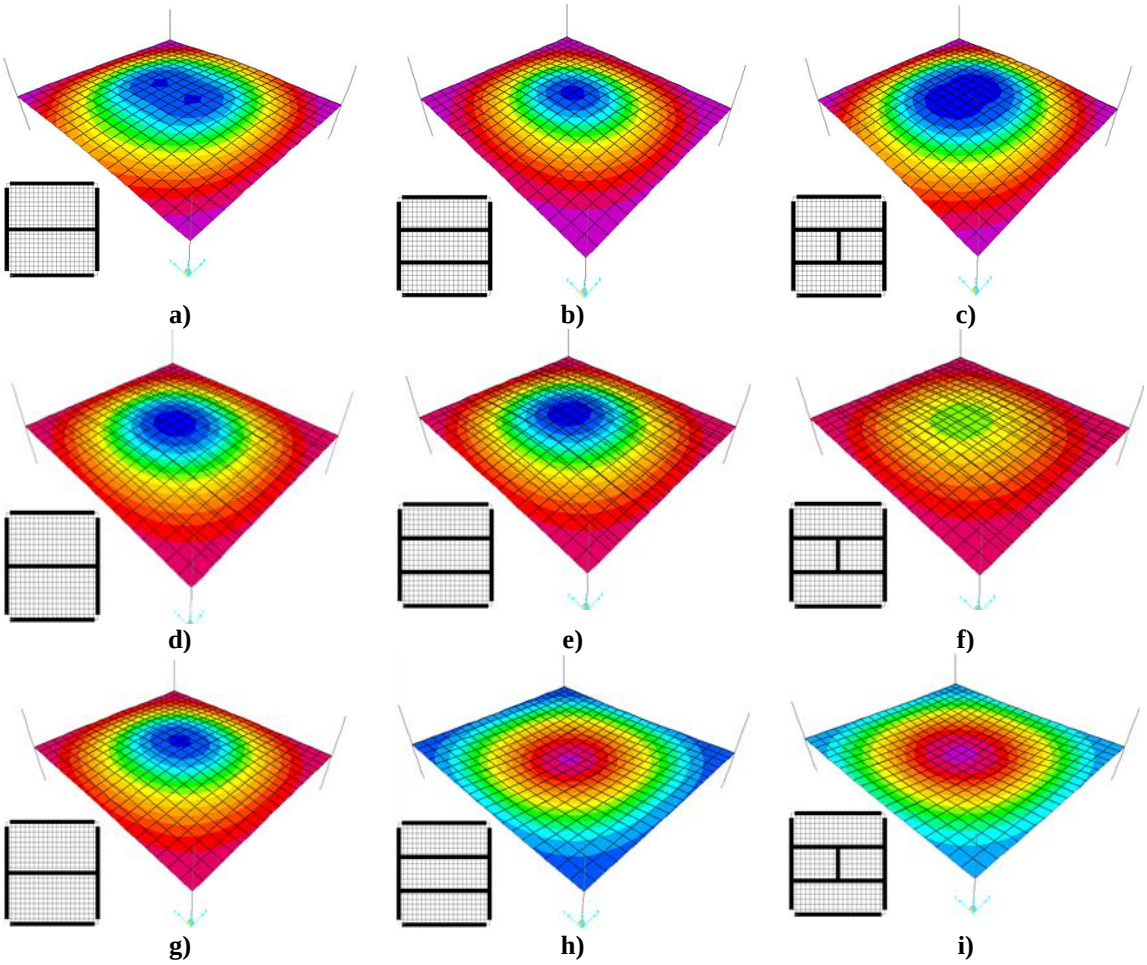


Figura 3.10. Formas modales del primer modo ante carga dinámica puntual para: trabes secundarias de CR (a, b y c), trabes secundarias de acero tipo AAA (d, e y f) y trabes secundarias de acero tipo IR (g, h e i).

Tabla 3.15. Resultados obtenidos ante carga dinámica puntual al añadir trabes secundarias de CR y trabes secundarias de acero.

Modelo	No. de TS	Tipo TS	T_0 [s]	f_n [Hz]	a_{max} [cm/s^2]	Δa [%]	δ_{maxCL} [cm]	W_{CM} [ton]	Δw [%]
Base	0	NA	0.0668	14.963	10.919	NA	0.0035	25.089	NA
Trabes Secundarias (Ts)	1	CR	0.0475	21.050	2.457	-77.50	0.0008	27.105	8.04
		AAA	0.0636	15.718	6.170	-43.50	0.003	25.202	0.45
		IR	0.0603	16.589	7.424	-32.00	0.0024	25.247	0.63
	2	CR	0.0620	16.131	8.337	-23.65	0.0031	29.121	16.07
		AAA	0.0623	16.040	9.750	-10.71	0.0029	25.315	0.90
		IR	0.0596	16.782	7.957	-27.13	0.0025	25.405	1.26
	3	CR	0.0495	20.203	2.100	-80.77	0.0007	29.865	19.04
		AAA	0.0623	16.064	5.121	-53.10	0.0028	25.327	0.95
		IR	0.0586	17.072	6.067	-44.44	0.002	25.457	1.47

3.3.4 Influencia de trabes secundarias de acero sobrediseñadas ante carga dinámica puntual

Análogamente, el análisis de aceleraciones se realiza con las secciones enlistadas en la Tabla 3.14. De acuerdo con los resultados obtenidos en la Tabla 3.16, al incrementar la rigidez en las trabes secundarias de acero se observa una disminución de la aceleración, periodo, desplazamiento en el centro de la losa de concreto y aumento de la frecuencia.

Comparando los resultados de las Tablas 3.15 y 3.16, con la trabe tipo AAA, cuando se tiene una trabe secundaria, se obtiene un decremento de la aceleración del 43.5% al 48.23% y el peso por carga muerta aumenta únicamente el 1.60%. Con dos trabes secundarias, la aceleración decrece del 10.71% al 28.85% y el peso aumenta el 3.20% y, finalmente, cuando se tienen tres trabes secundarias la aceleración decrece del 53.1% al 63.74% y el peso aumenta el 3.5%. En el caso de la trabe tipo IR, con una trabe secundaria la aceleración decrece del 32% al 56.78% y el peso aumenta un 1.84%; con dos trabes secundarias la aceleración decrece del 27.13% al 42.08% y el peso aumenta un 3.68% y, finalmente, con tres trabes secundarias la aceleración decrece del 44.44% al 65.63% y el peso aumenta un 4.30%.

Con respecto a la Figura 3.11b, incrementando la rigidez en las trabes secundarias de acero para la configuración de la Figura 3.8b, la aceleración decrece considerablemente en comparación con el uso de trabes de CR que, además, genera un peso mayor a la estructura de hasta un 16.07%. Sin embargo, no se sigue la misma tendencia para las otras dos configuraciones restantes cuando se incrementa la rigidez de dichos elementos, pero se disminuye la aceleración inicial con el uso de elementos secundarios.

En conclusión, aumentar la rigidez en las trabes secundarias de acero tiene una influencia significativa para reducir las aceleraciones debido a la carga dinámica puntual sin afectar considerablemente el peso de la estructura; sin embargo, las trabes tipo AAA son más ligeras y disminuyen considerablemente la aceleración máxima. No obstante, las trabes tipo IR tienen aproximadamente el mismo peso y disminuyen más las aceleraciones debido a que tienen una mayor rigidez. Análogamente, con los resultados obtenidos en esta sección y en la sección 3.3.3, la inclusión de una trabe secundaria al centro de la losa produce reducciones considerables para este tipo de carga dinámica en todos los casos.

Tabla 3.16. Resultados obtenidos ante carga dinámica puntual al añadir trabes secundarias de acero con mayor rigidez.

Modelo	No. de TS	Tipo TS	T_0 [s]	f_n [Hz]	a_{max} [cm/s^2]	Δa [%]	δ_{maxCL} [cm]	W_{CM} [ton]	Δw [%]
Base	0	NA	0.0668	14.963	10.919	NA	0.0035	25.089	NA
Trabes Secundarias (Ts)	1	CR	0.0475	21.050	2.457	-77.50	0.0008	27.105	8.04
		AAA	0.0595	16.805	5.653	-48.23	0.0021	25.489	1.60
		IR	0.0467	21.420	4.718	-56.79	0.001	25.551	1.84
	2	CR	0.0620	16.131	8.337	-23.65	0.0031	29.121	16.07
		AAA	0.0574	17.416	7.769	-28.85	0.0021	25.890	3.20
		IR	0.0443	22.582	6.324	-42.08	0.0012	26.013	3.68
	3	CR	0.0495	20.203	2.100	-80.77	0.0007	29.865	19.04
		AAA	0.0607	16.480	3.959	-63.74	0.0022	25.966	3.50
		IR	0.0439	22.788	3.753	-65.63	0.0007	26.167	4.30

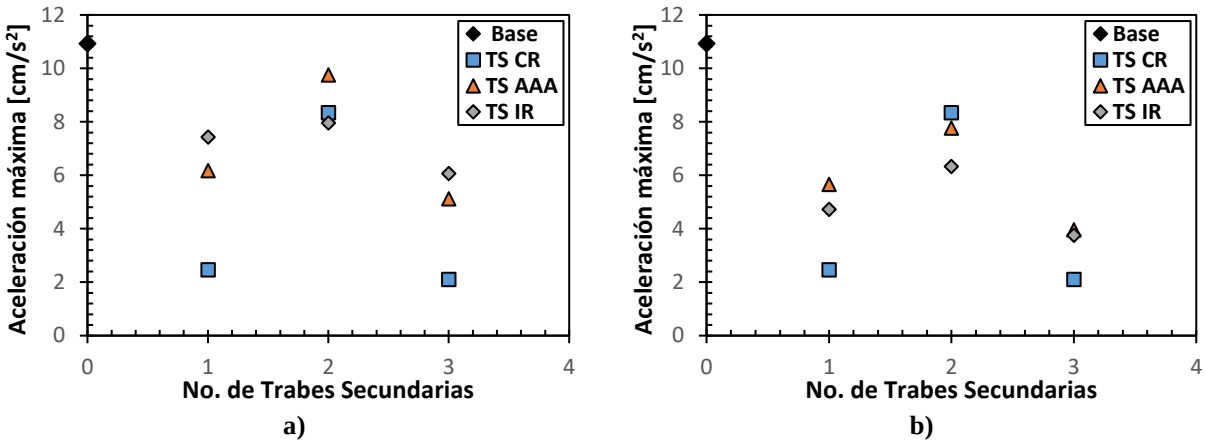


Figura 3.11. Variación de la aceleración contra el número de trabes secundarias ante la carga dinámica puntual: a) trabes de concreto y acero iniciales y b) trabes de concreto y acero con mayor rigidez.

3.3.5 Influencia de trabes secundarias de concreto y acero ante carga dinámica distribuida

Análogamente se realiza el procedimiento de la sección 3.3.3 con las dimensiones de los elementos de CR y acero de la sección 3.3.2 para este tipo de carga dinámica. Además, se utilizan las consideraciones y función de la Figura 2.17b de la sección 2.5, para la función balanceo de un conjunto de un conjunto de personas. De acuerdo con la Tabla 3.17 y la Figura 3.13a, con una trabe secundaria (Figura 3.8a) se tiene una reducción de la aceleración del 51.23%, 9.57% y 21.44%; con dos trabes secundarias a los tercios del claro (Figura 3.8b), la aceleración se reduce el 15.30%, 12.35% y 28.75% y, finalmente, con tres trabes secundarias (Figura 3.8c), la aceleración se reduce el 57.67%, 13.82% y 37.79%.

Ahora bien, en términos de periodos y frecuencias, las trabes de concreto e IR mostraron una mayor reducción del periodo y aumento de la frecuencia, esto como consecuencia de su mayor rigidez en comparación con la trabe tipo AAA; a pesar de que el peralte de la trabe tipo IR es la mitad del peralte de la trabe tipo AAA (Tabla 3.13). Además, al considerar el peso estático de personas en la zona de aplicación de la carga dinámica distribuida con respecto a la Figura 2.16, la zona de amplitud máxima en el modo fundamental se mantuvo en dicha área para cada configuración y tipo de trabes secundarias, como se muestra en la Figura 3.12.

De igual manera que en el análisis con la carga dinámica puntual, con una trabe secundaria en el centro del claro de la losa se reduce considerablemente la aceleración sin afectar el peso de la estructura. Sin embargo, con la trabe secundaria de CR el peso aumenta un 8.04%. Por lo que, es posible añadir trabes de acero como un refuerzo a una losa de concreto reforzado susceptible a vibraciones de este tipo para minimizar las aceleraciones sin afectar el peso de la estructura.

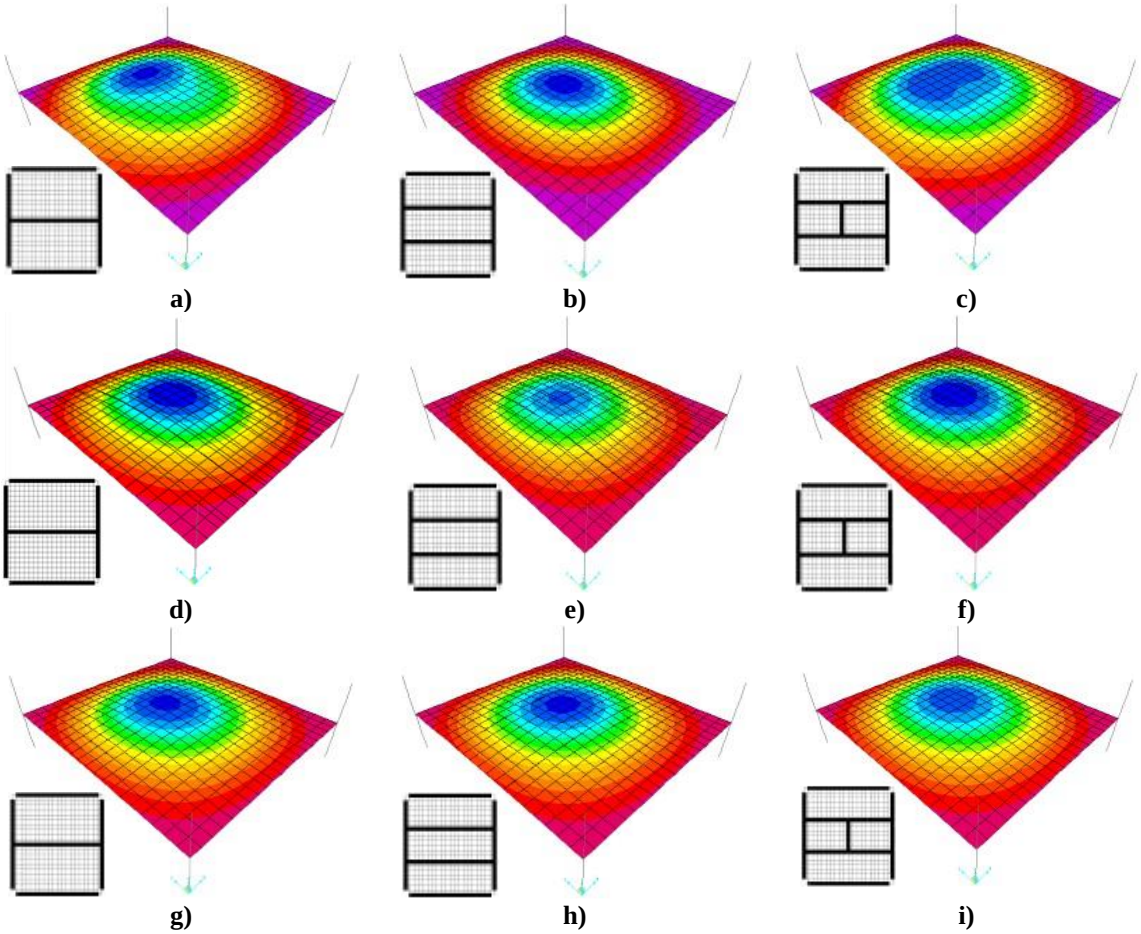


Figura 3.12. Formas modales del primer modo ante carga dinámica distribuida para: trabes secundarias de CR (a, b y c), trabes secundarias de acero tipo AAA (d, e y f) y trabes secundarias de acero tipo IR (g, h e i).

Tabla 3.17. Resultados obtenidos ante carga dinámica distribuida al añadir trabes secundarias de CR y trabes secundarias de acero.

Modelo	No. de TS	Tipo TS	T_0 [s]	f_n [Hz]	a_{max} [cm/s^2]	Δa [%]	δ_{maxCL} [cm]	W_{CM} [ton]	Δw [%]
Base	0	NA	0.0668	14.963	7.686	NA	0.0251	25.089	NA
Trabes Secundarias (Ts)	1	CR	0.0524	19.067	3.748	-51.23	0.0139	27.105	8.04
		AAA	0.0705	14.179	6.951	-9.57	0.0228	25.202	0.45
		IR	0.0686	14.570	6.038	-21.44	0.0222	25.247	0.63
	2	CR	0.0686	14.575	6.510	-15.30	0.0040	29.121	16.07
		AAA	0.0690	14.499	6.737	-12.35	0.0213	25.315	0.90
		IR	0.0659	15.167	5.477	-28.75	0.0196	25.405	1.26
	3	CR	0.0533	18.749	3.254	-57.67	0.0085	29.865	19.04
		AAA	0.0688	14.535	6.624	-13.82	0.0212	25.327	0.95
		IR	0.0649	15.417	4.782	-37.79	0.0194	25.457	1.47

3.3.6 Influencia de trabes secundarias de acero sobrediseñadas ante carga dinámica distribuida

Posteriormente, el análisis se realiza con las secciones enlistadas en la Tabla 3.14 ante la carga dinámica distribuida. Se observa que, las aceleraciones, los periodos y los desplazamientos disminuyen; como consecuencia, la frecuencia y el peso de la estructura se incrementa al aumentar la rigidez de las trabes secundarias de acero (Tabla 3.18).

Comparando los resultados de las Tablas 3.17 y 3.18 en términos de aceleración y peso de la estructura, para la trabe tipo AAA, la aceleración disminuye del 9.57% al 35.49%, del 12.35% al 39.54% y del 13.82% al 37.97%; además, el peso aumenta un 1.15%, 2.29% y 2.55% para una, dos y tres trabes secundarias, respectivamente. Con respecto a la trabe tipo IR, la aceleración disminuye del 21.44% al 43.49%, del 28.75% al 44.74% y del 37.79% al 52.97%. Además, el peso aumenta un 1.21%, 2.43% y 2.83% para una, dos y tres trabes secundarias, respectivamente.

Con respecto a la Figura 3.13, la aceleración sigue la misma tendencia en ambas gráficas al incrementar el número de trabes secundarias; sin embargo, se modifica ligeramente con tres trabes secundarias tipo AAA, donde se observa un incremento de la aceleración (Figura 3.13b). Además, se obtuvieron mayores reducciones con dos trabes secundarias en comparativa con la carga dinámica puntual, como se observa en la Figura 3.11.

En conclusión, se obtienen mayores reducciones de la aceleración con la carga dinámica distribuida como consecuencia del aumento de rigidez de las trabes secundarias de acero; sin embargo, las trabes secundarias tipo IR muestran una mayor reducción de la aceleración y periodos con respecto a los resultados presentados en las Tablas 3.17 y 3.18. Así mismo, la diferencia de peso entre las trabes IR y las trabes tipo AAA es similar, por lo que se puede optar por cualquiera de estos dos tipos de trabes secundarias como una alternativa para disminuir las aceleraciones en el sistema de piso sin afectar el peso total de la estructura. En comparativa con las trabes secundarias de CR, en donde el peso se incrementa desde un 8.04% hasta un 19.04%; sin embargo, se muestra una mayor reducción de periodos, aceleraciones y desplazamientos como consecuencia de su mayor rigidez.

Tabla 3.18. Resultados obtenidos ante carga dinámica distribuida al añadir trabes secundarias de acero con mayor rigidez.

Modelo	No. de TS	Tipo TS	T_0 [s]	f_n [Hz]	a_{max} [cm/s^2]	Δa [%]	δ_{maxCL} [cm]	W_{CM} [ton]	Δw [%]
Base	0	NA	0.0668	14.963	7.686	0	0.0251	25.089	NA
Trabes Secundarias (Ts)	1	CR	0.0524	19.067	3.748	-51.23	0.0139	27.105	8.04
		AAA	0.0659	15.179	4.958	-35.49	0.0202	25.489	1.60
		IR	0.0544	18.389	4.343	-43.49	0.0162	25.551	1.84
	2	CR	0.0686	14.575	6.510	-15.30	0.0040	29.121	16.07
		AAA	0.0631	15.849	4.647	-39.54	0.0172	25.890	3.20
		IR	0.0488	20.494	4.247	-44.74	0.0111	26.013	3.68
	3	CR	0.0533	18.749	3.254	-57.67	0.0085	29.865	19.04
		AAA	0.0664	15.061	4.768	-37.97	0.0189	25.966	3.50
		IR	0.0484	20.647	3.615	-52.97	0.0111	26.167	4.30

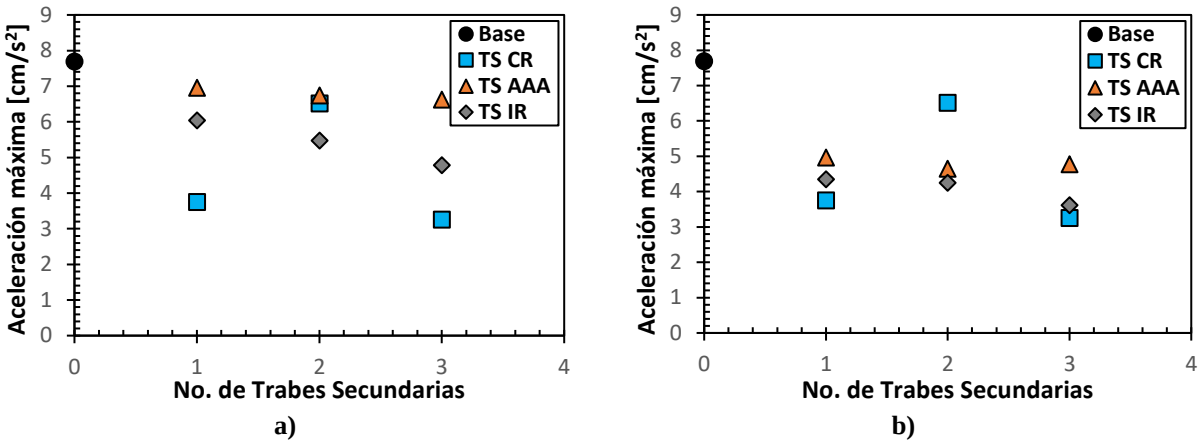


Figura 3.13. Variación de la aceleración contra el número de trabes secundarias ante la carga dinámica distribuida: a) trabes de concreto y acero iniciales y b) trabes de concreto y acero con mayor rigidez.

3.4 Influencia en el incremento de carga en tablero adyacente al tablero de estudio ante carga dinámica puntual

Para este caso se estudia la influencia al incrementar la sobrecarga muerta (SCM) en el tablero ubicado entre los ejes E-F y 2-3 de la Figura 2.1a, con el modelo continuo (MC) de la Figura 2.2b y se comparan las aceleraciones obtenidas con el modelo aislado (MA). La SCM actual en dicho tablero es de 90 kg/m^2 (Tabla 2.4), posteriormente se incrementa la carga en intervalos de 50 kg/m^2 y se registran las aceleraciones en el nodo ubicado en el centro del tablero de estudio ante carga dinámica puntual con la ecuación 1.15, ya que se obtienen resultados más razonables en comparación con los valores experimentales obtenidos por Caballero (2020).

Con respecto a los resultados de la Tabla 3.19 y la Figura 3.14, la aceleración se incrementa en cada incremento de carga en el tablero adyacente desde un 0.22% hasta un 7.03% cuando se tiene una carga de 140 kg/m^2 y 190 kg/m^2, respectivamente. Por otro lado, se tiene una diferencia en la aceleración del 3.09% del MA y 1.41% del MC con respecto a la medición 1 experimental (Tabla 2.14); por lo tanto, se tienen aproximaciones considerables en ambos modelos numéricos con respecto a las mediciones experimentales para este tipo de carga dinámica. Además, en la Figura 3.14 se observa un ligero desfase entre los periodos del MA y MC, ya que se tiene una diferencia en el periodo fundamental del 1.73% con respecto al MA.

En conclusión, al incrementar la sobrecarga muerta en tableros vecinos de losas macizas de concreto reforzado, como consecuencia se incrementará la aceleración ante actividades humanas. Por lo que es posible que se incrementen los problemas de vibración en el sistema de piso; por lo tanto, no es recomendable incrementar la sobrecarga muerta en los tableros vecinos como una alternativa para minimizar las aceleraciones debidas a actividades humanas.

Tabla 3.19. Resultados obtenidos al incrementar la SCM en tablero adyacente del MC ante carga dinámica puntual.

Tipo de carga	Modelo	Tablero	SCM [kgf/m^2]	T_0 [s]	f_n [Hz]	a_{max} [cm/s^2]
Dinámica puntual (ec. 1.15)	MA	D-E, 2-3	90	0.0668	14.963	10.92
	MC	E-F, 2,3	90	0.0680	14.716	11.26
	1	E-F, 2,3	140	0.0715	13.992	11.28
	2	E-F, 2,3	190	0.0847	11.811	12.05

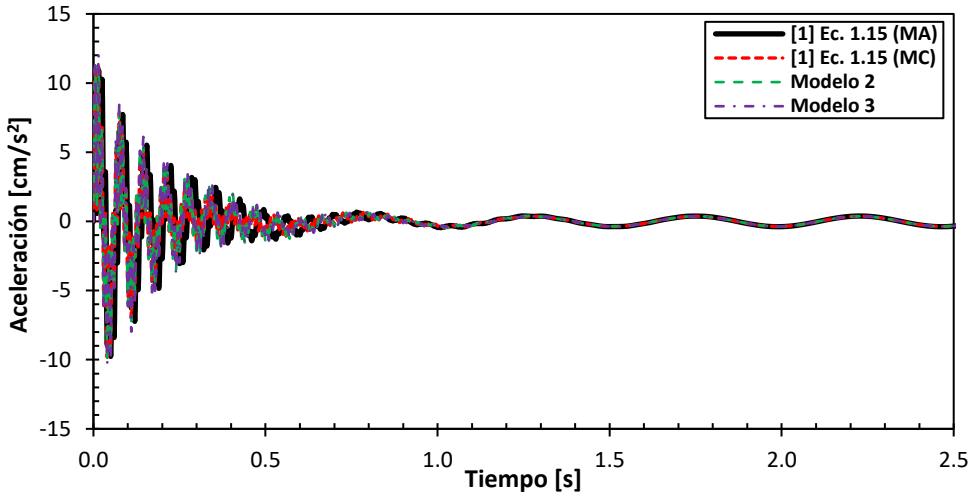


Figura 3.14. Registro de aceleraciones en nodo central del tablero de estudio ante carga dinámica puntual para MA Y MC.

4 ANÁLISIS DE MASA MODAL Y FRECUENCIA NATURAL PARA TRABES Y LOSAS DE CONCRETO REFORZADO CON DISTINTAS CONDICIONES DE APOYO

4.1 Introducción

La masa modal es un parámetro que equivale a la cantidad de masa que se activa en cierto modo de vibración, y está asociado a una respuesta dinámica máxima. Una estructura experimenta vibración libre debido a una perturbación de su posición de equilibrio estático, la estructura vibra con su frecuencia natural o fundamental (f_n). La f_n es el inverso del periodo natural de vibración o el tiempo requerido para que el sistema complete un ciclo de vibración libre, por lo que el sistema realiza $f_n=1/T_0$ ciclos cada segundo. Además, la f_n y el T_0 dependen de la masa y rigidez del sistema, por lo que son propiedades intrínsecas del sistema, independientes de la carga que se aplique.

En la literatura se proporcionan recomendaciones simplificadas para el cálculo de la f_n y M_{mod} en vigas y losas con distintas condiciones de apoyos o bordes, respectivamente. Para este trabajo se utilizan las recomendaciones proporcionadas por HIVOSS (2007); en donde se presentan coeficientes que premultiplican la masa total del sistema para determinar la masa modal fundamental (M_{mod}) y ecuaciones para determinar de la f_n analítica para trabes y losas rectangulares. Las expresiones para obtener la f_n y M_{mod} que se proponen en HIVOSS (2007) son aplicables para sistemas de múltiples grados de libertad idealizados a sistemas equivalentes de un grado de libertad (1GDL). Sin embargo, no se han encontrado estudios detallados sobre su comportamiento en estructuras con bordes flexibles como lo son, las losas que se apoyan sobre trabes, con la excepción de (Kollár et al., 2018).

En este capítulo se realiza un estudio comparativo entre soluciones analíticas y numéricas con el objetivo de evaluar las recomendaciones dadas en la literatura. Los coeficientes para determinar la M_{mod} se desarrollan con el método de los modos asumidos con funciones de forma propuestas para sistemas con masa distribuida y, numéricamente, mediante modelos con elementos finitos; posteriormente, se realiza la comparativa con los coeficientes que se proponen en HIVOSS (2007) para trabes y losas. Además, se determinan coeficientes para una losa apoyada sobre trabes y se analiza la influencia de sus elementos estructurales mediante modelos numéricos.

4.2 Funciones de forma para sistemas con masa y rigidez modal distribuida

Para sistemas idealizados con masa y rigidez distribuida, es posible realizar un análisis generalizado de 1GDL si se asume que con un solo valor de deflexión es posible describir de manera completa la configuración deformada del sistema. Por lo tanto, si se asume que el sistema vibrará en una forma predeterminada y únicamente la amplitud de la vibración varía con el tiempo, el movimiento del sistema será en función de una coordenada generalizada *z(t)* (Figura 4.1). Este tipo de sistemas idealizados comúnmente se le conoce como sistemas generalizados de 1GDL (Tedesco *et al*., 1998). Es necesario determinar la función de la deflexión estática $v(x)$ debido a fuerzas estáticas (puntual o distribuida), la cual se normaliza en la coordenada generalizada de la deflexión máxima para obtener la función de forma $\psi(x)$. Además, la función de forma $\psi(x)$ obtenida debe satisfacer las condiciones de frontera del desplazamiento al evaluar en la coordenada generalizada.

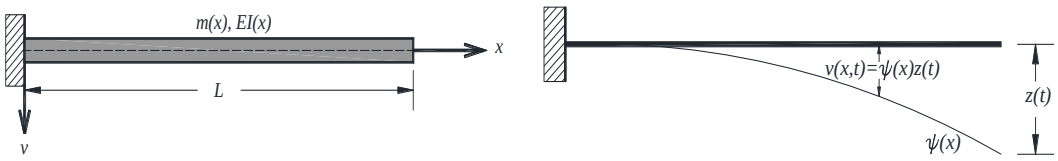


Figura 4.1. a) Sistema con masa y rigidez distribuida; b) desplazamiento en función de $\boldsymbol{\psi(x)}$ y *z(t)* (tomado de Tedesco *et al*., 1998).

Ahora bien, existen diversos métodos para determinar la función $v(x)$ por soluciones cerradas o aproximadas. Con el método por doble integración se obtienen ecuaciones para determinar la deflexión cerrada en cualquier punto del elemento al integrar dos veces la ecuación (4.1). Por otro lado, el método de Rayleigh Ritz es un método energético aproximado, el cual se basa en la energía potencial total (Π) producida por la energía cinética (*U*) y el trabajo realizado por las fuerzas externas (*W*) (ec. 4.2) a partir de una función de la deflexión asumida representada como una función polinomial o trigonométrica con respecto a las ecuaciones (4.3) y (4.4), respectivamente.

$$M(x) = EI\frac{d^2v}{dx^2} \tag{4.1}$$

$$\Pi = U - W \tag{4.2}$$

$$v(x) = c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots\ c_nx^n \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered} v(x) = c_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \cdots c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ v(x) = 1 - c_1 \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right) + \cdots 1 - c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2l}\right) \end{gathered} \tag{4.4}$$

Donde las constantes c_n de las ecuaciones (4.3) y (4.4) se determinan sustituyendo las funciones del desplazamiento en la ecuación (4.5); dicha ecuación es la energía potencial total del sistema con respecto a la ecuación (4.2), por lo que una vez determinadas las constantes se sustituyen en las ecuación polinomial o trigonométrica propuesta para determinar la función del desplazamiento $v(x)$.

$$\Pi = \frac{EI}{2}\int_0^L \left(\frac{d^2v(x)}{dx^2}\right)dx - w_p\int_0^L v(x)\,dx \tag{4.5}$$

Por ejemplo, para la torre con masa y rigidez distribuida de la Figura 4.2 sometida a una carga unitaria en su extremo libre, la función de forma cerrada normalizada a la coordenada generalizada en $x = L$ es $\psi(x) = x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2)/3L^4$ y si se asume una función de forma trigonométrica de un término (ec. 4.4) es $\psi(x) = 1 - cos(\pi x/2L)$. Evaluando ambas funciones de forma en $x = 0$, se satisfacen las condiciones de frontera. La precisión de los resultados depende de la función de forma $\psi(x)$ seleccionada para el sistema generalizado de 1GDL, por lo que se analizará su variación con funciones obtenidas mediante el método de doble integración y Rayleigh Ritz.

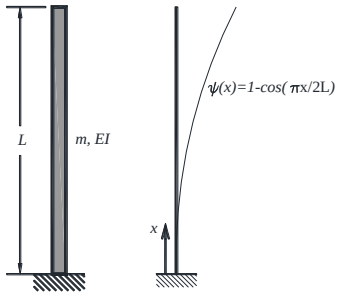


Figura 4.2. Torre uniforme en voladizo de masa *m* y rigidez *EI* sometida a una carga unitaria lateral en su extremo libre (tomado de Chopra, 2014).

4.2.1 Masa modal para sistemas generalizados de 1GDL

Para un sistema de 1GDL sometido a una fuerza dinámica, la fuerza produce un desplazamiento en el sistema en la dirección de la coordenada generalizada considerada. Aplicando el principio D'Alembert, el sistema estará en equilibrio debido a las fuerzas inerciales que se oponen a las fuerzas dinámicas externas, donde las fuerzas inerciales son el producto de la masa total por la aceleración (ec. 4.6) (Chopra, 2014; Humar, 2002; Anderson, 2012; Tedesco et al., 1998).

$$f_I(x,t) = m\ddot{v}(x,t) \tag{4.6}$$

Considerando el sistema de la Figura 4.1b, el desplazamiento está representado por:

$$v(x,t) = \psi(x)z(t) \tag{4.7}$$

donde $\psi(x)$ es la función de forma de la coordenada *x* y *z(t)* es la coordenada generalizada en función del tiempo *t*. Derivando dos veces la ecuación (4.7) con respecto al tiempo y sustituyendo en la ecuación (4.6), las fuerzas inerciales se pueden expresar como:

$$f_I(x,t) = m\psi(x)\ddot{z}(t) \tag{4.8}$$

El principio de trabajo virtual es un método que se basa en la conservación de la energía; el trabajo virtual externo δW_E es igual al trabajo virtual interno realizado δW_I (ec. 4.9).

$$\delta W_E = \delta W_I \tag{4.9}$$

Empleando el principio de trabajo virtual en términos de desplazamientos virtuales para la ecuación (4.7), se tiene:

$$\delta v(x,t) = \psi(x)\delta z(t) \tag{4.10}$$

el trabajo virtual externo debido a las fuerzas inerciales $f_I(x,t)$:

$$\delta W_{EI} = \int_0^L f_I(x,t)\delta v(x,t)dx \tag{4.11}$$

sustituyendo $\delta v(x,t)$ y $f_I(x,t)$ en la ecuación (4.11) y eliminando $\delta z(t)$ al igualar el trabajo virtual externo e interno del sistema, se obtiene la ecuación del trabajo externo inercial en coordenadas generalizadas.

$$\begin{aligned} \delta W_{EI}{}^* &= \int_0^L m\psi(x)\ddot{z}(t)\psi(x)\delta z(t)dx \\ \delta W_{EI}{}^* &= \left[\int_0^L m\{\psi(x)\}^2 dx\right]\ddot{z}(t) \end{aligned} \tag{4.12}$$

En donde el término en corchetes de la ecuación (4.12) se le conoce como la masa generalizada *M**.

$$M^* = \int_0^L m(x)\{\psi(x)\}^2 dx = \beta_{mod} m_{tot} \tag{4.13}$$

Las propiedades de un sistema generalizado de 1GDL pueden obtenerse mediante factores que premultiplican las propiedades reales de una estructura tales como la masa, rigidez y carga total. La relación de masa modal β_{mod}, se obtiene al dividir la masa generalizada del sistema equivalente M^* entre la masa total del sistema m_{tot} (ec. 4.14); por ejemplo, para una trabe simplemente apoyada dicha relación de masa modal teórica es $\beta_{mod} = 0.5$ (Anderson, 2012).

$$\beta_{mod} = \frac{M^*}{m_{tot}} \tag{4.14}$$

En HIVOSS (2007) se propone una manera de obtener la masa modal de forma aproximada mediante modelos de elementos finitos (MEF), la masa modal del sistema (M_{mod}) se obtiene normalizando la deflexión en el i-ésimo nodo (δ_i) a la deflexión máxima (δ_{max}) que multiplica la masa en el i-ésimo nodo (ec. 4.15). Una vez obtenida la M_{mod} se determina β_{mod} numéricamente con la ecuación (4.14).

$$M_{mod} = \sum_{Nodo\ i} \delta^2{}_i m_i = \beta_{mod} m_{tot} \tag{4.15}$$

4.3 Calibración de parámetros de losa y trabes de concreto reforzado

Para el cálculo de la relación modal (β_{mod}) en modelos de elementos finitos es necesario definir un criterio de mallado, para esto se mallan las losas y trabes hasta que los valores convergen en función de las divisiones por borde o divisiones del elemento, respectivamente. El método de elementos finitos es un método numérico aproximado, el cual se basa en dividir un elemento continuo en una serie de subelementos, los cuales se unen mediante puntos representativos llamados nodos, y a la vez, se basa en funciones de forma, similar al método de Rayleigh Ritz, para determinar las deformaciones de un nodo por el peso propio del elemento o a una fuerza externa. Por lo que se analiza la energía elástica debido al trabajo de una fuerza externa (U_e), la masa modal (M_{mod}) y la frecuencia natural (f_n) de losas y trabes de concreto reforzado con apoyos simples y empotrados.

La U_e es directamente proporcional a la magnitud de la carga promedio, $P_i/2$, multiplicada por el desplazamiento δ_i en el i-ésimo nodo (ec. 4.16) (Hibbeler, 2011). Por lo tanto, los parámetros β_{mod}, M_{mod}, y U_e se obtienen con las ecuaciones (4.14), (4.15) y (4.16), respectivamente y la f_n del modelo numérico. Estas variables dependen del mallado o número de divisiones para cada uno de los elementos estructurales, por lo que es necesario determinar el mallado en donde los parámetros convergen a un resultado aproximado. Para los modelos numéricos, el número de divisiones se analizó con 2, 4, 8, 16 y 32 divisiones para la losa (Figura 4.3) y trabes de concreto reforzado (Figura 4.4).

$$U_e = \sum_{Nodo\ i} \frac{1}{2} P_i \delta_i \tag{4.16}$$

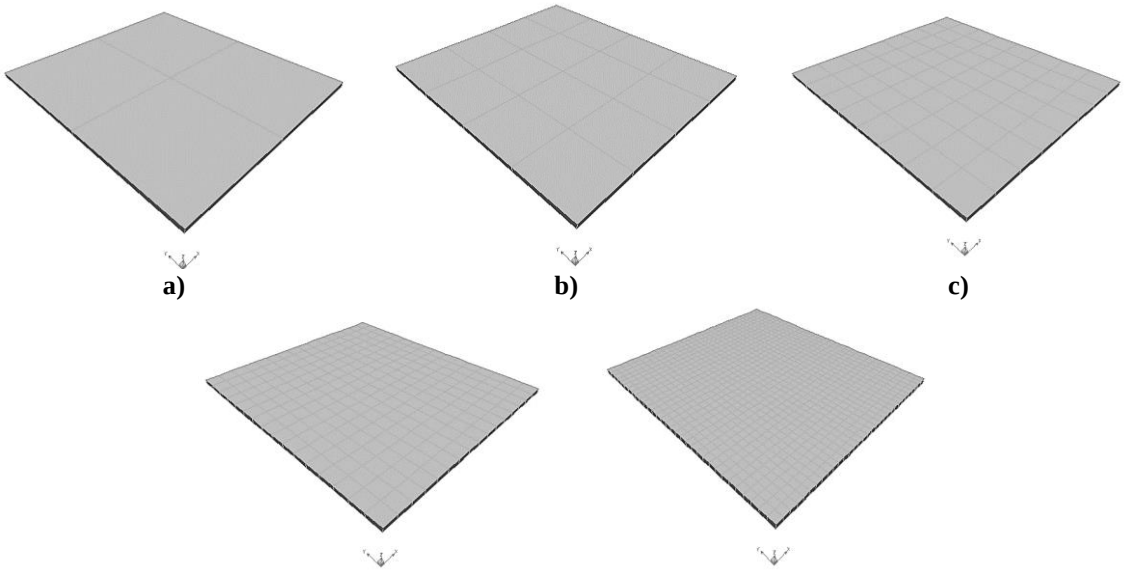


Figura 4.3. Modelo numérico de losa con: a) 2 divisiones, b) 4 divisiones, c) 8 divisiones, d) 16 divisiones y e) 32 divisiones.

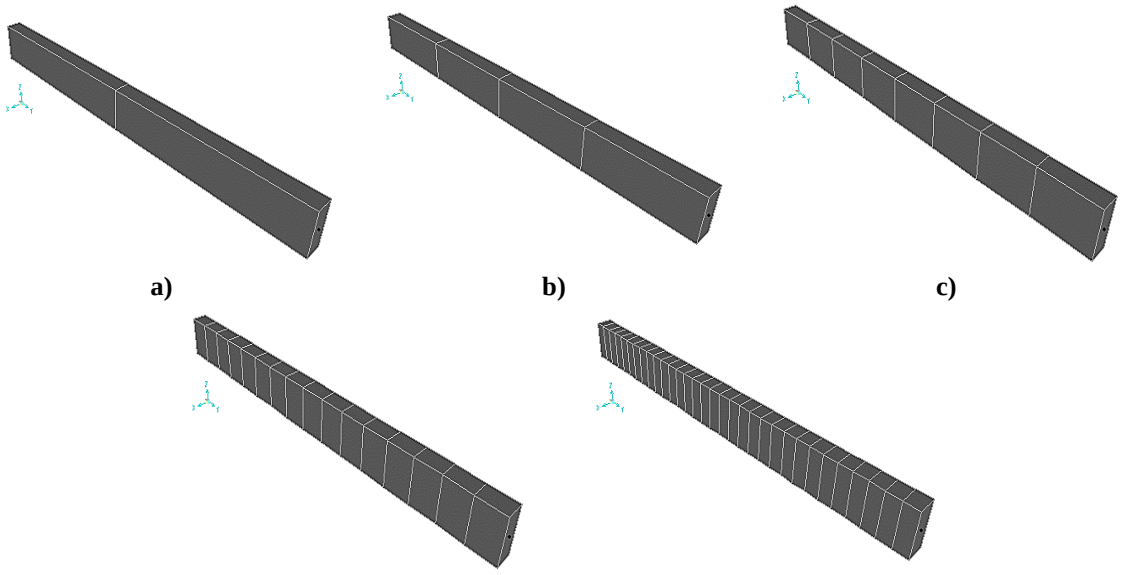


Figura 4.4. Modelo numérico de trabe con: a) 2 divisiones, b) 4 divisiones, c) 8 divisiones, d) 16 divisiones y e) 32 divisiones.

De acuerdo con los resultados obtenidos para el modelo de losa con apoyos simples (Tabla 4.1 y Figura) se observa que los valores de U_e, M_{mod}, β_{mod} y f_n son suficientemente aproximados a partir de las 8 divisiones por borde. Para el modelo de losa con apoyos empotrados (Tabla 4.2 y Figura 4.6), los valores de M_{mod}, β_{mod} y f_n son suficientemente aproximados a partir de las 8 divisiones por borde y los resultados de U_e son similares con 2 y 32 divisiones por borde.

Análogamente, para los modelos de trabes con apoyos simples (Tabla 4.3 y Figura 4.7) y empotrados (Tabla 4.4 y Figura 4.8), los valores de U_e, β_{mod}, M_{mod} y f_n se estabilizan a partir de las 8 divisiones del elemento. Además, los valores de la M_{mod} tienen una ligera diferencia para los dos tipos de trabes analizados; sin embargo, los valores de β_{mod} se estabilizan.

Tabla 4.1. Valores de U_e, M_{mod}, β_{mod} y f_n en modelo de losa con bordes simplemente apoyados.

No. Divisiones	U_e [kgcm]	M_{mod} [kgf-s^2/cm]	β_{mod}	f_n [Hz]
2	28.421	3.560	0.250	8.742
4	45.140	3.678	0.260	10.122
8	49.695	3.683	0.262	10.484
16	50.857	3.734	0.262	10.576
32	51.149	3.737	0.263	10.599

Tabla 4.2. Valores de U_e, M_{mod}, β_{mod} y f_n en modelo de losa con bordes empotrados.

No. Divisiones	U_e [kgcm]	M_{mod} [kgf-s^2/cm]	β_{mod}	f_n [Hz]
2	11.684	3.560	0.250	13.635
4	13.084	2.606	0.184	17.938
8	12.121	2.574	0.183	18.985
16	11.781	2.604	0.183	19.284
32	11.689	2.605	0.183	19.363

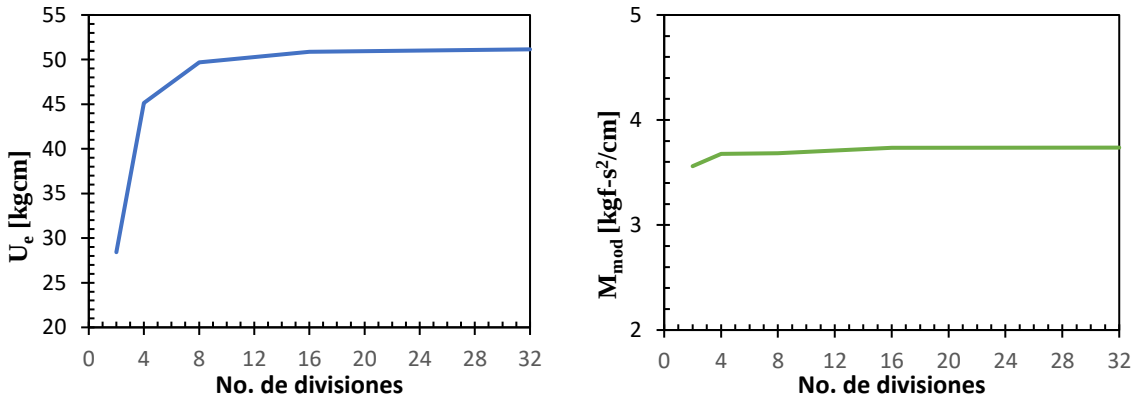
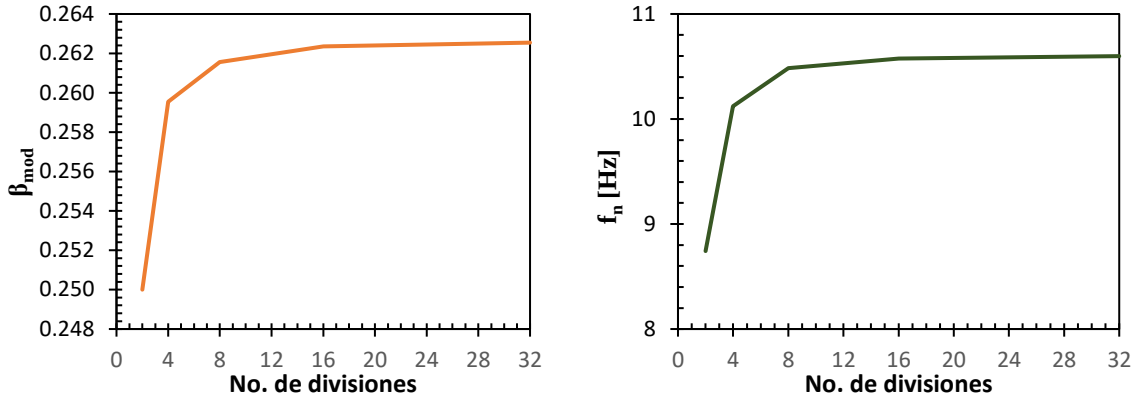
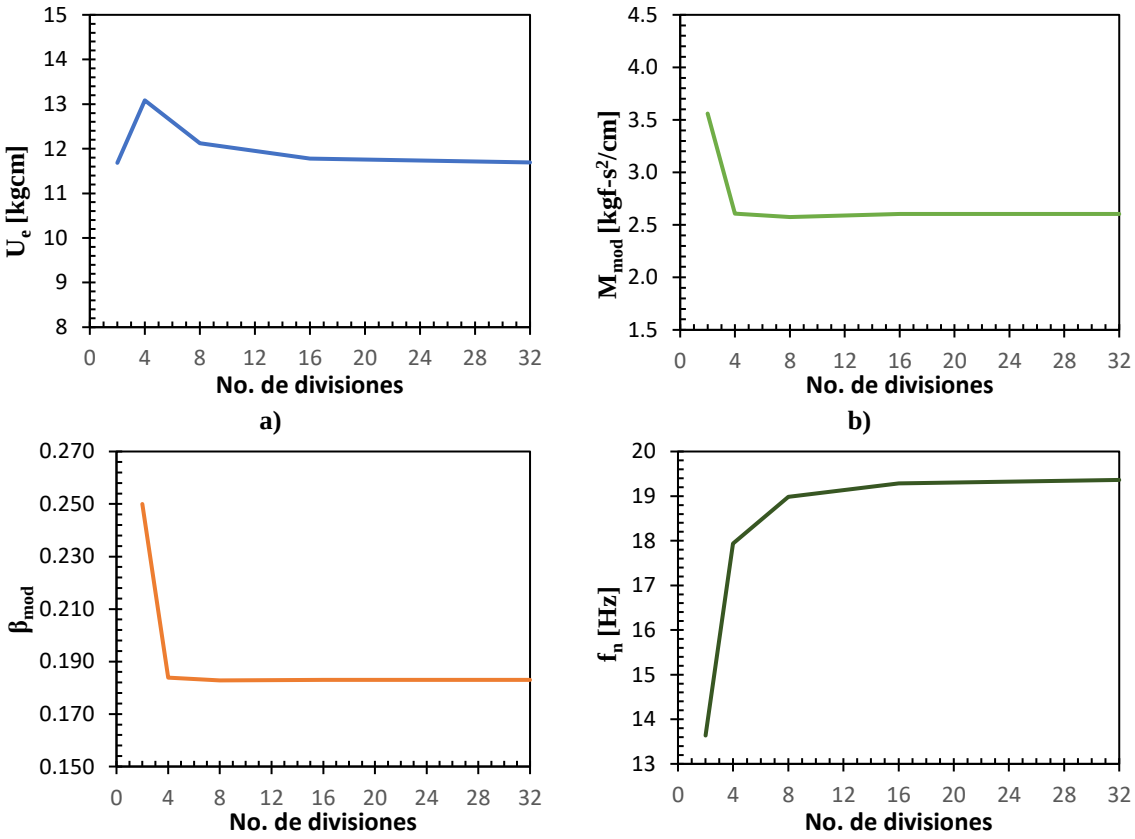


Figura 4.5. Curvas de U_e, M_{mod}, β_{mod} y f_n contra el número de divisiones por borde en modelo de losa con bordes simplemente apoyados.



c) d)

Figura 4.5. Continuación de la Figura.



a) b)

c) d)

Figura 4.6. Curvas de *Ue, Mmod, β_{mod} y fn* contra el número de divisiones por borde en modelo de losa con bordes empotrados.

Tabla 4.3. Valores de U_e, M_{mod}, β_{mod} y f_n en modelo de trabe simplemente apoyado.

No. Divisiones	U_e [kgcm]	M_{mod} [kgf-s^2/cm]	β_{mod}	f_n [Hz]
2	44.028	2.520	0.500	16.113
4	53.419	2.542	0.504	16.258
8	55.666	2.543	0.505	16.268
16	56.221	2.502	0.503	16.271
32	56.360	2.583	0.505	16.271

Tabla 4.4. Valores de U_e, M_{mod}, β_{mod} y f_n en modelo de trabe empotrado.

No. Divisiones	U_e [kgcm]	M_{mod} [kgf-s^2/cm]	β_{mod}	f_n [Hz]
2	9.550	2.520	0.500	31.027
4	10.321	2.110	0.419	35.162
8	10.413	2.099	0.417	35.348
16	10.429	2.066	0.416	35.361
32	10.433	2.132	0.417	35.373

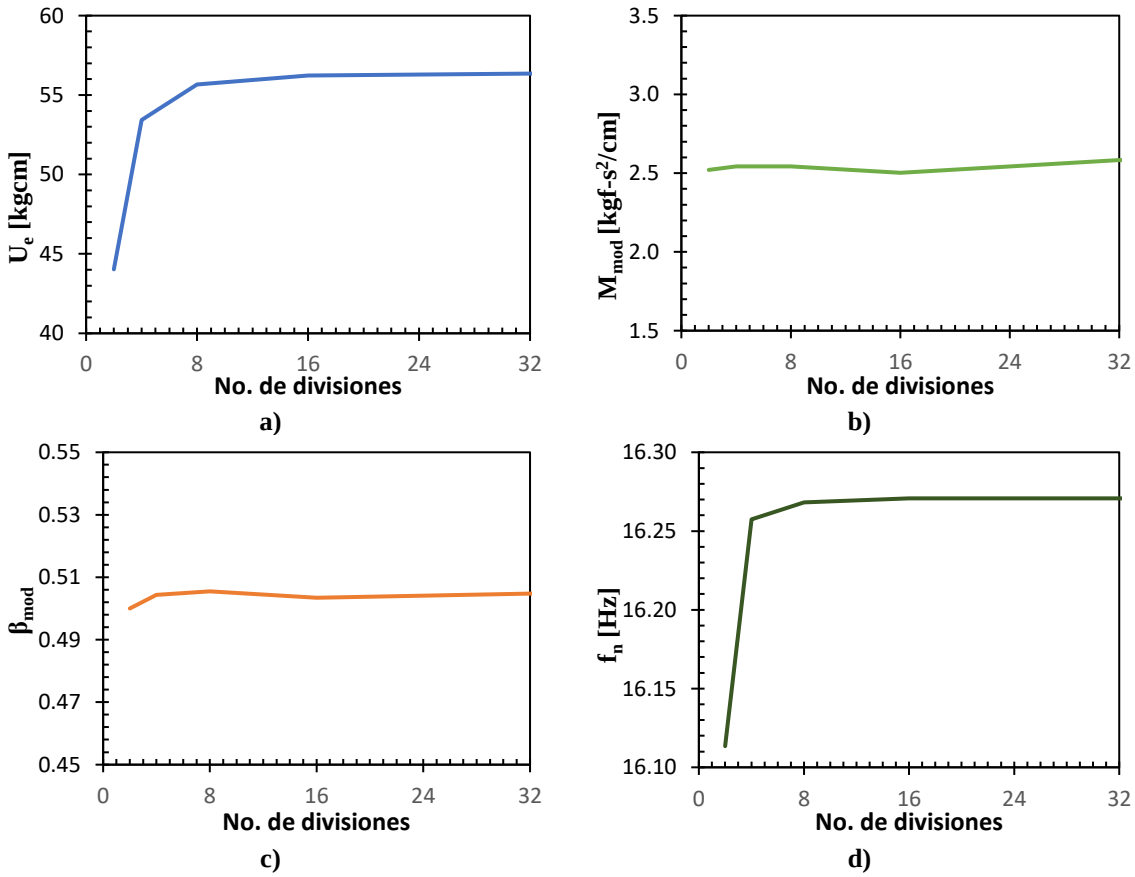


Figura 4.7. Curvas de U_e, M_{mod}, β_{mod} y f_n contra el número de divisiones en modelo de trabe simplemente apoyado.

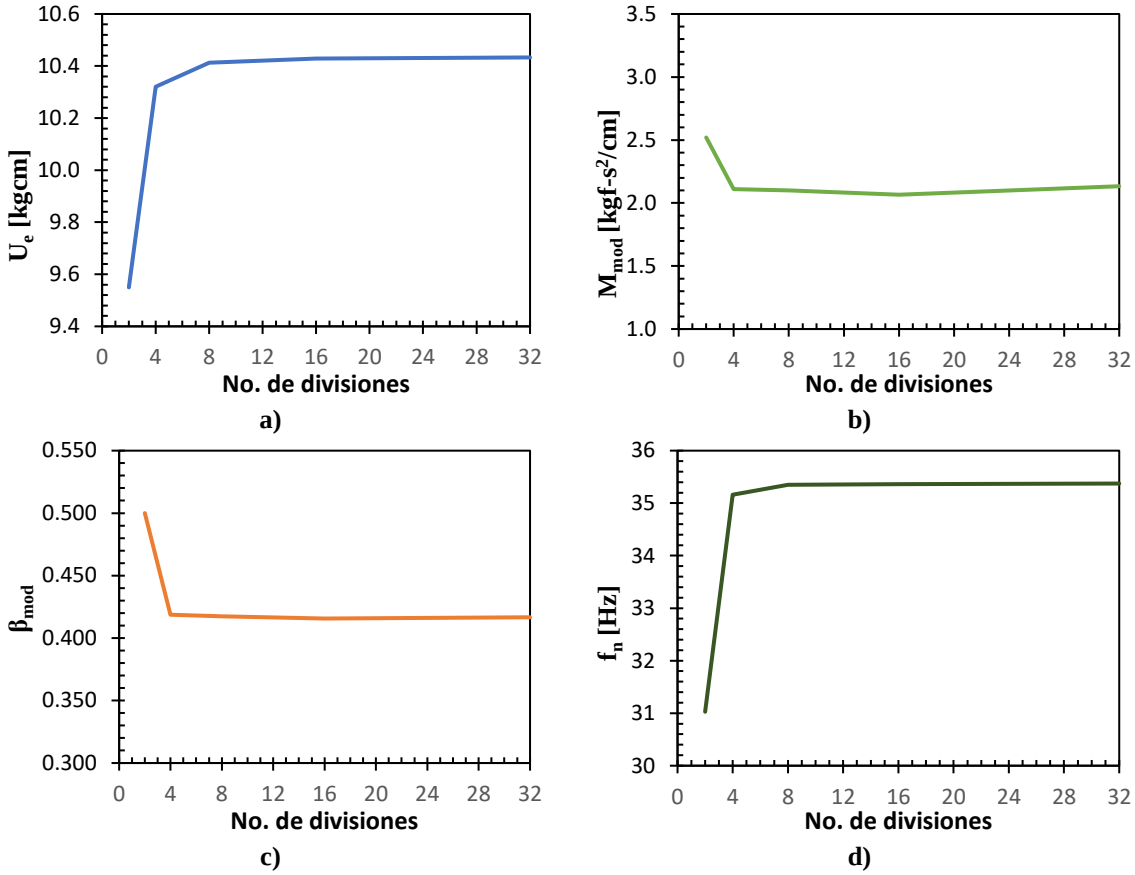


Figura 4.8. Curvas de U_e, M_{mod}, β_{mod} y f_n contra el número de divisiones en modelo de trabe empotrado.

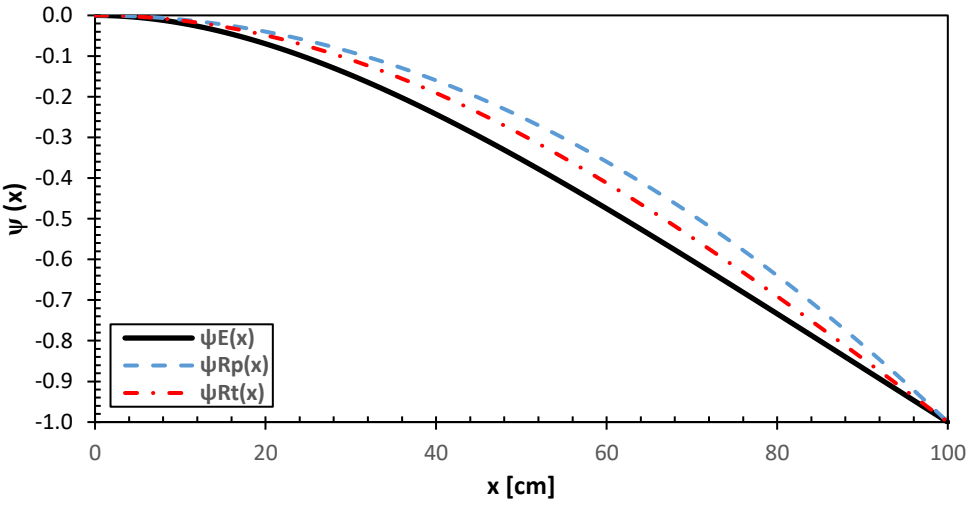
4.4 Análisis de la relación de masa modal β_{mod} de trabes de concreto reforzado con distintos tipos de apoyo

Con los métodos descritos en la sección 4.2 se obtienen las funciones de forma para trabes en cantiléver, simplemente apoyado y empotrado en sus extremos enlistados en la Tabla 4.5. La primera y tercera columna son las funciones de forma obtenidas mediante el método aproximado de Rayleigh Ritz y la columna central son las funciones de forma obtenidas mediante el método cerrado por doble integración $\psi_E(x)$. Para el método aproximado con función polinomial $\psi_{Rp}(x)$ (ec. 4.3) se consideró una función de dos términos, tres términos y cuatro términos para la trabe en cantiléver, simplemente apoyada y doblemente empotrada, respectivamente. Para la aproximación con funciones trigonométricas $\psi_{Rt}(x)$ (ec. 4.4) se obtuvieron las funciones de forma con funciones de un término en cada caso.

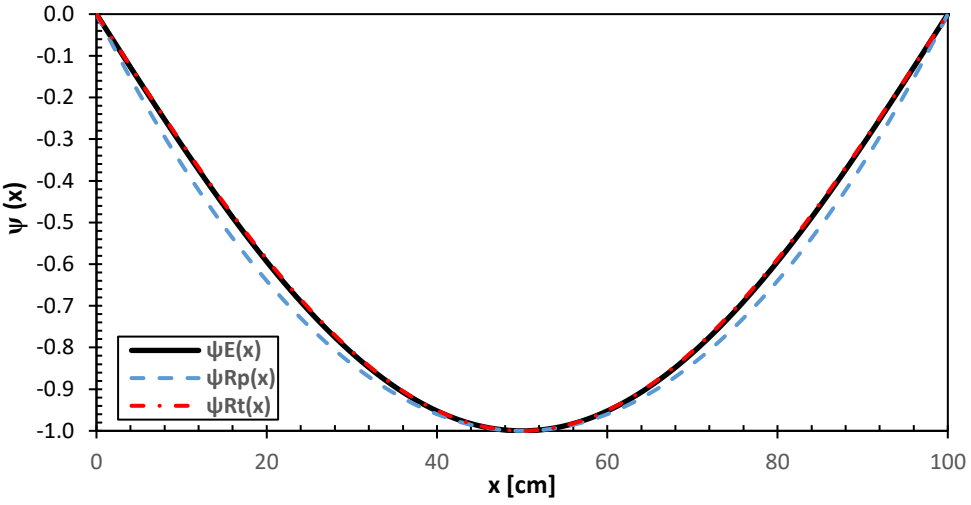
De acuerdo con las Figuras 4.9a y 4.9b, en donde se grafica la función de forma $\psi(x)$ contra la longitud de una trabe de 100 cm, la ψ_{Rt} obtenida para la trabe en cantiléver y simplemente apoyada se ajusta más a la curva obtenida con la solución cerrada (ψ_E). Para la trabe doblemente empotrada, las funciones de forma ψ_{Rt} y ψ_{Rp}, la diferencia es mayor con respecto a la curva obtenida con la ψ_E.

Tabla 4.5. Funciones de forma para distintas condiciones de apoyo para trabes con los métodos: Rayleigh Ritz y Doble Integración.

Condiciones de apoyo	Aproximación Rayleigh Ritz ($\psi_{Rp}(x)$)	Solución cerrada por doble integración ($\psi_E(x)$)	Aproximación Rayleigh Ritz ($\psi_{Rt}(x)$)
Cantiléver	$\frac{x^2}{L^2}$	$\frac{x^2(x^2-4Lx+6L^2)}{3L^4}$	$1-cos\frac{\pi x}{2L}$
Simplemente apoyado	$\frac{4x(x-L)}{L^2}$	$\frac{16x(x^3-2x^2L+L^3)}{5L^4}$	$sin\frac{\pi x}{L}$
Doblemente Empotrado	$\frac{8x(x-L)(x+3L)}{7L^3}$	$\frac{16x^2(x-L)^2}{L^4}$	$sin\frac{\pi x}{L}$

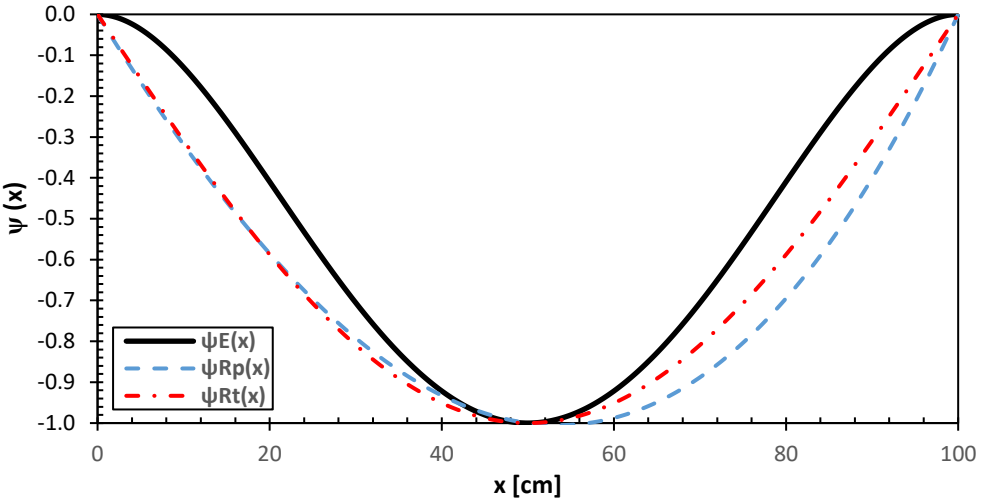


a)



b)

Figura 4.9. Funciones de forma para trabes del tipo: a) cantiléver, b) simplemente apoyado y c) doblemente empotrado.



c)

Figura 4.9. Continuación de la Figura.

Con los resultados obtenidos en 4.2.2 se calcula β_{mod} numéricamente con la ecuación (4.15) para las trabes con 20 divisiones por elemento; posteriormente se compara con los β_{mod} propuestos por HIVOSS (2007) y los obtenidos, integrando las funciones de forma enlistados en la Tabla 4.5 y empleando la ecuación (4.13). De acuerdo con los resultados enlistados en la Tabla 4.6 para los distintos tipos de trabes y métodos, la β_{mod} para la trabe en cantiléver propuesta por HIVOSS (2007) no corresponde a los resultados obtenidos mediante las soluciones aproximadas, cerradas y numéricamente; por lo que el valor de β_{mod} para este tipo de trabe es 0.26. Además, para la trabe simplemente apoyada y empotrada, la β_{mod} con los métodos mencionados coincide con el propuesto por HIVOSS (2007) siendo el β_{mod} de 0.50 y 0.41 para la trabe simplemente apoyada y empotrada, respectivamente.

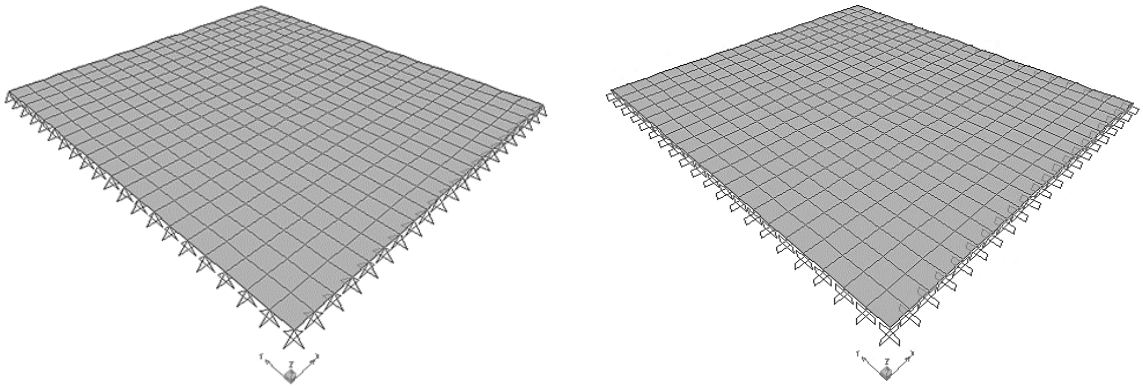
Tabla 4.6. Comparativa de relaciones de masa modal β_{mod} obtenidos con distintos métodos.

Condiciones de apoyo	HIVOSS (2007) (M^*_{HIVOSS})	Aproximación Rayleigh Ritz (M^*_{Rp})	Solución cerrada (M^*_{E})	Aproximación Rayleigh Ritz (M^*_{Rt})	Numérico (M^*_{num})
Cantiléver	$0.64mL$	$0.20mL$	$0.26mL$	$0.23mL$	$0.26mL$
Simplemente apoyado	$0.50mL$	$0.53mL$	$0.50mL$	$0.50mL$	$0.47mL$
Doblemente Empotrado	$0.41mL$	$0.53mL$	$0.41mL$	$0.50mL$	$0.42mL$

4.5 Análisis de la relación de masa modal β_{mod} de losa de concreto reforzado con distintos tipos de apoyo

Determinar una función de forma a través de la teoría clásica de placas es complejo, por lo que se opta por determinar la relación de masa modal numérica β_{modnum} de losa de concreto reforzado mediante modelos numéricos a partir de la ecuación (4.15). Primero, se analiza la losa de concreto reforzado considerando bordes simplemente apoyados y empotrados sin considerar las trabes y columnas (Figura 4.10a y Figura 4.10b) con 20 divisiones por borde, y, considerando las trabes del modelo aislado de la Figura 2.2a para la condición de bordes flexibles. Posteriormente, la β_{modnum} al

incrementar las dimensiones de las trabes, columnas y losa. Para ambos análisis se utilizan las propiedades y dimensiones de los elementos del modelo aislado.



a) **b)**

Figura 4.10. Modelo numérico de losa de concreto reforzado con bordes: a) simplemente apoyados, b) empotrados.

En HIVOSS (2007) se proponen valores de β_{mod} aproximados de 0.25 y 0.17 para losas con bordes simplemente apoyados y empotrados, respectivamente. De acuerdo con los resultados enlistados en la Tabla 4.7, el valor obtenido de β_{modnum} con bordes empotrados es de 0.262 y 0.183 para el otro caso; teniendo una diferencia del 7.57% y 4.98%, respectivamente. Además, los valores obtenidos son aproximados con los reportados en las Tablas 4.1 y 4.2 de la sección 4.2.2.

Tabla 4.7. Relaciones de masa modas para losa de concreto reforzado.

Concepto	δ_{max} [cm]	m_{tot} [kgf-s^2/cm]	M_{mod} [kgf-s^2/cm]	β_{modnum}
Bordes simplemente apoyados	-0.349	14.232	3.735	0.262
Bordes empotrados	-0.109	14.232	2.603	0.183
Bordes flexibles	-0.187	14.232	3.497	0.246

Los valores de β_{modnum} de la losa sobre bordes flexibles (trabes) sin modificar las dimensiones de los elementos estructurales que la soportan, el valor es de 0.246; por lo que este valor es aproximado a $\beta_{mod} = 0.25$ cuando los bordes son simplemente apoyados con una diferencia del 1.6% (HIVOSS, 2007). Los resultados obtenidos se compararon con dicho valor de β_{mod} para obtener su diferencia en porcentaje. En la Figura 4.11 se muestran los resultados obtenidos de β_{modnum} contra la I_{norm} con respecto a las dimensiones de los elementos del modelo base al incrementar las secciones de las trabes (T_{a1}, T_{a2}), columnas (C_{a1}, C_{a2}) (Figura 4.11a) y el espesor de losa (Figura 4.11b) para el claro corto (a_1) y largo (a_2).

Al incrementar el peralte de las trabes, los valores de β_{modnum} decrecen en promedio desde un 2.56% hasta un 4.45%; en donde se observa un decremento ligeramente mayor en el claro corto a_1. Análogamente al incrementar la sección de las columnas, la β_{modnum} decrece hasta un 3.82%; se obtienen valores menores de β_{modnum} al incrementar la sección de la columna paralela al claro largo a_2, ya que la columna rectangular de 40x60 cm del modelo base se transforma a una cuadrada de 60x60 cm en la última iteración. Sin embargo, al incrementar el espesor de la losa, la β_{modnum} aumenta un 4.71% cuando el espesor es de 15 cm hasta un 19.24% cuando el espesor es de 20 cm.

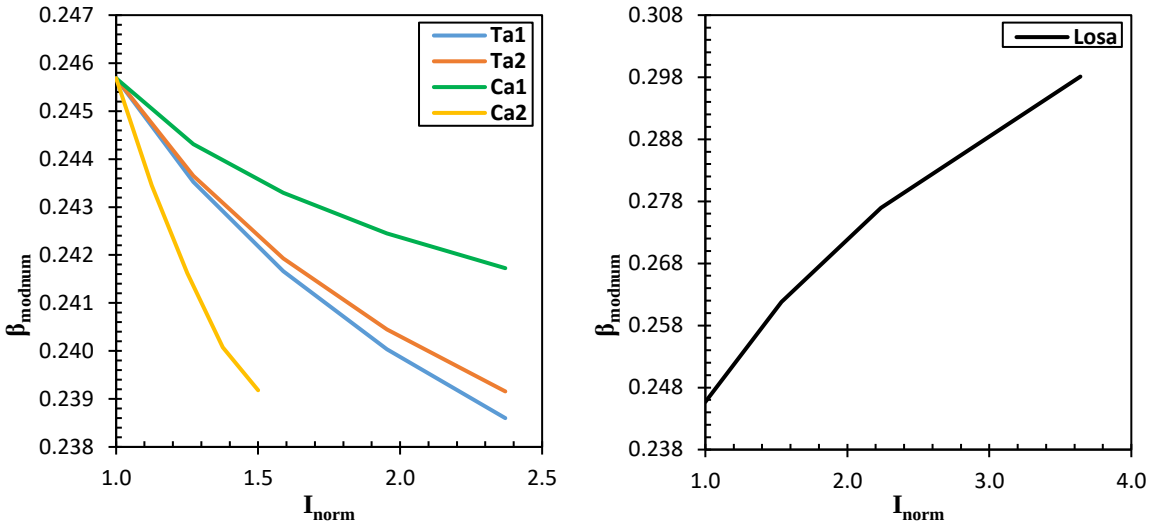


Figura 4.11 Curvas de β_{modnum} contra la inercia normalizada I_{norm} en modelo numérico aislado con m=0.9: a) trabes y columnas, b) losa.

Análogamente se realizó el análisis con las propiedades de la losa anterior modificando el claro corto a_1 para analizar la relación de masa modal numérica. La relación de claros ($m = a_1/a_2$) es de 0.9 y 0.5 para la losa de la Figura 2.1b y Figura 4.12, respectivamente. De acuerdo con los resultados mostrados en la Figura 4.13, la tendencia de la β_{modnum} al incrementar la sección de las trabes, columnas y losa es similar con respecto a los resultados obtenidos cuando $m = 0.9$ (Figura 4.11); sin embargo, al reducir el claro corto la β_{modnum} sin modificar los elementos es de 0.291 con una diferencia del 18.47% cuando $m = 0.9$ y $\beta_{modnum} = 0.246$.

Al incrementar la sección de las trabes en la dirección larga no se observó un cambio significante de la β_{modnum} con una diferencia promedio del 18.45%; sin embargo, en la dirección corta se observa un decremento significante de hasta el 21.05%. Al incrementar las columnas paralelo al claro corto y largo, se observó un decremento en la β_{modnum} del 18.22% y 15.95%, respectivamente. Finalmente, la β_{modnum} de la losa se incrementó en promedio un 17.88% con respecto a los resultados de la Figura 4.11b y un 31.98% con respecto al valor recomendado en HIVOSS (2007) de 0.25.

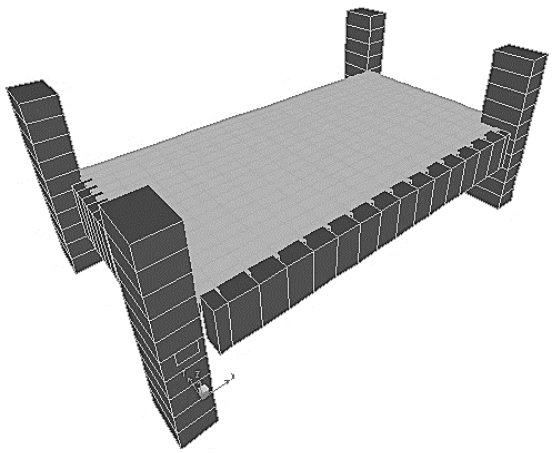


Figura 4.12. Losa con claro largo a_2= 6.2 m y claro corto a_1= 3 m.

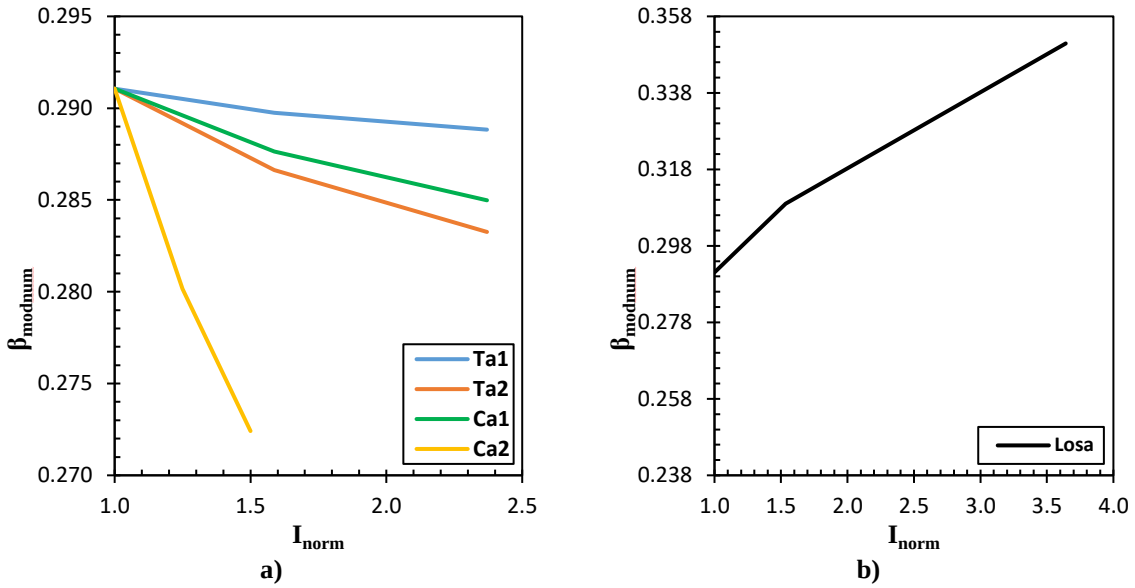


Figura 4.13. Curvas de β_{modnum} contra la inercia normalizada I_{norm} en modelo numérico aislado con m=0.5: a) trabes y columnas, b) losa.

4.6 Análisis de la frecuencia natural para losas y trabes de concreto reforzado con distintos tipos de apoyo

De acuerdo con HIVOSS (2007), la f_n para una placa se obtiene con la ecuación (4.17); para la aplicación de esta expresión se asume que no existen deflexiones laterales en ningún punto de los bordes de la placa.

$$f_n = \frac{\alpha}{L^2}\sqrt{\frac{Et^2}{12m(1-\nu^2)}} \tag{4.17}$$

Donde:

$\alpha =$ coeficiente que depende de las condiciones de apoyo
$L =$ longitud de la placa en el claro largo [m]
$m =$ masa distribuida de la placa incluyendo SCM [kg/m^2]
$E =$ módulo de elasticidad del material [kgf/m^2]
$t =$ espesor de la placa [m]
$\nu =$ módulo de Poisson

De modo que el coeficiente α para una placa con bordes simplemente apoyados y empotrados se calcula con las ecuaciones (4.18) y (4.19), respectivamente.

$$\alpha = 1.57(1+\lambda^2) \tag{4.18}$$

$$\alpha = 1.57\sqrt{5.14 + 3.13\lambda^2 + 5.14\lambda^4} \tag{4.19}$$

Donde λ es la relación entre claro largo (L) y corto (B) de la placa.

$$\lambda = \frac{L}{B} \tag{4.20}$$

Por otro lado, la f_n para trabes simplemente apoyadas y empotradas se obtiene con las ecuaciones (4.21) y (4.22), respectivamente.

$$f_n = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{3EI}{0.49ml^4}} \tag{4.21}$$

$$f_n = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{3EI}{0.37ml^4}} \tag{4.22}$$

Donde:

$E =$ módulo de elasticidad del material [kgf/m^2]
$I =$ momento de inercia [m^4]
$m =$ masa distribuida [kg/m]
$E =$ módulo de elasticidad del material [kgf/m^2]
$l =$ Longitud de la trabe [m]

4.6.1 Evaluación de la frecuencia natural

Una vez definidas las expresiones para el cálculo de la f_n que propone HIVOSS (2007) para placas y trabes en función de sus condiciones de apoyo, se calcula la f_n analítica con las propiedades de la estructura de la sección 2.2. A la vez, estos resultados se comparan con los obtenidos mediante los modelos numéricos utilizados en las secciones 4.4 y 4.5 para la losa, las trabes paralelas al claro corto a_1 ($l = 560\ cm$) y a_2 ($l = 620\ cm$). Los resultados se enlistan en la Tabla 4.8, se observa una diferencia considerable para los resultados obtenidos para las trabes con apoyos empotrados; sin embargo, los valores de las f_n analíticas para este caso son conservadores, ya que son mayores a los obtenidos numéricamente.

Tabla 4.8. Valores analíticos y numéricos de la f_n.

Concepto	Condiciones de apoyo	f_n [Hz]		Diferencia
		HIVOSS (2007)	Numérico	Δf_n [%]
Losa	Bordes simplemente apoyados	10.601	10.587	0.14
	Bordes empotrados	19.464	19.320	0.74
Trabes en la dirección a_1	Simplemente apoyado	16.496	16.271	1.38
	Doblemente Empotrado	37.968	35.361	7.37
Trabes en la dirección a_1	Simplemente apoyado	22.533	22.168	1.65
	Doblemente Empotrado	51.862	47.769	8.57

5 ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DINÁMICA EN TÉRMINOS DE LA ACELERACIÓN DE LOSAS DE CONCRETO REFORZADO MEDIANTE EXPRESIONES ANALÍTICAS

5.1 Introducción

En este capítulo se valida una metodología para determinar las aceleraciones máximas analíticas para sistemas amortiguados de 1GDL ante carga armónica. La carga armónica utilizada para el análisis es la que describe el caminar humano (AISC, 1997), *i.e.*, $F(t) = P\alpha_i \cos(2\pi i f_s t)$ dada en la ecuación (1.15). Para obtener la aceleración analítica es necesario determinar previamente todas las propiedades dinámicas de la estructura de la Figura 2.2. La f_n de las trabes y sistema de piso con las ecuaciones de la sección 4.6; la M_{mod} con la ecuación (4.13); la rigidez modal (K_{mod}) con la ecuación (5.1) propuesta en HIVOSS (2007); la frecuencia circular natural (ω_n) y amortiguada (ω_D) de la estructura, de excitación debido a la carga armónica (ω_e) con las ecuaciones (5.2), (5.3) y (5.4), respectivamente (Chopra, 2014). Los valores analíticos de este capítulo se compararán con los numéricos obtenidos en este trabajo y experimentales por Caballero (2020), lo anterior para validar la respuesta dinámica de la estructura con expresiones analíticas en términos de la aceleración máxima.

$$K_{mod} = (2\pi f_n)^2 M_{mod} \tag{5.1}$$

$$\omega_n = 2\pi f_n \tag{5.2}$$

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \tag{5.3}$$

$$\omega_e = 2\pi f_s \tag{5.4}$$

5.2 Formulación analítica para el cálculo de la aceleración en losas de concreto reforzado en dos direcciones

Para un sistema de 1GDL con amortiguamiento ante carga armónica, la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_0 \cos(\omega_e t) \tag{5.5}$$

Esta ecuación diferencial tiene una solución compuesta por las soluciones particular y complementaria. La solución particular (ec. 5.5) corresponde a la respuesta en vibración forzada o estacionaria debido a la carga armónica en términos de ω_e. La solución complementaria (ec. 5.6) corresponde a la respuesta en vibración libre o transitoria que decae con el tiempo debido al amortiguamiento natural del sistema en términos de ω_n (Figura 5.1).

$$u_p(t) = Csen(\omega_e t) + Dcos(\omega_e t) \tag{5.6}$$

$$u_c(t) = e^{-\xi\omega_n t}[Acos(\omega_D t) + Bsen(\omega_D t)] \tag{5.7}$$

Por lo que la solución general de la ecuación (5.4) es

$$u(t) = e^{-\xi\omega_n t}[Acos(\omega_D t) + Bsen(\omega_D t)] + Csen(\omega_e t) + Dcos(\omega_e t) \tag{5.8}$$

Dividiendo la ecuación (5.4) por m, considerando que $c = 2m\omega_n$ y ${\omega_n}^2 = k/m$.

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n\dot{u} + {\omega_n}^2 u = \frac{P_0}{m}\cos(\omega_e t) \tag{5.9}$$

Derivando dos veces la ecuación (5.5)

$$\dot{u}_p(t) = \omega_n C cos(\omega_n t) - \omega_n D sen(\omega_n t) \tag{5.10}$$

$$\ddot{u}_p(t) = -{\omega_n}^2 C sen(\omega_n t) - {\omega_n}^2 D cos(\omega_n t) \tag{5.11}$$

Las constantes C y D de la solución particular se determinan al sustituir las ecuaciones (5.10) y (5.11) en la ecuación (5.9)

$$\begin{gathered}[({\omega_n}^2 - {\omega_e}^2)C - (2\xi\omega_n\omega_e)D]sen(\omega_e t) + [({\omega_n}^2 - {\omega_e}^2)D + \\ (2\xi\omega_n\omega_e)C]cos(\omega_e t) = \frac{P_0}{m}\cos(\omega_e t)\end{gathered} \tag{5.12}$$

Separando múltiplos de senos, cosenos y dividiendo por ${\omega_n}^2$

$$\left\{\left[1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_n}\right)^2\right]C - \left(2\xi\frac{\omega_e}{\omega_n}\right)D\right\}sen(\omega_e t) = 0 \tag{5.13}$$

$$\left\{\left[1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_n}\right)^2\right]D + \left(2\xi\frac{\omega_e}{\omega_n}\right)C\right\}cos(\omega_e t) = \frac{P_0}{{\omega_n}^2 m}\cos(\omega_e t) \tag{5.14}$$

Donde la relación de frecuencias se expresa como

$$r = \frac{\omega_e}{\omega_n} \tag{5.15}$$

Resolviendo las ecuaciones (5.13) y (5.14) por separado debido a que los términos de seno y coseno desaparecen en tiempos diferentes se obtienen las constantes C y D de la solución particular (Chopra, 2014).

$$C = \frac{P_0}{k}\left[\frac{1 - r^2}{(1 - r^2) + (2\xi r)^2}\right] = (u_{est})_0\left[\frac{1 - r^2}{(1 - r^2) + (2\xi r)^2}\right] \tag{5.16}$$

$$D = \frac{P_0}{k}\left[\frac{-2\xi r}{(1 - r^2) + (2\xi r)^2}\right] = (u_{est})_0\left[\frac{-2\xi r}{(1 - r^2) + (2\xi r)^2}\right] \tag{5.17}$$

Sustituyendo los coeficientes C y D en la solución general de la ecuación (5.8) y derivando una vez con respecto al tiempo se tiene

$$\begin{aligned}u(t) = {} & e^{-\xi\omega_{nt}}[Acos(\omega_D t) + Bsen(\omega_D t)] \\ & + \left[\frac{(u_{est})_0}{(1 - r^2) + (2\xi r)^2}\right][(1 - r^2)sen(\omega_e t) - (2\xi r)cos(\omega_e t)]\end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) = &-\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}[Acos(\omega_D t) + Bsen(\omega_D t)] \\ &+ e^{-\xi\omega_n t}[\omega_{\ D} Bcos(\omega_D t) - \omega_D Asen(\omega_D t)] \\ &+ \left[\frac{(u_{est})_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}\right][(1-r^2)(\omega_e)cos(\omega_e t) \\ &+ (2\xi r)(\omega_e)sen(\omega_e t)]\end{aligned} \tag{5.19}$$

Donde las constantes A y B de la solución complementaria (ec. 5.7) se obtienen en términos del desplazamiento inicial $u(0) = 0$ y la velocidad inicial $\dot{u}(0) = 0$, las cuales son las condiciones iniciales cuando el sistema parte del reposo.

$$A = \frac{(2\xi r)(u_{est})_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \tag{5.20}$$

$$B = \left[\frac{(u_{est})_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}\right]\left[\frac{2\xi^2\omega_n r - (1-r^2)(\omega_e)}{\omega_D}\right] \tag{5.21}$$

En la respuesta del estado estático, cuando $\omega_e = \omega_n$, la relación de frecuencias circulares y, las constantes C y D son

$$r = 1 \begin{cases} C = 0 \\ D = -\frac{P_0}{k}\frac{1}{2\xi} = -\frac{(u_{est})_0}{2\xi} \end{cases} \tag{5.22}$$

De igual forma, si $r = 1$ y las condiciones iniciales son $u(0) = 0$ y $\dot{u}(0) = 0$, sustituyendo en las ecuaciones (5.18) y (5.19) se tiene

$$u(0) = e^{-\xi\omega_{nt}}[Acos(\omega_D t) + Bsen(\omega_D t)] - \frac{(u_{est})_0}{2\xi}cos(\omega_e t) = 0 \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}\dot{u}(0) = &-\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}[Acos(\omega_D t) + Bsen(\omega_D t)] \\ &+ e^{-\xi\omega_n t}[\omega_{\ D} Bcos(\omega_D t) - \omega_D Asen(\omega_D t)] \\ &+ \frac{(u_{est})_0}{2\xi}\omega_e sen(\omega_e t) = 0\end{aligned} \tag{5.24}$$

Con las ecuaciones (5.23) y (5.24) se determinan nuevamente las constantes A y B de la solución complementaria. Las cuales reemplazan a las ecuaciones (5.20) y (5.21), ya que al partir del reposo ($t = 0$), la frecuencia circular de excitación de la carga armónica (ω_e) es igual a la frecuencia natural del sistema (ω_n) (Anderson, 2012).

$$A = \frac{(u_{est})_0}{2\xi} \tag{5.25}$$

$$B = \frac{(u_{est})_0}{2\sqrt{1-\xi^2}} \tag{5.26}$$

La aceleración se obtiene al derivar dos veces la solución general (ec. 5.8) con respecto al tiempo y sustituyendo las constantes previamente definidas de cada solución de la ecuación diferencial para la obtención de la aceleración máxima del sistema equivalente de 1GDL.

$$\begin{aligned}\ddot{u}(t) = {} & \xi^2{\omega_n}^2 e^{-\xi\omega_n t}[A\cos(\omega_D t) + B\,sen(\omega_D t)] \\ & + 2\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}[{\omega_D}A\,sen(\omega_D t) - \omega_D B\cos(\omega_D t)] \\ & - e^{-\xi\omega_n t}\left[{\omega_D}^2 A\cos(\omega_D t) + {\omega_D}^2 B\,sen(\omega_D t)\right] \\ & - [{\omega_e}^2 C\,sen(\omega_e t) + {\omega_e}^2 D\cos(\omega_e t)]\end{aligned} \tag{5.27}$$

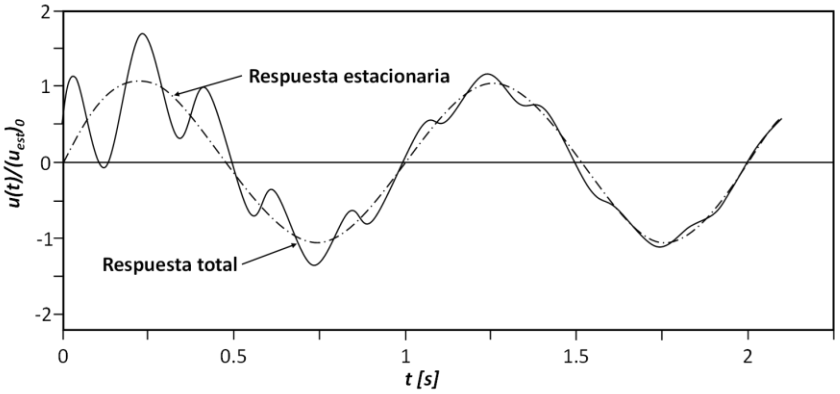


Figura 5.1. Respuesta de un sistema de 1GDL amortiguado ante carga amónica (tomado de Chopra, 2014).

5.3 Aceleración máxima analítica por el caminar de una persona

A continuación, se presenta un método analítico para el análisis de la aceleración máxima en losa de concreto reforzado debido al caminar de una persona con las propiedades dinámicas de la Tabla 5.1, donde la ω_e se calcula con la ecuación (5.24). Primero, se calcula la f_n total con la aproximación de Dunkerley (ec. 5.24) de acuerdo con las recomendaciones de HIVOSS (2007) y las frecuencias circulares ω_n y ω_D de la estructura en función de la f_n; después, la M_{mod} y K_{mod} a partir de valores propuestos de β_{mod} analizados en el capítulo 4 y, finalmente, la aceleración máxima.

$$\frac{1}{f^2} = \frac{1}{{f_1}^2} + \frac{1}{{f_2}^2} + \frac{1}{{f_3}^2} + \cdots + \frac{1}{{f_n}^2} \tag{5.28}$$

Tabla 5.1. Propiedades dinámicas de la carga de excitación.

Concepto		Valor
Frecuencia de paso	f_s [Hz]	2.1
Coeficientes dinámicos	α_1	0.5
	α_2	-
	α_3	-
	α_4	-
Carga de excitación	P_0 [kg]	97.0
Frecuencia circular de excitación	ω_e [rad/s]	13.195

Las propiedades de los elementos estructurales se enlistan en la Tabla 5.2, el peso de las trabes más el peso correspondiente de la losa se obtiene con las áreas tributarias mostradas en la Figura 5.2. Estos valores se sustituyen en las ecuaciones de la sección 4.6 y en la ecuación (5.24) para determinar la f_n de cada elemento y total de la estructura, respectivamente. Posteriormente, las frecuencias circulares ω_n y ω_D de la estructura se calculan con ecuaciones (5.2) y (5.4), al sustituir la f_n total obteniendo los valores enlistados en la Tabla 5.3.

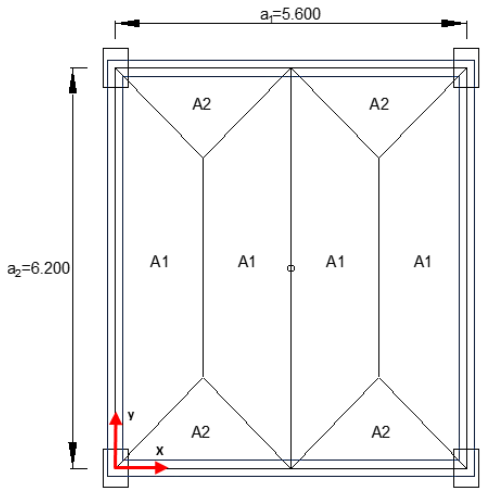


Figura 5.2. Áreas tributarias en tablero aislado.

Tabla 5.2. Propiedades de los elementos estructurales.

Concepto	Variable	Magnitud
Losa	**W_{CM} [kg/cm^2]**	0.031
Trabes en la dirección a_1	**W_{a1} [kg/cm]**	6.414
Trabes en la dirección a_2	**W_{a2} [kg/cm]**	7.957
Sobre carga muerta (SCM)	**W_{SCM} [kg/cm^2]**	0.009
Losa + SCM	**W_{CM+SCM} [kg/cm^2]**	0.040

Tabla 5.3. Valores de la f_n, ω_n y ω_D total del sistema.

Frecuencia natural	
Concepto	**Magnitud**
$f_{n,losa}$ [Hz]	19.464
$f_{n,trabesa1}$ [Hz]	37.968
$f_{n,trabesa2}$ [Hz]	51.862
$\Sigma(1/f_i^2)$ [s^2]	0.005
f_n [Hz]	14.478
ω_n [rad/s]	90.968
ω_D [rad/s]	90.855

Para la masa M_{mod} se analizan tres casos para los valores de β_{mod} (Tabla 5.4), considerando la losa y trabes de concreto reforzado con bordes simplemente apoyados y extremos empotrados, respectivamente. El caso [1] corresponde a la relación de masa modal numérica de la losa obtenida en la Tabla 4.7 con bordes simplemente apoyados y analítica con la solución cerrada (Tabla 4.6). El caso [2] corresponde a los obtenidos por medio de modelos numéricos, la β_{mod} de la losa del modelo apoyado sobre bordes flexibles (Tabla 4.7) y las trabes con respecto a la Tabla 4.4, y, el caso [3] corresponde a las β_{mod} propuestas por HIVOSS (2007). Por lo que, la M_{mod} (ec. 4.13) y K_{mod} (ec. 5.1) se calculan a partir de la m_{total} y f_n; los resultados se enlistan en la Tabla 5.5.

Tabla 5.4. Valores de β_{mod} con distintos métodos.

Tipo elemento	[1] $\beta_{modan\text{-}num}$	[2] β_{modnum}	[3] $\beta_{modHIVOSS}$
Losa	0.262	0.246	0.25
Trabes en la dirección a_1	0.406	0.417	0.41
Trabes en la dirección a_2	0.406	0.417	0.41

Tabla 5.5. Propiedades dinámicas del sistema.

Tipo elemento	m_{total} [kg-s^2/cm]	M_{mod} [kg-s^2/cm]			K_{mod} [kg/cm]		
		[1]	[2]	[3]	[1]	[2]	[3]
Losa	14.233	3.729	3.501	3.558	55768.700	52362.978	53214.409
Trabes en dirección a_1	10.061	4.085	4.196	4.125	232556.887	238857.690	234848.088
Trabes en dirección a_2	7.325	2.974	3.055	3.003	315602.324	324153.126	318711.707
Σ	**31.619**	**10.788**	**10.752**	**10.687**	**603927.912**	**615373.794**	**606774.204**

Las constantes de la solución general (ec. 5.23) se obtienen sustituyendo los datos de las Tablas 5.2 y 5.3. La relación de frecuencias circulares es $r = 0.145$, por lo que el desplazamiento está en fase con la carga; la fracción de amortiguamiento, ξ, con un valor de 0.05 con respecto a la Tabla 1.5. Con lo anterior, se determinan las constantes para cada caso debido a que se tienen distintos valores de K_{mod}; obteniendo los valores enlistados en la Tabla 5.6.

Tabla 5.6. Constantes de la solución general para la ecuación (5.27).

Constantes	Caso		
	[1]	[2]	[3]
A	1.61E-03	1.58E-03	1.60E-03
B	8.04E-05	7.89E-05	8.00E-05
C	1.61E-04	1.58E-04	1.60E-04
D	-2.38E-06	-2.33E-06	-2.37E-06

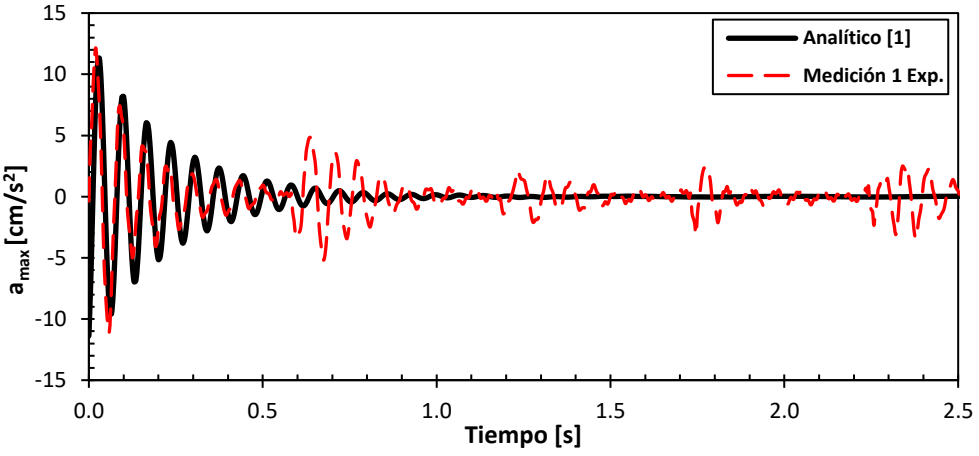
Sustituyendo los valores de las Tablas 5.3 y 5.6 en la ecuación (5.27) se obtiene la aceleración máxima analítica para cada caso. Estos resultados se comparan con las aceleraciones máximas experimentales de Caballero (2020), numéricas del modelo aislado (MA) y continuo (MC) de las secciones 2.6 y 3.4, respectivamente. Los resultados se enlistan en la Tabla 5.7; donde se observa que los resultados

obtenidos son similares a la medición experimental 1, por lo que se realiza la comparativa con este valor experimental.

El porcentaje de diferencia de las soluciones analíticas [1], [2] y [3] son las siguientes: experimental-analítico con un 2.59%, 0.68% y 2.11%; numérico-analítico (MA) con un 4.29%, 2.35% y 3.80%; soluciones numérico-analítico (MC) con un 1.16%, 0.72% y 0.69%, respectivamente. En las Figuras 5.3, 5.4 y 5.5 se muestra la comparativa de las aceleraciones analíticas para los tres casos en las cuales se observa un desfase de tiempo promedio de 0.00695 s, con respecto a los resultados numéricos y experimentales. Por lo tanto, se concluye que la aceleración máxima analítica obtenida con el caso [2] es la más aceptable, ya que presenta un menor porcentaje de diferencia con respecto a los valores experimentales y numéricos. Además, se demuestra que es posible determinar la aceleración máxima en un sistema de piso de concreto reforzado ante el caminar de una persona con el método y expresiones propuestas aplicables a sistemas equivalentes de 1GDL, ya que se obtienen resultados suficientemente aproximados.

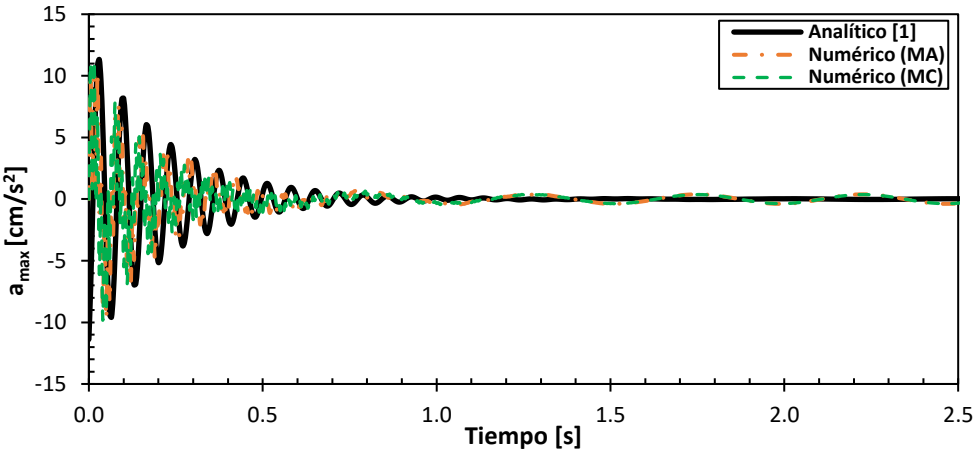
Tabla 5.7. Comparativa de aceleración experimentales, numéricas y analíticas.

Tipo de carga dinámica: Caminar de una persona							
Descripción	**Experimental Medición 1**	**Experimental Medición 2**	**Numérico (MA)**	**Numérico (MC)**	**Analítico [1]**	**Analítico [2]**	**Analítico [3]**
a_{max} (cm/s²)	11.1	7.84	10.92	11.26	11.39	11.18	11.33



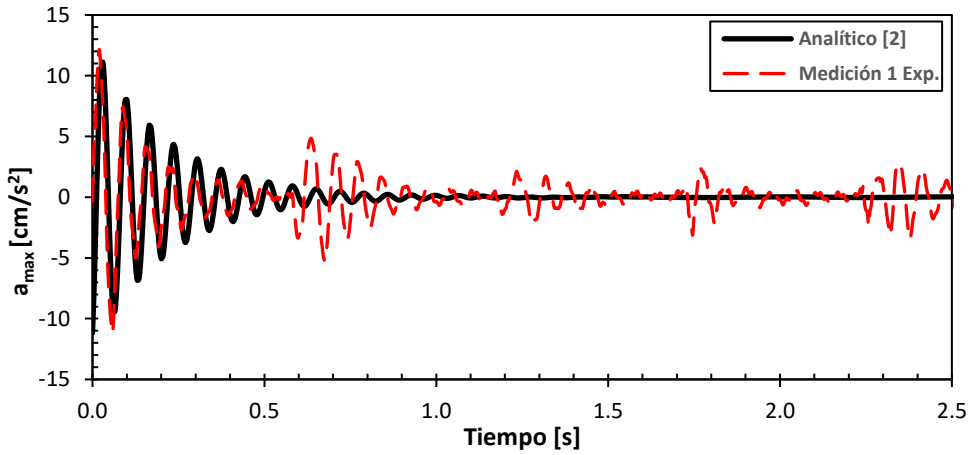
a)

Figura 5.3. Comparativa de aceleraciones: a) experimentales y b) numéricas con respecto a la solución analítica [1] por el caminar humano.

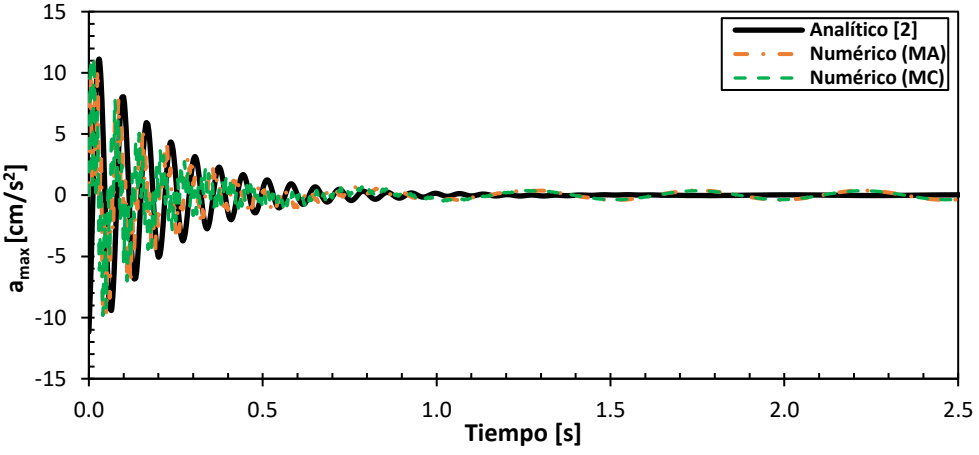


b)

Figura 5.3. Continuación de la Figura.



a)



b)

Figura 5.4. Comparativa de aceleraciones: a) experimentales y b) numéricas con respecto a la solución analítica [2] por el caminar humano.

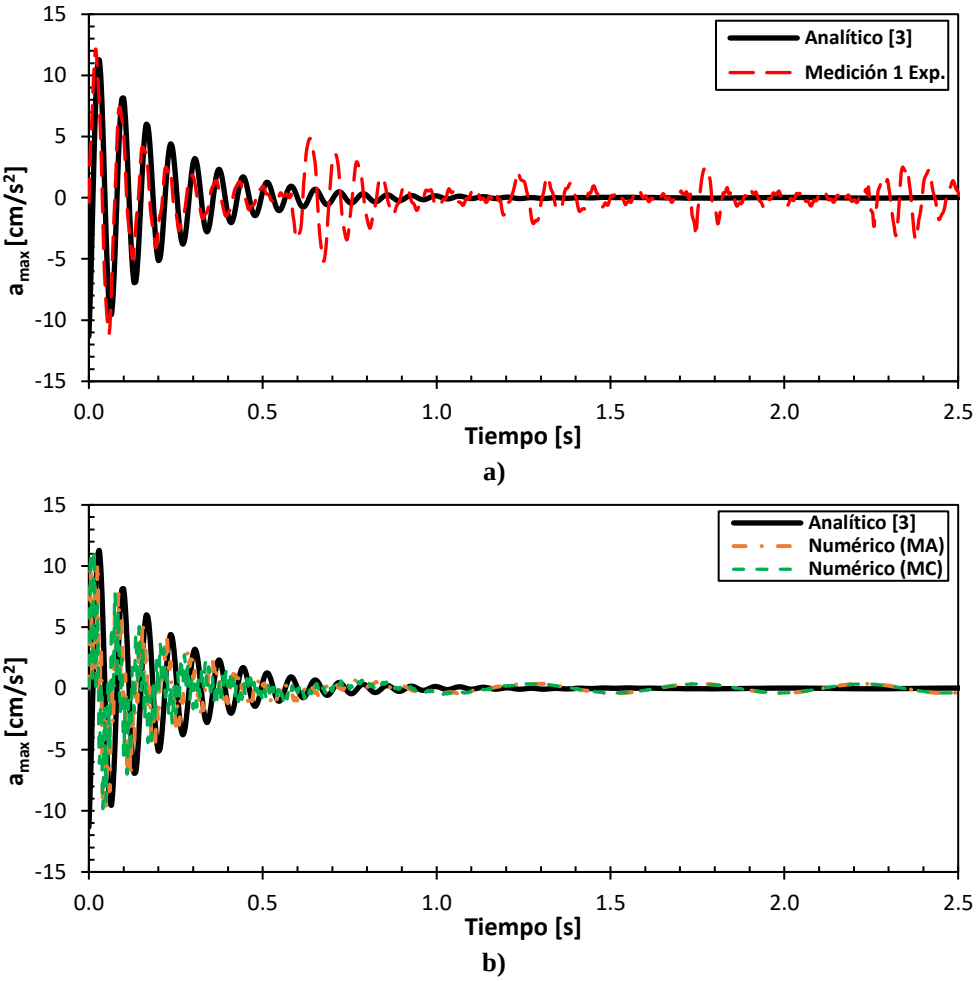


Figura 5.5. Comparativa de aceleraciones: a) experimentales y b) numéricas con respecto a la solución analítica [3] por el caminar humano.

5.3.1 Análisis de la aceleración máxima analítica ante el incremento de sus elementos estructurales principales

En adición a la sección 4.5, se calcula la aceleración máxima analítica con la ecuación (5.27) al modificar la relación de masa modal numérica de la losa de concreto reforzado ante el incremento de sus trabes y columnas. De acuerdo con los resultados mostrados en la Figura 5.6b incrementando la sección de la losa se tiene un decremento en la aceleración máxima a medida que se aumenta su espesor; por lo que los resultados siguen la misma tendencia a los obtenidos en la Tabla 3.2. Ahora bien, para el caso del incremento de trabes y columnas en ambos claros en la Figura 5.6a, se observa un incremento en la aceleración, por lo que es congruente con los resultados de las Tabla 3.6 y Tabla 3.8, respectivamente. Estos resultados son un complemento a los mostrados en la Figura 4.11 de modo que, al incrementar la sección de las trabes o columnas, el valor de β_{modnum} de la losa decrece y la a_{max} aumenta; además, al incrementar el espesor de la losa la β_{modnum} aumenta y la a_{max} decrece. Por lo tanto, la relación de masa modal es clave en cuanto al comportamiento de una losa de concreto reforzado ante actividades humanas.

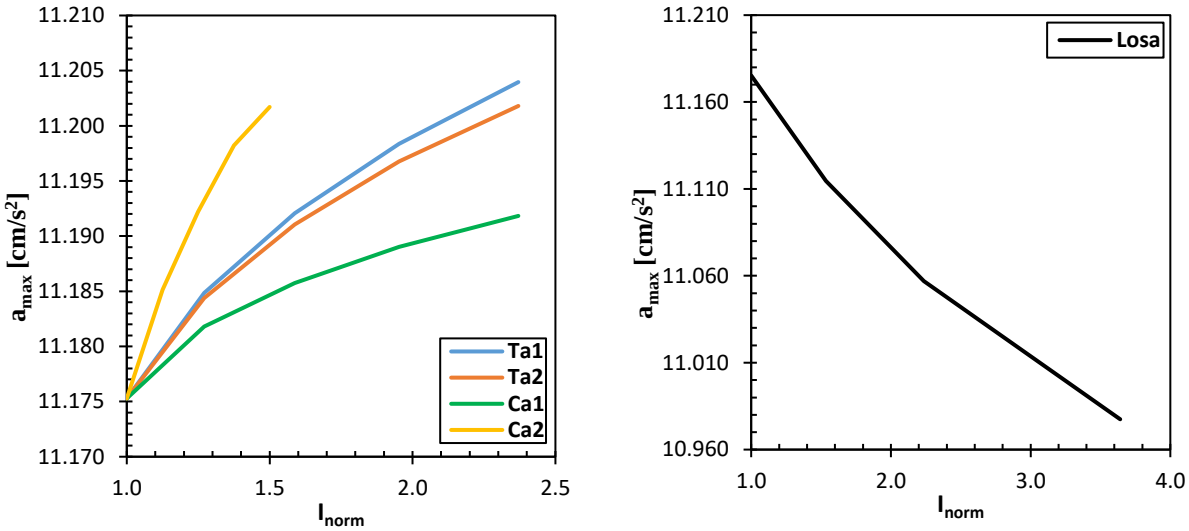


Figura 5.6. Curvas de a_{max} contra la inercia normalizada I_{norm} en modelo numérico aislado: a) trabes y columnas, b) losa.

6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 Conclusiones

En el presente trabajo se compararon las expresiones y límites que se proponen en las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto (NTCC-21, 2021) para el análisis de vibraciones en sistemas de piso debido a actividades humanas con respecto a los criterios de la guía 11 del AISC (1997), Bachmann y Ammann (1987) y Hicks (2004). En el análisis numérico de losas, las frecuencias y modos del tablero de estudio en el modelo continuo correspondían a los obtenidos al modelo aislado. Por lo que no es necesario modelar la estructura completa para realizar el análisis dinámico de un tablero, ya que los sistemas aislados son suficientemente aproximados; además, para los modelos numéricos de losas y trabes, es recomendable el uso de ocho divisiones por borde y por elemento, respectivamente.

Por medio del modelo numérico aislado se determinaron las aceleraciones máximas debido al correr, salto uniforme, balanceo y caminar; para el último caso, que es la actividad humana más común que ocurre en sistemas de piso, se evaluaron los resultados numéricos y experimentales obtenidos por Caballero (2020). Donde se observó que los resultados obtenidos con el parámetro *K* (NTCC-21 2021) debido al correr, salto, balanceo y caminar humano no son congruentes con los resultados obtenidos mediante los otros tipos de evaluación; además, las unidades del parámetro *K* no coinciden con las obtenidas en el parámetro *KB*.

Se analizó la aceleración máxima debido al caminar de una persona (carga dinámica puntual) y balanceo de un conjunto de personas (carga dinámica distribuida) cuando se modifican los elementos estructurales principales, incrementando el espesor de la losa, sección de trabes y sección de columnas; cabe mencionar que todos los análisis se realizaron con concreto de peso normal y ligero sin modificar la resistencia a compresión. Para ambos tipos de cargas dinámicas analizadas, se observó un aumento de la aceleración al incrementar la sección de las trabes al utilizar concreto normal y ligero. En cambio, al incrementar la sección de las columnas, la aceleración disminuyó y aumentó con concreto normal y ligero, respectivamente. Finalmente, al incrementar el espesor de la losa para ambos tipos de carga dinámica, la aceleración disminuyó considerablemente desde un 15% hasta un 24% con concreto normal y ligero, respectivamente. De este modo, incrementar el espesor de la losa es la mejor alternativa para disminuir las aceleraciones considerablemente para el caso de una losa de concreto reforzado susceptible a las vibraciones consideradas; además, se puede optar por la sustitución de una losa con concreto de peso normal por una de concreto ligero con mayor espesor para aligerar el peso de la estructura y disminuir las vibraciones por actividades humanas.

Se analizaron las aceleraciones máximas debido a estos dos tipos de actividades al añadir tres tipos de trabes secundarias al sistema de piso, con tres tipos de configuraciones sin modificar los elementos principales de la estructura de estudio. Para ambos tipos de carga dinámica se demostró que se tiene una influencia significativa al añadir únicamente una trabe secundaria al centro del sistema de piso; además, es posible reducir aún más las aceleraciones con la adición de trabes secundarias con respecto a la otra alternativa que es el aumentar el espesor de la losa. En relación con lo anterior y con los resultados obtenidos se concluye que, la mejor alternativa para reducir las aceleraciones con los tipos de vibraciones analizados es con la adición de trabes secundarias de acero de sección I rectangular o armadura de alma abierta, ya que no se afecta considerablemente el peso de la estructura y se obtienen reducciones bastante aceptables en comparación con trabes secundarias de concreto reforzado.

La relación de masa modal β_{mod} para determinar la masa M_{mod} se obtuvo por medio de métodos analíticos y numéricos; esto para trabes y losas con distintas condiciones de apoyo. Los métodos

analíticos se desarrollaron con funciones de forma obtenidas con distintos métodos aplicable a sistemas equivalentes de un grado de libertad y los numéricos con criterios recomendados en HIVOSS (2007). Con los resultados se demuestran que, las β_{mod} propuestas en HIVOSS (2007) coinciden con las soluciones analíticas y numéricas, cuando se tienen trabes simplemente apoyadas o doblemente empotradas; sin embargo, no coinciden para el caso de trabe en cantiléver con una diferencia del 59.37% con respecto al valor obtenido con el modelo numérico. Debido a la complejidad que se tiene para determinar una función de forma a través de la teoría de placas para las losas con distintos tipos de apoyo, se propuso analizar la β_{mod} mediante modelos numéricos; por lo que se obtuvo una diferencia del 7.57% y 4.98% para el caso de bordes empotrados y simplemente apoyados, respectivamente. Análogamente se analizó el valor de β_{mod} cuando la losa se encuentra apoyada sobre trabes, obteniendo un valor de 0.246, el cual es aproximado cuando los bordes de la losa son simplemente apoyados. Asimismo, se analizaron los valores de β_{mod} de la losa de concreto reforzado cuando se incrementan las secciones de los elementos estructurales principales, al incrementar la sección de trabes y columnas este valor disminuye; sin embargo, al incrementar el espesor de la losa, este valor aumenta. Las ecuaciones propuestas en HIVOSS (2007) para el cálculo de la f_n analíticamente son congruentes con los resultados obtenidos con los modelos numéricos.

De acuerdo con la metodología propuesta para el cálculo de la a_{max} a partir de la solución general teórica de sistemas amortiguados de 1GDL ante carga armónica; se analizaron tres casos para los valores de la β_{mod} obtenidos en este trabajo con los distintos métodos analizados. Para validar esta metodología analítica, los resultados obtenidos se compararon con los resultados obtenidos por el caminar de una persona del modelo numérico aislado y continuo y, a la vez, con los resultados experimentales obtenidos por Caballero (2020). Con los resultados se demuestra que la metodología propuesta es válida para determinar la aceleración máxima en una losa de concreto reforzado ante actividades humanas, ya que se obtiene una diferencia de tan solo el 0.68% y 2.35% con respecto a la medición experimental y numérica del modelo aislado, respectivamente.

Con los nomogramas propuestos por el AISC (1997) para la evaluación de vibraciones verticales en losas macizas de concreto reforzado por actividades humanas, se tiene una perspectiva más amplia para evitar problemas a largo plazo en el sistema de piso y no exceder los límites de perceptibilidad humana, en comparación con el índice de perceptibilidad K que se propone en las NTCC-21(2021).

Con el presente trabajo se espera que el análisis por vibraciones en la práctica profesional sea más común y menos complejo, ya que queda demostrado que es posible determinar las aceleraciones máximas utilizando métodos simplificados, como lo son modelos numéricos equivalentes o expresiones analíticas aplicables a sistemas de 1GDL.

6.2 Recomendaciones

Evaluar las vibraciones debido a actividades en losas macizas de concreto reforzado con los nomogramas establecidos por el AISC (1997), ya que es posible determinar si la vibración puede provocar problemas de fatiga estructural a largo plazo debido a aceleraciones cíclicas en el sistema de piso y no exceder el límite de perceptibilidad humana en función del tipo de vibración y uso del sistema de piso que se analice. El incrementar el espesor de la losa preferentemente con concreto ligero o la adición de trabes secundarias son una alternativa viable para controlar la vibración del sistema de piso ante actividades humanas de acuerdo con los resultados presentados con modelos numéricos y funciones que describen diversas actividades humanas. Para el caso de elementos secundarios se recomienda el uso de trabes de acero, las cuales no incrementan considerablemente el peso de la estructura y minimizan las aceleraciones razonablemente.

6.3 Trabajos futuros

Con la realización de este trabajo, es posible determinar los siguientes trabajos futuros para validar los resultados obtenidos mediante modelos numéricos:

1. Realizar pruebas experimentales de vibraciones ante distintas actividades humanas con sistemas de piso a base de losas macizas de concreto reforzado en dos direcciones modificando sus elementos estructurales principales.
2. Determinar mediante pruebas experimentales la influencia de elementos estructurales secundarios en losa maciza de concreto reforzado para minimizar las aceleraciones debido a actividades humanas.
3. Por medio de ensayes experimentales, analizar la relación de masa modal β_{mod} de losas y trabes de concreto reforzado con distintos tipos de apoyo. Además, de losas macizas apoyadas sobre trabes para analizar su comportamiento sobre bordes flexibles.
4. Realizar el análisis dinámico por medio de modelos numéricos de sistemas de piso con distintas relaciones de claros ante actividades humanas al modificar sus elementos estructurales principales o añadiendo elementos secundarios.

Referencias

[1] Allen, D. E., & Murray, T. M. (1993). Design criterion for vibrations due to walking. *Engineering Journal - American Institute of Steel Construction, AISC*, *Vol. 30*, 117–129.

[2] Ayala Fontes, J. (1969). *Estudio de las propiedades físicas y mecánicas de los concretos ligeros.* Tesis de licenciatura en Ingeniería Civil, Universidad de Sonora, México.

[3] Bachmann, H., & Ammann, W. (1987). *Vibrations in structures: induced by man and machines.* (3rd ed.). International Association for Bridge and Structural Engineering, Zurich.

[4] Bachmann, H., Ammann, W. J., Eisenmann, J., Floegl, I., Hirsch, G. H., Klein, G. K., Lande, G. J., Mahrenholtz, O., Natke, H. G., Nussbaumer, H., Rainer, J. H., & Verlag, B. (1995). Vibration problems in structures. *Practical Guidelines, Berlin: Birkhauser, Alemania*.

[5] Caballero Garatachea, O. (2020). *Determinación de recomendaciones de diseño de losas de vigueta y bovedilla y losas macizas de concreto reforzado sujetas a vibración*. Tesis de doctorado en ingeniería estructural, Universidad Autónoma Metropolitana, México.

[6] Chopra, A. K. (2014). *Dinámica de estructuras* (4th ed.). México: PEARSON EDUCACIÓN.

[7] Ellingwood, B., & Tallin, A. (1984). Structural serviceability: floor vibrations. *Journal of Structural Engineering*, *Vol.110*(2), 401–418.

[8] Hewitt, C. M., & Murray, T. M. (2004). Office fit-out and floor vibrations. *Modern Steel Construction*, 35–38.

[9] Hibbeler, R. C. (2011). *Mecánica de Materiales* (8th ed.). Mexico City: Pearson Education.

[10] Hicks, S. (2004). Vibration characteristics of steel-concrete composite floor systems. *Progress in Structural Engineering and Materials Banner*, *Vol. 6*(1), 21–38. doi: 10.1002/pse.163

[11] HIVOSS. (2007). Human induced vibration of steel structures. *Research Fund for Coal & Steel, European Commission*, 1–19.

[12] Humar, J. L. (2002). *Dynamics of Structures* (2nd ed.). A.A. Balkema.

[13] ISO 2631-2. (1989). ISO 2631-2, Mechanical vibration and shock: Evaluation of human exposure to whole-body vibration-part 2: human exposure to continuous and shockinduced vibrations in buildings (1 to 80 Hz). *International Organisation for Standardisation. Geneva.*

[14] James C. Anderson, F. N. (2012). *Basic Structural Dynamics* (1st ed.). New Jersey: John Wiley & Sons.

[15] Kollár, L. P., & Pap, Z. B. (2018). Modal mass of floors supported by beams. *Structures*, *Vol 13*, 119–130.

[16] Leissa, A. W. (1969). Vibration of plates. *NASA SP-160. Washington D.C.*

[17] Mello, A. V. A., da Silva, J. G. S., Vellasco, P. C. G. d. S., de Andrade, S. A. L., & de Lima, L. R. O. (2008). Dynamic analysis of composite systems made of concrete slabs and steel beams. *Journal of Constructional Steel Research*, *Vol. 64*(10), 1142–1151. doi: 10.1016/j.jcsr.2007.09.011

[18] Murray, T. M., Allen, D. E., & Ungar, E. E. (1997). Floor vibrations due to human activity. *Steel Design Guide Series 11, Vol. D811*(10M797).
[19] Nilson, A. H. (1999). *Diseño de estructuras de concreto* (Duodécima). Bogotá, Colombia: McGRAW-HILL INTERAMERICANA, S.A.
[20] Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto. (2021). Gaceta Oficial de la Ciudad de México. *México, 20 de Julio de 2021, 220-Bis*.
[21] Rainer, J. H., Pernica, G., & Allen, D. E. (1986). Dynamic loading and response of footbridges. *Proceedings C.S.C.E. Second International Conference on Short and Medium Span Bridges, Ottawa, Ontario, Vo. 2*, 335–347.
[22] Smith, A. L., Hicks, S. J., & Devine, P. J. (2009). Design of Floors for Vibration: A New Approach. In The Steel Construction Institute (Issue February). Ascot, Reino Unido.
[23] Tedesco, J. W., McDougal, W. G., & Ross, C. A. (1998). *Structural Dynamics* (1st ed.). Prentice Hall.
[24] Varela, W.D. (2004), "*Modelo teórico – experimental para análises de vibraçoes induzidas por pessoas caminando sobre lajes de edificios*", Tesis Doctoral, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.