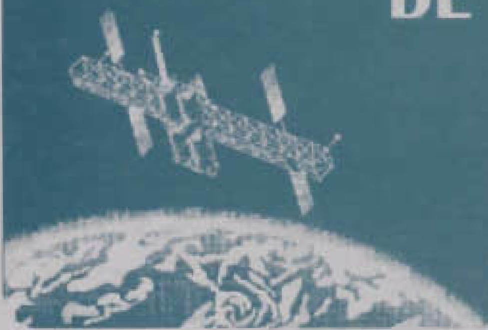
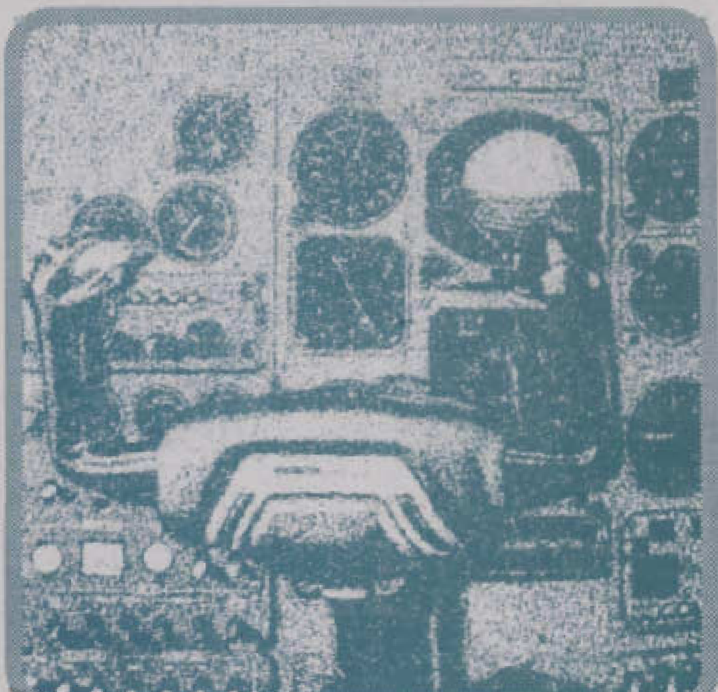
5

Enrique Álvarez Ballesteros

MANUAL DE SOLUCIONES A PROBLEMAS BÁSICOS DE LA U. E. A.



Sistemas de Control I



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Azcapotzalco

MANUAL DE SOLUCIONES
A PROBLEMAS BÁSICOS
DE LA U. E. A.
Sistemas
de
Control I

Este material fue dictaminado y aprobado por el Consejo Editorial de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería, el 21 de junio de 2000.

Enrique Álvarez Ballesteros

MANUAL DE SOLUCIONES A PROBLEMAS BÁSICOS DE LA U. E. A.

Sistemas de Control I

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Electrónica

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

Rector
Dr. Adrián Gerardo de Garay Sánchez

Secretaria
Dra. Sylvie Jeanne Turpin Marion

Coordinadora general de Desarrollo Académico
Dra. Norma Rondero López

Coordinador de Extensión Universitaria
D. I. Jorge Armando Morales Aceves

Jefe de la sección de Producción y Distribución Editoriale
Lic. Francisco Javier Ramírez Treviño

Corrección:
María Marisela Juárez Capistrán
Ilustración de portada:
Consuelo Quiroz Reyes
Diseño de portada:
Modesto Serrano Ramírez

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180
Col. Reynosa Tamaulipas
Del. Azcapotzalco
C. P. 02200
México, D. F.

Manual de soluciones a problemas básicos
de la UEA Sistemas de control I
ISBN: 970-654-892-0

1ª. Edición, 2001
4ª. Reimpresión, 2007
5ª. Reimpresión, 2009

Impreso en México

ÍNDICE

PRÓLOGO

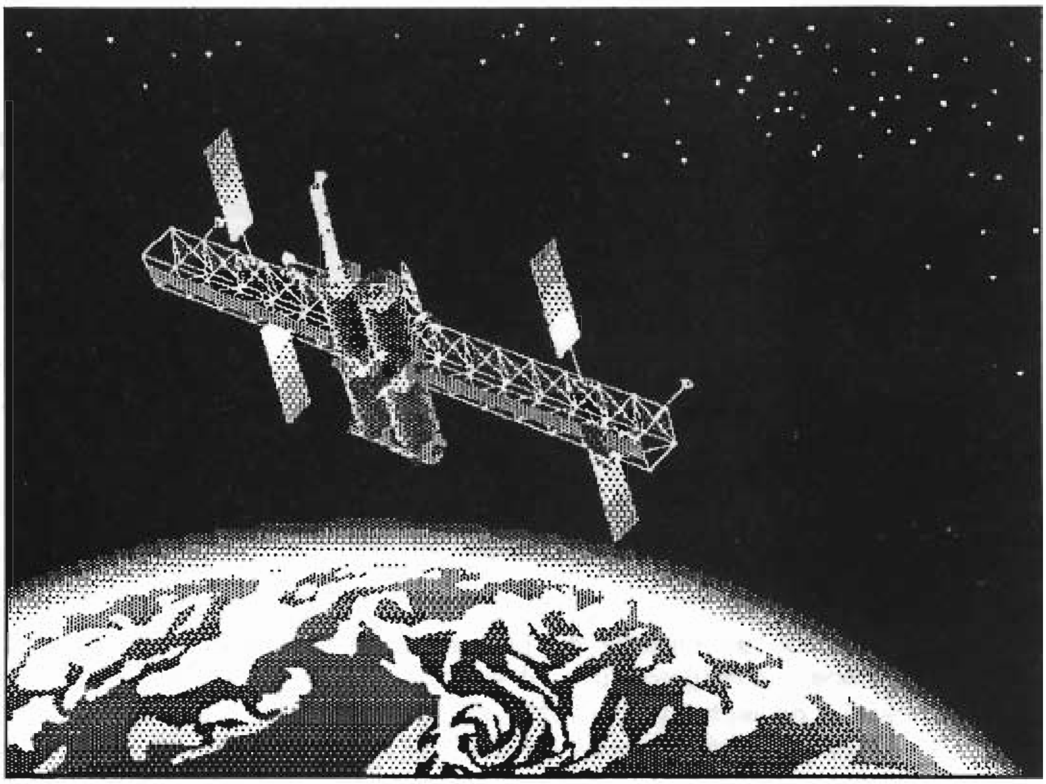
El propósito de este manual es proporcionar a los alumnos que cursan la U. E. A. Sistemas de Control I, en la división de CBI de la UAM Azcapotzalco un material que facilite el aprendizaje de la materia, siendo un apoyo a las notas proporcionadas en el salón de clases.

El material presenta problemas básicos resueltos paso a paso y problemas propuestos con solución para los cuatro capítulos que consta el programa de la U. E. A. Algunos problemas pueden parecer similares a otros pero cada problema ha sido seleccionado para ilustrar algún punto diferente o diferente método de solución.

Al usar este problemario, el estudiante puede revisar y estudiar los problemas ilustrados de cada capítulo cuando el lo requiera y no queda limitado al tiempo que cada profesor dedica para explicar los problemas en clase, además al estudiante le proporciona mejor comprensión y ahorro de tiempo ya que cada problema se desarrolla paso a paso, llevando los pasos no desarrollados en los libros de texto.

Se recomienda estudiar repetidamente algún problema para su entendimiento. Revisar repetidamente es esencial para ganar experiencia para reconocer los principios que deben ser aplicados y para seleccionar las mejores técnicas de solución.

Cualquier sugerencia, con el fin de mejorar este manual será bien recibida.



I PANORAMA GENERAL

Problemas

1. ¿Cuál es la diferencia de un sistema de control de malla cerrada y uno de malla abierta? De un ejemplo de cada uno de ellos.

Solución:

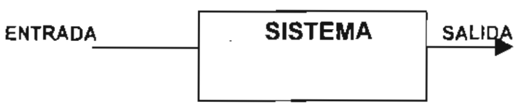
Un sistema de control es una interconexión de componentes que en su conjunto proporcionan una respuesta deseada del sistema. El sistema de malla abierta es aquel donde la acción de control es completamente independiente de los valores obtenidos en la salida. Un sistema de control de malla cerrada depende tanto del valor o valores de la entrada (referencias), como de los valores de la salida, es decir, posee retroalimentación.

Ejemplos:

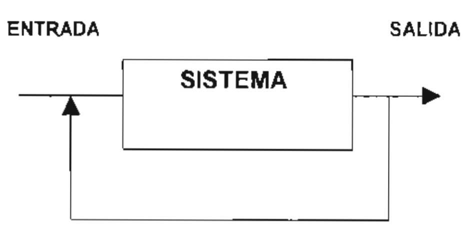
Un torno de control numérico entra en la categoría de malla abierta, puesto que las funciones que realiza están determinadas exclusivamente por un programa (entrada) y no es capaz de detectar alguna contingencia en el proceso de maquinado.

Un robot manipulador inteligente representa un sistema de control de malla cerrada; sus acciones responden ciertamente a un programa predeterminado, pero es capaz de reaccionar ante posibles obstáculos y actuar en consecuencia gracias al monitoreo constante de la salida de su sistema (retroalimentación).

A continuación se esquematiza de manera general un sistema de malla abierta y uno de malla cerrada.



Malla abierta



Malla cerrada

2. Mencione ventajas y desventajas de un sistema de control de malla cerrada, en relación a un sistema de control de malla abierta.

Solución:

Las ventajas y desventajas más importantes de un sistema de control de malla cerrada, son las siguientes.

Ventajas

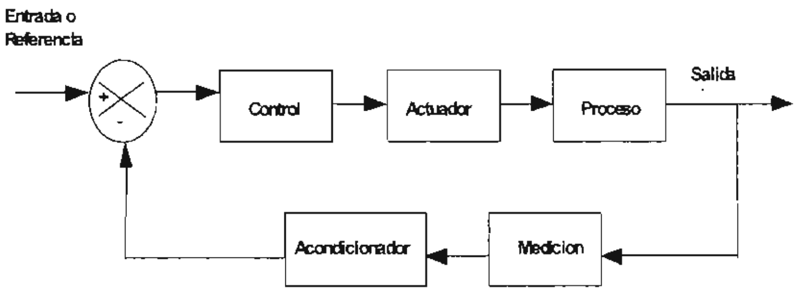
- Robustece al sistema, es decir, lo hace menos sensible a posibles variaciones internas
- La retroalimentación permite identificar errores en el sistema
- Trata de corregir los errores monitoreados
- Minimiza efectos de perturbaciones externas

Desventajas

- La retroalimentación puede introducir inestabilidad al sistema, la tendencia a sobrecorregir errores puede producir oscilaciones
- Aumenta la cantidad de componentes del sistema
- Aumenta el costo económico del sistema

3. Dibuje y explique la función de los bloques que componen un sistema de control típico de retroalimentación negativa.

Solución:



La función de cada elemento del diagrama anterior se describe a continuación.

La entrada o referencia es el único parámetro o valor que el usuario proporciona al sistema, éste parámetro corresponde a la magnitud que se desea de la variable física que es controlada.

El comparador se encarga de encontrar la diferencia entre el valor de la variable física a controlar que desea el usuario y el valor medido en el proceso, a esta diferencia se le conoce como error.

El control se encarga de manipular al error en función de los objetivos que se desean alcanzar (rapidez de respuesta, precisión, estabilidad, etc.) para en consecuencia manejar a sus actuadores.

El actuador recibe las órdenes del control, éste bloque se encarga de proporcionar la energía necesaria para modificar las condiciones del proceso y así lograr que la magnitud física a controlar tenga el valor deseado. Un actuador puede ser un motor a pasos que bien puede abrir o cerrar una válvula, o bien posicionar un robot manipulador.

El proceso es la parte central del sistema de control, ahí se encuentra la variable física que se controla; el proceso puede ser de cualquier tipo: mecánico, químico, físico, metalúrgico, etc.

El medidor se encarga de muestrear constantemente el valor de la salida del sistema, es el elemento retroalimentador. El bloque medidor lo constituyen una gran gama de sensores (transductores) de diferentes variables físicas.

El acondicionador se encarga básicamente de transformar los parámetros entregados por los sensores a variaciones de voltaje útiles y manejables para nuestro sistema. Entre sus funciones se encuentra el filtrado del ruido, linealizar la función entregada por los transductores y adecuar la señal sensada a una escala apropiada para nuestro sistema.

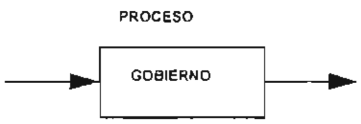
4. ¿Se puede interpretar como un sistema de control con retroalimentación desde un punto de vista político a un gobierno democrático?, ¿Por qué? ¿Qué se puede decir sobre una dictadura militar?

Dibuje un diagrama a bloques de ambos casos.

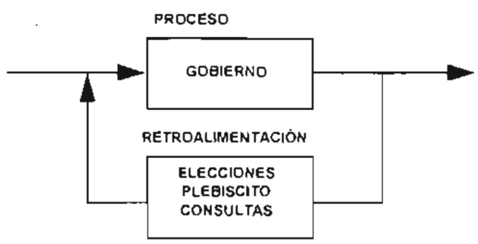
Solución:

Un sistema democrático en esencia es un sistema con retroalimentación, su gobierno se sustenta en las decisiones del pueblo. El gobierno puede considerarse como el bloque del proceso, en tanto que las consultas, plebiscitos, elecciones, entre otros mecanismos, como el bloque de retroalimentación.

Las dictaduras militares se asemejan más a un sistema de malla abierta, sus acciones son dogmáticas y no consideran lo que el pueblo desea. Los militares no detectan perturbaciones, esto los hace un sistema sensible a variaciones en el proceso. Los derrocamientos y revoluciones son evidencia de ruptura del proceso. El proceso falla si no se cumple la suposición.



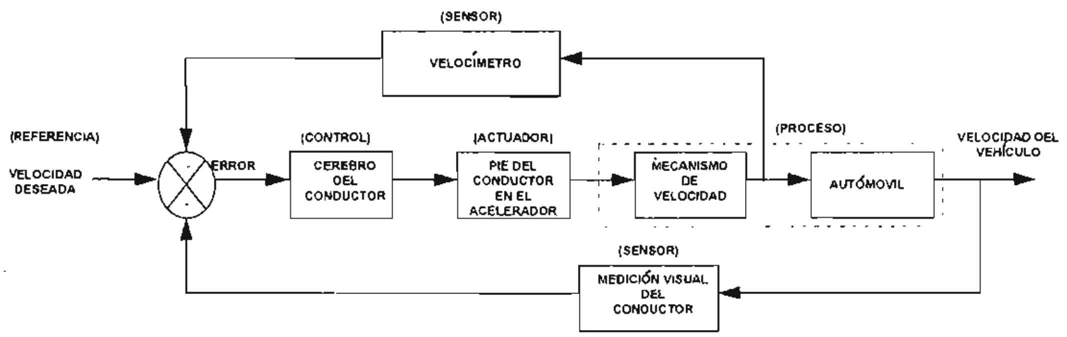
a) Dictadura Militar



b) Régimen Democrático

5. El conductor de un automóvil emplea un sistema de control para mantener la velocidad del vehículo a un nivel determinado. Dibuje un diagrama a bloques que ilustre este sistema de retroalimentación.

Solución:



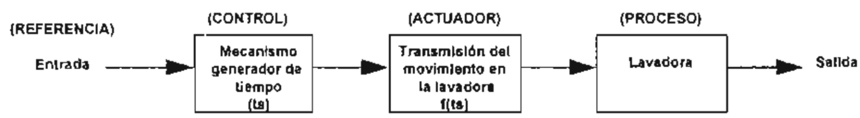
En éste ejemplo podemos observar que en la comparación contra la referencia de velocidad deseada, tenemos dos fuentes:

- El conductor observa el velocímetro en diferentes tiempos y actúa en consecuencia
- El conductor actúa en función a su percepción un tanto subjetiva de la velocidad, es decir, se rige por el sonido del motor, la vibración del vehículo y la idea que él tiene de la velocidad que lleva.

6. El funcionamiento de una lavadora corresponde a un sistema de malla abierta o malla cerrada?. Explique y dibuje su diagrama a bloques.

Solución:

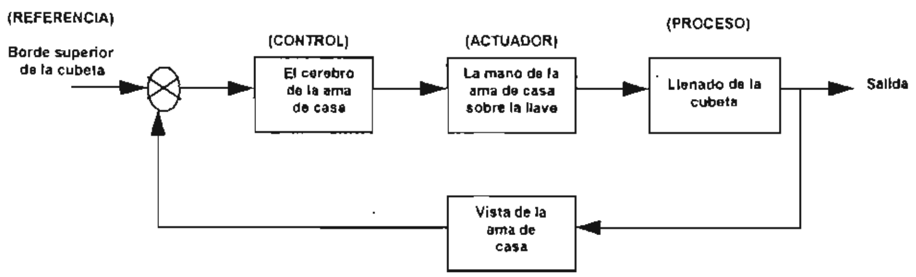
La mayoría de las lavadoras funcionan como un sistema de control de malla abierta; su control genera un lapso de tiempo para que la lavadora opere durante ese tiempo. No existe retroalimentación, si falla el mecanismo de tiempo la ropa no quedará completamente limpia, lo mismo pasa si se rompe algún elemento de transmisión en la máquina. Lo anterior hace patente lo sensible de éstos sistemas de control de malla abierta.



7. Describa en un diagrama a bloques de un sistema de control con retro, el proceso que realiza una ama de casa cuando llena una cubeta con agua.

Solución:

El proceso de llenado de agua de una cubeta es un ejemplo de un sistema de control de malla cerrada con retroalimentación negativa. En la vida cotidiana se realizan muchas actividades con retroalimentación; generalmente el control lo realiza el cerebro humano, en tanto que los sensores corresponden a los cinco sentidos que posee el hombre: vista, oído, olfato, tacto y gusto; las piernas y las manos realizan la función de los actuadores. A continuación se muestra el diagrama a bloques correspondiente.



8. En el año de 1769 fue desarrollado el que es considerado como el primer regulador con retroalimentación automática empleado en un proceso industrial: *El regulador centrífugo de James Watt* (ver figura 1.1). Dibuje el diagrama a bloques correspondiente y explique el funcionamiento para cada bloque de este invento importantísimo para la teoría de control.

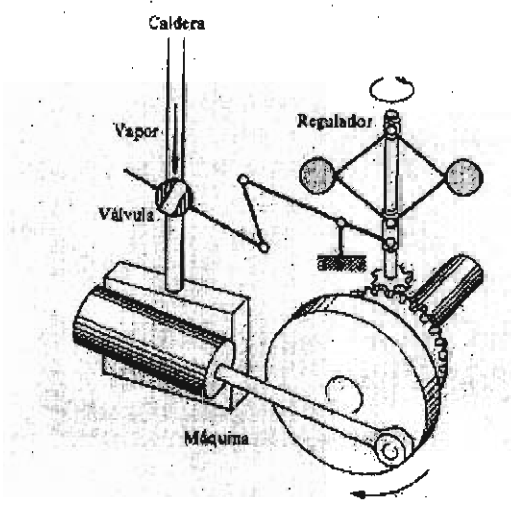
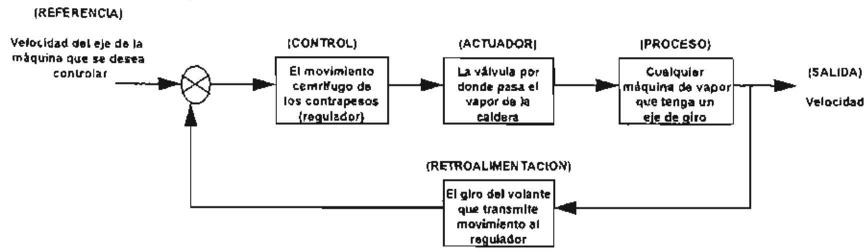


figura 1.1 Regulador centrífugo de James Watt

Solución:



El dispositivo mostrado en la figura 1.1, controla la velocidad del eje motriz de cualquier máquina de vapor de revolución (*proceso*) de forma totalmente mecánica. Este dispositivo regula la apertura de la válvula mediante la posición de unos contrapesos, en el diagrama a bloques se puede apreciar que ésta operación corresponde al *control y al actuador* del sistema. La posición de los contrapesos es función de la velocidad de giro del volante de la máquina, la cual transmite esa velocidad a los contrapesos; es en este punto donde se realiza la *retroalimentación* en el sistema.

Cuando aumenta la velocidad en el volante de la máquina, los contrapesos tienden a alejarse de su eje de giro, lo cual ocasiona que se cierre la válvula; caso contrario ocurre cuando disminuye la velocidad de giro ya que se acercan los contrapesos abriendo en consecuencia la válvula.

9. Un sistema con retroalimentación no siempre es de retroalimentación negativa. La inflación económica caracterizada por una alza continua de los precios, es un sistema característico de retroalimentación positiva. La figura 1.2 nos muestra como la señal de retroalimentación es agregada a la señal de entrada. La figura muestra de manera simple el proceso inflacionario precios-salarios. Agréguense circuitos adicionales a fin de estabilizar el sistema. Considere que el aumento de salarios normalmente se traduce en un aumento en los precios de los productos.

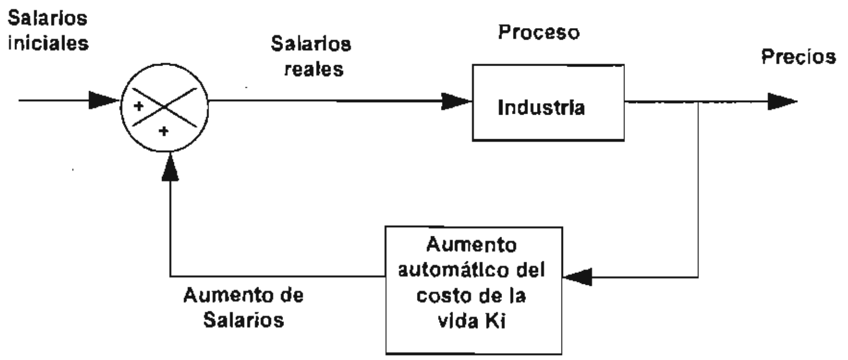
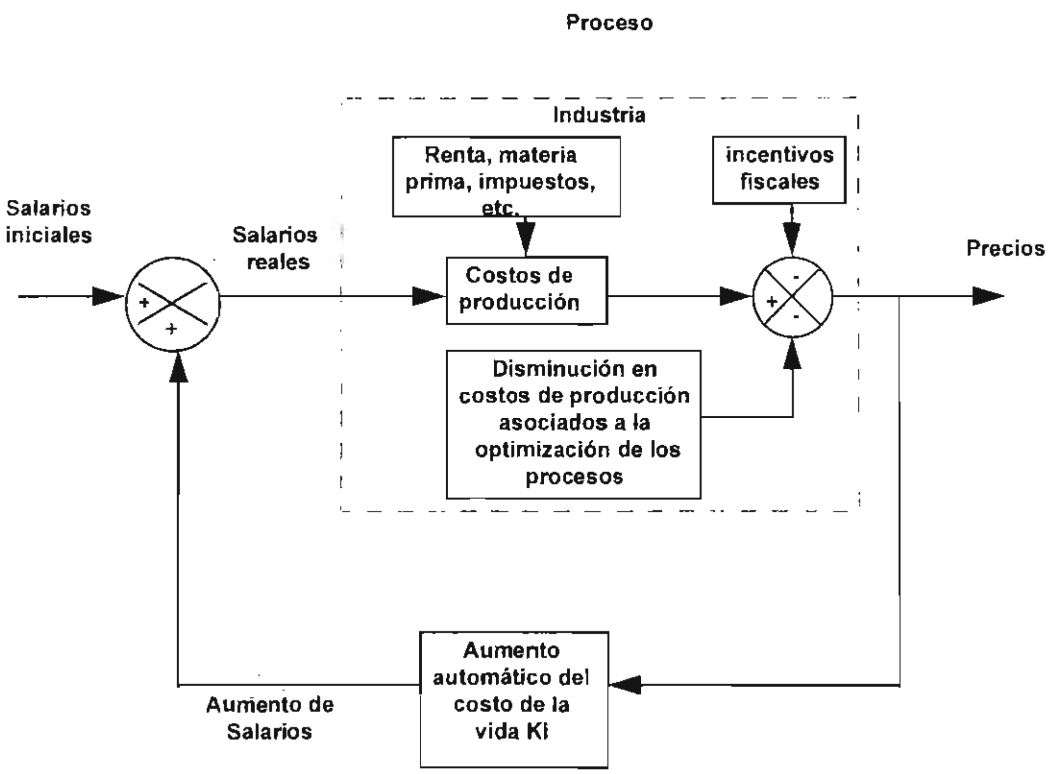


figura 1.2 Proceso inflacionario

Solución:

Un diagrama a bloques que compensa la retroalimentación positiva que se genera al tener que aumentar los salarios a los trabajadores se representa enseguida.



Este nuevo sistema utiliza algunos mecanismos para disminuir costos de producción y evitar el aumento de los precios de los productos, tales mecanismos son la optimización en los procesos productivos y el empleo de incentivos fiscales (existen muchos mecanismos más).

Los cambios realizados a nivel técnico y administrativo permiten disminuir costos y compensar así el aumento de los salarios. A medida que transcurre el tiempo el sistema tiende a estabilizarse ya que al no aumentar precios llega un punto en que no es necesario subir los salarios.

10. El regulador de nivel de agua con flotador, es un sistema de control inventado por el ruso I. Polzunov en el año de 1765, en la figura 1.3 se muestra dicho control. Dibuje el diagrama a bloques del sistema explicando cada bloque. ¿Existe retroalimentación en el control?

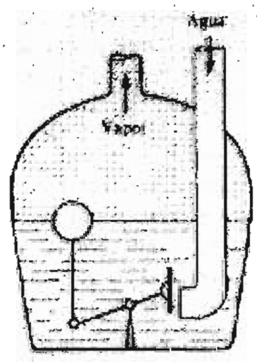
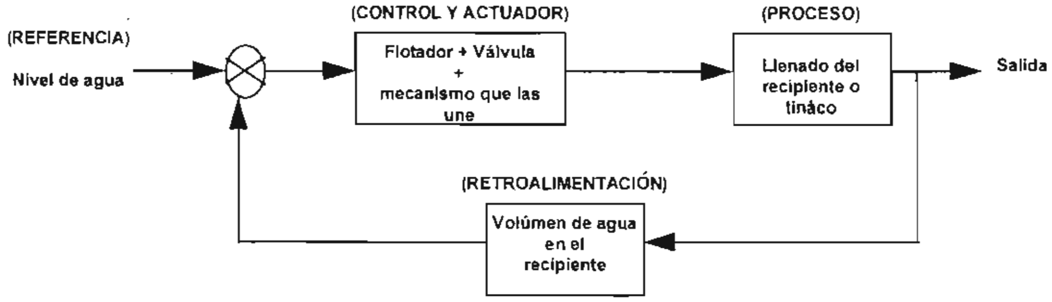


figura 1.3 Regulador de nivel de agua con flotador

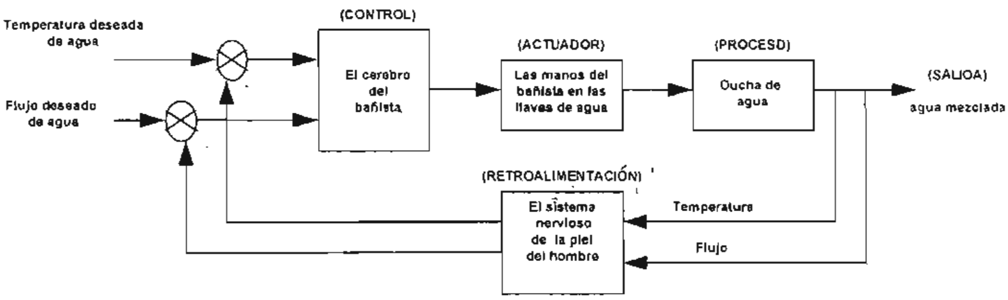
Solución:

El regulador de nivel de agua es un sistema de control de malla cerrada, la retroalimentación la va proporcionando el volumen de agua conforme se va llenando el recipiente. El control y actuador lo constituyen tanto el flotador, la válvula y el mecanismo que une a ambos. El proceso a regular es el de llenado del recipiente.



11. Un ejemplo común de un sistema de control con dos entradas es una ducha que tiene llaves distintas para el agua caliente y la fría. El objetivo es obtener: 1) una temperatura adecuada del agua de la ducha, 2) un flujo deseado del agua. Dibújese un diagrama de bloques del sistema de control de circuito cerrado. ¿Estaría dispuesto el lector a tomar una ducha bajo un control de circuito abierto por otra persona?

Solución:



En éste tipo de sistemas existen dos entradas y una salida (el agua mezclada de la regadera); en la salida se censan dos variables: la temperatura del agua y su flujo. El hecho de que sean dos variables las censadas implica la existencia de dos comparadores. El cerebro humano actúa como controlador y ordena a las manos que abran o cierren las llaves dependiendo si es adecuado el flujo y la temperatura del agua.

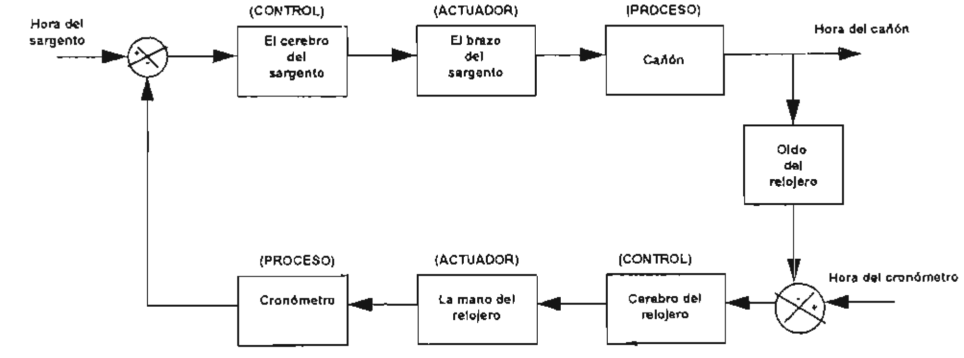
12. Un sargento se detenía en una joyería cada mañana a las 9 en punto y ajustaba su reloj comparándolo con el cronómetro del escaparate. Un día el sargento entró en el comercio y felicitó al dueño del comercio por la exactitud del cronómetro.
Está ajustado con las señales de la hora Arlington?, preguntó el sargento.
No, contesto el dueño, lo ajusto con el cañonazo de las 5 del fuerte. Dígame sargento porque se detiene todos los días y compara la hora de su reloj?. El sargento contestó: " yo soy el artillero del fuerte ".

Es la retroalimentación en este caso positiva o negativa? El cronómetro del joyero se atrasa un minuto cada 24 horas y el reloj del sargento se atrasa un minuto cada 8 horas.

¿Cuál es el error total en la hora del cañón del fuerte después de 15 días?

Solución:

En el siguiente diagrama a bloques se puede observar como se establece la retroalimentación entre el reloj del sargento y el cronómetro del escaparate:



Primeramente debemos mencionar que la retroalimentación en el sistema es positiva debido a que la diferencia entre la referencia y la retroalimentación tiende a aumentar, es decir el error va creciendo.

Para determinar la pérdida de tiempo por día debemos considerar que:

El reloj del sargento se retrasa 7.5 segundos/hora
El cronómetro del relojero se atrasa 2.5 segundos/hora

Suponga una hora cualquiera al dar el cañonazo, de las 5 de la tarde a las 9 de la mañana cuando pasa el sargento han pasado 16 horas, por lo tanto el retraso de tiempo en el cronómetro es de 40 segundos. Pero el reloj del sargento se atraza de las 9 del día hasta las 5 de la tarde en que da el cañonazo 60 segundos.

El atraso total resulta ser de 100 segundos (40 + 60); En 15 días el error totales de 1500 segundos, o sea **25 minutos**.

13. En el oriente medio, el principio de funcionamiento de los relojes de agua se basaba en el control automático de nivel de agua. Su uso abarcó desde antes de Cristo hasta el siglo XVII. En la figura 1.4 se muestra un reloj de éste tipo; indique qué partes del reloj corresponden a los bloques de un sistema de control con retroalimentación.

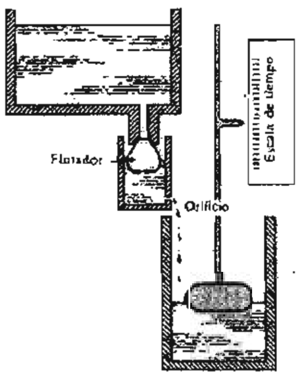
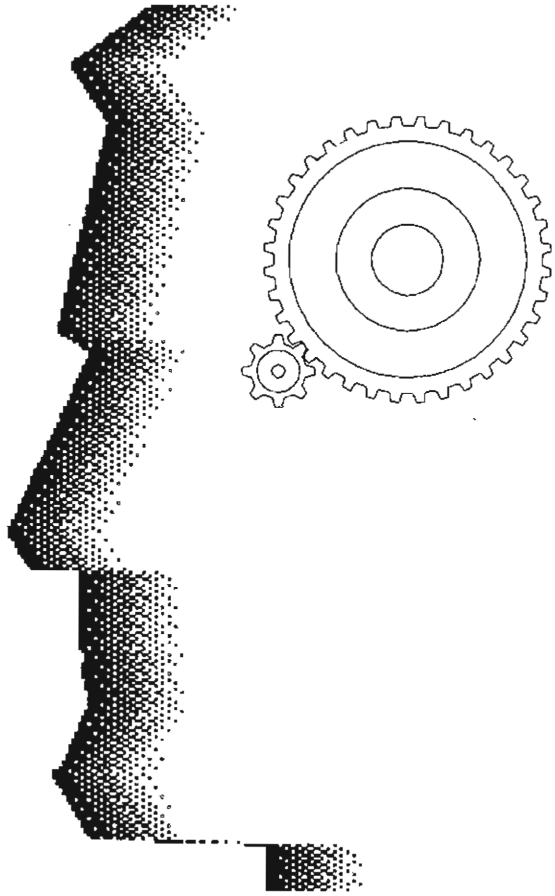


figura 1.4 Reloj de agua

Solución:

El sistema de control de éste tipo de relojes posee una interesante peculiaridad: El flotador realiza las funciones de varios bloques del sistema de control con retroalimentación. El flotador funciona como control, actuador y retroalimentador; el bloque del proceso es propiamente un reloj.

La función de actuador del flotador se observa en la figura 1.4: se ve que el flotador se encarga de cerrar o abrir el orificio por donde cae el agua. El control lo ejerce la posición del flotador (en función de esta posición es el flujo del líquido por el orificio). Por último la retroalimentación del sistema se encuentra en el nivel del agua que hace flotar al flotador.



II CONCEPTOS BÁSICOS DE CONTROL

1. Determine la Transformada de Laplace de las siguientes funciones, empleando la definición.

a) f(t) = 1 b) f(t) = t

c) f(t) = e^{at} d) f(t) = sen (wt)

Solución:

a) La transformada de Laplace está definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{F(s) = L\ (\ f(t)\ ) = } \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

por lo que, sustituyendo la función f(t) tenemos lo siguiente:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, 1\, dt = -\frac{1}{s}\, e^{-st}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

b) Igual que en el inciso anterior sustituimos la función f(t) en la fórmula y tenemos:

$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, t\, dt$; aplicando una integración por partes:

$$F(s) = -\frac{t}{s}\, e^{-st}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}\, dt = 0 + \frac{1}{s}\,\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

c) Sustituyendo f(t) = e^{at} en la fórmula:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at}\, dt = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}\, dt = -\frac{1}{s-a}\, e^{-(s-a)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

d) f(t) = sen (wt) por lo tanto:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} Sen(wt)\,dt \text{ ; aplicando integración por partes:}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} Sen(wt)\,dt = -\frac{1}{w} e^{-st} Cos(wt)\Big|_0^{\infty} - \frac{s}{w}\int_0^{\infty} e^{-st} Cos(wt)\,dt$$

A la integral resultante al aplicar la integración por partes $\left(\int_0^{\infty} e^{-st} Cos(wt)\,dt\right)$ se le aplica nuevamente el método de integración por partes:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} Cos(wt)\,dt = \frac{1}{w} e^{-st} Sen(wt)\Big|_0^{\infty} + \frac{s}{w}\int_0^{\infty} e^{-st} Sen(wt)\,dt$$

Sustituyendo éstos resultados en la fórmula tenemos:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} Sen(wt)\,dt = -\frac{1}{w} e^{-st} Cos(wt)\Big|_0^{\infty} - \frac{s}{w^2} e^{-st} Sen(wt)\Big|_0^{\infty} - \frac{s^2}{w^2}\int_0^{\infty} e^{-st} Sen(wt)\,dt$$

Los pasos para despejar F(s) son los siguientes:

$$1 + \frac{s^2}{w^2} F(s) = -\frac{1}{w} e^{-st} Cos(wt)\Big|_0^{\infty} - \frac{s}{w^2} e^{-st} Sen(wt)\Big|_0^{\infty}$$

$$\frac{w^2+s^2}{w^2} F(s) = -\frac{1}{w} e^{-st}\left[Cos(wt) + \frac{s}{w} Sen(wt)\right]_0^{\infty}$$

$$F(s) = -\frac{1}{w} e^{-st}\left[Cos(wt) + \frac{s}{w} Sen(wt)\right]_0^{\infty} \frac{w^2}{w^2+s^2}$$

$$F(s) = -\frac{w}{w^2+s^2} e^{-st}\left[Cos(wt) + \frac{s}{w} Sen(wt)\right]_0^{\infty} = \frac{w}{w^2+s^2}$$

2. Determine la Transformada de Laplace de las siguientes funciones.

a) $f(t) = e^{2t}\,Sen(3t)$.

b) $f(t) = -t^3 + 2te^{5t} + 3e^{4(t-2)}Sen\ t - Sen^2\ t$

Solución:

Para la solución de éstas Transformadas de Laplace debemos hacer uso de dos de sus propiedades operacionales más importantes:

I. $L\,[\,\lambda \mathbf{f(t)} + \mu \mathbf{g(t)} = \lambda L(\,\mathbf{f(t)}\,) + \mu L(\,\mathbf{g(t)}\,)$

II. Sí $L(\,\mathbf{f(t)}\,) = F\,(s)$ entonces: $L\,(\,e^{at}\,\mathbf{f(t)}\,) = F\,(s\text{-}a)$

Además nos auxiliaremos de la tabla de pares f(t)-F(s) más comunes en control.

a) $f(t) = e^{2t}\,Sen(3t)$.

Obteniendo por tablas la Transformada de Laplace de la función seno:

$$L(Sen\,(wt)) = \frac{w}{w^2+s^2};$$

y aplicando la segunda propiedad operacional ya descrita, podemos determinar los siguientes parámetros:

$$a=2 \quad y \quad w=3$$

por lo que sustituyéndolos tenemos:

$$L(e^{2t}\,Sen(3t)) = \frac{3}{9+(s-2)^2}$$

b) $f(t) = -t^3 + 2te^{5t} + 3e^{4(t-2)}\text{Sen } t - \text{Sen}^2\, t$

Aplicando la primera propiedad operacional de la transformada de Laplace obtenemos la siguiente expresión:

$$F(s) = -L(t^3) + 2L(e^{5t}t) + 3e^{-8}L(e^{4t}\text{ Sen } t) - L(\text{Sen}^2\, t)$$

Por tablas y recordando que $\text{Sen}^2(t) = (1 - \text{Cos}(2t))/2$ obtenemos:

$$F(s) = \frac{3!}{s^4} + \frac{2}{(s-5)^2} + 3e^{-8}\frac{1}{1+(s-4)^2} - \frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2+4)}$$

3. Determine la Transformada de Laplace de la derivada de una función: $f'(t)$.

Solución:

$$\mathbf{F(s) = L\,(\,f(t)\,) =} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

por lo que, sustituyendo la derivada de una función $f'(t)$ tenemos la siguiente expresión:

$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt$; y aplicando integración por partes

$$L(f'(t)) = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = -f(0) + s\,F(s)$$

4. Determine la Transformada de Laplace de la siguiente función:

$$f(t) = (t-2)^3\, u(t-2)$$

Solución:

Empleando el segundo teorema de la Traslación

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}L\{f(t)\}$$

e identificando a=2 tenemos:

$$L\{(t-2)^3u(t-2)\}=e^{-2s}\,L\{t^3\}= \frac{3!}{s^4}e^{-2s}$$

5. Determine las siguientes transformadas inversas de Laplace (L^{-1}).

a) $\frac{1}{s^4}$ b) $\frac{8}{(s+1)^4}$

c) $\frac{9}{9+(s-2)^2}$

Solución:

a) Consultando en la tabla de Transformadas obtenemos la siguiente expresión matemática:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^n}\right) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Sustituyendo n=4 tenemos la transformada inversa de Laplace buscada:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right)=\frac{t^3}{(3)!}$$

b) $\frac{8}{(s+1)^4}$; para resolver esta transformada inversa de Laplace hay que recordar la segunda propiedad operativa: L (e^{at} **f(t)**) = F (s-a) ; por lo que a=-1.

$$L^{-1}\left(\frac{8}{(s+1)^4}\right)=8L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^4}\right)=8\frac{e^{-t}t^3}{(3)!}$$

c) $\frac{9}{9+(s-2)^2}$; al igual que el ejemplo anterior existe un desplazamiento en

Laplace producto de una exponencial en el tiempo (a=2). Despreciando el desplazamiento la expresión matemática se ajusta a la transformada de una función seno.

$$L^{-1}\left(\frac{9}{9+(s-2)^2}\right)=9L^{-1}\left(\frac{1}{9+(s-2)^2}\right)=\frac{9}{3}e^{2t}Sen(3t)=3e^{2t}Sen(3t)$$

6. Encuentre la transformada inversa de la siguiente función F(s)

$$F(s)=\frac{1}{(s+5)(s+2)}$$

Solución:

Aplicando fracciones parciales a la función F(s) tenemos el siguiente desarrollo:

$$F(s)=\frac{1}{(s+5)(s+2)}=\frac{A}{s+5}+\frac{B}{s+2}=\frac{A(s+2)+B(s+5)}{(s+5)(s+2)}$$

La expresión anterior implica que dado que los denominadores son iguales, los numeradores también lo son:

1=A(s+2) + B(s+5)=As+2A+Bs+5B ; agrupando términos:

1 = (2A + 5B) + s(A+B)

De la expresión anterior se establecen las dos ecuaciones siguientes:

1 = (2A + 5B) y A+B = 0

Resolviendo tenemos: B=1/3 y A=-1/3

Sustituyendo los valores de A y B se tiene la siguiente expresión:

$$F(s) = -\frac{1}{3}\frac{1}{s+5} + \frac{1}{3}\frac{1}{s+2}$$

$$L^{-1}(F(s)) = -\frac{1}{3}e^{-5t} + \frac{1}{3}e^{-2t}$$

7. Encuentre la transformada inversa de la siguiente función F(s)

$$F(s) = \frac{3s+2}{(s+4)^2}$$

Solución:

$$F(s) = \frac{3s+2}{(s+4)^2} = \frac{A}{(s+4)} + \frac{B}{(s+4)^2} = \frac{A(s+4)+B}{(s+4)^2}$$

La anterior expresión implica que: 3s + 2 = As + 4A + B ; agrupándolos:

A = 3 y 4A + B = 2 ; B = -10

$$F(s) = \frac{3}{(s+4)} - \frac{10}{(s+4)^2} \Rightarrow L^{-1}(F(s)) = 3e^{-4t} - 10te^{-4t}$$

8. Encuentre la transformada inversa de la siguiente función F(s)

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}$$

Solución:

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4} = \frac{A(s+2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s+2)}{(s-1)(s+2)(s+4)}$$

Obsérvese que los denominadores son iguales, por lo que:

$$1 = A(s+2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s+2)$$

Se puede establecer un sistema de ecuaciones desarrollando y agrupando el segundo término de la igualdad y encontrar con la solución de las mismas los valores de las incógnitas (A,B,C), pero es más sencillo si se sustituye en "s" los valores de los ceros de la función. Para s=1, s=-2 y s=-4 tenemos las siguientes ecuaciones:

1 = A(3)(5) => A= 1/15

1 = B(-3)(2) => B= -1/6

1 = C(-5)(-2) => C= 1/10

sustituyendo éstos valores en las fracciones parciales:

$$F(s) = \frac{\frac{1}{15}}{s-1} - \frac{\frac{1}{6}}{s+2} + \frac{\frac{1}{10}}{s+4} \Rightarrow L^{-1}(F(s)) = \frac{1}{15}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{-4t}$$

9. Encuentre la transformada inversa de la siguiente función F(s)

$$F(s) = \frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}$$

Solución:

$$F(s) = \frac{3s-2}{s^3(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+4}$$

Igualando los numeradores tenemos:

$$3s - 2 = As^2(s^2+4)+Bs(s^2+4)+C(s^2+4)+(Ds+E)s^3$$

Primero desarrollamos el segundo término y agrupamos:

$$3s-2 = 4C + 4Bs + s^2(4A+C) + s^3(B+E) + s^4(A+D)$$

De aquí obtenemos las siguientes ecuaciones:

$4C = -2$	=>	$C = -1/2$
$4B = 3$	=>	$B = 3/4$
$4A + C = 0$	=>	$A = 1/8$
$B + E = 0$	=>	$E = -3/4$
$A + D = 0$	=>	$D = -1/8$

Sustituyendo las incógnitas en las fracciones parciales:

$$F(s)=\frac{1/8}{s}+\frac{3/4}{s^2}-\frac{1/2}{s^3}+\frac{-s/8-3/4}{s^2+4}=\frac{1/8}{s}+\frac{3/4}{s^2}-\frac{1/2}{s^3}-\frac{1}{8}\frac{s}{s^2+4}-\frac{3}{8}\frac{2}{s^2+4}\Rightarrow$$

$$L^{-1}(F(s))=\frac{1}{8}+\frac{3}{4}t-\frac{1}{4t^2}-\frac{1}{8}\cos 2t-\frac{3}{8}sen2t$$

10. Encuentre la solución Y(s) en Laplace de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $dy/dt - 6y = 1$
$y(0) = 5$

b) $dy/dt - y + \int_{-\infty}^{t} y(t)dt = 1$
$y(0)=0$, $\int_{-\infty}^{0} y(t)dt = -2$

c) $2\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 8y = 0$
$y(0)=-3$, $y'(0)= 4$

d) $y' + 2y + 10 = 0$
$y(0)=0$

Solución:

Por convención se usarán indistintamente las siguientes expresiones:

$$dy/dt = \frac{dy}{dt} = y' \qquad y \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = y''$$

a) $dy/dt - 6y = 1$; de las tablas de pares de Transformadas obtenemos la correspondiente a la derivada:

$$L(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$
para n=1,2,...

Sustituyendo obtenemos:

$$sY(s) - f(0) - 6Y(s) = 1/s$$

$$sY(s) - 5 - 6Y(s) = 1/s$$

$$y(s)\ (s-6) = (1+5s)/s$$

$$y(s) = (1+5s) / (s(s-6))$$

b) $dy/dt - y + \int_{\infty}^{t} y(t)dt = 1$ con: $y(0)=0$, $\int_{-\infty}^{0} y(t)dt = -2$

$$y' - y + \int_{-\infty}^{0} y(t)dt + \int_{0}^{t} y(t)dt = 1$$

$$sY(s) - f(0) - Y(s) -2 + L(\int_{0}^{t} y(t)dt) = 1/s$$

$$sY(s) - f(0) - Y(s) -2/s + y(s)/s = 1/s$$

$$Y(s) (s -1 + 1/s) = 3/s$$

$$Y(s) = 3/(s^2-s+1)$$

c) $2\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 8y = 0$ con: $y(0)=-3$, $y'(0)= 4$

$$2(s^2Y(s)-sY(0)-y'(0)) + 8(sY(s) - Y(0)) + 8Y(s) = 0$$

$$2 s^2Y(s) + 6s -8 + 8sY(s) + 24 + 8Y(s) = 0$$

$$2Y(s) (s^2 + 4s + 4) = -6s - 16$$

$$Y(s) = - (3s-8) / (s^2 + 4s + 4)$$

d) $y' + 2y + 10 = 0$; con $y(0)=0$

$$sY(s) - Y(0) + 2Y(s) + 10/s = 0$$

$$Y(s) (s+2) = -10/s$$

$$Y(s) = -10 / (s(s+2))$$

11. Encuentre las soluciones en el dominio del tiempo f(t) de la siguiente ecuación diferencial empleando transformada de Laplace.

$$y' - 4y = e^{4t} \; ; \qquad \text{con } y(0) = 1$$

Solución:

$$s\,Y(s) - Y(0) - 4\,Y(s) = 1/\,(s-4)$$

$$Y(s)\,(\,s - 4\,) = 1 + 1/\,(s-4)$$

$$Y(s) = 1/\,(s-4) \; + 1/\,(s-4)^2$$

$$y(t) = L^{-1}(\,Y(s)\,) = e^{4t} \; + t\,e^{4t}$$

12. Encuentre las soluciones en el dominio del tiempo f(t) de la siguiente ecuación diferencial empleando transformada de Laplace.

$$x'' + 16x = \cos 4t \; ; \quad \text{con } x(0)=0 \;\; \text{y} \;\; x'(0)=1$$

Solución:

$$s^2\,X(s) - sX(0) - X'(s) + 16X(s) = s/\,(s^2+16)$$

$$s^2\,X(s) \; - 1 + 16X(s) = s/\,(s^2+16)$$

$$X(s)\,(s^2 + 16) = 1 + s/\,(s^2+16)$$

$$X(s) = 1/(s^2 + 16) + s/\,(s^2+16)^2$$

$$x(t) = L^{-1}(\,X(s)\,) = \tfrac{1}{4}\,L^{-1}(4/(s^2 + 16)) \; + \; 1/8\,L^{-1}(\,2*4*s\,/\,(s^2+16)^2\,)$$

$$x(t) = \tfrac{1}{4}\,\text{sen } 4t \; + 1/8\,t\text{sen } 4t$$

13. Encuentre la aproximación lineal para $f(x) = x^{1/5}$; para xi = 32 y determine el valor aproximado de $(30)^{1/5}$

Solución:

Aproximando mediante la Serie de Taylor:

$$f(x) = x^{1/5}\,|_{xi=32} + \frac{d\left(x^{1/5}\right)}{dx}\,|_{xi=32}\ (x-xi)$$

$$f(x) = 32^{1/5} + \frac{32^{-4/5}}{5}\ (x-32)$$

$$f(x) = 2 + (1/80)\ (x-32)$$

$$f(x) = 1.6 + x/80$$

Mediante la aproximación calculamos $30^{1/5}$:

$$f(30) = 1.6 + 30/80 = \mathbf{1.975}$$

Empleando cálculo directo tenemos que: $30^{1/5} = 1.97435$; comparando ambos resultados podemos apreciar la proximidad en sus valores.

14. Encuentre la aproximación lineal para $f(x) = x^{2/3}$; para xi = 1000 y empleando la función linealizada obtenga el valor aproximado de f(x) para x=997

Solución:

Aproximando mediante la Serie de Taylor:

$$f(x) = x^{2/3}\,|_{xi=1000} + \frac{d\left(x^{2/3}\right)}{dx}\,|_{xi=1000}\ (x-xi)$$

$$f(x) = 1000^{1/5} + \frac{2 * 1000^{-1/3}}{3}(x-1000)$$

$$f(x) = 100 + 0.666x - 66.666 = 33.333 + 0.666x$$

Mediante la aproximación calculamos $997^{2/3}$:

$$f(997) = 33.333 + 0.666(997) = \mathbf{99.7996}$$

Empleando cálculo directo tenemos que: $997^{2/3} = 99.7998$; comparando ambos resultados podemos apreciar la proximidad en sus valores.

15. Encuentre la aproximación lineal para $f(x) = \log x$; para xi = 100 y determine el valor aproximado para x = 101

Solución:

Aproximando mediante la Serie de Taylor:

$$f(x) = \log x \,\big|_{xi=100} + \frac{d(\log x)}{dx}\big|_{xi=100}(x-xi)$$

$$f(x) = \log 100 + \frac{1}{100}\log e \quad (x-100)$$

$$f(x) = 2 + 4.3429E\text{-}03\,(x - 100)$$

$$f(x) = 4.3429E\text{-}03x + 1.5657$$

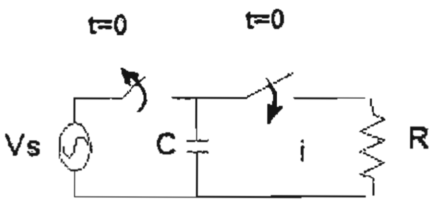
Mediante la aproximación calculamos log 101 :

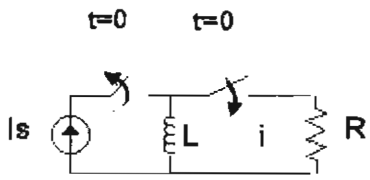
$$f(101) = 4.3429E\text{-}03\,(101) + 1.5657 = 2.004338$$

Empleando cálculo directo tenemos que: log 101 = 2.004321 ; comparando ambos resultados podemos apreciar la proximidad en sus valores.

16. Determine los modelos matemáticos de los dos siguientes sistemas eléctricos para $t > 0$.

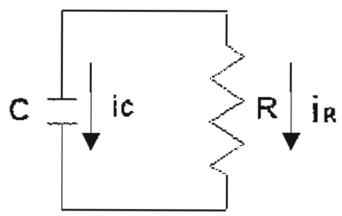
a) b)





Solución:

a) De acuerdo al diagrama eléctrico se puede observar que $Vc(0^-) = Vs$ por lo que para $t > 0$ el diagrama equivalente es el siguiente:



Aplicando la segunda Ley de Kirchhoff (la suma de todos los voltajes alrededor de un circuito cerrado es cero) obtenemos la siguiente expresión:

$$V_C = V_R$$

Aplicando la primera Ley de Kirchhoff (la suma de todas las corrientes eléctricas que fluyen hacia una unión, nodo, de un circuito es cero) se obtiene:

$$i_c + i_R = 0$$

y considerando las ecuaciones de rama siguientes:

$i_c = c\,\dfrac{d(Vc)}{dt}$ $\qquad\qquad$ $i_R = V_R/R = Vc/R$

Se sustituyen en la ecuación determinada por la Ley de Kirchhoff de corriente:

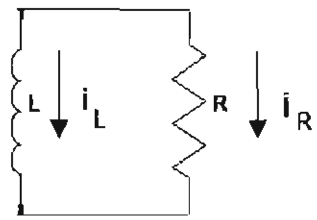
$$\frac{d(Vc)}{dt} + Vc/RC = 0$$

En relación a la condición inicial debe considerarse la ecuación de continuidad:

$$Vc(0^-) = Vc(0) = Vc(0^+)$$

Por lo que la condición inicial $Vc(0) = Vs$

b) De acuerdo al diagrama eléctrico se puede observar que $I_L(0^-) = Is$ por lo que para $t > 0$ el diagrama equivalente es el siguiente:



Aplicando la segunda Ley de Kirchhoff (la suma de todos los voltajes alrededor de un circuito cerrado es cero) obtenemos la siguiente expresión:

$$V_L = V_R$$

Aplicando la primera Ley de Kirchhoff (la suma de todas las corrientes eléctricas que fluyen hacia una unión, nodo, de un circuito es cero) se obtiene:

$$i_L + i_R = 0$$

y considerando las ecuaciones de rama siguientes: 2893063

$V_L = L\,\dfrac{d(I_L)}{dt}$ ó $i_L = 1/L \int V_L(t)\,dt + i_L(0)$; $i_R = V_R/R = V_L/R$

Se sustituyen en la ecuación determinada por la Ley de Kirchhoff de corriente:

$$i_L + L/R\,\frac{d(I_L)}{dt} = 0$$

$$\frac{d(I_L)}{dt} + i_L\,R/L = 0$$

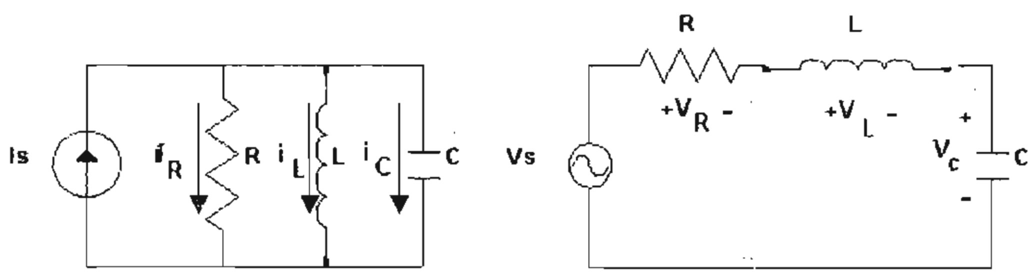
En relación a la condición inicial debe considerarse la ecuación de continuidad:

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+)$$

Por lo que la condición inicial $i_L(0) = Is$

17. Determine los modelos matemáticos de los dos siguientes sistemas eléctricos

a) b)



Solución

a) Considerando condiciones iniciales igual a cero: $I_L(0) = 0$ y $Vc(0) = 0$ aplicando las leyes de Kirchhoff obtenemos las siguientes expresiones:

$$V_R = V_L = Vc$$

$$Is = i_R + i_L + ic$$

a continuación se establecen las siguientes ecuaciones de rama:

$$V_R = i_R\, R \;;\quad V_L = L\frac{d(I_L)}{dt} \;;\quad i_c = C\,\frac{d(Vc)}{dt}$$

Sustituyendo en la ecuación de corrientes de Kirchhoff tenemos:

$$Is = V_R / R + i_L + C\,\frac{d(Vc)}{dt} = V_L / R + i_L + LC\,\frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

Quedando expresado el modelo matemático del sistema en la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + (1/RC)\,\frac{d(I_L)}{dt} + i_L / LC = Is / LC$$

b) Al igual que en el inciso anterior las condiciones iniciales del sistema son cero: $I_L(0) = 0$ y $Vc(0) = 0$. Aplicando las leyes de Kirchhoff tenemos:

$$I_R = I_L = Ic$$

$$Vs = V_R + V_L + Vc$$

a continuación se establecen las siguientes ecuaciones de rama:

$$V_R = i_R\, R \;;\quad V_L = L\frac{d(I_L)}{dt} \;;\quad i_c = C\,\frac{d(Vc)}{dt}$$

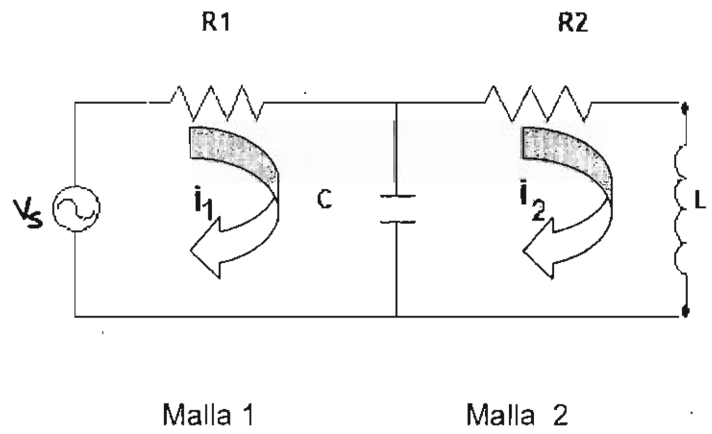
Sustituyendo en la ecuación de voltajes de Kirchhoff tenemos:

$$Vs = i_R R + L\frac{d(I_L)}{dt} + V_c = RC\frac{d(Vc)}{dt} + LC\frac{d^2V_c}{dt^2} + Vc$$

Quedando expresado el modelo matemático del sistema en la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2V_c}{dt^2} + R/L\frac{d(Vc)}{dt} + Vc / LC = Vs / LC$$

18. Determine el modelo matemático del sistema eléctrico de dos mallas mostrado a continuación.



Solución:

Para la solución de este tipo de problemas se emplean los métodos generales de análisis (mallas y nodos).

En este caso se emplea el método de análisis de mallas:

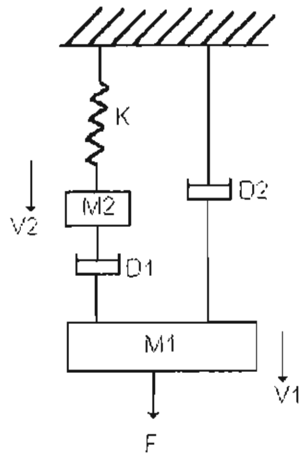
- Se asigna una corriente de dirección arbitraria a cada trayectoria cerrada independiente de la red.

- Implicar las polaridades dentro de cada malla para cada resistencia, la cual está determinada por la dirección de la corriente en cada malla.
- Aplicar la ley de voltajes de Kirchhoff a cada malla

Malla 1: $-Vs + i_1R_1 + 1/C \int (i_1 - i_2)\, dt = 0$

Malla 2: $1/C \int (i_2 - i_1)\, dt + I_2 R_2 + L(d\, i_2/dt) = 0$

19.- Del siguiente sistema mecánico determine a) su modelo matemático como función del tiempo y b) su diagrama eléctrico equivalente.



Solución:

a) Para la solución de éste problema debe considerarse las siguientes expresiones matemáticas que describen el comportamiento de los componentes mecánicos del sistema:

<u>Para el resorte</u>

$F = K\,X = k'\,X$; donde :

F. Fuerza
K . Constante del resorte
X . Desplazamiento del resorte
k´. Inverso de la constante del resorte (1/K)

Pero X puede descomponerse como la integral con respecto al tiempo de una velocidad, por lo tanto:

$$F = 1/k' \int V(t)\, dt$$

Para la masa

F = ma ; donde:

F . Fuerza
m. masa
a . aceleración

Pero la aceleración puede descomponerse como la primera derivada de la velocidad con respecto al tiempo, quedando la expresión de la siguiente forma:

$$F = m\, (d\, V(t) / dt)$$

Para el amortiguador

F = D V(t) ; donde:

F . Fuerza
V(t) . Velocidad
D . Constante de amortiguamiento

Una vez determinado las anteriores expresiones matemáticas se procede a establecer las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema mecánico (convención V(t) = V) :

Para M_1 $$M_1\, d\,(V_1)/dt = F - D_2 V_1 - D_1(V_1 - V_2)$$

La suma algebráica de todas las fuerzas que se involucran en el movimiento de la masa M_1 , es igual al producto de la masa por la aceleración de M_1 (segunda ley de Newton). El segundo término de la anterior expresión corresponde a la suma de fuerzas: F es la causante de que el sistema sea movido en la dirección misma de F, por lo que su magnitud es mayor a las otras fuerzas involucradas en el movimiento (esto determina que su signo sea positivo). Los amortiguadores se oponen a la acción de la fuerza F por lo que su signo es negativo. Sobre el amortiguador D_1 actúan tanto la fuerza F como la producida por la acción del resorte, a esto se debe la velocidad relativa considerada para la aceleración total del sistema ($V_1 - V_2$).

Para M_2 $$M_2\, d\,(V_2)/dt = D_1\,(V_1 - V_2) - 1/k' \int V_2\, dt$$

Nuevamente para ésta ecuación se aplica la segunda ley de Newton pero ahora en la masa 2 (M_2); las fuerzas involucradas son provocadas por el amortiguador D_1 y por el resorte, el primero es de signo positivo por provocar movimiento relativo en el sentido de movimiento de todo el sistema.

b) Para encontrar el diagrama eléctrico equivalente debemos observar las analogías entre los componentes mecánicos y eléctricos en cuanto a su comportamiento como función del tiempo:

Resorte:	$F = 1/k' \int V(t)\, dt$	$\rightarrow$	Capacitor:	$V = 1/C \int i(t)\, dt$
Masa:	$F = m\,(d\,V(t)\,/\,dt)$	$\rightarrow$	Inductor:	$V = L(d\,i(t)\,/\,dt)$
Amortiguador:	$F = D\,V(t)$	$\rightarrow$	Resistencia	$V = R\,i(t)$

$$V_{\text{(velocidad)}} \rightarrow i_{\text{(corriente)}}$$

Sustituyendo las expresiones eléctricas en las ecuaciones mecánicas:

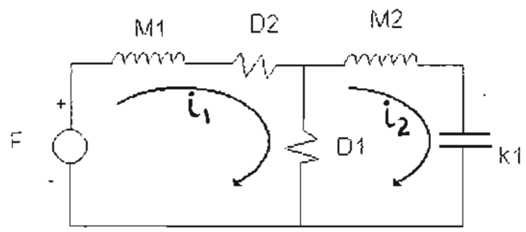
$$L_1\, d\,(i_1)/dt = V - R_2\, i_1 - R_1(i_1 - i_2)$$

$$L_2\, d\,(i_2)/dt = R_1\,(i_1 - i_2) - 1/C \int i_2\, dt$$

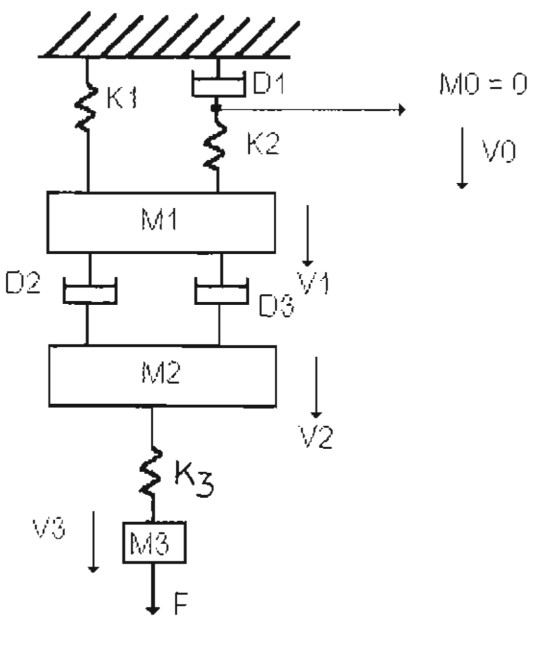
Posteriormente debemos considerar los siguientes puntos:

- Puede verse que mecánicamente se establecieron dos ecuaciones, éstas representan dos mallas en un sistema eléctrico.
- D_1 es el único componente mecánico que tiene en común dos velocidades, en un sistema de mallas esto implica que el componente en cuestión comparte ambas mallas.
- F es equivalente a una fuente de voltaje

Tomando en cuenta todo lo anteriormente señalado, el diagrama eléctrico equivalente queda de la siguiente manera:



20. Del siguiente sistema mecánico determine a) su modelo matemático como función de la frecuencia y b) su diagrama eléctrico equivalente.



Solución:

Para M_3

$$S\, m_3 V_3 = F - (V_3 - V_2) / (Sk_3) \rightarrow F = S\, m_3 V_3 + (V_3 - V_2) / (Sk_3)$$

Para M_2

$$S\, m_2 V_2 = (V_3 - V_2) / (Sk_3) - D_2 (V_2 - V_1) - D_3 (V_2 - V_1) \rightarrow$$

$$0 = S\, m_2 V_2 + (V_2 - V_3) / (Sk_3) - D_2 (V_2 - V_1) - D_3 (V_2 - V_1)$$

Para M_1

$$S\, m_1 V_1 = D_2 (V_2 - V_1) + D_3 (V_2 - V_1) - V_1/(Sk_1) - (V_1 - V_0)/(Sk_2) \rightarrow$$

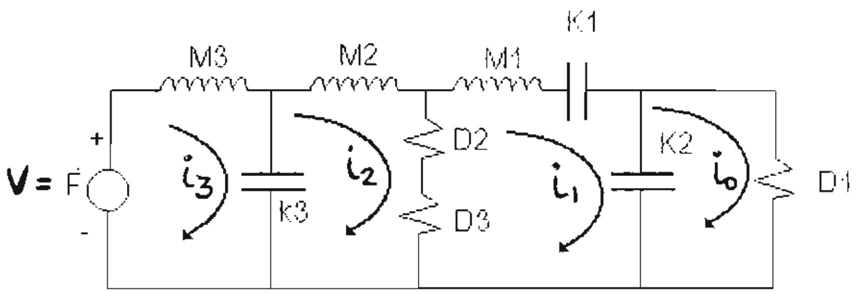
$$0 = S\, m_1 V_1 + D_2 (V_1 - V_2) + D_3 (V_1 - V_2) + V_1/(Sk_1) + (V_1 - V_0)/(Sk_2)$$

Para Mo

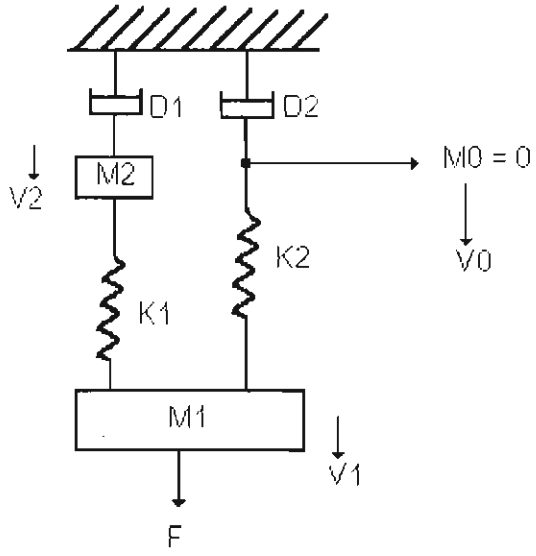
$$S\, m_0 V_0 = (V_1 - V_0) / (Sk_2) - D_1 V_0 \quad \rightarrow \quad 0^* = D1V + (V_0 - V_1) / (Sk_2)$$

* La masa es virtual, por lo tanto vale cero.

Una vez obtenidas las ecuaciones del sistema mecánico se emplean las analogías para establecer el diagrama eléctrico equivalente:



21. Del siguiente sistema mecánico determine a) su modelo matemático como función de la frecuencia y b) su diagrama eléctrico equivalente.



Solución:

Para M_1 :

$$SM_1V_1 = F - (V_1 - V_0) / SK_2 - (V_1 - V_2) / SK_1$$

$$F = SM_1V_1 + (V_1 - V_0) / SK_2 + (V_1 - V_2) / SK_1$$

Para M_2:

$$SM_2V_2 = (V_1 - V_2) / SK_1 - D_1 V_2$$

$$0 = SM_2V_2 + D_1 V_2 + (V_2 - V_1) / SK_1$$

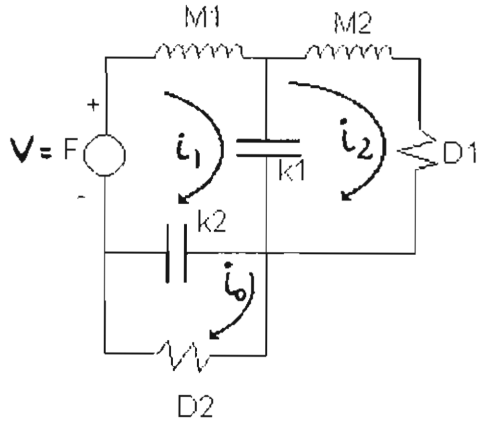
Para M_0:

Nótese que se consideró una masa = 0 para facilitar el análisis entre el amortiguador y el resorte

$$SM_0V_0 = (V_1 - V_0) / SK_2 - D_2 V_0$$

$$0 = (V_0 - V_1) / SK_2 + D_2 V_0$$

Analizando las ecuaciones obtenidas y empleando las consideraciones del problema anterior se obtiene el siguiente diagrama eléctrico equivalente:



22. Para el circuito descrito en el problema 18 determine la función de transferencia establecida entre el voltaje de entrada (Vs) y el voltaje medido en las terminales del inductor V_L.

Solución:

Para la solución de éste tipo de problemas se emplea la técnica de Laplace para simplificar el trabajo matemático y en consecuencia el tiempo de resolución. Considérese:

$$L\,(Vs) = Vs(S)$$

$$L(i_1) = I_1(s)$$

$$L(i_2) = I_2(s)$$

Aplicando Laplace en el modelo matemático obtenido en el problema 18 se obtienen las siguientes expresiones:

$$Vs(S) = I_1R_1 + (1/SC)(I_1 - I_2)$$

$$0 = (1/SC)(I_2 - I_1) + I_2R_2 + LS\,I_2 - L\,I_0$$

Tomando en cuenta que las condiciones iniciales del sistema eléctrico son igual a cero y reordenando las ecuaciones tenemos:

$$Vs(S) = I_1(R_1 + 1/SC) - I_2(1/SC)$$

$$0 = -I_1(1/SC) + I_2(1/SC + R_2 + LS)$$

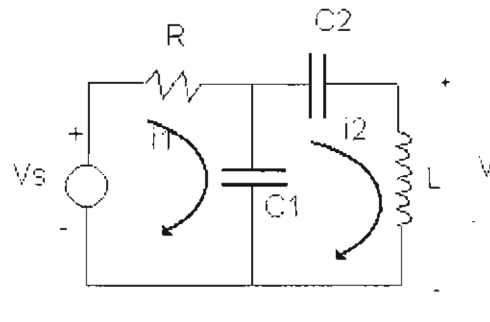
Sustituyendo I_1 de la segunda ecuación en la primera ecuación tenemos:

$$Vs(S) = \frac{I_2SC\left(1 + R_2SC + LCS^2\right)\left(R_1 + \frac{1}{SC}\right) - I_2}{SC}$$

Pero sabemos que F.T. = $V_L(S)$ / Vs(S) y que $V_L = I_2LS$ por lo tanto:

$$F.T. = LCS^2 / \left(SC\left(1 + R_2SC + LCS^2\right)\left(R_1 + \frac{1}{SC}\right) - 1 \right)$$

23. Encuentre la función de transferencia V_L / Vs del siguiente circuito:



Solución :

Primero se establecen las ecuaciones de mallas en Laplace:

$$Vs(S) = I_1R + (1/SC_1)(I_1 - I_2)$$

$$0 = (1/SC_1)(I_2 - I_1) + I_2 / SC_2 + LS\, I_2$$

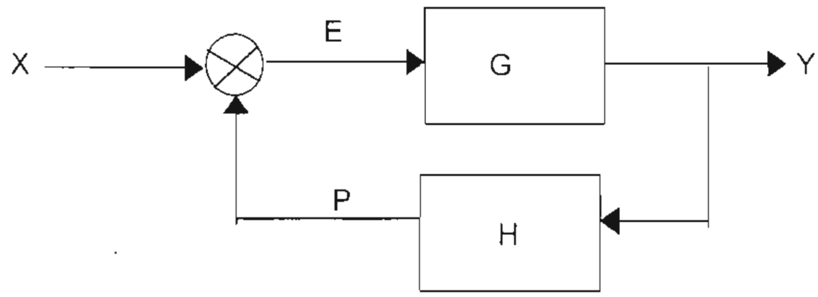
Despejando I_1 de ambas ecuaciones e igualándolas se puede despejar a Vs:

$$v(s) = I_2\left[\left[SC_1\left(\frac{1}{SC_2} + SL\right) + 1\right]\left(R + \frac{1}{SC_1}\right) - \frac{1}{SC_1}\right]$$

Pero sabemos que F.T. = $V_L(S)$ / Vs(S) y que $V_L = I_2LS$ por lo tanto:

$$F.T. = LS \;/\; \left[\left[SC_1\left(\frac{1}{SC_2} + SL\right) + 1\right]\left(R + \frac{1}{SC_1}\right) - \frac{1}{SC_1}\right]$$

24. Reduzca a un solo bloque el Diagrama a bloques de un sistema con retroalimentación (sistema de malla cerrada), como el que se muestra a continuación.



Solución:

Un diagrama a bloques de un sistema es una representación gráfica de las funciones e interrelaciones establecidas entre todos los componentes del sistema. Un bloque representa la operación matemática que éste produce a la salida, sobre la señal que tiene a la entrada.

Partiendo del diagrama a bloques anterior y empleando el álgebra de bloques se establecen las siguientes ecuaciones:

1. $Y = E * G$
2. $E = X - P$
3. $P = Y * H$

Sustituyendo 3 en 2

4. $E = X - YH$

Sustituyendo 4 en 1:

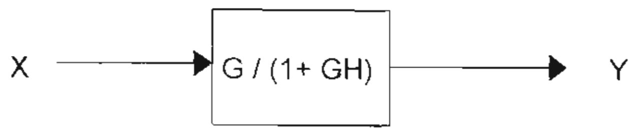
$$Y = (X - YH) G$$

$$GX = Y (1 + GH)$$

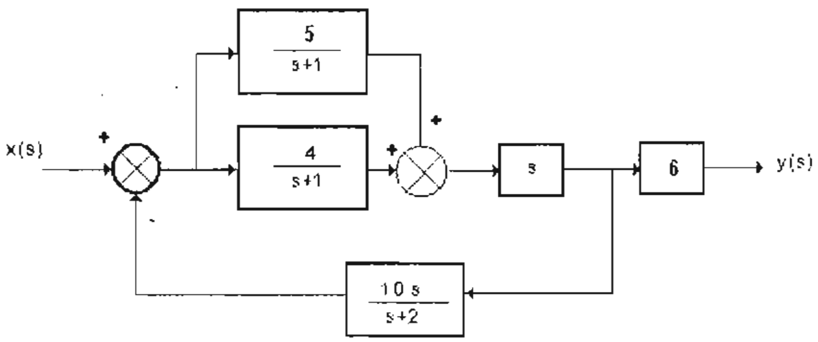
$$\therefore$$

$$Y/X = G / (1+ GH)$$

Por consiguiente la reducción se visualiza en el siguiente diagrama:

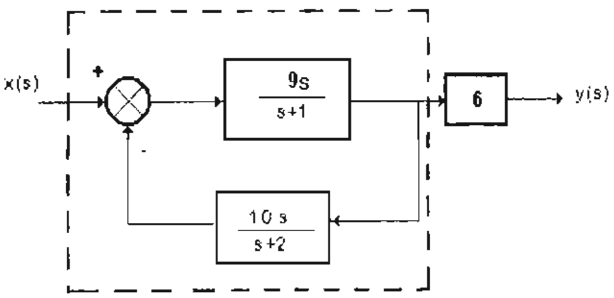


25. Empleando equivalencias reduzca el siguiente diagrama de bloques encontrando su función de transferencia F.T.



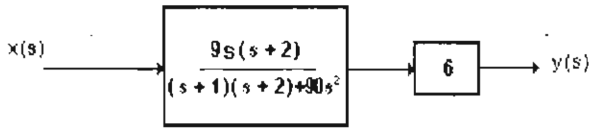
Solución:

En este ejemplo, para encontrar la Función de Transferencia es necesario aplicar el álgebra de bloques con el objeto de reducir el diagrama a un solo bloque; el bloque obtenido corresponde a la F.T.. A continuación se describirán las reducciones efectuadas mostrándose el diagrama de bloques equivalente.

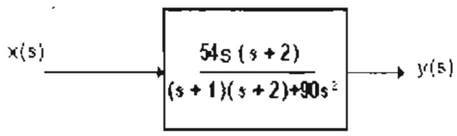


La primera reducción corresponde al efecto simple de sumar los dos bloques cuyas entradas son comunes, en tanto que sus salidas entran a un sumador. Posteriormente se multiplica por el bloque cuya F.T. es "s".

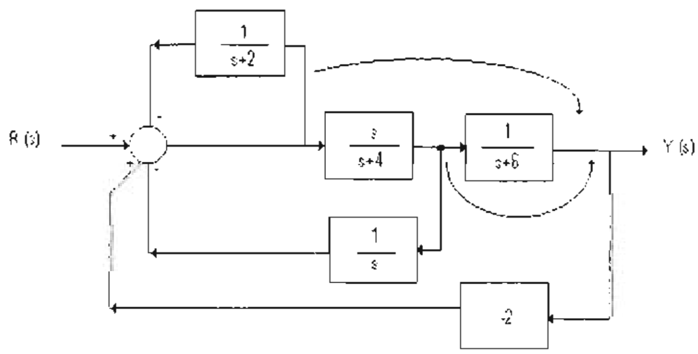
En el diagrama a bloques reducido, se puede identificar en un recuadro con línea discontinua un subsistema típico de retroalimentación negativa (en el problema anterior se ha obtenido el bloque equivalente). El siguiente diagrama considera la reducción:



Por último la función de transferencia del diagrama a bloques original, corresponde al producto de los dos bloques del diagrama anterior:

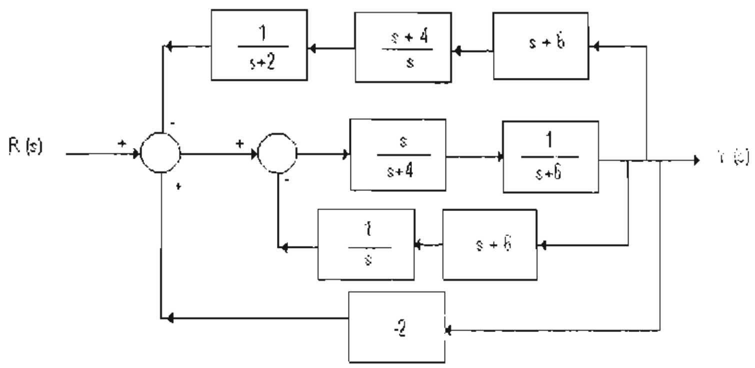


26. Empleando equivalencias reduzca el siguiente diagrama de bloques

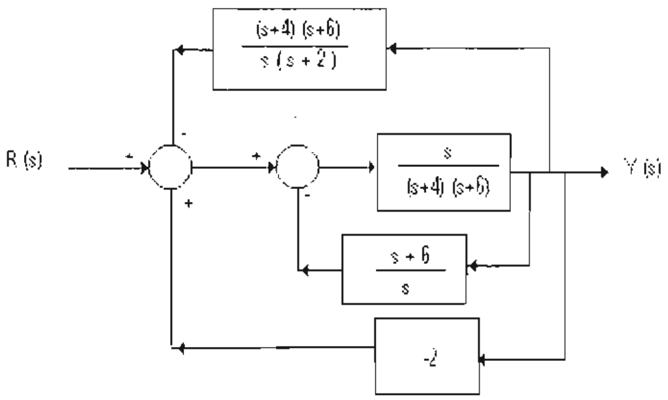


Solución:

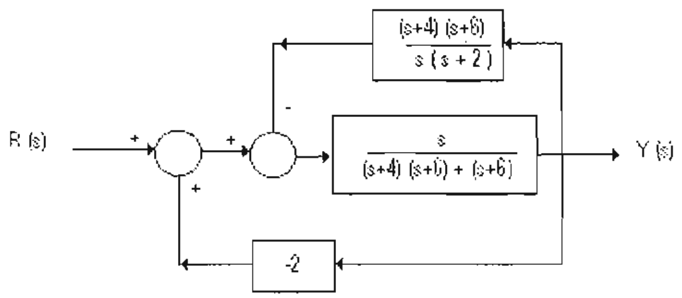
Como primer procedimiento para la reducción se debe de transferir los nodos indicados en el diagrama hacia el nodo Y(s) (tal como lo muestran las flechas). Para tal efecto se deben de introducir nuevos bloques para compensar el proceso de traslado, de tal forma que el diagrama equivalente se muestra a continuación:



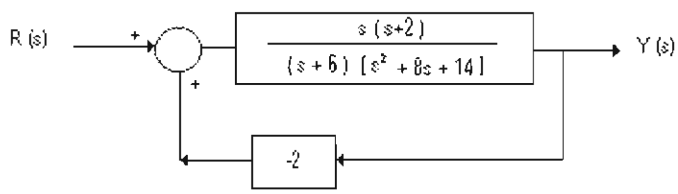
El siguiente paso consiste en multiplicar los bloques que se encuentran de manera secuencial, es decir, se agrupan los bloques en serie:



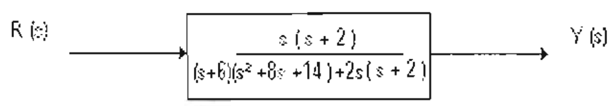
Una vez hecha la reducción, se puede observar en el diagrama anterior que los dos bloques internos constituyen un subsistema de retroalimentación negativa, por lo que su equivalente corresponde a un solo bloque. El efecto de ésta reducción puede apreciarse en el siguiente diagrama a bloques:



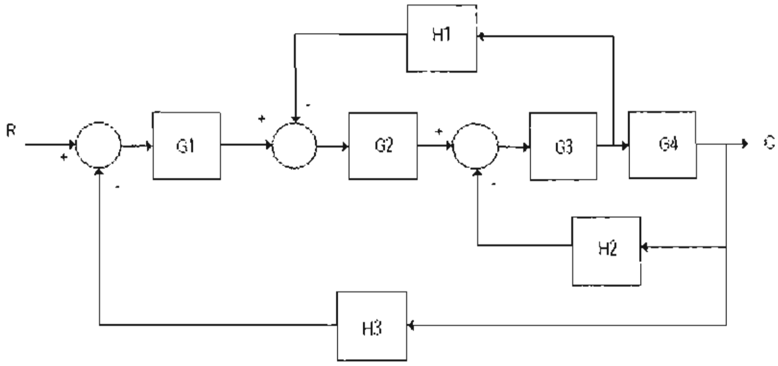
Nótese que se introdujo un sumador que no afecta en nada al sistema, pero que si ayuda a efectuar reducciones. Se puede inferir una nueva reducción en el sistema con los bloques que conforman un subsistema de retronegativa:



Por último, la reducción del sistema de retropositiva anterior queda establecido en el bloque siguiente:

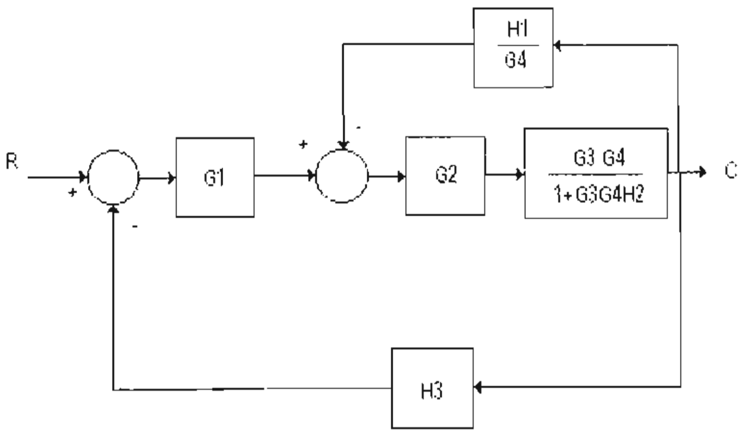


27. Empleando equivalencias reduzca el siguiente diagrama de bloques y obtenga la Función de Transferencia C/R

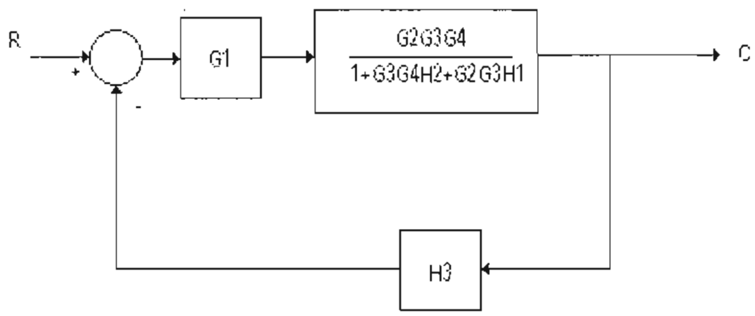


Solución:

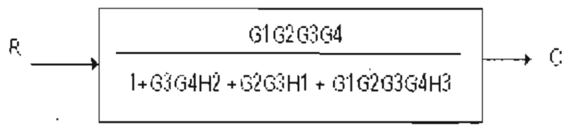
En éste problema se puede observar que los bloques correspondientes a la retroalimentación han sido identificados con la letra "H". Como primer reducción es necesario transferir la fuente de señal del bloque H1 hasta la salida del sistema (compensar con un bloque 1/G4), posteriormente se identifica un subsistema de retroalimentación negativa (H2) el cual es reducido como en los ejemplos anteriores:



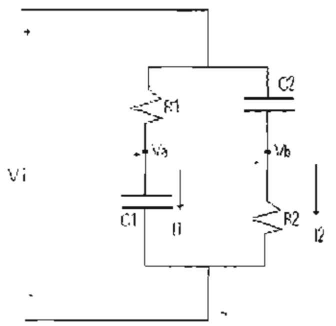
El siguiente paso consiste en agrupar los bloques en serie y nuevamente se identifica un subsistema de retro negativa (H1/G4), quedando la reducción de la siguiente manera:



Por último, se agrupan bloques en serie y se reduce el último subsistema de retroalimentación negativa H3:



28. Para el siguiente circuito establezca a) un diagrama a bloques que describa la interrelación de todos los componentes donde la entrada corresponda a Vi y la salida Vo sea Va - Vb y b) reduzca el diagrama para obtener la función de transferencia.



Solución:

a)

Para definir el diagrama a bloques correspondiente al circuito, es indispensable establecer las siguientes relaciones entre los componentes del circuito eléctrico y las señales que generan.

$$Vo = Va - Vb$$

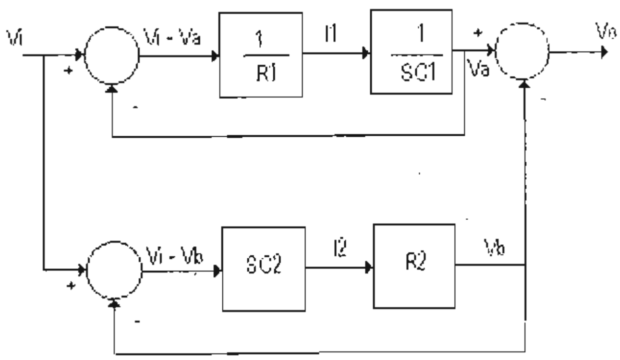
$$Va = I_1 / SC_1$$

$$I_1 = (Vi - Va) / R_1$$

$$Vb = I_2 R_2$$

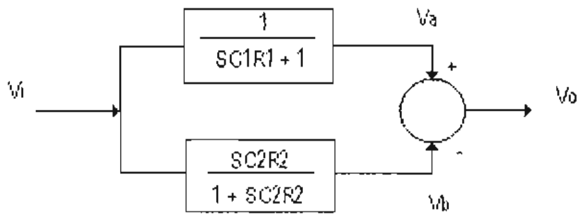
$$I_2 = (Vi - Vb) / (1 / SC_2)$$

De acuerdo a las ecuaciones anteriores se construye el diagrama a bloques. Nótese que tanto las corrientes como los voltajes son señales procesadas por cada bloque, es decir, no forman parte de la transferencia de los bloques

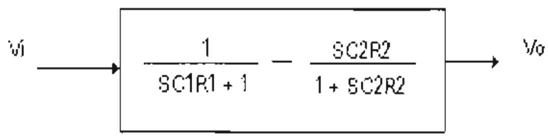


b)

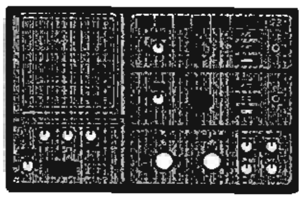
La reducción del anterior diagrama a bloques es muy sencilla, se pueden identificar dos subsistemas con retroalimentación negativa (la retro es unitaria en ambos casos), pero previamente son agrupados los bloques en serie. La reducción obtenida queda indicada en el siguiente diagrama a bloques:

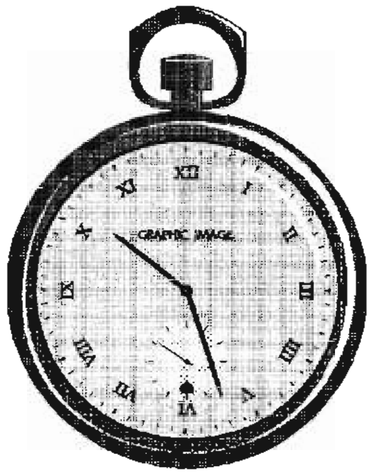


La reducción siguiente consiste únicamente en restar los bloques:



El bloque obtenido corresponde a la Función de Transferencia (Va - Vb) / Vi del circuito eléctrico en análisis.





III RESPUESTA EN EL TIEMPO

1. Considere el sistema descrito por la ecuación diferencial:

$$(D^2 + 1)y = f(t)$$

Con todas las condiciones iniciales iguales a cero, y con un escalón unitario aplicado durante π segundos

$f(t) = 1$ para $0 \le t \le \pi$

$f(t) = 0$ para $t > \pi$

Determinar la respuesta para t entre 0 y π ; y para t mayor a pi

Solución:

$$(D^2 + 1)y = f(t) \qquad \textit{Aplicando T. de Laplace}$$

$$S^2Y(S) - SY(0) - Y(0) + SY(S) - Y(0) = F(S)$$

$$S^2Y(S) + SY(S) = F(S)$$

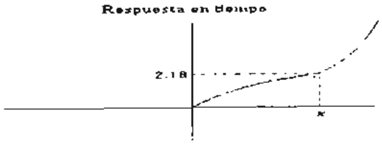
$$Y(S)[S^2 + S] = F(S) \qquad \text{despejando Y(S)}$$

$$Y(S) = \frac{F(S)}{(S^2 + S)} \qquad \text{Como F(S) vale } \frac{1}{S} \text{ entonces :}$$

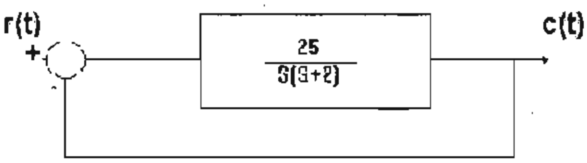
$$Y(S) = \frac{1}{S^2 + S} \times \frac{1}{S} = \frac{1}{S^2(S+1)}$$

Aplicando T. de Laplace inversa :

$$y(t) = e^{-t} + t - 1$$



2. ¿Cuál es la respuesta c(t) del sistema a una excitación de entrada r(t)=u(t) cuando todas las condiciones iniciales son cero ?



Solución:

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{25}{S^2 + S + 25}$$

$$Wn^2 = 25 \rightarrow Wn = 5$$

$$2\xi Wn = 2 \qquad \xi = \frac{2}{2Wn} = 0.2$$

$$C(S) = \frac{25}{S^2 + 2S + 25} R(S) = \frac{25}{S^2 + 2S + 25} \times \frac{1}{S}$$

$$C(S) = \frac{25}{(S + 1 - 4.9j)(S + 1 + 4.9j)S}$$

$$C(S) = \frac{A}{S} + \frac{B}{(S + 1 - 4.9j)} + \frac{C}{(S + 1 + 4.9j)}$$

$$A = 1$$

$$B = \left.\frac{25}{S(S + 1 + 4.9j)}\right|_{S=-1+4.9j} = -.5 + 0.102j$$

$$C = -.5 - 0.102j$$

$$C(S) = \frac{1}{S} + \frac{-.5 + 0.102j}{(S + 1 - 4.9j)} + \frac{-.5 - 0.102j}{(S + 1 + 4.9j)}$$

$$c(t) = \mu(t) + (.5 + 0.102j)e^{-(1-4.9j)t} + (-.5 + 0.102j)e^{-(1+4.9j)t}$$

$$c(t) = \mu(t) + 1e^{-1t}(\cos 0.49t - 0.204 \operatorname{sen} 0.49t)$$

3. Un sistema de control retroalimentado, tiene una función de Transferencia:

$$F.T. = 1 / (s^2 + 3s + 49)$$

Determine los siguientes parámetros de su respuesta en el tiempo: máximo sobreimpulso (Mp), tiempo de respuesta (tr), tiempo pico (tp) y tiempo de estabilización (ts) al 5% y al 2%.

Solución:

De la función de Transferencia se identifican los parámetros para calcular los requerimientos del problema:

$$Wn^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad Wn = 7 \quad ; \quad 2\xi Wn = 3 \quad \therefore \quad \xi = 0.214$$

$$Wd = Wn\,(1 - \xi^2)^{1/2} = 6.837 \text{ Rad/Seg.}$$

$Mp = e^{-(\xi \pi Wn)/wd} \quad \therefore$ **$Mp = 0.502 = 50.2\ \%$**

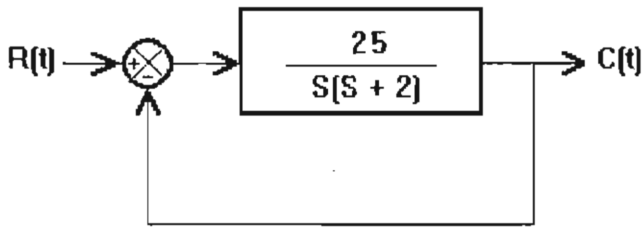
$tr = (\pi - tg^{-1}(Wd/\xi Wn)) \;/\; Wd \quad \therefore$ **$tr = 0.26seg$**

$ts_{5\%} = 3 / (\xi Wn) \quad \therefore$ **$ts_{5\%} = 2seg$**

$ts_{2\%} = 4 / (\xi Wn) \quad \therefore$ **$ts_{2\%} = 2.67seg$**

$tp = \pi / Wd \quad \therefore$ **$tp = 0.459seg.$**

4. Determine el coeficiente de amortiguamiento, frecuencia natural amortiguada, y la frecuencia natural no amortiguada para el sistema mostrado en la fig. La excitación del sistema corresponde a un escalón unitario r(t)=u(t) y las condiciones iniciales son cero.



Solución:

$$C(s)=\frac{25}{S^2+2S+25}(1/S)=\frac{25}{S(S+1-4.9j)(S+1+4.9j)}$$

$$=\frac{A}{S}+\frac{B}{S+1-4j}+\frac{C}{S+1+4j}$$

A=1, B=-0.5+0.1j, C=-0.5-0.1j

$$C(s)=\frac{1}{S}+\frac{-0.5+0.1j}{S+1-4.9j}+\frac{-0.5-0.1j}{S+1+4.9j}$$

La respuesta c(t) esta dada por la siguiente expresión:

$$C(t)=u(t)-(0.5-0.1j)e^{-(1-4.9j)t}-(-0.5+0.1j)e^{-(1+4j)t}$$

La Función de Transferencia está dada por: $25 / (s^2 + 2s + 25)$; identificando:

$$Wn^2 = 25, \quad Wn=5$$

$$2\,\xi\,Wn=2 \quad \therefore \quad \xi = 0.2$$

$$Wd = Wn\,(1-\xi^2)^{1/2} = 4.9 \text{ Rad/Seg.}$$

5. Para el sistema anterior, determine el tiempo pico tp, al 2% del tiempo de establecimiento ts, y el porcentaje del máximo de sobreimpulso.**¡Error! Marcador no definido.**

Solución:

La Función de Transferencia está dada por: $25 / (s^2 + 2s + 25)$ por lo que a partir de ella:

ts = $4 / (\xi Wn)$, del problema anterior sabemos:

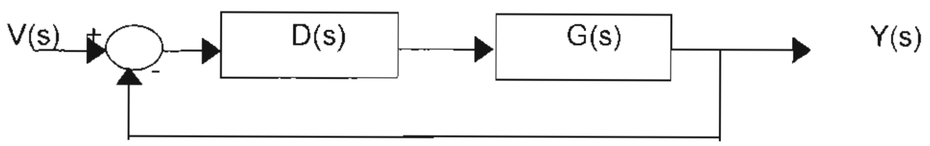
$$\xi = 0.2 \text{ y } Wn = 5$$

Por lo que **ts = 4**

$tp = \pi / Wd$; $Wd = Wn\,(1 - \xi^2)^{1/2} = 4.9$ Rad/Seg. $\therefore$ **tp = 0.641 seg.**

$Mp = e^{-(\xi \pi Wn) / wd}$ $\therefore$ **Mp = 0.526 = 53 %**

6. Un sistema de retroalimentación unitaria de lazo cerrado tiene la función de Transferencia (G(s)) multiplicada por un factor D(s)



$G(s) = 9 / (s(s + 5))$; $D(s) = Ks + 1$

Encuentre el valor de K necesario tal que, la respuesta del sistema a un impulso unitario sea críticamente amortiguado.

Solución:

La función de transferencia del sistema retroalimentado queda expresado de la siguiente manera:

$$F.T. = 9\,(ks + 1) / (\,s(s+5) + 9ks + 9\,) = 9\,(ks + 1) / (\,s^2 + s(5+9k) + 9\,)$$

Identificando:

$$Wn^2 = 9, \quad Wn=3$$

2 ξ Wn=5+9k , pero para el caso críticamente amortiguado ξ=1 $\therefore$ 2Wn=5+9k =>

$$K = 0.111$$

7. Una unidad de retroalimentación de lazo cerrado contiene una función de transferencia de lazo abierto: G(s) = 0.003K / (s + 0.35s + 0.03) qué valor de K determina en el resultado un error en estado estable = 0.02.

Solución:

La función de transferencia del sistema retroalimentado se determina a continuación:

$$F.T. = \frac{\dfrac{0.03K}{s + 0.35s + 0.03}}{1 + \dfrac{0.03K}{s + 0.35s + 0.03}}$$

F.T. = 0.03 k / (s + 0.35s + 0.03 + 0.03k)

Aplicando el teorema del valor final tenemos:

$e(\infty) = \text{lím}_{s \to 0}\ s\, R(s)\ (1 - F.T.)$; pero la entrada es un escalón unitario 1/s :

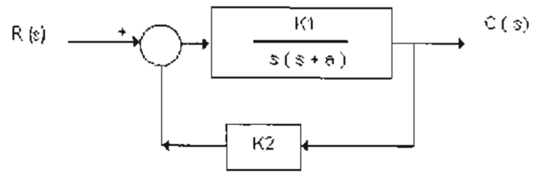
$$e(\infty) = \text{lím}_{s \to 0}\ (1 - F.T.)$$

$$e(\infty) = \text{lím}_{s \to 0}\ (1 - 0.03\,k / (s + 0.35s + 0.03 + 0.03k))$$

$$e = 1 - 0.03K / (0.03+0.03k) = 0.02$$

$$0.98 = k / (1+k) \therefore \mathbf{k = 49}$$

8. Para el sistema mostrado en la figura, determine k1, k2 tal que el sistema tenga una ganancia de 1, un coeficiente de amortiguamiento =0.6 y una frecuencia natural Wn=5. La retroalimentación es unitaria.



Solución:

F.T. = k1 / (s + as + k1k2)

Sabemos que se pide un Wn = 5 , por lo que al asociar en la F.T. se tiene la siguiente expresión:

$2\xi Wn = a$ => $2(0.6)(5) = a$ => $\mathbf{a = 6}$

$(Wn)^2 = 25 = k1\ k2$ = > **k1 = 25 y K2 = 1** para que se cumpla la ganancia unitaria y la retroalimentación unitaria.

9. Para el polinomio característico $\mathbf{P(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 1}$, aplique el criterio de estabilidad de Routh y determine si es estable.

Solución:

Sea el polinomio $P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0$

Se forma con los coeficientes del polinomio el siguiente arreglo:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3
...			
s			
s^0			

Para determinar los coeficientes b1, b2, etc., se obtienen de los siguientes determinantes:

$$b2=\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

$$b2=\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

Los demás coeficientes se obtienen de manera análoga. Por último, el criterio de Routh establece que el No. de raíces con parte real positiva es igual al No. de cambios de signo de la primera columna del arreglo.

Aplicando estos conceptos al problema, se obtiene el siguiente arreglo:

s_4	1	3	1
s_3	2	4	0
s_2	1	1	0
s_1	2	0	0
s_0	1		

No existe cambio de signo en la 1ª columna, por lo tanto, no hay raíces con parte real positiva, lo que implica que el sistema es estable.

10. En el siguiente polinomio caracteristico, determine el valor de K tal que permita que el sistema sea estable: $P(s) = s^3 + (2 + k)s^2 + (8 + k)s + 6$

Solución:

Aplicando el criterio de Routh, el arreglo queda de la siguiente forma:

s^3	1	8 + k
s^2	2+k	6
s^1	$(k^2+10k+16)/(2+k)$	0
s^0	6	0

De acuerdo al arreglo se debe cumplir las siguientes condiciones:

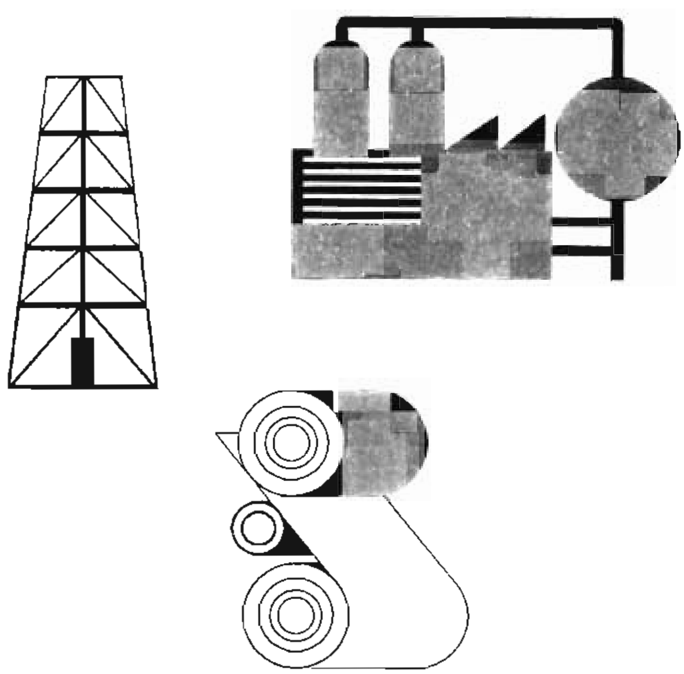
a) $2+k > 0$

b) $(k^2+10k+16)/(2+k) > 0$

Para la primera condición $k > -2$, la segunda condición tiene dos rangos de solución:
$k > 1.127$ ó $K < 1.127$; por lo que la solución es:

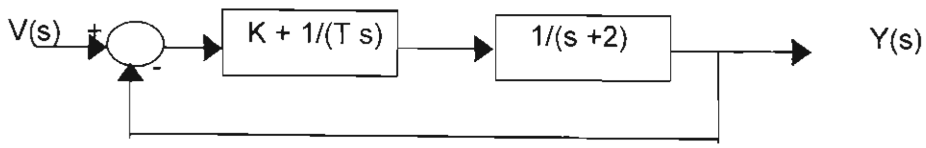
$$((k > 1.127) \cup (K < 1.127)) \cap (k > -2)$$

Lo cual implica que **K > -1.127**



IV ACCIONES BÁSICAS DE CONTROL

1. Para el siguiente control Proporcional Integral determine su error.



Solución:

La función de transferencia del sistema retroalimentado es la siguiente:

$$F.T. = (K s + 1/T) \; / \; (s^2 + s(2+k) + 1/T)$$

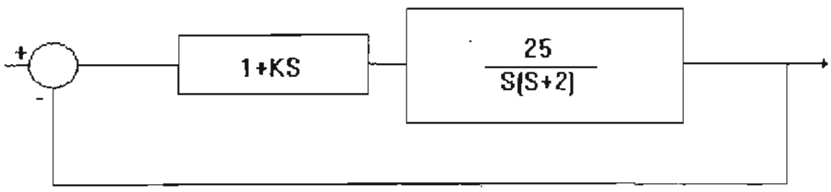
$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} (1 - F.T.)$$

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} (1 - (K s + 1/T) \; / \; (s^2 + s(2+k) + 1/T))$$

$$e(\infty) = (1 - 1) = 0$$

Nota: Para todos los controles Proporcional-Integral el error es **cero**

2. Para mejorar el comportamiento del sistema de la figura anterior se le agrega un controlador con acción proporcional y derivativa como se muestra en la figura siguiente. Determine el valor de **k** tal que el sistema tenga una relación de amortiguamento de 0.5. ¿Cual es la respuesta del sistema a una excitación r(t)=u(t) cuando todas las condiciones iniciales son cero?



Solución:

$a)$

$$\frac{C(s)}{R(S)}=\frac{25(1+KS}{S(S+2)+25(1+KS)}=\frac{25KS+25}{S^2+S(2+25K)+25}$$

$Wn^2=25 \qquad \mathrm{Wn}=5$

$$2\xi\mathrm{Wn}=2+25\mathrm{K} \Rightarrow \mathrm{K}=\frac{2\xi\mathrm{Wn}-2}{25}=0.12$$

$b)$

$$C(S)=\frac{25KS+25}{S^2+S(2+25K)+25}R(S)$$

$$C(S)=\frac{25KS+25}{S^2+S(2+25K)+25}\frac{1}{S}$$

$$C(S)=\frac{A}{S}+\frac{B}{S+2.5+4.33J}+\frac{C}{S+2.5-4.33J}$$

$A=1$

$$B=\left.\frac{3S+25}{S(S+2.5+4.33J)}\right|_{S=-2.5-4.33j}=-0.5+0.05j$$

$C=-0.5-0.05j$

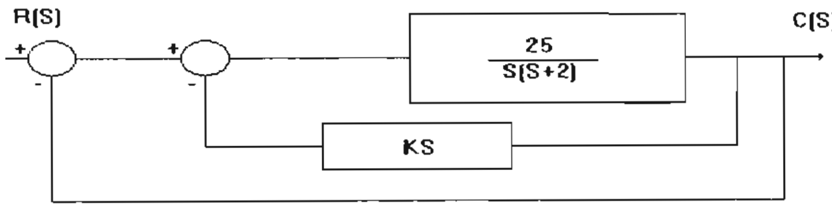
$$C(S)=\frac{1}{S}+\frac{-0.5+0.05j}{S+2.5+4.33J}+\frac{-0.5-0.05j}{S+2.5-4.33J}$$

$$c(t)=\mu(t)+(-0.5+0.05j)e^{-(2.5+4.33j)t}+(-0.5+0.05j)e^{-(2.5-4.33j)t}$$

$$c(t)=\mu(u)+e^{-2.5t}(\cos 4.33t-0.1 \operatorname{sen} 4.33t)$$

3. Para mejorar el desempeño dinámico del sistema de la figura, una acción derivativa (KS) es adicionada a la linea de retroalimentación, como se muestra a continuación. Determine el valor K tal que el sistema resultante tenga un coeficiente de amortiguación de 0.5

¿Cual es la respuesta de este sistema resultante a una función de exitación r(t)=u(t) cuando todas las condiciones iniciales son cero?



$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{25}{S^2 + (2 + 25K)S + 25}$$

$$Wn^2 = 25 \qquad Wn = 5$$

$$2\xi Wn = 2 + 25K \qquad K = \frac{2\xi Wn - 2}{25} = 0.12$$

$$C(S) = \frac{25}{S^2 + 2.12S + 25} \qquad \text{Para } R(S) = \frac{1}{S}$$

$$C(S) = \frac{25}{S(S + 1.06 - 4.89J)(S + 1.06 + 4.89J)}$$

$$C(S) = \frac{A}{S} + \frac{B}{(S + 1.06 - 4.89J)} + \frac{C}{(S + 1.06 + 4.89J)}$$

$$A = 1$$

$$B = \left.\frac{25}{S(S + 1.06 + 4.89J)}\right|_{S=-1.06+4.89j} = 1.02 + 0.09j$$

$$C = 1.02 - 0.09j$$

$$c(t) = \mu(t) + 2.04e^{-1.06t}\left(\cos 4.89t - 0.18 \operatorname{sen} 4.89t\right)$$

4. Sea un proceso con Función de Transferencia $1/(Js^2)$; se pide un sistema de control con retroalimentación unitaria del tipo prorporcionalderivativo que cumpla con las siguientes especificaciones: máximo sobreimpulso del 10% y un tiempo de estabilización de 2seg.

Solución:

La Función de Transferencia del sistema retroalimentado es el siguiente:

$$F.T = (k_P + K_d s\ ) / (Js^2 + k_d s + k_p) = \mathbf{(}(k_P + K_d s)/J\ \mathbf{)} / \mathbf{(}s^2 + k_d s/J + k_p /J\mathbf{)}$$

Tómese en cuenta el denominador para aplicar las restricciones impuestas en el problema: $s^2 + k_d s/J + k_p /J$

Para un máximo sobreimpulso del 10% tenemos un $\xi = 0.58$

$$ts_{\,2\%} = 4 / (\ \xi\, Wn\ )\ \therefore\ Wn = 4 / (\ \xi\, ts_{\,2\%}\ ) \Rightarrow Wn = 3.44 \text{ rad/seg}$$

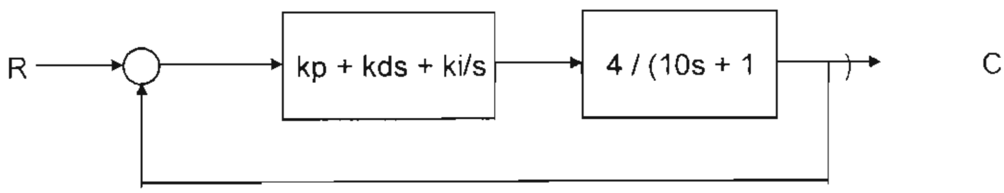
$Wn^{\,2} = K_p / J \Rightarrow k_p = Wn^2\, J$; para una J = 2 tendremos $K_p = 23.66$

por último: $2\xi Wn = K_d/J \Rightarrow K_d = 2\xi Wn\ J = 7.98$

$$\mathbf{K_p = 23.66 \quad y \quad K_d = 7.98}$$

5. Para el siguiente controlador determine Kp, kd y ki , de tal forma que se cumplan las siguientes condiciones:

$e(\infty) = 2\%$
$Mp = 25\%$
$tp = 6seg$



Solución:

La Función de Transferencia del sistema retroalimentado es el siguiente:

$$F.T. = \frac{\left(\frac{4}{10s+1}\right)\left(kp + kds + \frac{ki}{s}\right)}{1 + \frac{4\left(kp + kds + \frac{ki}{s}\right)}{10s+1}}, \quad \text{reduciendo:}$$

$$F.T = \frac{4\left(kps + kds^2 + ki\right)}{s^2(10 + 4kd) + s(4kp + 1) + 4ki}$$

Sabemos que $k1 = \lim_{s \to 0} SGH$ y $k1 = 1/\,e(\infty)$

aplicando el límite $K1 = 4ki \Rightarrow Ki = (k1)/4$ por lo que: $Ki = 1/(4\,e(\infty)) = 12.5$

Ki = 12.5

De tablas se obtiene que $\xi = 0.4$

sabemos que $tp = \pi / Wd \Rightarrow Wd = \pi / tp$ y que $Wd = Wn\,(1-\xi^2)^{1/2}$

de las dos anteriores expresiones obtenemos: $Wn = \pi / (tp(1-\xi^2)^{1/2})$, sustituyendo:

Wn = 0.571rad/seg

$Wn^2 = 4ki / (10 + 4kd)$, despejando Kd tenemos: $kd = (4ki - 10Wn^2) / 4Wn^2$

sustituyendo valores tenemos: **kd = 35.8**

también $2\xi Wn = (4kp + 1) / (10 + 4kd)$, despejando kp tenemos:

$Kp = (2\xi Wn\,(10 + 4kd) - 1) / 4$; sustituyendo valores:

Kp = 4.98

PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPÍTULO I

1. Mencione 5 ejemplos de sistemas de control de malla cerrada y 5 ejemplos de malla abierta.

2. Identifique la entrada y la salida de un refrigerador automático.

3. Mencione 2 sistemas de control con retroalimentación positiva.

4. Identifique los principales bloques de un sistema de control con retroalimentación negativa en la acción realizada por un receptor de futbol americano al atrapar un pase.

5. (a) Explique el funcionamiento de las señales ordinarias del tráfico que controlan los automoviles en la intersección de varias calles (b) ¿Por qué son éstos sistemas de control de lazo abierto? (c) ¿Cómo se puede controlar el tráfico en forma más eficiente?

6. Explique cómo podría funcionar una máquina lavadora de lazo cerrado.

7. Explique cómo se calibran los siguientes sistemas de lazo abierto: (a) lavadora automática, (b) tostador automático, (c) voltimetro.

8. Implemente un simple sistema de control que automáticamente encienda la bombilla de un cuarto al anochecer y la apague al amanecer. Mostrar un esquema del sistema.

CAPÍTULO II

1. Determine la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

a) $f(t) = 3e^{-t} - e^{2t}$

Respuesta: $(2s+5) / (s^2+3s+2)$

b) $f(t) = e^{-2t} \cos t$

Respuesta: $(s+2) / (S^2+4s+5)$

c) $f(t) = e^{-4t} + \text{sen}\,(t - 2) + t^2 e^{-2t}$

Respuesta: $(1 / (s+4)) + (e^{-2s} / (s^2+1)) + (2 / (s+2)^3)$
d) $f(t) = 3t - 5 \text{ sen } 2t$

Respuesta: $(-7s^2+12) / (s^2(s^2+4))$

2. Determine la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

a) $F(s) = (2 / (s+1)) - (4 / (s+3))$

Respuesta: $2e^{-t} - 4e^{-3t}$

b) $s / ((s+1)(s^2+1))$

Respuesta: $(1/2) (\cos t + \text{sen } t - e^{-t})$

c) $F(s) = ((s + 2) / (s^2 + 4)) \; e^{-s}$

Respuesta: $\cos 2(t-1) + \text{sen } 2(t-1)$ para $t > 1$
0 para $t < 0$

d) $F(s) = (s^2+2s+2) / (s^2+3s+2)$

Respuesta: $1 + (1 / (s+1)) - (2 / (s+2))$

e) $F(s) = 1 / ((s+1)^2(s+2))$

Respuesta: $- e^{-t} + te^{-t} + e^{-2t}$

3. Demuestre el siguiente Teorema:

$$L \,(f(t-a)\, u(t-a)) = e^{-as} \; L \,(f(t)) = e^{-as} F(s)$$

4. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales sujetas a las condiciones iniciales indicadas.

a) $y'' + y' - 2y = 2t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$

Respuesta: $Y(s) = (2+s) / ((s^2(s+2)(s-1))$

b) $y'' + 3y' + 2y = x' + 3x$

Respuesta: $Y(s) = ((s+3) / (s^2+3s+2))(1 / (s+4)) + ((s+3) / (s^2+3s+2))$

$+ (1 / (s^2+3s+2))$

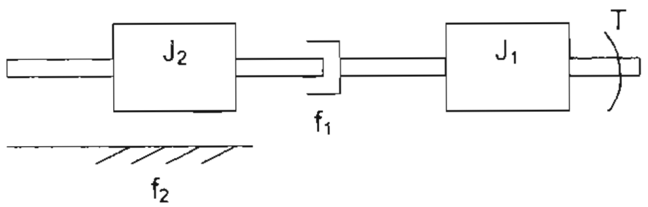
c) $y'' + 4y' + 4 = 3x' + 2x$

Respuesta: $Y(t) = 7e^{-2t} - 7e^{-3t} - 7te^{-2t}$

c) $x'' + 16x = \cos 4t$

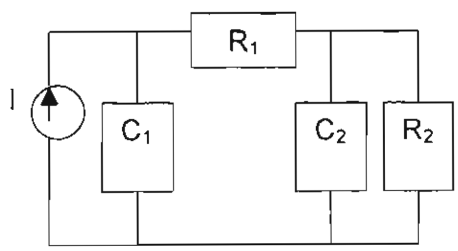
Respuesta: $Y(t) = 2e^{3t} + (1/12)\, t^4 e^{3t}$

5. Del siguiente sistema de rotación, de sus circuitos eléctricos análogos.

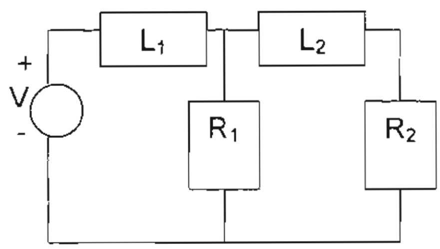


Respuesta:

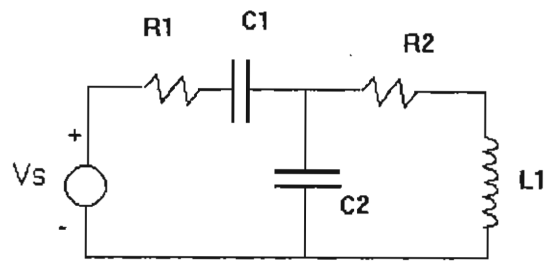
T-I



T-V



6. Obtenga el modelo matemático del siguiente circuito.

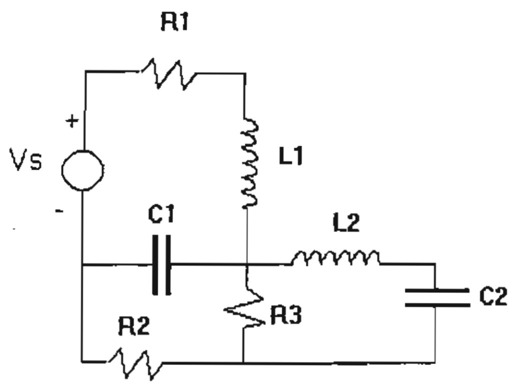


Respuesta:

Malla 1: $-V_S + i_1R_1 + 1/C_1 \int (i_1)\, dt + 1/C_2 \int (i_1 - i_2)\, dt = 0$

Malla 2: $1/C_2 \int (I_2 - i_1)\, dt + I_2 R_2 + L(d\, i_2/ dt) = 0$

7. Obtenga el modelo matemático del siguiente circuito.



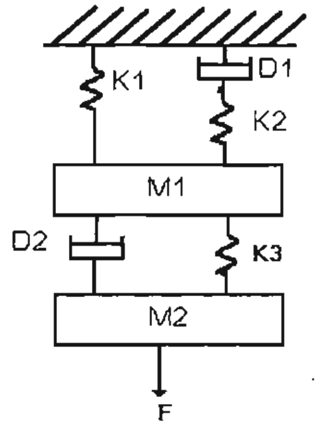
Respuesta:

Malla 1: $- V_s + i_1R_1 + L_1 (d\, i_1/ dt) + 1/C_1 \int (i_1 - i_2)\, dt = 0$

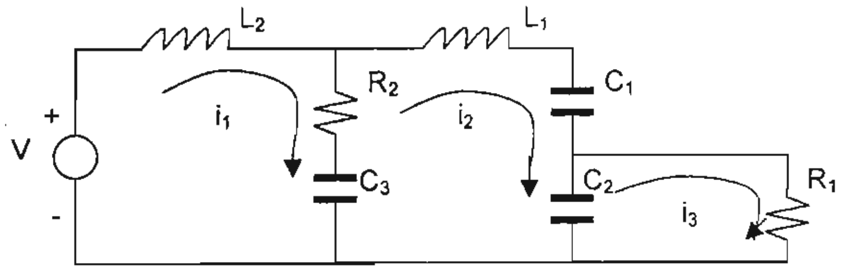
Malla 2: $1/C_2 \int (i_2 - i_1)\, dt + R_2 (I_1 -+ I_2) + R_2I_2 = 0$

Malla 3: $1/C_2 \int (i_3)\, dt + R_3 (I_3 - I_2) + L_2 (d\, i_2/ dt) = 0$

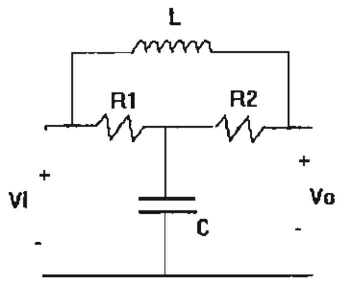
8. Obtenga el diagrama eléctrico del siguiente sistema mecánico:



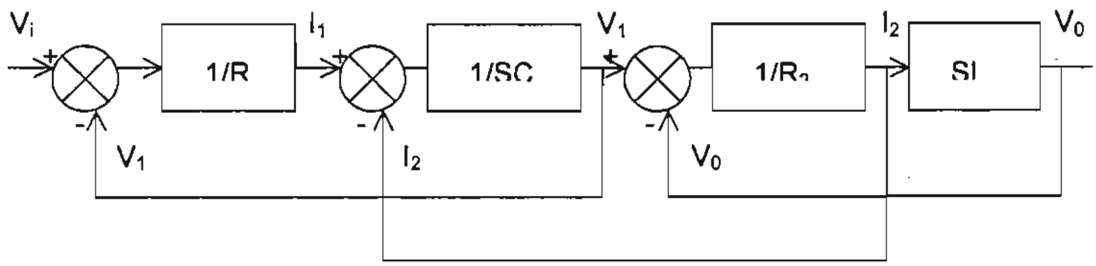
Analogía F - V



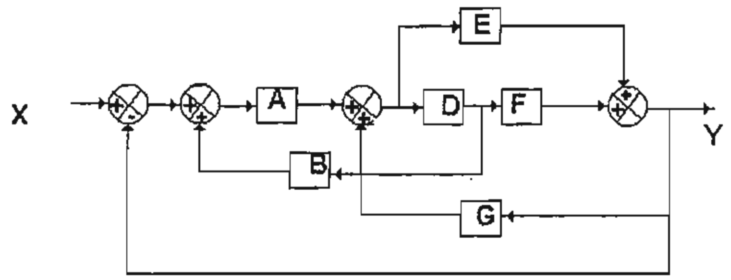
9. Obtener el diagrama a bloques equivalente del siguiente circuito.



Respuesta:

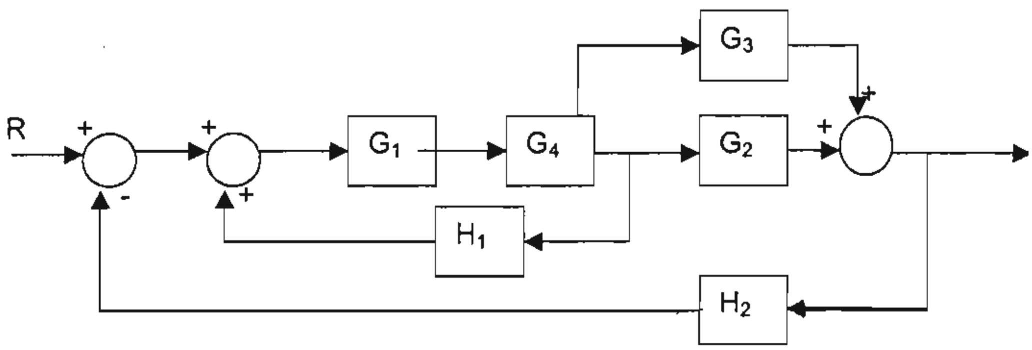


10. Encuentre Y / X para el sistema de control dado por:

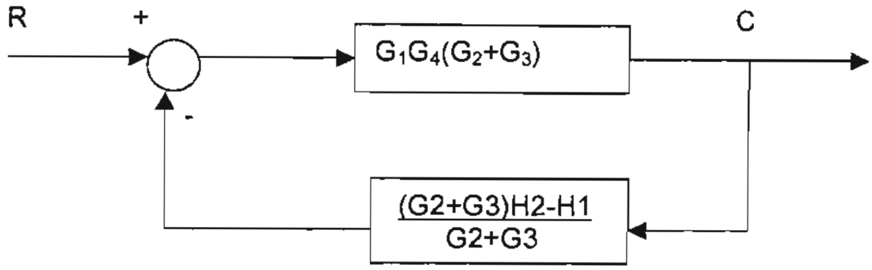


Respuesta: (ADF + AE) / (1 + ADF - ADB – DFG – EG + AE)

11. Reducir el siguiente diagrama en bloque a una forma canónica.



Respuesta:



CAPITULO III

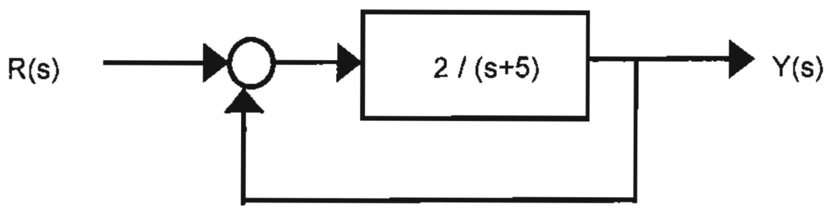
1. Dada la función de transferencia de lazo abierto

$$G(s)= \frac{0.4s+1}{s\,(s+0.6)}$$

de un sistema de retroalimentación unitaria, obtenga la respuesta a la función 2t y el error en estado permanente del sistema, el máximo sobreimpulso y el tiempo de subida.

Respuesta: $e_{ep}= 0.6$ $M_{p}= 16.3\%$ $t_{sub}= 2.41$ seg.

2. Para el sistema. Encontrar Ts.



Respuesta: Ts = 0.428

3. Para el siguiente polinomio característico determinar el intervalo estabilidad del

sistema correspondiente:

$$s^4 + 4s^3 + 11s^2 + 14s + (10+K)$$

Respuesta: $16.24 > K > -10$

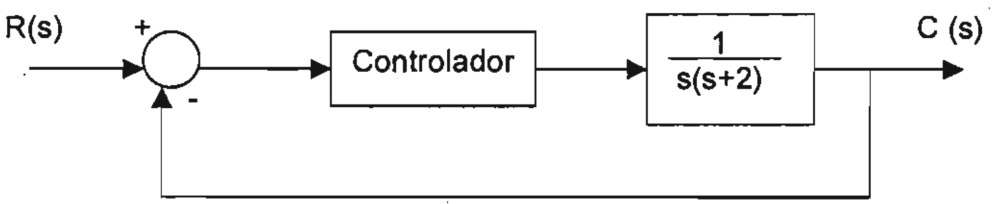
4. Determinar el rango para el cual el sistema es estable

$$2.25s^4 + 13.2s^3 + 24.2s^2 + 13.5s + k$$

Respuesta: $22 > K > 0$

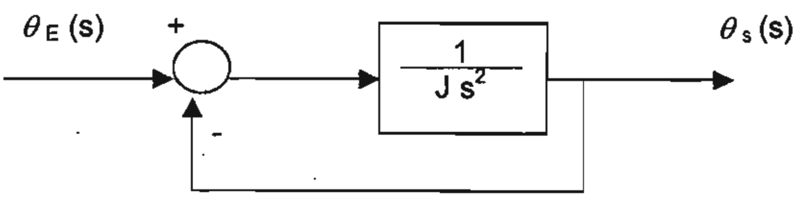
CAPITULO IV

1. Introduzca un controlador P-D y ajústelo para que el error estacionario a entrada rampa unitaria sea del 10 % y el máximo de sobre impulso sea de 5 %.



Respuesta: $K_P = 20$; $K_d = 4.17$

2. Dado el sistema de posición del satélite apolo 11, cuya inercia fue calculada como 1 kg m^2



Diseñe un controlador P-D en serie, que haga que el sistema tenga aproximadamente un t_{est}= 4 seg y un M_p= 20 % (se dice aproximadamente, ya que en éste diseño se debe considerar despreciable el cero de primer orden).

Respuesta: k_p= 4.8 ; K_d=1.97

BIBLIOGRAFÍA

1) *Ingenieria de control moderna*
KATSUHIRO OGATA
3º. ED PRENTICE HALL. 1998

2) *Sistemas modernos de control*
RICHARD C. DORF
2º. ED. ADDISON WESLEY, 1989

3) *Sistemas de control automatico*
BENJAMÍN C. KUO
7º ED. PRENTICE HALL, 1996

4) *Sistemas lineales de control, analisis y diseño*
D´AZZO Y HOUPIS
PARANINFO, S.A. 1997

5) *Automatic control engineering*
FRANCIS H. RAVEN
4º ED. MC. GRAW HILL, 1987

6) *Retroalimentación y sistemas de control*
DISTEFANO III
2º. ED. MC. GRAW HILL, 1992

Manual de soluciones a problemas básicos de la UEA Sistemas de control I

Se terminó de imprimir en el mes de enero de 2009 en los talleres de la sección de Impresión y Reproducción de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco

Se imprimieron 100 ejemplares más sobrantes para reposición

La edición estuvo a cargo de la sección de Producción y Distribución Editoriales de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco

Formato de Papeleta de Vencimiento

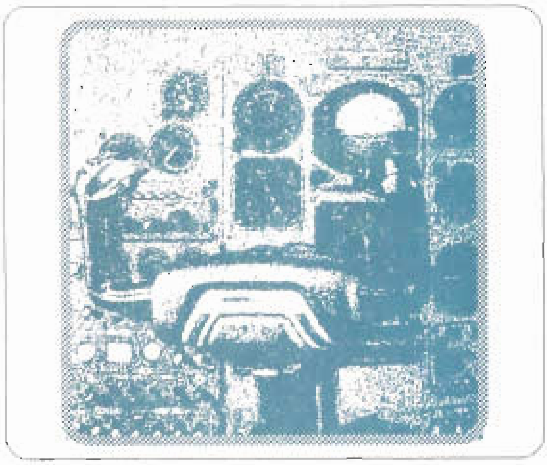
El usuario se obliga a devolver este libro en la fecha señalada en el sello mas reciente

Código de barras. 2893063

FECHA DE DEVOLUCION

- Ordenar las fechas de vencimiento de manera vertical.

- Cancelar con el sello de "DEVUELTO" la fecha de vencimiento a la entrega del libro



MANUAL DE SOLUCIONES A PROBLEMAS BASICOS
ALVAREZ * SECCION DE IMPRESION
35827
R. 40 $ 24.00
40-ANTOLOGIAS CBI * 01-CBI

ISBN: 970-654-892-0
978-97065-48924

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Electrónica

Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales