INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA DEL CUERPO RÍGIDO

Gustavo Mauricio Bastién Montoya
H. Sergio Becerril Hernández
Gabriela Del Valle Díaz Muñoz
Alejandro R. Pérez Ricárdez
Abelardo Rodríguez Soria

Este material fue aprobado para su publicación por
el Consejo Editorial de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería
de la UAM-Azcapotzalco en su sesión del día 29 de marzo de 2007

Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas
C. P. 02200, México, D. F.

Sección de Producción y Distribución Editoriales
e.mail: sec-editorial@correo.azc.uam.mx
Tel. 5318-9223 Tel./Fax 5318-9222

ISBN 13: 978-970-31-0945-6
ISBN 10: 970-31-0945-6

Introducción a la dinámica del cuerpo rígido

Impreso en México/*Printed in Mexico*

ÍNDICE

PRÓLOGO

Este libro de Introducción a la Dinámica del Cuerpo Rígido presenta los contenidos que se abordan en el curso de Física II del Tronco General de Ingeniería de la UAM-Azcapotzalco. Los autores cuentan con amplia experiencia en la impartición de cursos introductorios de Física a nivel licenciatura.

Además de los textos clásicos para estas asignaturas es indispensable que el alumno cuente con un texto en donde encuentre todo el material en el orden que aparece en el programa del curso y cuyo enfoque está dirigido a estudiantes de las diversas ingenierías.

Este texto también se escribió pensando en el nivel matemático que se requiere de los estudiantes de ingeniería, el orden temático que se sigue y con una muestra de los problemas del tipo y nivel que se consideran para los exámenes.

La resolución de problemas es muy importante para la comprensión completa de los temas que se exponen. Por esta razón en cada capítulo se muestran ejemplos de aplicación de la teoría que se presenta, cabe mencionar que los problemas que se incluye son de carácter práctico y se resuelven con detalle explicando el procedimiento seguido y al final del capítulo se incluyen problemas para que el alumno los resuelva y adquiera con ello una cabal concepción de la teoría.

En la primera unidad sobre la aplicación de las leyes de Newton a la dinámica del cuerpo rígido, se consideró conveniente repasar aquellos temas de sistema de partículas que facilitan el camino para la comprensión de teoremas y explicaciones del cuerpo rígido. También se juzgó conveniente que aquellos temas con una dificultad matemática alta, fueran incluidos como apéndices

La segunda unidad incluye el análisis de situaciones físicas que es más conveniente discutirlas desde el punto de vista del Trabajo y Energía, se conduce a los estudiantes al conocimiento de las leyes de conservación de la energía mecánica y el momento lineal y su aplicación, como una alternativa al método de las leyes de Newton, para resolver problemas en los que las incógnitas no incluyen la aceleración, sino la velocidad y/o las posiciones para situaciones específicas.

La tercera unidad se desarrolla en torno a los temas de oscilador armónico simple y los osciladores amortiguado y amortiguado y forzado, en donde tiene especial importancia los aspectos físicos más que la parte matemática relativa a la solución de las ecuaciones diferenciales que resultan en cada caso.

Vaya el agradecimiento de los autores a los doctores Enrique Gabriel Poulain García y Eduardo Roa Neri, quienes amablemente revisaron el libro y por su aportación para mejorar el mismo a través de sus valiosos comentarios.

Los autores

UNIDAD 1

Dinámica del cuerpo rígido

Objetivo General

Definir y aplicar los conceptos de torca, momento de inercia y la Segunda Ley de Newton para su aplicación en la solución de problemas de dinámica del cuerpo rígido.

Objetivos Específicos

a) Definir y aplicar el concepto de momento angular a diversas situaciones.

b) Calcular momentos de inercia de cuerpos rígidos con simetría y de sistemas compuestos sencillos.

c) Utilizar la Segunda Ley de Newton en la solución de problemas de movimiento de cuerpos rígidos.

d) Resolver problemas que impliquen traslación y rotación.

e) Identificar la relación entre los conceptos de momento e impulso angulares.

f) Resolver problemas utilizando el principio de conservación del momento angular

g) Aplicar los principios anteriores a la solución de problemas de rotación de un cuerpo rígido.

1.1 Movimiento de un cuerpo rígido

En este curso estudiaremos el movimiento plano de cuerpos rígidos y comenzaremos por definir algunos conceptos útiles.

Un **cuerpo rígido** es aquél en el que la distancia entre cualquier par de puntos permanece constante, es decir, es un cuerpo ideal cuyas dimensiones no cambian bajo ninguna circunstancia.

Una vez definido el cuerpo rígido, vamos a definir el movimiento plano.

Movimiento Plano. Dado un plano fijo de referencia, un cuerpo rígido realiza un movimiento plano si cada partícula permanece a una distancia constante de dicho plano; esto no implica que la distancia al plano sea la misma para todas las partículas: Pensemos en el movimiento que realiza una puerta –que podemos aproximar como cuerpo rígido- cuando se abre, cada uno de sus puntos siempre permanece a una distancia constante del piso, que en este caso juega el papel de plano de referencia fijo, por ello se dice que es un movimiento plano.

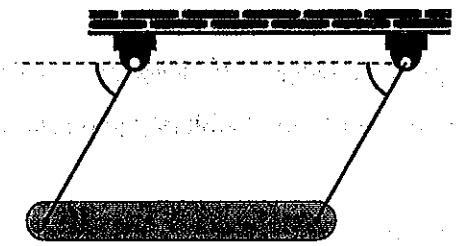
Vamos a estudiar tres casos del movimiento plano: el movimiento de traslación, el de rotación alrededor de un eje fijo y el movimiento plano general.

Traslación. Este movimiento es aquél en el que una línea recta trazada entre dos puntos del cuerpo rígido permanece con la misma dirección a lo largo del movimiento. Dicho de otra forma, las trayectorias que describen sus partículas son paralelas.

Si cada partícula describe una trayectoria recta, se denomina traslación rectilínea.

Movimiento de traslación de un cuerpo rígido

Si la traslación se realiza de tal manera que las trayectorias de las partículas sean curvas equidistantes, se denomina **traslación curvilínea.** Por ejemplo, en una barra que se columpia, cada uno de sus puntos describe un arco de circunferencia, por ello la traslación que realiza es curvilínea.



Rotación. El movimiento de rotación es aquél movimiento plano en el que las partículas describen trayectorias circulares centradas en un eje fijo perpendicular al plano de los círculos. El movimiento de un CD en el reproductor es un ejemplo de rotación, al igual que el de una llanta de un automóvil que viaje en línea recta.

Movimiento Plano General. Cuando un cuerpo rígido realiza un movimiento plano de traslación y rotación, simultáneamente, se dice que realiza un movimiento plano general.

A continuación vamos a estudiar la dinámica del movimiento plano de traslación.

1.2 Segunda Ley de Newton para la Traslación de un Cuerpo Rígido

Cuando un cuerpo rígido efectúa un movimiento plano de traslación es suficiente conocer el movimiento del centro de masa, pues la posición de cualquier otro punto permanece invariable respecto a este centro de masa.

Para determinar la ecuación de movimiento del centro de masa de un cuerpo rígido comencemos por un sistema de n partículas que van desde la 1 hasta la n, la letra i nos identifica a cualquiera de ellas. Puede haber fuerzas internas y externas actuando sobre las partículas[1], las internas no cambian el estado del movimiento del sistema, las externas sí lo hacen; si consideramos al cuerpo rígido compuesto de un gran número de partículas sabemos que para cada una de ellas se cumple la Segunda Ley de Newton[2].

$$m_i \, \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i$$

si las sumamos obtenemos

$$\Sigma m_i \, \mathbf{a}_i = \Sigma \mathbf{F}_i \qquad 1.1$$

recordemos que para el centro de masa de un sistema de partículas se cumple que

$$\Sigma m_i \, \mathbf{r}_i = M \, \mathbf{r}_{cm}$$

donde $\mathbf{r}_i$ es la posición de cada partícula y $\mathbf{r}_{cm}$ es la posición del centro de masa. Si derivamos dos veces obtendremos que:

$$\Sigma m_i \, \mathbf{a}_i = M \, \mathbf{a}_{cm}$$

Supongamos que un cuerpo rígido está compuesto de una infinidad de partículas, entonces, si sustituímos este valor en la ecuación 1.1 obtenemos que

$$M \, \mathbf{a}_{cm} = \Sigma \mathbf{F}_i$$

---

[1] *Las fuerzas internas son interiores al sistema de* n *partículas y son las que ejerce una de ellas sobre otra del propio sistema; las externas son como su nombre lo indica, exteriores al sistema.*

[2] *Las letras en negritas indican un vector, así* $\mathbf{R} = \vec{R}$

Esto nos indica que la aceleración del centro de masa **(cm)** de un cuerpo rígido, es la de un punto cuya masa es igual a la masa del cuerpo y al que se aplican todas las fuerzas externas.

Para un movimiento plano

$$M\, a_{xcm} = \Sigma F_{ix} \qquad 1.2a$$

$$M\, a_{ycm} = \Sigma F_{iy} \qquad 1.2b$$

donde

$$\mathbf{a}_{cm} = a_{xcm}\,\hat{\mathbf{i}} + a_{ycm} \qquad 1.3$$

Estas son las ecuaciones para el movimiento de traslación de un cuerpo rígido. Observe que cualquier partícula del cuerpo rígido se mueve con la misma velocidad que el centro de masa, ya que hemos definido que en el movimiento de traslación las trayectorias que describen las partículas de un cuerpo rígido son paralelas y que la distancia entre cualquier par de ellas es constante.

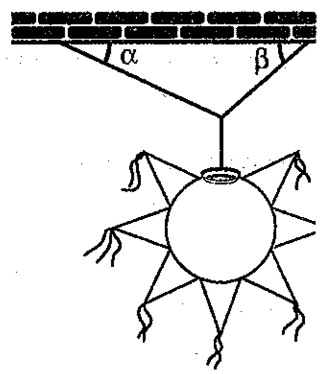
En el caso de la traslación plana tenemos la rectilínea y la curvilínea, veremos más adelante ejemplos de estos movimientos; en algunas ocasiones, al resolver problemas es necesario incluir una tercera ecuación que nos indica que el cuerpo no rota. Para ello vamos a definir la torca y el producto vectorial.

1.3 La Segunda Ley de Newton para el Movimiento de Rotación

1.3.1 Torca y producto vectorial

Comenzaremos esta sección con el concepto de torca o momento de una fuerza. Para ello vamos a "rebanar" un cuerpo rígido mediante planos paralelos al plano con respecto al cual se lleva a cabo el movimiento; una "rebanada" así obtenida será la que utilicemos para ilustrar la deducción de las ecuaciones, en especial utilizaremos a menudo la "rebanada" que contiene al centro de masa.

Tomemos una rebanada de un cuerpo rígido y apliquémosle una fuerza $\mathbf{f}$.



El efecto rotatorio que tiene $\mathbf{f}$ sobre esta rebanada, y por tanto sobre todo el cuerpo rígido, está caracterizado por la torca o momento[3].

La torca es proporcional a la magnitud de la fuerza $\mathbf{f}$, a la distancia r, o sea a la magnitud[4] del vector $\mathbf{r}$ perpendicular a la línea de acción de $\mathbf{f}$ y puede provocar un giro en sentido horario o antihorario. Esto puede sintetizarse en la ecuación

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$$

En esta ecuación el signo de multiplicación significa "producto cruz" y lo vamos a definir enseguida.

---

[3] *La palabra momento se emplea preferentemente en estática, mientras que si el cuerpo rota, hablamos de "torca".*

[4] *Esta distancia se denomina **brazo de palanca.***

El llamado *producto vectorial* de dos vectores se obtiene de la siguiente manera: Sean $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ vectores en el espacio con componentes $\mathbf{p} = p_x\hat{\imath} + p_y\hat{\jmath} + p_z\hat{k}$ y $\mathbf{q} = q_x\hat{\imath} + q_y\hat{\jmath} + q_z\hat{k}$ donde $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$, son los vectores unitarios en el eje *x,y,z,* respectivamente. El producto vectorial de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ se escribe $\mathbf{s} = \mathbf{p}\times\mathbf{q}$ donde $\mathbf{s}$ es un vector perpendicular a $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ que se obtiene a través de un determinante

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix} = (p_y q_z - p_z q_y)\hat{\imath} - (p_x q_z - p_z q_x)\hat{\jmath} + (p_x q_y - p_y q_x)\hat{k} \qquad 1.3.1$$

Este determinante muchas veces es simple debido a que los vectores $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ pueden tener una o dos componentes idénticas a cero.

Observe que al multiplicar vectorialmente dos vectores paralelos, el producto es cero

$$a\,\mathbf{B}\times\mathbf{B} = \mathbf{0}$$

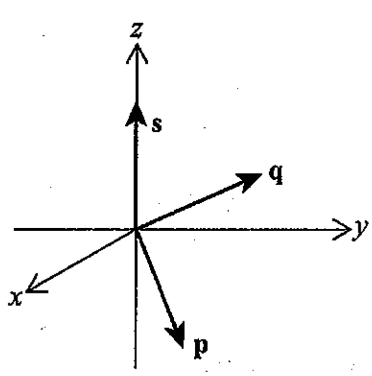
También del determinante podemos deducir que

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A} \qquad \text{(anticonmutatividad)}$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C} \qquad \text{(distributividad)}$$

Es importante tener una idea de lo que significa geométricamente.

Si los vectores $\mathbf{p}\times\mathbf{q}$ están en el plano *xy*, como se muestra, el producto cruz $\mathbf{s}$, estará en el eje z.

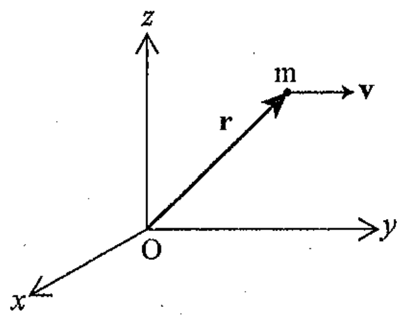


$\mathbf{s} = \mathbf{p}\times\mathbf{q}$

El vector $\mathbf{p}\times\mathbf{q}$ está en el eje z.

1.3.2 Momento angular y torca para una partícula y un sistema de partículas

Para definir el momento angular de un cuerpo rígido vamos a recordar cómo se define el momento angular para una partícula y un sistema de partículas.



La partícula tiene masa m, posición y velocidad con respecto a O, $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ respectivamente.

El momento angular de la partícula con respecto a 0 se define como

$$\boldsymbol{l}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \qquad 1.4$$

Si derivamos esta ecuación respecto al tiempo

$$\frac{d\boldsymbol{l}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad 1.5$$

recordemos que

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad \text{y} \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Por eso la ecuación 1.5 se reduce a

$$\frac{d\boldsymbol{l}_0}{dt} = \mathbf{r} \times m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{r} \times m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad 1.6$$

Ya que el primer término del lado derecho de la ecuación 1.5 es cero pues se multiplican mediante el producto cruz dos vectores paralelos.

Si multiplicamos la ecuación de movimiento que se obtiene de la Segunda Ley de Newton por $\mathbf{r}$ obtenemos

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

es decir

$$\boldsymbol{\tau}_0 = \mathbf{r} \times m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad 1.7$$

Al combinar 1.6 y 1.7 obtenemos para una partícula

$$\boldsymbol{\tau}_0 = \frac{d\boldsymbol{l}_0}{dt} \qquad 1.8$$

Observe que es una ecuación vectorial y por tanto se tienen tres ecuaciones escalares

$$\tau_x = \frac{dl_x}{dt}$$

$$\tau_y = \frac{dl_y}{dt}$$

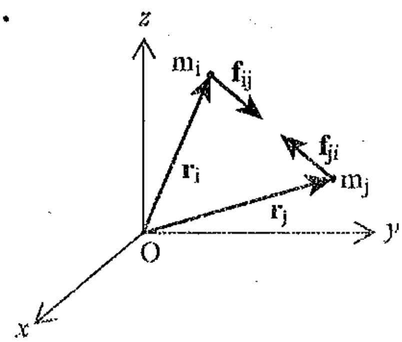
$$\tau_z = \frac{dl_z}{dt}$$

Ahora vamos a ampliar estos resultados a sistemas de partículas, es decir, conjuntos de dos o más partículas que pueden estar articuladas entre sí o que son independientes[5], vamos a demostrar enseguida que la torca externa total es igual a la derivada del momento angular total del sistema de partículas[6].

[5] *Las partículas las numeramos de* i=1 *a* i=N.

[6] *Respecto a un sistema inercial* Oxyz.

Recordemos que sobre cada partícula actúa una fuerza externa y entre las partículas se ejerce una fuerza de interacción



La fuerza de interacción entre las partículas i y j es $\mathbf{f}_{ij}$ dirigida de la partícula *i-ésima* (P_i) hacia la partícula *j-ésima* (P_j) y la fuerza $\mathbf{f}_{ji}$ que actúa de la partícula P_j a la P_i. Las fuerzas $\mathbf{f}_{ij}$ y $\mathbf{f}_{ji}$ son iguales y de sentido contrario según la Tercera Ley de Newton.

Deducimos entonces que

$$\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji} = 0 \qquad 1.9$$

y si además hacemos la suma de sus torcas con respecto al origen obtenemos

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji} \qquad 1.10$$

a la expresión anterior le sumamos y restamos el término $\mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ij}$ y nos queda

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ij} - \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ij}$$

reacomodando términos

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times (\mathbf{f}_{ji} + \mathbf{f}_{ij}) = 0 \qquad 1.11$$

Esto se debe a que el primer término es cero porque $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ apunta en la dirección de $\mathbf{f}_{ij}$ y por lo tanto el producto cruz es cero, mientras que en el segundo término la suma $\mathbf{f}_{ji} + \mathbf{f}_{ij}$ es cero.

Por estas razones vamos a omitir a las fuerzas internas $\mathbf{f}_{ij}$ de los cálculos que realizaremos.

Ahora defininamos el momento angular del sistema de partículas. De acuerdo con la expresión 1.4 para el momento angular de una partícula con respecto al origen O es

$$L_o = \Sigma(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) \qquad 1.12$$

Donde la suma va desde i=1 hasta i=N.

Con el fin de relacionarla con la torca derivamos esta expresión

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d\Sigma}{dt}(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \Sigma\left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times m_i \mathbf{v}_i\right) + \Sigma\left(\mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}\right)$$

que se puede escribir como

$$\Sigma(\mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i) + \Sigma(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i) = \Sigma(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i) \qquad 1.13$$

en esta última ecuación el primer término se anula ya que el producto de $\mathbf{v}_i$ con $\mathbf{v}_i$ es cero, como ya hemos visto.

De la Segunda Ley de Newton obtenemos al multiplicar por el producto cruz

$$\tau_o = \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \Sigma(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i)$$

donde τ_o representa la suma de las torcas de las fuerzas externas, igualando con la ecuación anterior 1.13 obtenemos

$$\tau_o = \frac{dL_o}{dt} \qquad 1.14$$

esto nos indica que la torca total que se ejerce sobre el sistema de partículas es la derivada del momento angular total de las partículas del mismo sistema.

Estudiemos ahora el movimiento del sistema con respecto a su centro de masa. Para ello recordemos que el centro de masa se define como

$$\mathbf{r}_c = \frac{\Sigma m_i \mathbf{r}_i}{dt} \qquad 1.15$$

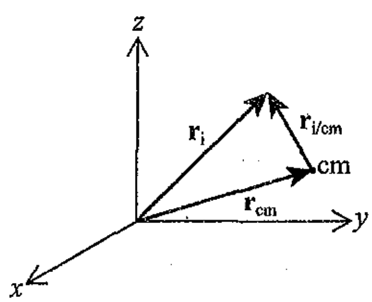
donde $\mathbf{r}_i$ es el vector de posición de cada partícula con respecto al sistema cartesiano inercial $Oxyz$, ligado al origen.

Con respecto al centro de masa cm del sistema de partículas definimos que

$$\mathbf{L}_{cm} = \Sigma\, \mathbf{r}_{i/cm} \times m_i \mathbf{v}_{i/cm} \qquad 1.16$$

es el momento angular del sistema de partículas con respecto al centro de masa cm.

Se cumplen las relaciones



$$\mathbf{r}_{i/cm} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm} \qquad 1.17a$$

$$\mathbf{v}_{i/cm} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{cm} \qquad 1.17a$$

Si sustituimos en la ecuación 1.16 para el momento angular respecto al cm obtenemos:

$$\mathbf{L}_{cm} = \Sigma(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}) \times m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{cm}) \qquad 1.18$$

Obtenemos por la distributividad del producto cruz

$$\Sigma(\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i - \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_{cm} - \mathbf{r}_{cm} \times m_i\mathbf{v}_i + \mathbf{r}_{cm} \times m_i\mathbf{v}_{cm}) \qquad 1.19$$

Observamos que

$$-\Sigma \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_{cm} = -\left(\Sigma\, \mathbf{r}_i m_i\right) \times \mathbf{v}_{cm} \qquad \text{y}$$

$$-\Sigma \mathbf{r}_i m_i = (\Sigma m_i) \times \mathbf{r}_{cm}$$

esto último por la definición 1.15 del cm.

Entonces la expresión 1.19 la reescribimos como

$$\Sigma(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i - m_i \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm} - \mathbf{r}_{cm} \times m_i \mathbf{v}_i + m_i \mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm})$$

En esta expresión el segundo y cuarto término se anulan y al primero y al tercero los factorizamos ya que tienen el factor común $m_i \mathbf{v}_i$

$$\Sigma(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}) \times m_i \mathbf{v}_i \qquad 1.20$$

que recordando la definición 1.17a se convierte en

$$\mathbf{L}_{cm} = \Sigma \mathbf{r}_{i/cm} \times m_i \mathbf{v}_i$$

ahora la derivamos y obtenemos

$$\frac{d\mathbf{L}_{cm}}{dt} = \Sigma \left(\frac{d\mathbf{r}_{i/cm}}{dt} \times m_i \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_{i/cm} \times m_i \mathbf{a}_i \right) \qquad 1.21$$

El primer término del lado derecho es cero ya que se trata de un producto cruz de vectores paralelos y la expresión 1.21 se reduce a

$$\frac{d\mathbf{L}_{cm}}{dt} = \Sigma\, (\mathbf{r}_{i/cm} \times m_i \mathbf{a}_i) \qquad 1.22$$

y esta suma es precisamente el momento total de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema respecto a cm, por lo que

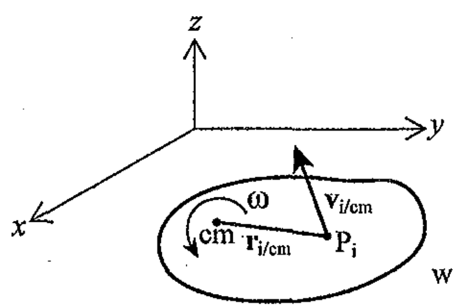
$$\boldsymbol{\tau}_{cm} = \frac{d\mathbf{L}_{cm}}{dt} \qquad 1.23$$

1.3.3 Torca y momento angular para un cuerpo rígido

Lo que hemos deducido para un sistema de partículas se puede aplicar a un cuerpo rígido si lo consideramos formado por un gran número de partículas con masa dm, es decir, las ecuaciones 1.14 y 1.23 son válidas si sustituímos las sumas empleadas en las deducciones por integrales; además, tenemos las ecuaciones 1.2a y 1.2b para la traslación.

Estas ecuaciones nos permitirán comprender el movimiento de un cuerpo rígido como un todo y rotando alrededor de su centro de masa.

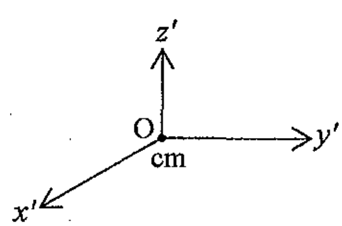
Vamos a restringir el análisis de esta sección y las siguientes al movimiento plano de cuerpos rígidos. En seguida estudiaremos el momento angular de un cuerpo rígido cuya expresión toma una forma más compacta que para un sistema de partículas. Para esto consideremos una "rebanada"[7] paralelamente al plano xy y esta "rebanada" contiene al centro de masa (cm) del cuerpo.



La masa de cada punto de la "rebanada" o placa, tiene una masa Δm_i, vamos a calcular $\mathbf{L}_{cm}$

$$\mathbf{L}_{cm} = \Sigma(\mathbf{r}_{i/cm} \times \mathbf{v}_{i/cm}\, \Delta m_i) \qquad 1.24$$

recordemos que el punto cm origina los ejes $O'x'y'z'$ que se trasladan con el cm.



[7] *Que se ha obtenido al seccionar el cuerpo rígido con un plano imaginario paralelo al plano del movimiento que realiza.*

Para cada una de las partículas de la placa tenemos que su velocidad en $O'x'y'z'$ es

$$\omega \times \mathbf{r}_{i/cm} \qquad 1.25$$

Por lo que el momento angular total de la placa es

$$\mathbf{L}_{cm} = \Sigma\left[\mathbf{r}_{i/cm} \times (\square \times \mathbf{r}_{i/cm})\, \Delta m_i\right]$$

donde

$$\omega = \omega \hat{k}$$

Está en la dirección z, ya que se trata de un movimiento planoparalelo.

Ahora el vector $\mathbf{L}_{cm}$ tendrá una componente diferente de cero sólo en el eje z, en los ejes x y y es cero, para obtenerla multiplicamos $\mathbf{L}_{cm}$ por el vector unitario $\hat{k}$.

$$L_{cmz} = \mathbf{L}_{cm} \bullet \hat{k}$$

$$= \Sigma\left[\mathbf{r}_{i/cm} \times (\omega \hat{k} \times \mathbf{r}_{i/cm})\, \Delta m_i\right] \bullet \hat{k} \qquad 1.26$$

como

$$A \times (B \times C) = (A \bullet C)B - (A \bullet B)\,C$$

aplicando esta igualdad a 1.26 obtenemos

$$= \Sigma\, \Delta m_i \left[(\mathbf{r}_{i/cm} \bullet \mathbf{r}_{i/cm})\, \omega \hat{k} - (\mathbf{r}_{i/cm} \bullet \omega \hat{k})\, \mathbf{r}_{i/cm}\right] \bullet \hat{k}$$

$\mathbf{r}_{i/cm}$ y $\hat{k}$ son perpendiculares, por lo que el segundo término es cero y 1.26 se reduce a

$$L_{cmz} = \Sigma \Delta m_i\, r_{i/cm}^2\, \omega = \omega\, \Sigma \Delta m_i\, r_{i/cm}^2$$

Si definimos que el momento de inercia de masa del cuerpo rígido respecto al eje que pasa por el centro de masa, perpendicular al plano xy es

$$I = \Sigma \Delta m_i r_{i/cm}^2 \tag{1.27}$$

para el cuerpo rígido con partículas de masa dm es

$$I = \int \rho(r)\, r^2\, dv \tag{1.28}$$

y por lo tanto la ecuación 1.23 se puede reescribir tomando en cuenta el momento de inercia

$$\tau_{cm} = \frac{dL_{cm}}{dt} \tag{1.29}$$

$$\tau_{cmz} = \frac{dL_{cmz}}{dt} = \frac{dI\omega}{dt} \tag{1.30}$$

$$\tau_{cmz} = I\alpha \tag{1.31}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{1.32}$$

donde a es la aceleración angular.

La ecuación 1.28 nos define el momento de inercia que estudiaremos con detalle en la sección 1.4.

En seguida haremos un resumen de las ecuaciones para el movimiento de un cuerpo rígido.

1.3.4 Movimiento plano de un cuerpo rígido

Recordemos que en este curso nos restringimos al movimiento plano de cuerpos rígidos, también denominado movimiento planoparalelo. En la sección anterior establecimos las ecuaciones necesarias para estudiar este movimiento, ahora resumimos las ecuaciones y hacemos explícitas algunas otras relaciones.

Los problemas que vamos a resolver involucran cuerpos simétricos con distribución homogénea de masa, que incluyen numerosos casos de interés para la ingeniería.

La posición de un cuerpo rígido que efectúa este tipo de movimiento está determinada por la posición de un punto arbitrario del cuerpo y por su ángulo de rotación respecto al punto arbitrario. Para darle mayor sencillez a las ecuaciones, es conveniente elegir dicho punto en el centro de masa cm del cuerpo, en este caso la velocidad angular ω de rotación es perpendicular al plano de referencia con respecto al cual se mueve el cuerpo, el vector de velocidad $\mathbf{v}$ es paralelo al plano del movimiento; por lo tanto las ecuaciones para el momento angular en términos del momento de inercia se reducen a

$$L_x = 0 \qquad L_y = 0 \qquad L_z = I_z\,\omega_z \tag{1.33}$$

dado que el cuerpo rota alrededor de un eje paralelo al eje z, por tal razón, las ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido nos quedan

$$\tau_{cmx} = 0 \tag{1.34a}$$

$$\tau_{cmy} = 0 \tag{1.34b}$$

$$\tau_{cmz} = I\alpha \tag{1.34c}$$

$$M\,a_{cmx} = \Sigma F_x \tag{1.34d}$$

$$M\,a_{cmy} = \Sigma F_y \tag{1.34e}$$

Observe que I representa al momento de inercia de un cuerpo rígido con respecto a un eje paralelo al eje z.

En general las ecuaciones de la forma

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{dL}{dt}$$

se utilizan respecto a un punto fijo o con respecto al cm, por esta razón aparecen con subíndice "o" o con subíndice "cm".

Movimiento de Traslación Pura. Podemos describir este movimiento con las ecuaciones 1.34 en las que $\alpha = 0$

$$\Sigma F_x = M\, a_{cmx} \qquad 1.34d$$

$$\Sigma F_y = M\, a_{cmy} \qquad 1.34e$$

$$\Sigma \boldsymbol{\tau}_{cmx} = 0 \qquad 1.34f$$

Movimiento de Rotación alrededor de un Eje Fijo. En este movimiento tomaremos el punto O por el cual pasa el eje fijo z, como referencia. Las ecuaciones son

$$\Sigma F_x = 0 \qquad 1.35a$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad 1.35b$$

$$\Sigma \boldsymbol{\tau}_{0z} = \Sigma \boldsymbol{\tau}_0 = I_{0z} \frac{d\omega_z}{dt} \qquad 1.35c$$

Observe que en estas ecuaciones I_{0z} representa el momento de inercia con respecto al eje fijo alrededor del cual rota el cuerpo rígido, que también tiene un plano de simetría perpendicular al eje z. En el capítulo 4 de esta unidad veremos como calcular estos momentos de inercia.

Movimiento Plano General. Sea xy el plano fijo de referencia para el movimiento plano del cuerpo rígido, entonces z es el eje alrededor del cual se rota (o un eje paralelo a éste). Las ecuaciones de movimiento para un cuerpo que tiene un plano de simetría paralelo a xy son

$$\Sigma F_x = M\, a_{cmx} \tag{1.36a}$$

$$\Sigma F_y = M\, a_{cmy} \tag{1.36b}$$

$$\Sigma \tau_{cmz} = I_{cmz} \frac{d\omega_z}{dt} \tag{1.36c}$$

Estrategia para resolver problemas de movimiento plano

- Comprenda bien el enunciado y mentalmente identifique un plano fijo que sirva como referencia para el movimiento plano paralelo del cuerpo rígido.
- Identifique el tipo de movimiento y seleccione las ecuaciones correspondientes.
- Dibuje los diagramas del cuerpo libre, con el eje z de preferencia perpendicular al papel donde haga el dibujo, identifique el sentido de rotación.
- Determine sus datos y las incógnitas.
- Establezca las ecuaciones de movimiento con los datos e incógnitas.
- Determine las relaciones cinemáticas o de fricción, si las hay.
- Resuelva las ecuaciones.
- Verifique la solución.

Antes de pasar a la resolución de problemas veamos la forma de calcular el momento de inercia.

1.4 Momento de inercia y teoremas afines

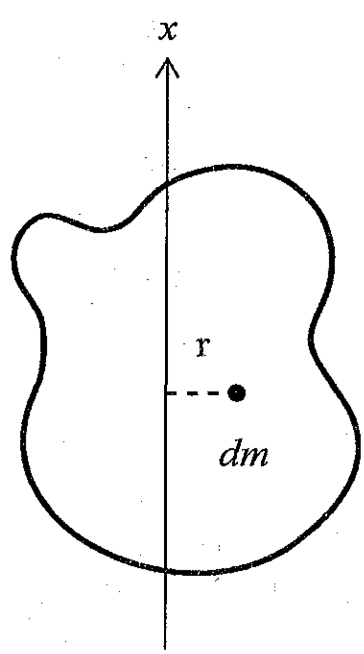
1.4.1 Definición del momento de inercia

El parámetro que aparece en la ec. 1.27 y que nos permitirá relacionar el movimiento de rotación con la torca aplicada ya la hemos denominado **momento de inercia.**

La masa se puede considerar como la medida de la resistencia de un cuerpo a ser acelerado linealmente, en el capítulo anterior hemos visto cualitativamente que la torca produce un movimiento de rotación que depende no solo de la masa, sino del tamaño y forma del objeto, por analogía podemos decir que la medida de la resistencia de un cuerpo para girar es el momento de inercia.

El momento de inercia I de un cuerpo, respecto a un eje de giro se obtiene mediante la integral

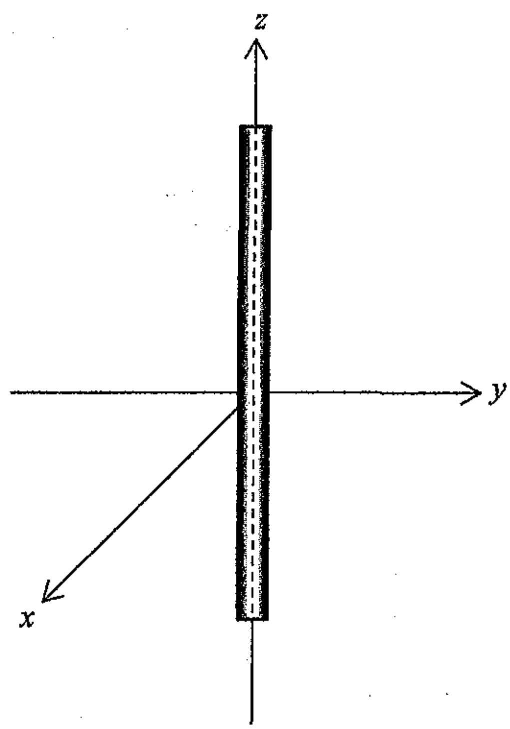
$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{m}} \mathrm{r}^2 \, dm \qquad 1.37$$



Para un cuerpo cualquiera como el de la figura anterior, un elemento dm de masa tiene un brazo de palanca r con respecto al eje de giro x. Esto nos permite hacer cualquier cálculo, aunque en algunos casos puede ser muy complicado.

Podemos ver intuitivamente que mientras mayor sea la distancia de un elemento de masa al eje de giro, mayor será el momento de inercia.

De tal manera que el momento de inercia de una varilla larga y delgada será pequeño si lo calculamos para el eje z (véase figura siguiente) y en cambio para los ejes y o x será mayor. También podemos concluir que para una esfera el momento de inercia con respecto a cualquier eje será el mismo, pasamos ahora a calcular algunos momentos.



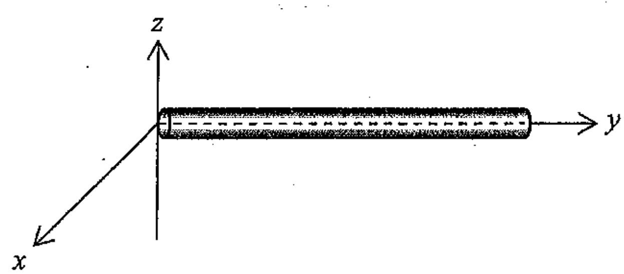
1.4.2 Cálculo del momento de inercia

El caso más general es el de un objeto que no tenga simetría y cuya densidad varíe de punto a punto, esto exige realizar una integral triple en la que la densidad es función de las coordenadas.

Este curso introductorio se ocupará del movimiento planar de cuerpos homogéneos que se emplean comúnmente en la ingeniería y que tienen simetría, por esta razón, el eje que se selecciona para calcular el momento de inercia, es uno que pase por su centro de masa y es perpendicular al plano del movimiento.

Ejemplo 1

Cálculo del momento de inercia de un alambre delgado con respecto a un eje que pasa por su extremo.



La densidad del alambre es $\rho = \text{cte}$ y se trata de una densidad lineal, tal que $M = \rho L$ y su longitud L, la forma de obtener el momento de inercia es integrando los elementos de volumen de 0 a L, es decir si $dv = \rho dx$ entonces

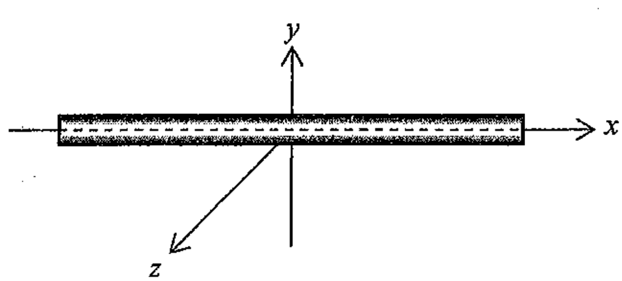
$$I = \int_0^L \rho y^2 dy = \rho \int_0^L y^2 dy = \rho \frac{y^3\big|_0^L}{3}$$

$$I = \rho \frac{L^3}{3} = \rho L \frac{L^2}{3} = \frac{1}{3} ML^2$$

I nos representa el momento de inercia con respecto al eje z

Ejemplo 2

Ahora obtengamos el momento de inercia de una varilla de radio r y longitud L con respecto a un eje que pasa por su centro.



Para obtener el momento de inercia, nos fijamos en que un elemento de masa dm puede representarse como ρdx donde ρ representa la masa por unidad de longitud

$$\rho = \frac{M}{L}$$

por lo tanto

$$dm = \rho dx$$

Observe que ahora es necesaria sólo una integral de $-\frac{L}{2}$ a $\frac{L}{2}$

$$\int_{-L/2}^{L/2} x^2 \rho dx = \rho \frac{x^3}{3}\Big|_{-L/2}^{L/2}$$

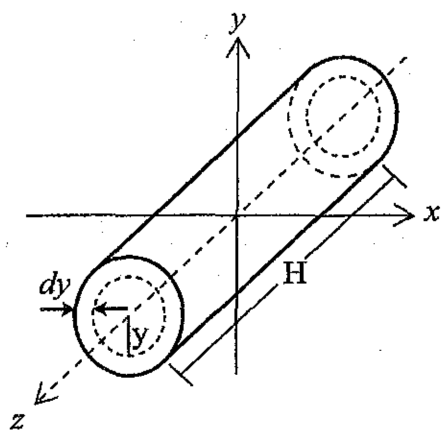
$$\frac{\rho}{3} = \left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8}\right) = \frac{\rho L^3}{12} =$$

$$\frac{\rho L^3}{12} = \frac{\rho L L^2}{12} = \frac{ML^2}{12}$$

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

Ejemplo 3

Calcular el momento de inercia de un cilindro sólido de radio R, longitud H y masa M con respecto al eje z.



Supondremos que la densidad es constante ρ = cte, primero obtenemos el momento de inercia de un cascarón de ancho dy y distancia y al eje z. El elemento masa es:

$$dm = 2\pi y \rho H dy$$

con

$$\rho = \frac{M}{V}$$

Observemos que este cascarón tiene todos sus puntos a la misma distancia del eje z por lo que su momento de inercia es

$$dI = 2\pi y \rho H dy (y^2)$$

y ahora debemos integrar de 0 a R para obtener el momento de inercia total:

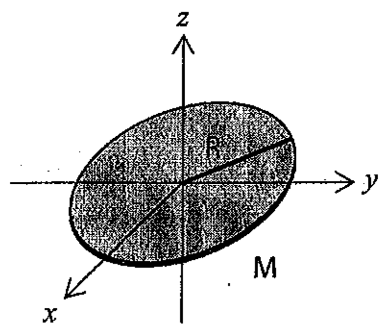
$$I = \int_0^R 2\pi y^3 \rho H dy = 2\pi\rho H \int_0^R y^3 dy = 2\pi\rho H \frac{y^4\big|_0^R}{4}$$

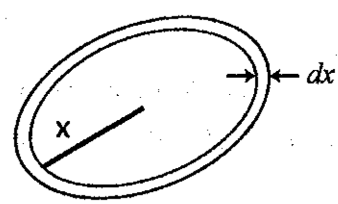
$$I = 2\pi\rho H \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}\pi\rho H R^2 R^2$$

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

Ejemplo 4

Momento de Inercia de un disco con respecto al eje z, perpendicular al plano del disco y que pasa por su centro.





Para calcular el momento de inercia, construimos un anillo de ancho dx; radio x y masa dm, sea σ, la densidad superficial de masa, es decir, se cumple la condición $\sigma a = M$, el anillo tiene un área

$$da = 2\pi x dx$$

Su masa es

$$dm = 2\pi x dx(\sigma)$$

y como todos sus puntos distan lo mismo del eje z, su momento de inercia es

$$dI = 2\pi x \sigma dx(x^2) = 2\pi\sigma x^3 dx$$

Vamos a sumar el momento de inercia de todos los anillos integrando

$$I_z = 2\pi\sigma \int_0^R x^3 dx = 2\pi\sigma \frac{x^4\Big|_0^R}{4}$$

$$I_z = \frac{2\pi\sigma R^4}{4} = \pi\sigma R^2 \frac{R^2}{2}$$

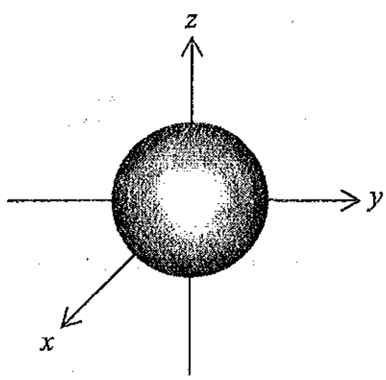
Como $\pi\sigma R^2 = \sigma A = M$

$$I_z = \frac{MR^2}{2}$$

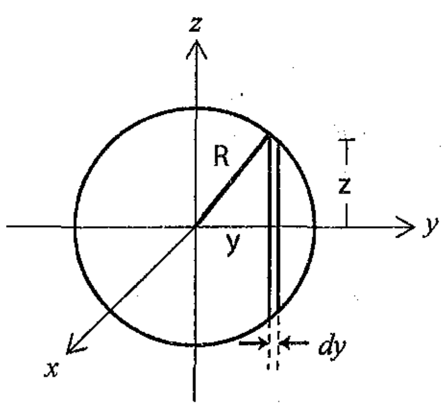
Este resultado lo empleamos enseguida para calcular el momento de inercia de una esfera.

Ejemplo 5

Calcular el momento de inercia de una esfera homogénea de masa M y radio R con respecto a un eje que pasa por su centro.



Utilizaremos el resultado anterior del momento de inercia de un disco para obtener el de la esfera, para ello "rebanamos" la esfera en pequeño discos:



El momento de inercia de un disco de espesor dy, densidad $\rho = \frac{M}{V}$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ y radio z es:

$$dI = \frac{1}{2}(dm)z^2$$

donde $dm = \pi \rho z^2 dy$ entonces

$$dI = \frac{1}{2}\pi z^2 \rho z^2 dy$$

$$dI = \frac{1}{2}\pi \rho z^4 dy$$

De la figura $z = (R^2 - y^2)^{1/2}$ y $z^4 = (R^2 - y^2)^2$ entonces dI es

$$dI = \frac{1}{2}\pi\rho\,(R^2 - y^2)^2\,dy$$

$$dI = \frac{1}{2}\pi\rho[R^4 - 2R^2y^2 + y^4]\,dy$$

Integrado de 0 a R obtenemos la mitad del momento de inercia, después multiplicamos por dos

$$I = \pi\rho\int_0^R R^4 dy - \pi\rho\int_0^R 2R^2y^2 dy + \pi\rho\int_0^R y^4 dy$$

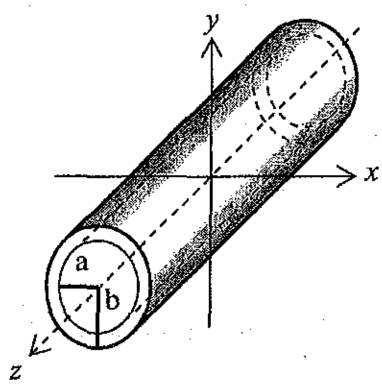
Integrado cada miembro y evaluando:

$$\pi\rho R^5 - \frac{\pi\rho R^5}{3} + \frac{\pi\rho R^5}{5} = \frac{8\pi\rho R^5}{15}$$

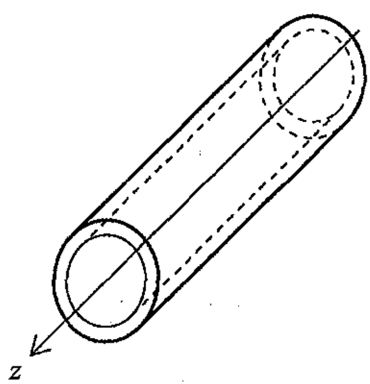
$$I = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{2}{5} R^2 = \frac{2}{5} MR^2$$

Ejemplo 6

Cálculo del momento de inercia de un cilindro hueco de radio interior a y radio exterior b, respecto a un eje que pasa por su centro de masa, paralelo al eje longitudinal.



Comenzamos por obtener el momento de inercia de un tubo delgado de ancho dx centrado en el eje z.



Observe que la distancia de cada uno de sus puntos dista lo mismo del eje z, por lo que el momento de inercia es

$$dI = x^2 dm$$

Ahora bien

$$dm = \rho dV$$

$$dV = 2\pi x L dx$$

$$dm = 2\pi x L \rho dx$$

$$dI = x^2 dm = x^2 (2\pi x L \rho dx) = 2\pi\rho L x^3 dx$$

Si sumamos el momento de inercia de todos los "tubos" desde a hasta b, obtenemos

$$I = \int_a^b 2\pi\rho L x^3 dx = \frac{2\pi\rho L}{4}(b^4 - a^4)$$

Como

$$(b^4 - a^4) = (b^2 - a^2) + (b^2 + a^2)$$

la última ecuación nos queda

$$I = \frac{2\pi\rho L}{4}\left[(b^2 - a^2) + (b^2 + a^2)\right]$$

y

$$\pi\rho L\,(b^2 - a^2) = M$$

M es la masa del cilindro hueco, I nos queda

$$I = \frac{1}{2} M(b^2 + a^2)$$

Observe que el resultado de la integral admite otra factorización cuya interpretación es interesante:

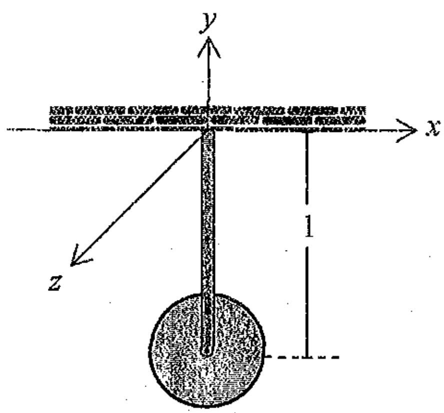
$$I = \frac{2\pi\rho L}{4}(b^4 - a^4) = \frac{\pi\rho L b^2}{2}\,b^2 - \frac{\pi\rho L a^2}{2}\,a^2$$

$$\frac{1}{2} M_b b^2 - \frac{1}{2} M_a a^2$$

Que representa el momento de inercia de un cilindro de radio b menos el momento de inercia de otro cilindro de radio a. Esto lo podemos interpretar como una resta del momento de inercia, de un cilindro sólido menos el de un cilindro interior, que es precisamente el hueco. Esta suma algebraica representa un resultado general que detallaremos más adelante.

1.4.3 Teorema de los Ejes Paralelos

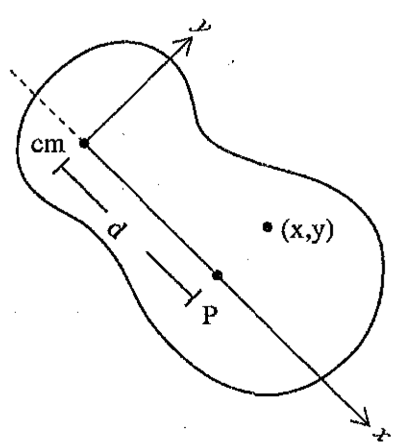
Existen una gran cantidad de cuerpos formados por otros más simples como esferas, barras, cilindros, etc. Es posible calcular su momento de inercia con respecto a algún eje, si conocemos los momentos de inercia de cada cuerpo simple con respecto a ese eje. Por ejemplo, el péndulo mostrado en la siguiente figura está compuesto de una varilla delgada y un disco, de la tabla 2.1 conocemos el momento de inercia de cada cuerpo simple, pero nos falta conocer sus momentos de inercia con respecto a un eje que no pasa por su centro de masa, sino respecto de un eje paralelo a éste, como el eje z de la figura.



¿Cómo conocer el momento de inercia para este eje z, si conocemos el momento de inercia respecto a su centro de masa?

Demostremos a continuación el llamado "Teorema de los ejes paralelos"

Tomemos una "rebanada", su centro de masa es cm y el punto P indica por dónde pasa el nuevo eje con respecto al cual vamos a calcular el momento de inercia:



Un elemento de masa tiene coordinadas (x,y) con respecto al cm, con respecto al punto P las coordenadas son (x-d,y) puesto que la distancia del cm al punto P es d. El momento de inercia con respecto al punto P es

$$Ip = \int_m [(x - d) + y]^2 dm$$

$$Ip = \int_m [x^2 - 2xd + d^2 + y^2] dm$$

$$Ip = \int_m (x^2 + y^2) dm - 2d \int_m x dm \; + \; d^2 \int_m dm$$

El primer término es simplemente el momento de inercia con respecto a cm, el segundo término es cero y el tercero es d^2 multiplicada por la masa del cuerpo, finalmente nos queda

$$Ip = Icm + d^2 M \qquad 1.38$$

Ecuación que nos permite calcular el momento de inercia con respecto a un eje paralelo al que pasa por el centro de masa.

La razón de que $2d\int_m x dm$ sea cero es la siguiente:

Recordemos que la coordenada x_{cm} del centro de masa de un sistema de partículas es

$$x_{cm} = \frac{\Sigma M_i x_i}{\Sigma M_i}$$

para una masa distribuida, la coordenada x es

$$x_{cm} = \frac{\int x dm}{\int dm}$$

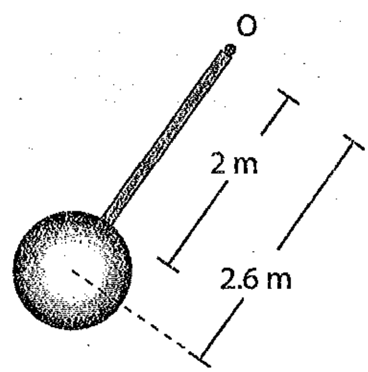
pero en nuestro caso $x_{cm} = 0$, es decir, el centro de masa está en el origen de coordenadas por lo que

$$\int x dm = (0) \int dm = 0 \qquad y \qquad -2d \int x dm = 0$$

Ahora que ya sabemos calcular el momento de inercia de cuerpos simples, podemos calcular el de cuerpos más complicados.

Ejemplo 1

Determina el momento de inercia del objeto compuesto por una barra de longitud 2m y masa $m_1 = 20$ Kg y una esfera en su extremo de radio 60 cm y masa $m_2 = 35$ Kg, con respecto a un eje que pasa por O, en el extremo de la barra.



El momento de inercia de la barra con respecto al eje 0 es $\frac{1}{3} m_1 L^2$, mientras que el de la esfera con respecto a su centro de masa es

$$I = \frac{2}{5} m_2 r^2$$

Y con respecto al eje que pasa por O es

$$I_0 = \frac{2}{5} m_2 r^2 + m_2 (2.6)^2$$

Entonces el momento de inercia total con respecto al eje que pasa por O es

$$\frac{1}{3} m_1 L^2 + \frac{2}{5} m_2 r^2 + m_2 (2.6)^2 = I_0$$

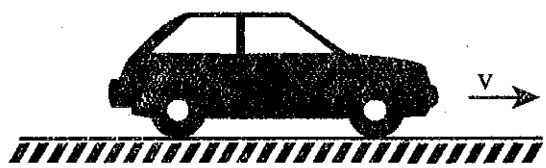
Sustituyendo los datos obtenemos $I_0 = 268.3$ Kg/m^2

Pasemos a resolver problemas en los que se aplica lo que ya conocemos sobre dinámica del cuerpo rígido.

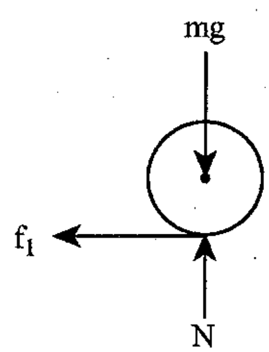
1.5 Ejemplos de movimiento plano de un cuerpo rígido

Antes de iniciar la discusión de algunos problemas vamos a conocer el sentido de la fuerza de fricción en las ruedas, cilindros y esferas que ruedan y están en contacto con un plano. Algunas veces la fricción tiene un sentido y otras ocasiones el inverso, veamos con detenimiento esta situación.

Pensemos en un automóvil que tiene **tracción delantera** y está moviéndose hacia la derecha.

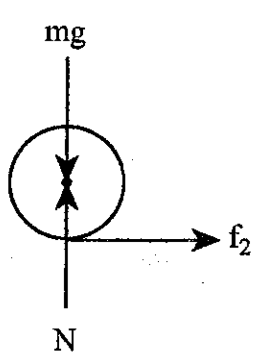


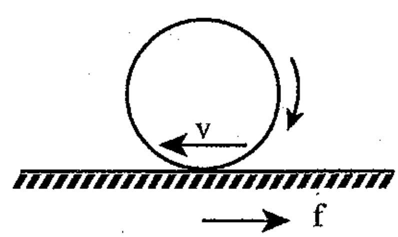
La rueda trasera que gira libremente y es jalada por las delanteras.



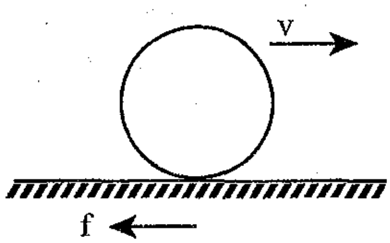
La fricción va hacia atrás porque las ruedas traseras tienden a deslizarse hacia delante.

Para las delanteras, que son las motrices, la fricción va hacia delante ya que la rueda motriz tiende a girar en el sentido de las manecillas del reloj y la cara de la llanta que está en contacto con el piso tiende a moverse hacia atrás, por lo que la fricción va hacia adelante.

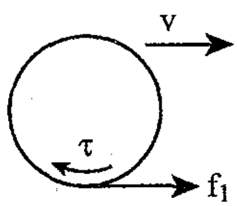




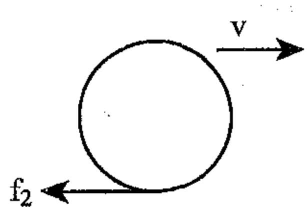
Si lanzamos una esfera hacia delante, como una bola de boliche, esta no tiende a girar hacia atrás sino tiende a avanzar hacia adelante y sólo si hay fricción va a rotar, en caso contrario se desliza hacia adelante, por eso la fricción va hacia atrás.



En una bicicleta ocurre lo mismo, en una que se mueva a la derecha, la rueda motriz trasera gira en sentido de las manecillas del reloj, es decir, hacia atrás, con respecto al piso y la fricción apunta hacia delante.



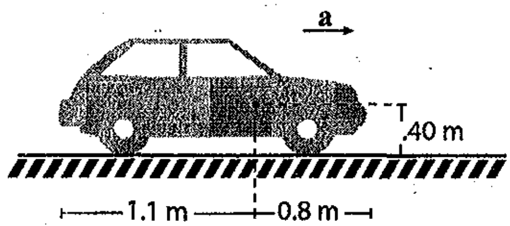
En cambio la rueda delantera no tiende a girar hacia ningún lado por sí misma, tiende a desplazarse hacia delante y por lo tanto a resbalar hacia delante; por lo que la fricción va hacia atrás.



El sentido de la fricción depende de si el objeto tiende a girar por sí mismo o tiende a resbalar hacia delante.

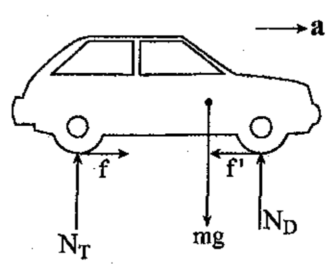
Ejemplo 1

Un automóvil avanza hacia la derecha acelerando desde el reposo, suponga que las ruedas motrices traseras no resbalan y la aceleración es la máxima que soporta el automóvil sin que las llantas resbalen. ¿Cuál es su aceleración? Su masa es de 1900 Kg y el coeficiente de fricción máximo estático es $\mu_s = 0.6$, suponga que la fricción en las ruedas delanteras es despreciable



Solución

El DCL es el siguiente:



La fuerza de fricción hacia atrás (f') en las ruedas delanteras es despreciable y no la incluimos en el análisis.

Aplicando las ecuación 1.4.8 obtenemos:

$$\Sigma F_x = f \qquad ma_{xc} = 1900\, a_x \qquad \Sigma F_x = N_T + N_D - mg \qquad ma_y = 1900\,(O)$$

Con respecto a la llanta trasera:

$$\Sigma \tau_z = N_T\,(0) - (mg)(1.1) + N_D\,(1.1 + 0.8) \qquad I\alpha = 0$$

Ya que no hay aceleración angular del automóvil, pues no gira en el plano del papel. Las ecuaciones nos quedan:

$$f = (0.6)\, N_T = 1900\, a_X \qquad 1.38$$

$$N_T + N_D - mg = 0 \qquad 1.39$$

$$-mg\,(1.1) + N_D\,(1.9) = 0 \qquad 1.40$$

de la última ecuación

$$N_D = \frac{mg\,(1.1)}{(1.9)} = \frac{(1900)\,(9.8)\,(1.1)}{(1.9)} = 10{,}780\, N$$

sustituyendo en 1.39

$$N_T = (1900)\,(9.8) - 10{,}780 = 7{,}840\, N$$

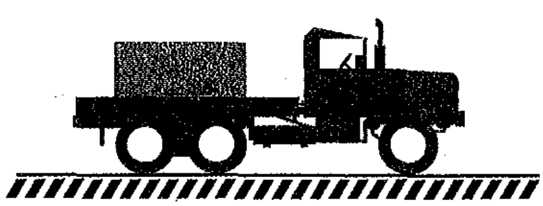
y sustituyendo la ecuación 1.38

$$\frac{(0.6)\,(7{,}840)}{1900} = a_X$$

$$a_X = 2.48 \text{ m/s}^2$$

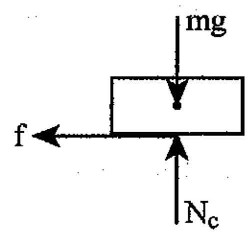
Ejemplo 2

Un camión de carga que se mueve a 90 km/h lleva una caja, calcular la distancia mínima en que puede frenar si se desea que la caja no deslice. La masa de la caja es de 200 Kg y el coeficiente máximo de fricción estático es μ=0.2



Una vez que conozcamos la aceleración máxima, se puede calcular la distancia mínima de frenado. Para ello vamos a determinar primero la aceleración máxima hacia la izquierda que soporta la caja.

DCL de la caja:



La fuerza de fricción está dirigida hacia atrás ya que la caja tiende a moverse hacia delante, tenemos que:

$$f = \mu N_c$$

mg está dirigida hacia abajo y la colocamos actuando en el centro de masa, la aceleración a_x la suponemos también actuando en el mismo punto.

$$\Sigma F_y = ma_{cy} \qquad N_c - mg = 0$$

$$\Sigma F_x = ma_{cx} \qquad -f = -ma_{cx}$$

(el signo menos se debe a que escogimos hacia la derecha el eje positivo)

(Si suponemos que la caja no vuelca, entonces la ecuación de momentos no es necesaria, si la deseamos escribir es necesario modificar el DCL como se muestra en el problema siguiente)

Revolviendo para a_x y N_c obtenemos:

$$N_c = 1960\,N$$

$$a_{cx} = 1.96 \text{ m/s}^2$$

Es la máxima aceleración que soporta sin resbalar, ahora para calcular la distancia de frenado utilizamos esta aceleración máxima.

Utilizamos la ecuación

$$v^2_f = v_i^2 - 2\,ad$$

sustituyendo

$$v_i = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$$

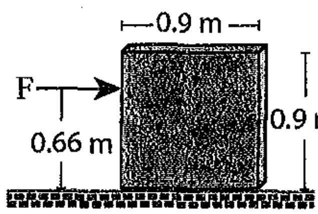
$$v_f = 0$$

$$d = \frac{25^2 - 0}{(2.196)}$$

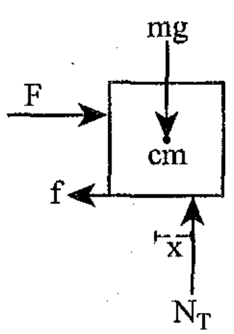
$$d = 284.6 \text{ m}$$

Ejemplo 3

Se empuja una tabla cuadrada de 30 Kg. Aplicando una fuerza de 400 N si el coeficiente de fricción es μ=0.35 calcule la aceleración y demuestre que no vuelca.



El DCL de la tabla es:



Observa que N_T no se dibujó directamente abajo del cm porque cuando se aplican fuerzas como en este caso, que F tiende a hacer girar (a volcar) en el sentido de las manecillas del reloj, N_T es la que equilibra la suma de torcas y su posición varía dependiendo de F, f y las dimensiones de la tabla.

Vamos a suponer que la tabla resbala y no vuelca, obtendremos x, el valor debe ser $0<x<0.45$ m. Apliquemos las ecuación para la traslación pura: 1.34d, 1.34e y 1.34f.

$$\Sigma F_y = ma_{cx} \qquad F - \mu N_T = ma_{cx}$$

$$\Sigma F_x = ma_{cy} \qquad N_T - mg = 0$$

$$\Sigma \tau_z = 0$$

Para la suma de torcas

$$-F\,(0.66 - 0.45) - \mu N_T\,(0.45) + N_T\,(x) = 0$$

$$N_T = 294\,N$$

$$a_{cx} = 9.9 \text{ m/s}^2$$

$$x = 0.44 \text{ m}$$

Se observa que $x \leq 0.45$ por lo que no vuelca.

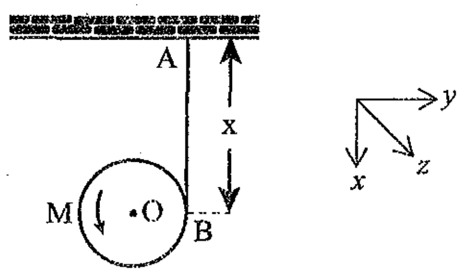
Ejemplo 4

Veamos ahora el caso de traslación y rotación combinadas. El yo-yo es un juguete que vamos a representar por un cilindro delgado de radio r y masa m que se desenrolla de una cuerda.

En este caso la tercera de las ecuaciones ya no es igual a cero y la planteamos como

$$\Sigma \tau_z = I_z \alpha$$

En primer lugar el problema se puede dibujar como



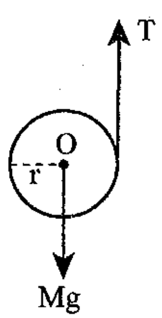
Vamos a suponer que la rueda pasa por el punto B, es decir que está enrollada en la periferia del cilindro de masa M. Los datos son: $M = 0.100$ Kg, $r = 0.05$ m

La coordenada x mide la distancia de cuerda desenrollada mientras que el yo-yo gira un ángulo θ, con velocidad angular ω y aceleración angular α, nuevamente en este caso tenemos:

$$x = r\,\theta \qquad v = \omega r \qquad y \qquad a = \alpha\, r$$

Puesto que la cuerda gira sin resbalar. Como se puede ver este es el caso general de movimiento de un cuerpo rígido que se traslada y gira.

Debemos determinar $Ma_{cm} = \Sigma F$, para ello dibujamos el DCL que es



$$Ma_x = Mg - T \qquad \text{a)}$$

Observe que en este caso el cilindro gira con respecto a un eje que se mueve, esto no altera la ecuación $I_z\alpha = \Sigma\, \boldsymbol{\tau}_z$ que observando el eje z positivo nos queda:

$$\frac{1}{2} Mr^2\alpha = Tr \qquad \text{b)}$$

Las ecuaciones entonces son

$$Ma_x = Mg - T \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2}Mr^2\alpha = Tr$$

con la ecuación extra

$$a = \alpha r \qquad \text{c)}$$

Ecuaciones simples que se resuelven inmediatamente:

La ecuación para la torca la reescribimos como

$$\frac{1}{2}Mr\alpha r = \frac{1}{2}Mra$$

$$\text{y} \qquad Tr = \frac{1}{2}Mra_x$$

o sea

$$T = \frac{1}{2}Mra_x \qquad \text{d)}$$

Y sustituimos en ella T de la ecuación a)

$$T = Mg - Ma_x$$

Obtenemos

$$Mg - Ma_x = \frac{1}{2}Ma_x$$

$$Mg = \frac{1}{2}Ma_x + Ma_x$$

$$Mg = a_x\left(\frac{3M}{2}\right)$$

Despejando a_x obtenemos

$$a_x = \frac{2g}{3}$$

Si sustituímos a_x en la ecuación a)

$$T = Mg - M\frac{2g}{3}$$

$$T = M\left(g - \frac{2g}{3}\right)$$

$$T = \frac{Mg}{3}$$

Si deseamos resolver el problema más generalmente, la ecuación b) la planteamos como

$$I\alpha = Tr$$

y la solución es

$$a_x = \frac{Mg}{\frac{I}{r^2} + M}$$

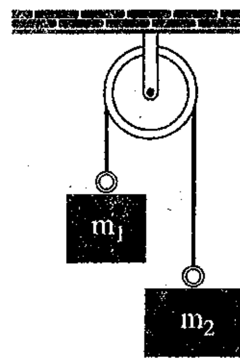
y

$$T = \frac{Mg}{1 + \frac{Mr^2}{I}}$$

en términos del momento de inercia.

Ejemplo 5

Uno de los problemas de aplicación de la ecuación de rotación más comunes es el de la máquina de Atwood.



Este arreglo consta de una polea P de masa $m = 5$ Kg y radio $r = 0.20$ m. Cuelgan las masas $m_1 = 16$ Kg. y $m_2 = 10$ Kg, el cable hace girar la polea y no resbala.

Determine la aceleración de cada masa y la tensión en el cable.

Solución

Comenzamos por comprender el problema indicando que la masa M_1 va a descender, la masa M_2 ascenderá y el cable causa una rotación en la polea con aceleración angular α.

Vale la pena notar que en este caso la aceleración del cable y la de la polea están ligadas matemáticamente por

$$a = \alpha r$$

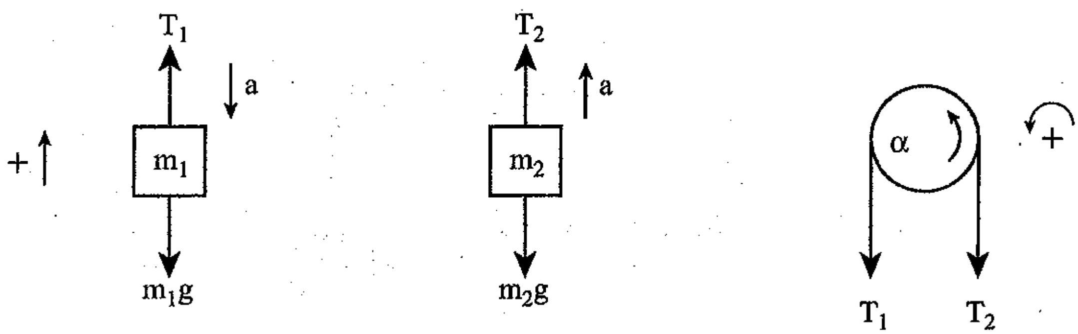
También hacemos notar que la tensión a ambos lados de la polea **no** es la misma.

Las ecuaciones que utilizaremos son:

$$\Sigma F_y = ma_y \qquad \text{para cada masa y}$$

$$\Sigma \tau_y = I\alpha \qquad \text{para la polea.}$$

Diagramas de cuerpo libre



Ecuaciones

$T_1 - m_1g = -m_1a$ $\qquad$ $T_2 - m_2g = m_2a$ $\qquad$ $T_1r - T_2r = I\alpha$

Las incógnitas son a, α, T_1 y T_2, nos falta una ecuación que es $a = \alpha r$

Despejamos T_1 y T_2 y las sustituimos en la ecuación para la rotación, ahí también sustituimos $a = \alpha r$

$$T_2 = m_2a + m_2g \qquad \text{y} \qquad T_1 = m_1g - m_1a$$

Sustituyendo T_1 y T_2 en la ecuación para las torcas

$$(-m_1a + m_1g)r - (m_2a + m_2g)r = \frac{Ia}{r}$$

Reacomodando términos y recordando que en este caso

$$I = \frac{1}{2}mr^2$$

$$a = \frac{2\,m_1g - 2\,m_2g}{2\,m_1 + 2\,m_2 + m} = 2.06\ \text{m/s}^2$$

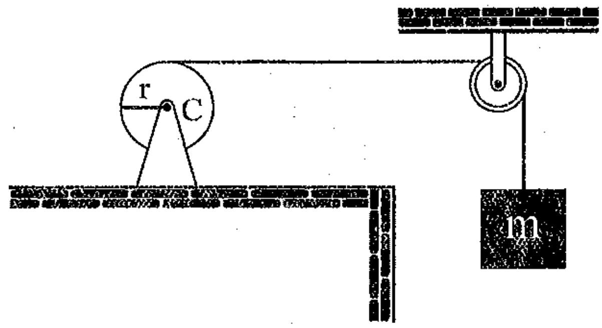
Sustituyendo en las ecuaciones para T_1 y T_2

$$T_1 = 123.78\ \text{N}$$

$$T_2 = 118.63\ \text{N}$$

Ejemplo 6

Un cilindro de masa $M = 75$ Kg y radio $r = 0.30$ m gira debido a que un bloque de masa $m = 10$ Kg sujeto a la cuerda está cayendo. La polea P es de peso despreciable. Determinar la aceleración con la que cae el bloque.



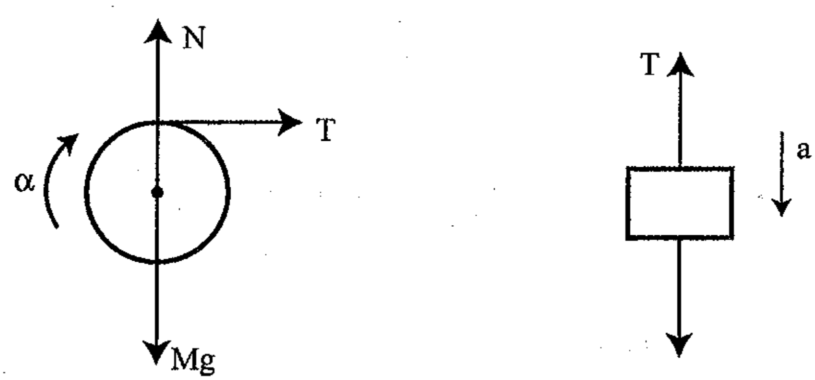
Primero comprendemos el problema.

El bloque m no cae en caída libre porque el cilindro C gira e impide que el cable se desenrolle libremente. La aceleración con que cae m es la misma que el cable tiene en C. La única fuerza externa al sistema es la fuerza de gravedad.

Cuidado. La fuerza tangencial que aplica el cable al cilindro **NO** es la del peso del bloque m, es la tensión en la cuerda.

Ahora dibujamos los diagramas de cuerpo libre necesarios y aplicamos los principios para resolver el problema.

Los diagramas de cuerpo libre para el cilindro y el bloque son:



Vamos a aplicar la Segunda Ley de Newton para aceleración lineal y para rotación.

Del DCL para el cilindro

$$\Sigma\boldsymbol{\tau} = I\alpha es \qquad -Tr = -I\alpha \qquad o \qquad Tr = I\alpha$$

Tr e $I\alpha$ son negativas porque están en el sentido de las manecillas del reloj, y del DCL para el bloque obtenemos

$$T - mg = -ma$$

en este caso el cable no resbala en el cilindro, entonces $a = \alpha r$, las tres ecuaciones son

$$Tr = I\alpha \qquad T - mg = -ma \qquad y \qquad a = \alpha r$$

Despejamos T de la segunda y ahí mismo sustituimos el valor de a, como αr

$$T = mg - m\alpha r$$

al sustituir este valor en la primera de ellas obtenemos

$$mgr - m\alpha r^2 = I\alpha$$

Y para α se obtiene

$$\alpha = \frac{mgr}{I + mr^2}$$

Sustituyendo valores y recordando que

$$I = \frac{1}{2}Mr^2 = 3.375\ \text{Kgm}^2$$

Obtenemos finalmente que

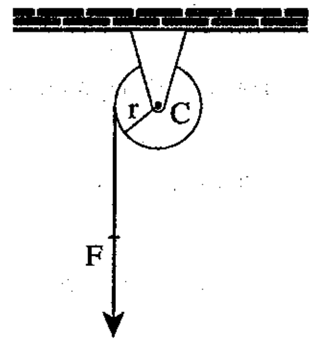
$$\alpha = 6.877\ \text{rad/s}^2$$

y

$$a = 2.06\ \text{m/s}^2$$

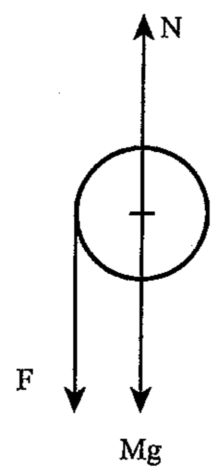
Ejemplo 7

Ahora resolveremos dos problemas parecidos que causan confusión, el primero de ellos es:



Al cilindro C de masa $M = 15$ Kg y radio $r = 0.20$ m se le aplica una fuerza $F = 98$ N. Determina la aceleración angular del disco, la aceleración del cable y la velocidad del cable después de 2.5 s.

Comprender el problema. Se aplica una fuerza F constante, directamente sobre el disco para hacerlo girar, ésta es una fuerza externa aplicada directamente sobre el cable. El único DCL que requerimos es el del cilindro C.



La única ecuación que aplicaremos es $\Sigma\tau = I\alpha$, observamos que ni N ni Mg producen torcas sobre el cilindro ya que pasan por el eje de giro entonces

$$Fr = I\alpha$$

y α es la única incógnita ya que

$$I = \frac{1}{2}Mr^2 = 3.3\ \text{Kgm}^2$$

entonces

$$\alpha = \frac{Fr}{I} + \frac{(98)(0.20)}{0.3} = 65.33 \ \text{rad/s}^2$$

La aceleración del cable es $a = \alpha r$

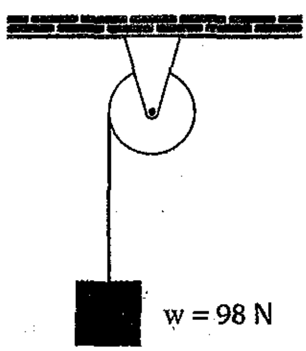
$$a = 65.33 \text{ rad/s}^2 \ (0.20 \text{ m}) = 13.06 \text{ m/s}^2$$

La velocidad del cable después de 5 segundos es

$$V_c = at = (13.06 \text{ m/s}^2)(2.5 \text{ s}) = 32.67 \text{ m/s}$$

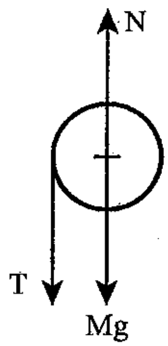
Ejemplo 8

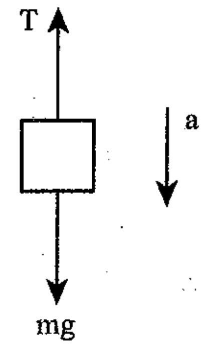
Modifiquemos el problema anterior:



Se trata de un cable enrollado a un cilindro, que está sujeto a una masa $m = 10$ Kg, el cilindro es igual al anterior de $M = 15$ Kg y $r = 0.2$ m. Determina la aceleración angular del cilindro, la aceleración y la velocidad del cable después de 2.5 segundos.

Comprender el problema. En este caso el peso **NO** actúa directamente sobre el cilindro ya que el bloque no cae libremente. La fuerza externa es la fuerza de gravedad. Ahora se requieren dos DCL'S ya que la fuerza que mueve al cilindro es la tensión y no el peso.





Aplicaremos la Segunda Ley de Newton para rotaciones y movimiento lineal, para el cilindro $Tr = I\alpha$ y el bloque $T - mg = -ma$

Además, como la cuerda no resbala $a = \alpha r$, tenemos tres ecuaciones

$$Tr = I\alpha \qquad T - mg = -ma \qquad y \qquad a = \alpha r$$

Sustituimos la última en la segunda y a su vez despejamos T y la sustituimos en la primera, obtenemos

$$mgr - m\alpha r^2 = I\alpha$$

despejando α nos queda

$$\alpha = \frac{mgr}{I + mr^2}$$

Sustituyendo valores y recordando que $I = \frac{1}{2}Mr^2 = 0.3\ \mathrm{Kgm}^2$

$$\alpha = 28\ \mathrm{rad/s}^2$$

Compare este valor con el de 65.33 $\mathrm{rad/s}^2$ que obtuvimos en el caso anterior.

La aceleración del cable es

$$a = \alpha r = 28\ \mathrm{rad/s}^2\ (0.2\ \mathrm{m}) = 5.6\ \mathrm{m/s}^2$$

Y su velocidad después de 2.5 s. es

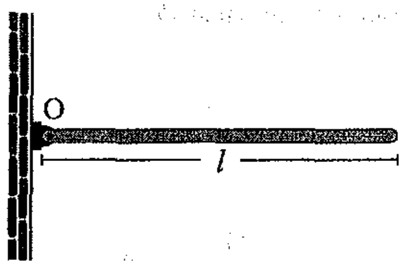
$$V = (5.6\ m/s^2)(2.5\ s) = 14\ m/s$$

que contrasta con los 32.67 m/s.

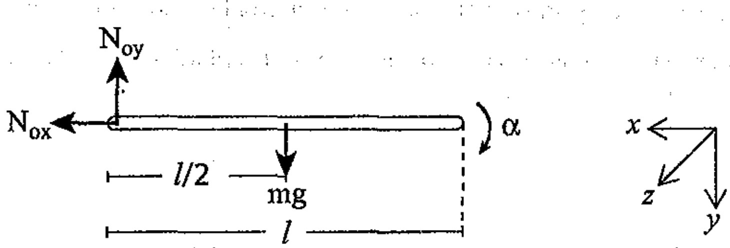
Observe que este y el anterior problema son parecidos, pero difieren en la fuerza que se aplica al cilindro, en un caso es $F = 98$ N y en otro es la tensión $T = 42$ N como se puede verificar.

Ejemplo 9

Una barra uniforme de longitud l y masa m gira sin fricción alrededor de una bisagra O. Calcular las aceleraciones angular y lineal iniciales de su extremo libre.



Dibujamos el DCL de la barra:



Como va a girar alrededor de O, la ecuación es:

$$\Sigma\tau_0 = \frac{d}{dt} L_0 = I_0\, \alpha$$

En este caso el punto O se encuentra en la bisagra y

$$\Sigma\tau_0 = -mg\frac{l}{2}$$ (ya que el eje z apuntó hacia fuera del papel)

la aceleración a también es negativa porque va en el sentido de las manecillas del reloj.

$$I_o = \frac{ml^2}{3}$$

es el momento de inercia con respecto al extremo,

entonces

$$-\frac{mgl}{2} = -\frac{mgl^2}{3}\alpha$$

es decir:

$$\frac{3g}{2l} = \alpha$$

y la aceleración lineal se obtiene fácilmente de la relación

$$a = r\,\alpha$$

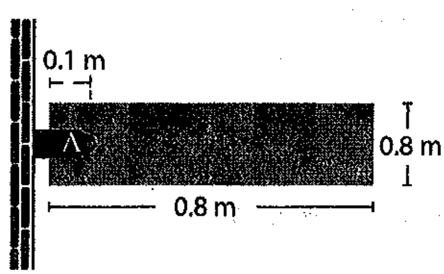
entonces

$$a = \frac{l3g}{2l} = \frac{3}{2}g$$

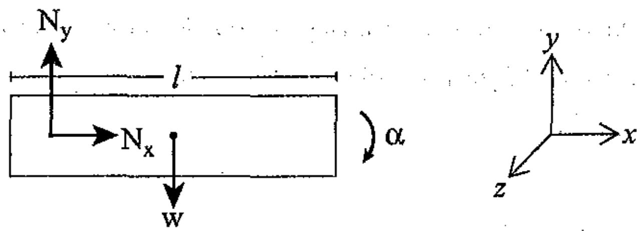
En este y en el problema que sigue no se plantean las ecuaciones para ΣF_x y ΣF_y porque no deseamos obtener las reacciones en esos puntos. Para ello se requieren las ecuaciones cinemáticas del cuerpo rígido y el problema es más complicado que los que deseamos plantear en este nivel.

Ejemplo 10

Una placa homogénea de masa $m = 2$ Kg y de 0.2 m de ancho y 0.8 m de largo, puede girar libremente alrededor del punto A. Calcular su aceleración angular al soltarla.



El DCL en el punto mostrado es



La ecuación de movimiento de la placa es

$$\Sigma\tau_A = I_A\,\alpha$$

en este caso:

$$\Sigma\tau_A = -mgl = -2\,(9.8)(0.1) = -1.96\ \text{N/m}$$

e I_A es de la tabla 1.

Con respecto al centro $I_Z = \frac{1}{12}(m\,(a^2+b^2)$ y por teorema de ejes paralelos $I_{Z'} = I_Z + mr^2$

$$I_{Z'} = \frac{1}{12}\,m\,(a^2+b^2) + ml^2 = \frac{1}{12}\,m^2\,(0.2^2+0.8^2) + 2(0.1^2) = 0.133\ \text{Kg/m}^2$$

entonces

$$-mgl = -\left(\frac{1}{12}\,m\,(a^2+b^2) + ml^2\right)\alpha$$

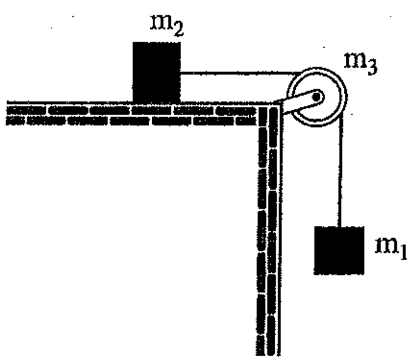
o sea

$$-1.96\ \text{N/m} = 0.133\ \text{Kg/m}^2\ \alpha$$

$$\alpha = 14.737\ \text{rad/s}^2$$

Ejemplo 11

Dos masas m_1 y m_2 están unidas como se muestra, la masa m_2 no presenta fricción. Determine la aceleración de las masas y la tensión en la cuerda. La polea puede aproximarse a un cilindro de 15 cm de diámetro y 2 Kg de masa y gira sin que la cuerda resbale por ella.



$m_1 = 4$ Kg

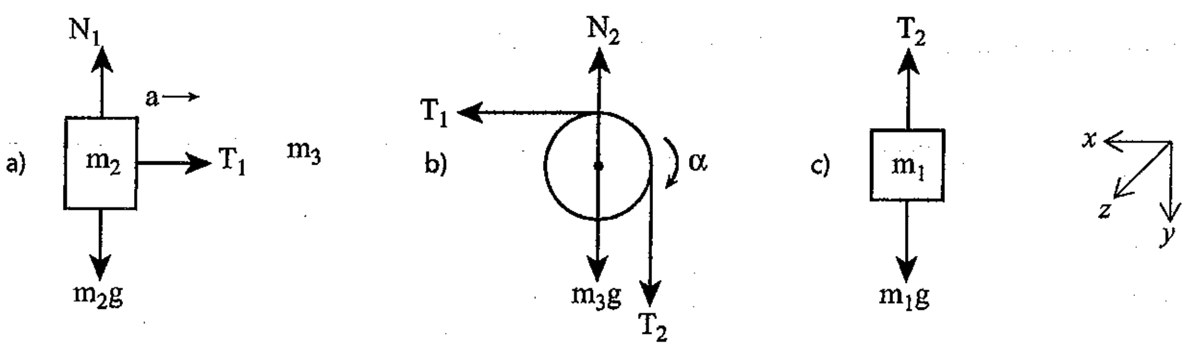
$m_2 = 3$ Kg

$r = 0.08$ m

$m_3 = 2$ Kg

Suponemos que los ejes x-y están como se muestran y que el eje z sale del papel.

Hagamos un DCL de cada cuerpo:



Observe que en a) N_1 y m_2g se anulan porque no hay aceleración en la dirección y, por lo que

$$-m_2a = -T_1$$

El signo menos es por el sentido del eje x. Para el DCL de la polea, tenemos que $N_2 = m_3g$ ya que la polea no sufre traslación, la ecuación de torcas* queda de acuerdo con la dirección positiva del eje z:

* Recuerde que es la ecuación $\tau = \frac{dL}{dt}$

$$T_1 r - T_2 r = -\alpha I$$

El signo αI es negativo, de acuerdo con la dirección positiva del eje z; como el momento de inercia de un cilindro alrededor del eje z es $\frac{1}{2}mr^2$, la ecuación anterior nos queda

$$T_1 r - T_2 r = -\frac{1}{2} m_3 r^2 \alpha$$

o de la manera siguiente:

$$T_2 r - T_1 r = \frac{1}{2} m_3 r^2 \alpha$$

Finalmente del DCL de la masa m_1 obtenemos la ecuación

$$-T_2 + m_1 g = m_1 a$$

Ahora observamos que si la cuerda no resbala por la polea tendrá la misma velocidad y aceleración tangencial que la periferia de la polea, donde se cumple que:

$$r\alpha = a$$

Escribimos juntas las ecuaciones para tener mayor claridad

$$m_2 a = T_1 \qquad T_2 r - T_1 r = \frac{1}{2} m_3 r^2 \alpha \qquad -T_2 + m_1 g = m_1 a$$

y la condición $r\alpha = a$

Las incógnitas son α, a, T_1, T_2, para despejarlas se requiere manipular las ecuaciones, por ejemplo:

$$T_1 = m_2 a \quad \text{y} \quad T_2 = m_1 g - m_1 a \quad \text{se sustituyen en} \quad T_2 r - T_1 r = \frac{1}{2} m_3 r^2 \alpha$$

$$m_1 g r - m_1 a r - m_2 a r = \frac{1}{2} m_3 r r \alpha = \frac{1}{2} m_3 r a$$

Reacomodando términos:

$$m_1gr = \frac{1}{2}m_3ra + m_1ar + m_2ar$$

$$m_1gr = a\,(m_1 + m_2 + m_3)\,r$$

De aquí obtenemos a

$$a = \frac{m_1}{(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}\,m_3)}g = 4.9 \text{ m/s}^2$$

De aquí obtenemos fácilmente α ya que $\alpha = ar$ y

$$\alpha = \frac{m_1}{r(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}\,m_3)}\,g = 61.5 \text{ rad/s}^2$$

T_1 es inmediato ya que $T_1 = m_2a$, entonces

$$T_1 = \frac{m_2\,m_1}{(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}\,m_3)}\,g = 8.58 \text{ N}$$

y T_2 se obtiene a partir de $T_2 = m_1g - m_1a$

1.6 Impulso y momento angular

1.6.1 Conservación del momento angular

Así como el Momento Lineal o Ímpetu se conserva, el Momento Angular también lo hace. A partir de la ecuación $\tau_A = 0$ se sigue que

$$L = \text{cte} \tag{1.41}$$

Es decir, si la torca es cero entonces el Momento Angular se conserva. En particular

$$L_Z = \text{cte} \tag{1.42}$$

Las fuerzas internas ejercidas por las diferentes partes de un cuerpo rígido no modifican el Momento Angular Total del cuerpo. En los museos de ciencias existen plataformas giratorias en las que una persona puede girar con los brazos extendidos y después lleva sus brazos al pecho y girará más rápido debido a que su momento de inercia decrece y por lo tanto la velocidad angular crece para que $\vec{L}$ conserve su magnitud. Lo mismo ocurre en una silla giratoria de oficina.

Recordemos que este momento angular se conserva respecto a cualquier punto localizado sobre el eje de rotación del sistema y desde luego, con respecto al centro de masa del cuerpo rígido, esto implica que

$$I\omega = \text{cte} \tag{1.43}$$

que también se escribe como

$$(I\omega)_1 = (I\omega)_2 \tag{1.44}$$

Esta ecuación se utiliza, al igual que la conservación del momento lineal, para calcular ω después de que ha transcurrido una transformación en el momento de inercia del cuerpo, como en el caso de una bailarina que extiende sus brazos o un clavadista que despega sus rodillas del pecho.

Más adelante veremos ejemplos de la utilización de estas ecuaciones.

1.6.2 Principio de impulso angular y momento angular

En esta sección, como en las otras, vamos a utilizar un movimiento en el plano para el cuerpo rígido. Recordemos la ecuación 1.3.3 que podemos escribir como

$$\mathcal{T} = \frac{d}{dt} = (\ \omega) \qquad 1.45$$

ya que I es constante (salvo en los casos que vimos en la sección 1.5.3, de Conservación del Momento Angular), si multiplicamos la ecuación 1.7.1 por dt e integramos en dos instantes de tiempo t_1 donde $\omega = \omega_1$ y t_2 donde $\omega = \omega_2$

$$\int_{t_2}^{t_2} \mathcal{T} dt = \ \omega_2 - \ \omega_1 \qquad 1.46$$

Esta ecuación es válida por el centro de masa o un punto sobre el eje de rotación. Esta ecuación se conoce como Principio de Impulso y Momento Angular.

Su significado es el siguiente, la integral

$$\int_{t_2}^{t_2} \mathcal{T} dt \qquad 1.47$$

se denomina Impulso Angular, por analogía con el impulso lineal, y es igual al cambio de momento angular L de un cuerpo rígido de t_1 a t_2.

Estrategia para la Solución de Problemas con el Principio de Impulso y Momento Angular

Antes que nada hay que aclarar que cuando se involucran torca y velocidad angular, en primer lugar se determina el momento angular inicial y después la torca aplicada. Si es posible se dibujan los diagramas correspondientes y se determinan las relaciones cinemáticas si es posible.

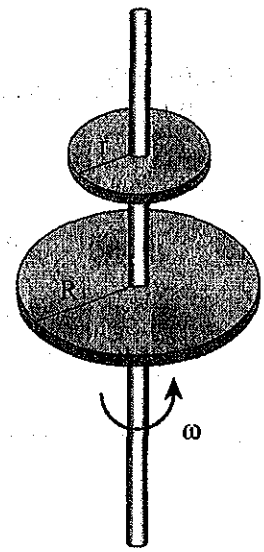
En segundo lugar se determina si la torca que actúa es constante, porque esto reduce considerablemente la dificultad de la integración que será simplemente $\mathcal{T}(t_1 - t_2)$.

Como tercer paso se aplica la ecuación 1.46 que en un problema general se puede completar con la ecuación para el impulso lineal.

$$\int_{t_2}^{t_2} F dt = mv_2 - mv_1$$

Resolvamos un problema que sólo implique rotación.

Un disco de masa $M = 5$ Kg y radio $R = 0.20$ m gira con una velocidad de 33 rpm, si se deja caer un segundo disco de masa $m = 2$ Kg y $r = 0.10$ m sobre el primero y debido a la fricción giran juntos sin resbalar, determine la velocidad angular a la que giran juntos.



Como es un problema que involucra velocidad angular y las torcas externas son cero, es un problema que se puede resolver utilizando el Principio de Momento Angular. La fuerza de fricción es una fuerza interna así que la eliminamos del análisis.

Aplicando la ecuación 1.46, sea ωi la velocidad del disco antes de añadir el otro y ω_f las velocidades angulares de los discos juntos, lo mismo para los momentos de inercia. Calculemos I_i, I_f y ω_i

$$I_i = \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{2} (5 \text{ Kg})(0.20 \text{ m})^2 = 0.10 \text{ Kgm}^2$$

$$I_f = I_1 + I_2 = 0.10 \text{ Kgm}^2 + \frac{1}{2} mr^2 = 0.10 \text{ Kgm}^2 + (2)(0.10)^2 = 0.11 \text{ Kgm}^2$$

$$\omega_i = 33 \text{ rpm} = (33)\ 2\ \ I\pi_1 \text{ rad/min} = (207 \text{ rad/min})(1 \text{ m}/60 \text{ s}) = 3.46 \text{ rad/s}$$

Con esto ya planteamos la ecuación 1.6.5

$$I_i\, \omega_i + \int \tau dt = I_f \omega_f$$

Como no hay torca externa

$$I_i\,\omega_i = I_f\,\omega_f$$

$$(0.10)(3.46) = (0.11)\,\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{(0.10)(3.46)}{0.11} = 3.15\ \text{rad/s}$$

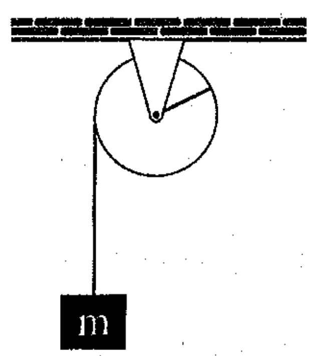
Si el segundo disco que cae sobre el primero fuese igual entonces $I_f = 2I_i$ y el resultado sería

$$\omega_f = \frac{(0.10)(\omega_i)}{0.20} = \frac{\omega_i}{2}$$

Es decir que la velocidad decrece en relación al cociente de los momentos de inercia.

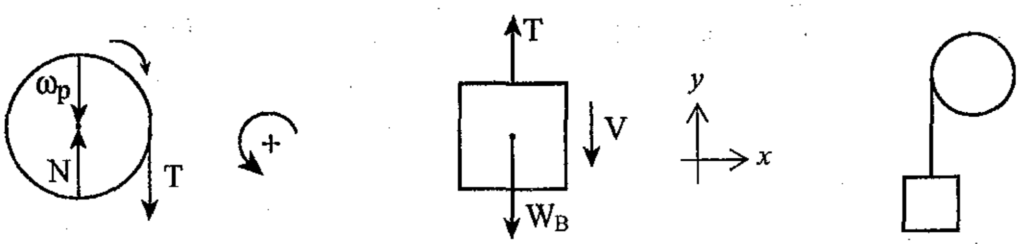
Resolvamos el siguiente problema.

El bloque de masa $m = 10$ Kg jala una cuerda enrollada a una polea en forma de disco de 15 Kg, determina la velocidad angular del disco.



Como se nos pide determinar la velocidad angular de la polea, es un problema que se puede solucionar por medio del Principio de Impulso y Momento Angular.

Realicemos primero el DCL, separamos los dos objetos:



M = 0.15 m
r = 0.15 m
m_B = 10 Kg
m_P = 15 Kg

Determinamos las relaciones cinemáticas $\omega = Vr = V(0.15)$

El momento de inercia que vamos a utilizar para la polea es:

$$I_i = \frac{1}{2} m_p r^2 = \frac{1}{2}(15)(0.15)^2 = 0.169 \text{ Kgm}^2$$

En este caso la polea se mueve circularmente y el bloque linealmente, por lo que aplicamos el principio de impulso y momento angular (ec. 1.46) y el principio de impulso y momento lineal.

Para el bloque, sean V_{Bi} y V_{Bf} sus velocidades en t = 0 segundos y t = 2 segundos

$$m_B V_{Bi} + \int_0^2 (T - W_B)\, dt = m_B V_{Bf}$$

$$(10 \text{ Kg})(0 \text{ m/s}) + T(2 \text{ s}) - (98 \text{ N})\, 2 \text{ s} = (10 \text{ Kg})\, V_{Bf}$$

$$2T - 196 = -10\, V_{Bf} \qquad 1.48$$

que es una ecuación con dos incógnitas, para determinar las incógnitas vamos a utilizar la ecuación 1.45 para la polea. Sean ω_1 y ω_2 las velocidades angulares en t = 0 s y t = 2 s, respectivamente

$$I\omega_1 - \int_0^2 T\,(0.15)\, dt = -I\omega_2$$

(el signo menos se debe al sentido de la rotación)

Como $\omega_1 = 0$ y T es constante

$$0 - 0.15\, T \int_0^2 dt = -I\omega_2$$

$$-0.15\,T\,(2) = -0.169\,\omega_2 \qquad 1.49$$

de esta última ecuación despejamos T

$$T = \frac{0.169}{2(0.15)}\,\omega_2 = 0.563\,\omega_2$$

sustituyendo en 1.48

$$2\,(0.563\,\omega_2) - 196 = -10\,V_{Bf}$$

como $V_{Bf} = \omega_2(0.15)$

$$2\,(0.563\,\omega_2) - 196 = -10\,\omega_2(0.15) = -\omega_2$$

$$1.126\,\omega_2 + 1.5\,\omega_2 = 196$$

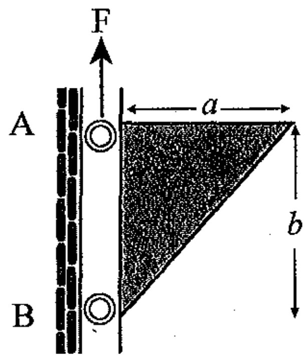
$$\omega_2 = 74.6 \text{ rad/s}$$

también podemos obtener la tensión en el cable

$$T = 0.563\,\omega_2 = 42 \text{ N}$$

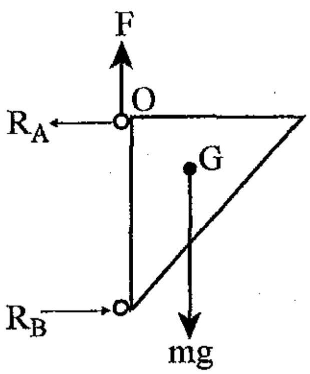
1.7 Problemas complementarios

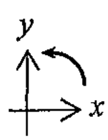
1. La placa triangular homogénea de 10 kg de masa, es trasladada verticalmente hacia arriba por efecto de la fuerza F como se muestra en la figura. La placa es guiada por unos rodillos, de masas insignificantes, que se deslizan sin fricción a lo largo de una ranura vertical. Determinar la aceleración de la placa y las reacciones en A y B.



Sistema: placa

D.C.L.





F = 150 N

a = 0.9 m

b = 1.2 m

Solución

$$\Sigma F_X = R_B - R_A = 0 \qquad 1$$

$$\Sigma F_y = F - mg = ma \qquad 2$$

$$\Sigma M_G = R_A\left(\frac{1}{3}b\right) + R_B\left(\frac{2}{3}b\right) - F\left(\frac{1}{3}a\right) \qquad 3$$

Respecto a 0, el centro de gravedad G se ubica en $\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}b\right)$

de (2): $a = \frac{F}{m} - g$

$$a = \frac{150\text{ N}}{10\text{ kg}} - 9.8\text{ m/s}^2, \quad a = 5.2\text{ m/s}^2$$

de (1): $\mathbf{R_B} = \mathbf{R_A}$

de (3): $\mathbf{R_B} = \frac{1}{3}\,\frac{a}{b}\,\mathbf{F}$

$$R_B = \frac{1}{3}\,\frac{0.9}{1.2}\;150\text{ N}$$

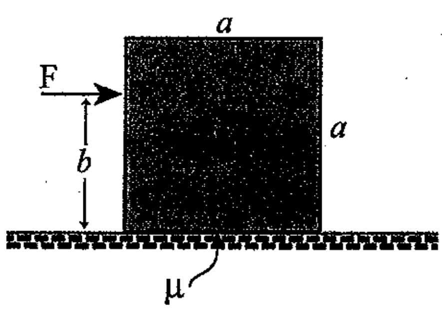
$$\mathbf{R_A} = \mathbf{R_B} = 37.5\text{ N}$$

$$\Sigma Mg = N - m_g\cos 20° - F\,\text{sen}20° = 0$$

$$\Sigma F_y = N - mg\cos 20° - F\,\text{sen}20° = 0$$

2. Una placa cuadrada uniforme resbala con aceleración A cuando se le aplica la fuerza F como señala la figura.

Calcular dicha aceleración y dónde está aplicada la reacción normal que ejerce el piso sobre la placa.



Sistema: placa

m= 15 Kg

F= 80 N

a = 0.90 m

b = 0.60 m

Solución

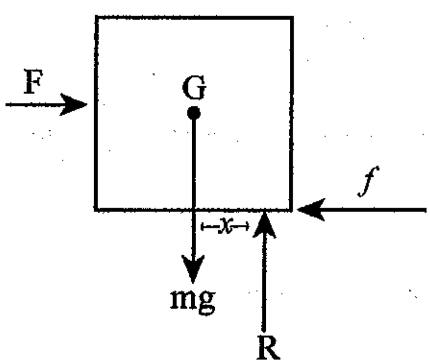
$$\Sigma F_x = F - f = m_A \qquad 1$$

$$\Sigma F_y = R - mg = 0 \qquad 2$$

D.C.L.

$$f = \mu R \qquad 3$$

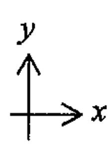
$$\Sigma M_G = Rx - F_b - f\,\frac{a}{2} = 0 \qquad 4$$



El centro de gravedad G de la placa se ubica en el centro geométrico de la misma.

de (2): $R = mg = 15\text{ kg } 9.8\text{ m/s}^2 = 147\text{ N}$

de (3): $f = 0.2\,(147\text{ N}) = 29.4\text{ N}$



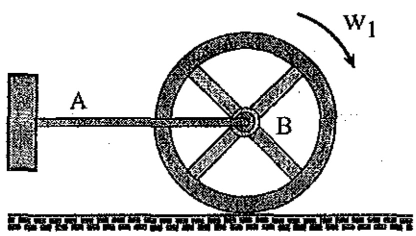
de (1): $A = \dfrac{F - f}{m} = \dfrac{80\text{ N} - 29.4\text{ N}}{15\text{ kg}} = 3.37\text{ m/s}^2$

de (4): $x = \dfrac{F_b + f\frac{a}{2}}{R} = F\,\dfrac{80\text{ N }(0.6\text{ m}) + 29.4\text{ N }(0.45\text{ m})}{147\text{ N}} = 3.37\text{m/s}^2$

$x = 0.416$ m

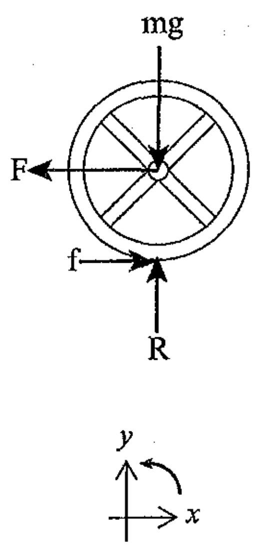
¿Qué pasa si $x > 0.45$ m ?

3. La rueda tiene una masa de 25 kg y un radio de giro K_b= 0.15 m. Originalmente gira a $\omega_1 = 40$ rad/s. Si es colocada sobre el piso, cuyo coeficiente de fricción cinética es $\mu = 0.5$, determine el desplazamiento angular de la rueda necesario para detener el movimiento. Desprecie la masa del enlace AB.



Sistema: rueda

D.C.L.



Solución

$\Sigma F_x = f - F = 0$ 1

$\Sigma F_y = R - mg = 0$ 2

$f = \mu R$ 3

$\Sigma M_B = f_R = mk_B^2\, \alpha$ 4

de (2): $R = mg = 15\text{ kg }(9.8\text{ m/s}^2) = 245\text{ N}$

de (3): $f = \mu\, mg$

de (4): $\mu\, mg\, R = mk_B^2\, \alpha$

de aquí obtenemos: $\alpha = 3.37\text{ m/s}^2$

de (4): $\dfrac{\mu\, g\, R}{k_B^2}$

observamos que α es constante, por lo que utilizamos la ecuación siguiente

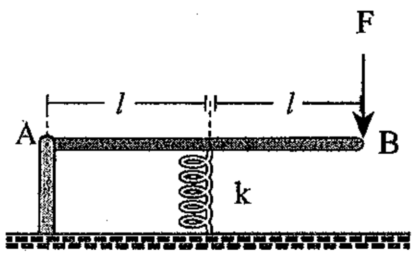
Donde $W_2 = 0$

$$\therefore \quad \theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta = -\frac{\omega_1^2}{2\alpha} = -\frac{\omega_1^2\, k_B^2}{2\mu\, g\, R}$$

$$\Delta\theta = \frac{(-40\ \frac{rad}{s})^2 (0.15\text{ m})^2}{2\,(0.5)\,(9.8\,\frac{m}{s^2})\ 245\text{ N}} = -0.0146\text{ rad}$$

El signo menos significa que el desplazamiento es en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

4. Determine la aceleración angular de la varilla de 25 kg y las componentes horizontal y vertical de reacción del perno A en el instante en que se quita la fuerza F. Suponga que la varilla es uniforme y rígida y que en el instante que se suprime F, el resorte de constante K está comprimido un máximo de 200 mm, $\omega_1=0$ o que la varilla está horizontal.

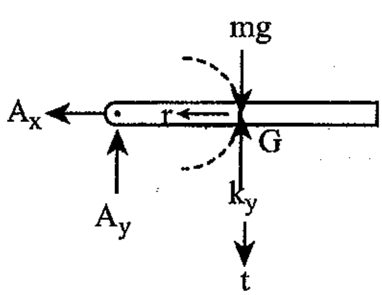


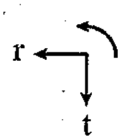
k= 7 kN/m

$l = 1.5$ m

Sistema: varilla

D.C.L.





Solución

Tomamos componentes radial gt de la aceleración del centro de gravedad de la varilla.

$$\Sigma F_r = A_x = m\,\frac{W^2}{l} = A_x = 0$$

Porque W = 0 en el instante que se suprime F

$$\Sigma F_t = -A_y - ky + mg = m\alpha l \qquad 1$$

$$\Sigma M_G = -A_y l = \tfrac{1}{12}\, m(2l)^2\alpha = \qquad 2$$

de (2) $-A_y = \frac{1}{3} m\alpha l$ esto en (1)

$$\tfrac{1}{3}\, ml\alpha - k_y + mg = -\, m\alpha l$$

$$\tfrac{4}{3}\, ml\alpha = k_y - mg$$

$$\alpha = \frac{3\,(k_y - mg)}{4\,ml}$$

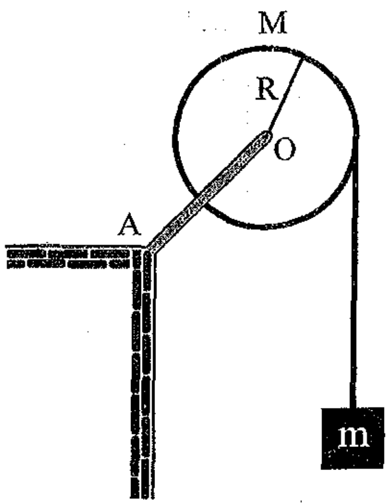
$$\alpha = \frac{3\,(7\frac{N}{m}\ 200\ m - 25\ kg\ \ 9.8\frac{m}{s}}{4\,(25\ kg)\,(1.5\ m)}$$

$$\alpha = 23.1\ rad/s^2$$

$$A_y = \tfrac{1}{3}\,(25\ kg)\,(1.5\ m)\,(23.1\ rad/s^2)$$

$$A_y = 288.75\ N$$

5. El disco de masa M=20 kg y radio R=0.8 m, tiene enrollada una cuerda de la que cuelga un bloque de masa m=5 kg, determine la aceleración angular del disco cuando el bloque es soltado desde el reposo. También ¿cuál es la velocidad que alcanza el bloque después de caer una distancia 2R desde el reposo? Ignorar la masa del enlace AO



Solución

El disco sólo tiene rotación pura

$$\Sigma M_G = TR = \tfrac{1}{2}\, MR^2\alpha \qquad 1$$

El bloque sólo tiene traslación pura

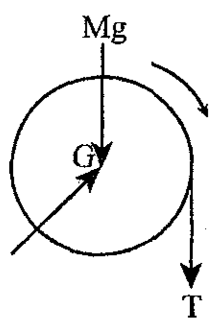
$$\Sigma F_y = mg - T = m_a \qquad 2$$

Condición cinemática

$$a = \alpha R \qquad 3$$

Sistema: disco

D.C.L.



(1) y (3) en (2): $mg - \tfrac{1}{2}\, MR\alpha = mR\alpha$

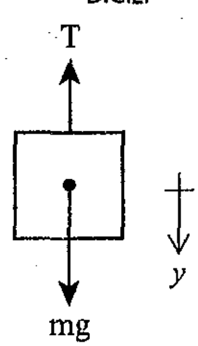
de aquí obtenemos:

$$\alpha = \frac{mg}{(\tfrac{1}{2}\,M + m)R}$$

$$\alpha = \frac{5\text{ kg }\ 9.8\text{ m/s}^2}{15\text{ kg }\ 0.8\text{ m}} = 4.08\text{ rad/s}^2$$

Sistema: bloque

D.C.L.

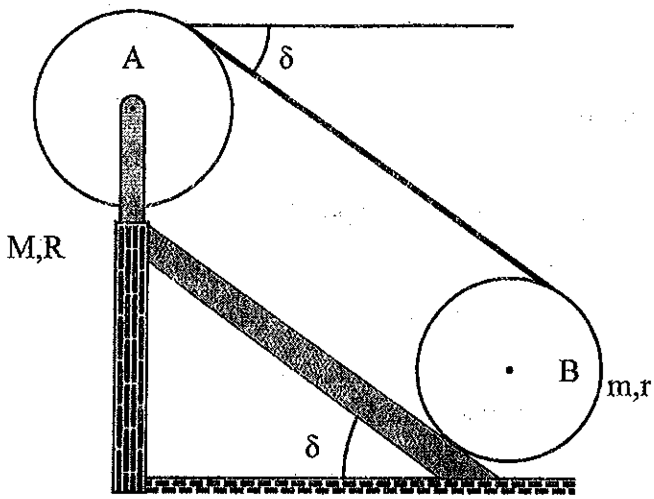


$a = 3.27\text{ m/s}^2$ constante

$$V_2^2 = 2\,(2R - 0)\,a + V_1^2 \ , \quad V_1 = 0$$

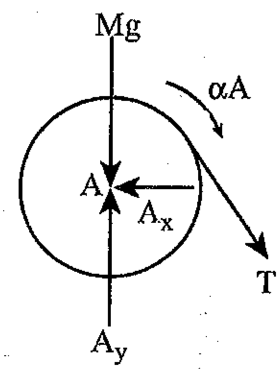
$$V_2^2 = \sqrt{4aR} = \sqrt{4(3.27\text{ m/s}^2)\ 0.8}\text{ m} = 3.23\text{ m/s}$$

6. El disco B rueda sin resbalar hacia abajo en el plano inclinado, suponiendo que la cuerda que está enrollada en ambos discos no resbala, calcular la aceleración del centro del disco B.



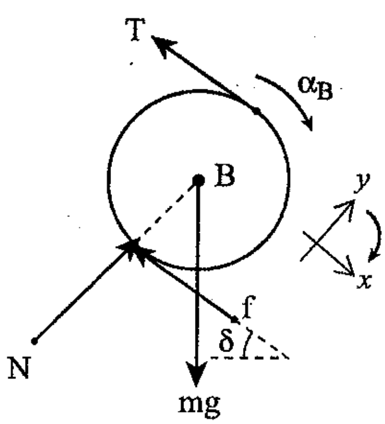
Sistema: disco A

D.C.L.



Sistema: disco B

D.C.L.



Solución

$\Sigma M_A = TR = \frac{1}{2} MR^2 \alpha_A$ 1

$\Sigma F_x = Tmg\, sen\, \delta - f - T = ma$ 2

$\Sigma M_B = fr - Tr = \frac{1}{2} mr^2 \alpha_B$ 3

condiciones cinemáticas

$a = \alpha_B r$ 4

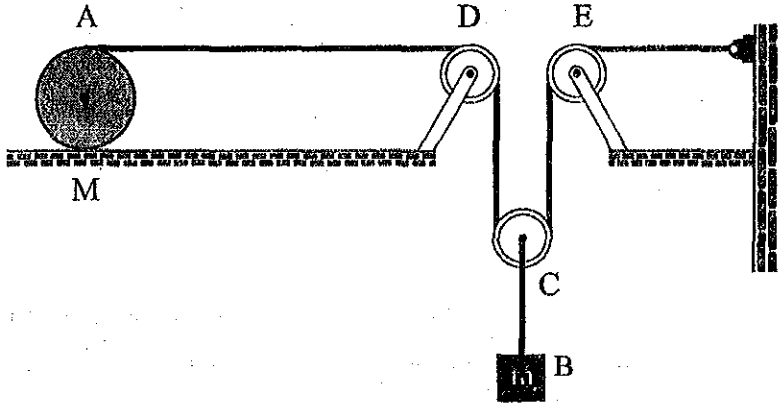
$\alpha_A R = \alpha_B 2r$ 5

De estas 5 ecuaciones

$$a = \frac{2m}{3\,m + 4m}\, g\, sen\, \delta$$

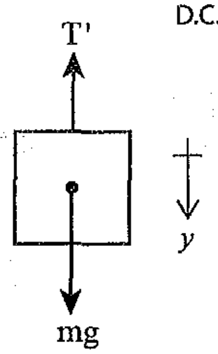
Observemos que a es constante.

7. El disco uniforme de masa M=10 kg y radio r =0.5 m, y el bloque de 4 kg son liberados desde el reposo. Determine la velocidad del bloque cuando t =35. El coeficiente de fricción estática es μ=0.2. Desprecie las masas de las cuerdas y de las poleas



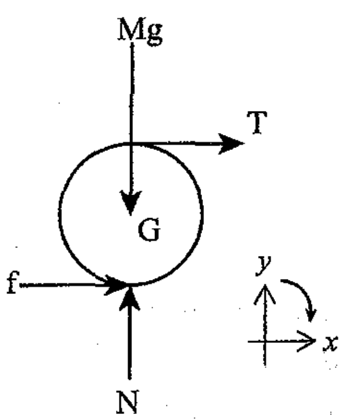
Sistema: bloque

D.C.L.



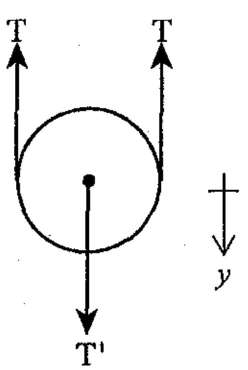
Sistema: disco

D.C.L.



Sistema: polea

D.C.L.



Solución

Vamos a calcular la aceleración del bloque para poder responder la pregunta del problema

$$\Sigma F_y = mg - T' = ma \qquad 1$$

$$\Sigma F_x = T + f = mA \qquad 2$$

$$\Sigma M_G = Tr - fr = \tfrac{1}{2} Mr^2\alpha \qquad 3$$

$$\Sigma F_y = T' - 2T' = 0 \qquad 4$$

condiciones cinemáticas

$$A = \alpha r \qquad 5$$

$$a = A \qquad 6$$

de estas seis ecuaciones se llega a

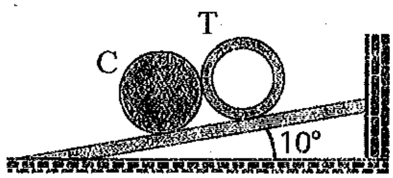
$$a = \frac{2m}{2m + 3m} g = \text{constante}$$

$V_2 = at + V_1$ pero $V_1 = 0$

$V_2 = 6.19$ m/s

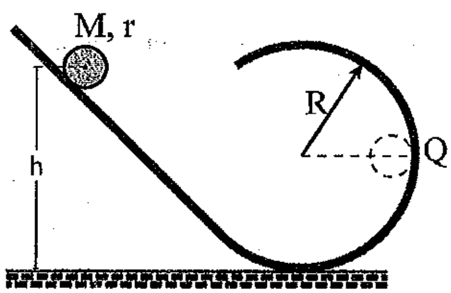
1.8 Problemas propuestos

1. El cilindro homogéneo C y el tubo T se encuentran en contacto, y se dejan en libertad a partir del reposo. Sabiendo que tanto el cilindro como el tubo ruedan sin resbalar y que tienen la misma masa y radio, calcular la distancia que los separa al cabo de 3 segundos.
Sugerencia: Encontrar la distancia que recorre el centro de cada cuerpo.



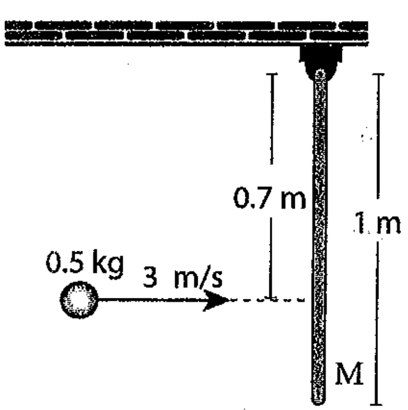
$d = 1.28$ m

2. Un cuerpo de masa M y radio r rueda sin resbalar bajando por una vía en forma de rizo, como se muestra en la figura. Si comienza del reposo a una altura $h = 2R$ y pasa por el punto Q con una velocidad $V_Q = \sqrt{10\,Rg/7}$, determine el momento de inercia del cuerpo.



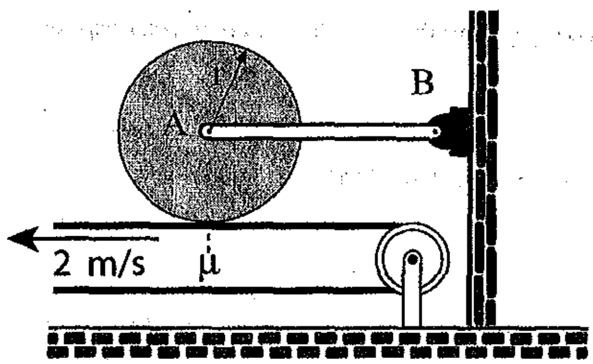
$I = \frac{2}{5}Mr^2$

3. Una partícula de masa 0.5 kg se mueve con la velocidad indicada, sobre una mesa horizontal lisa, de manera que choca con la varilla de masa $M = 1$ kg. Si la partícula queda pegada a la varilla después del choque y despreciando la fricción en la articulación, calcular la velocidad angular de la varilla después del choque.



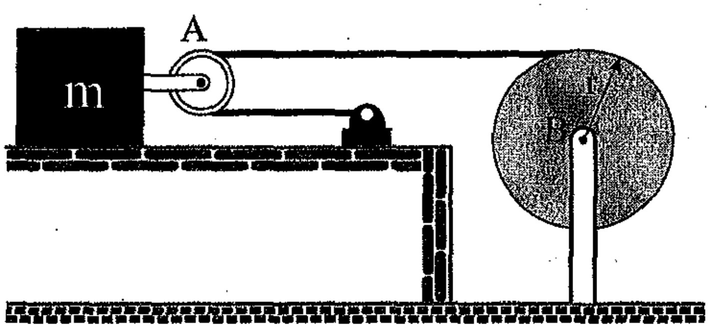
$\omega = 1.81 \ \frac{rad}{s}$

4. El disco uniforme A de masa 8 kg está en reposo cuando se pone en contacto con una banda transportadora que se mueve a velocidad constante de 2 m/s. Suponiendo que el eslabón AB tiene un peso despreciable y sabiendo que el radio del disco es de 15 cm y el coeficiente de fricción con la banda es de 0.4, calcular la aceleración angular del disco.



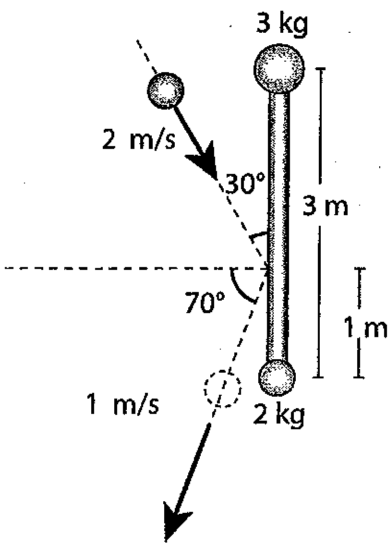
$\alpha = 5.27\ rad/s^2$

5. En el instante mostrado, el disco B de 10 kg y r = 0.3 m, tiene una velocidad angular de 2 rd/s en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Si la masa de la polea A es despreciable y el cable se enrolla en B, determine la distancia que recorre el bloque antes de detenerse, si el bloque tiene una masa m = 5 kg y un coeficiente de fricción con el piso de 0.8. Sugerencia: Utilizar el método de energía.



d = 0.28 m

6. La varilla de la mancuerna mostrada tiene una masa despreciable e inicialmente está en reposo sobre una superficie horizontal lisa. Si una partícula de masa m = 0.5 kg con velocidad inicial de 2 m/s choca contra la varilla rebotando con una velocidad de 1 m/s, calcular:



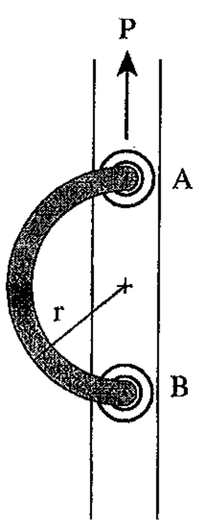
a) La velocidad del Centro de Masa de la mancuerna después del choque.

$V_{cm} = (0.134, -0.080)$ m/s

b) La velocidad angular de la mancuerna después del choque.

$\omega = 0.03$ rad/s

7. El movimiento de una barra semicircular de 4.5 kg se guía mediante dos ruedas pequeñas que rotan libremente en una ranura vertical. Sabiendo que la aceleración de la barra es $a = g/4$ hacia arriba, determinar a) la magnitud de la fuerza P, b) las reacciones en A y en B.

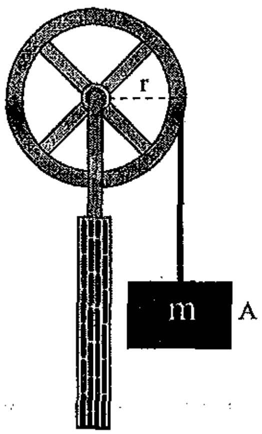


$P = 55.125$ N

$N_A = 17.546$ N

$N_B = 17.546$ N

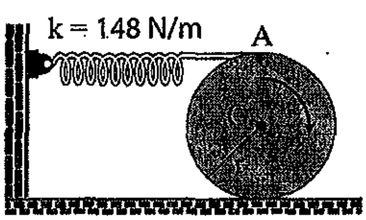
8. El volante de 125 kg tiene un radio de giro de 37 cm. El bloque de 15 kg cuelga del cable enredado en el volante cuyo radio es de 50cm. Si se parte del reposo y se desprecia la fricción, determinar
a) La aceleración del volante, b) la rapidez del bloque después de 2 seg.



a) $\alpha = 3.523\ \text{rad/s}^2$

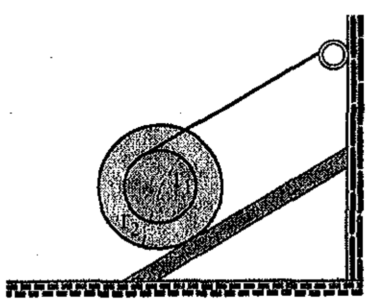
b) $V = 3.523\ \text{m/s}$

9. La rueda mostrada tiene una masa de 20 kg y un radio de giro de 1.8 m respecto a su centro de masa G y un radio r de 2 m. Si se mueve inicialmente hacia la derecha con una velocidad de 4 m/s, rodando sin resbalar, determinar la distancia que recorre en esta dirección antes de regresar.



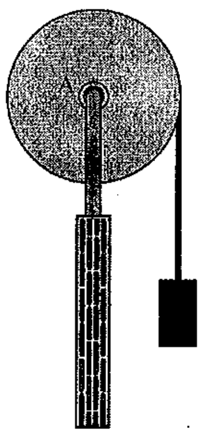
$d = 1.98\ \text{m}$

10. El carrete de 8 kg tiene un momento de inercia respecto a su centro, de $0.98\ \text{kg/m}^2$. Si la cuerda se desenreda sin resbalar y el carrete resbala en el piso, encontrar la aceleración angular del carrete, sabiendo que el coeficiente de fricción cinética con el piso es de 0.1 y el ángulo que forma el piso con la horizontal es de 30°. Los radios $r_1 = 0.15\ \text{m}$ y $r_2 = 0.3\ \text{m}$.



$\alpha = 1.01\ \text{rad/s}^2$

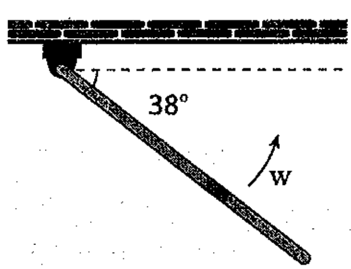
11. El disco uniforme de 30 kg y radio 0.3 m está articulado en A. Despreciando la fricción en la articulación y suponiendo que el bloque de 10 kg se suelta a partir del reposo, encontrar la velocidad angular del disco después de haber recorrido 2 m.



$\omega = 9.84$ rad/s

12. Una barra gira alrededor de uno de sus extremos con velocidad angular $\omega = 6.5$ rad/s, en un instante dado forma un ángulo de 38° con la horizontal. Determine la velocidad y la aceleración de un punto que se encuentre a:

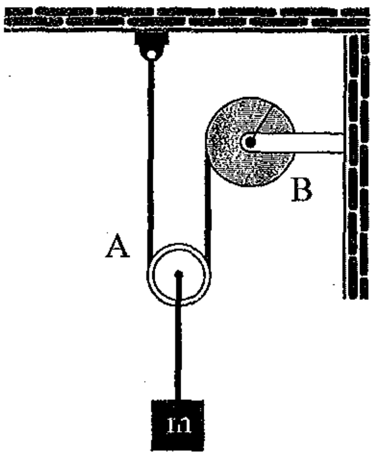
a) 25 cm del punto de rotación sobre la barra.
b) 50 cm del punto de rotación sobre la barra.



a) $v = 1.625$ m/s, $a = 10.5625$ m/s^2

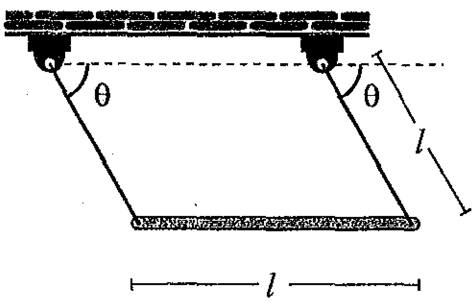
b) $v = 3.250$ m/s, $a = 21.250$ m/s^2

13. En el instante mostrado en la figura el disco B de masa M = 20 kg y radio r = 30 cm, tiene una velocidad angular de 15 rad/s en el sentido negativo. Si la masa de la polea A es despreciable, la masa m vale 5 kg y el cable se enrolla en B, determine cuanto subirá el bloque antes de que su velocidad sea cero.



$h = 2.32$ m

14. Una barra delgada de masa m y longitud L está sostenida por dos alambres inextensibles y sin masa de longitud l. Si la barra se suelta desde el reposo en $\theta = 0°$, determine la tensión en cada alambre en función de θ.



$T_1 = T_2 = \frac{3}{2}\, mg\, sen\,\theta$

Apéndice

A la ecuación 1.30

$$\mathbf{L}_{cm} = I_x \omega_x \hat{\imath} + I_y \omega_y \quad + I_z \omega_z \hat{k} \qquad 1.30$$

Llegamos a partir de

$$\int_S \mathbf{r}_{cm} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{cm})\, dm \qquad 1.29$$

donde $\mathbf{r}_{cm} = \mathbf{r}'_c$

Vamos a desglosar los términos para ver como llegamos a la ecuación 1.30, para ello tomamos

$$\mathbf{r}_{cm} = x\hat{\imath} + y \quad + z\hat{k}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \hat{\imath} + \omega_y \omega + \omega_z \hat{k}$$

$$(\omega \times \mathbf{r}) = (z\omega_y - y\omega_z)\hat{\imath} + (x\omega_z - z\omega_x) \quad + (y\omega_x - x\omega_y)\hat{k}$$

$$\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r}) = (x\hat{\imath} + y \quad + z\hat{k}) \times [(z\omega_y - y\omega_z)\hat{\imath} + (x\omega_z - z\omega_x) \quad + (y\omega_x - x\omega_y)\hat{k}]$$

$$= [\,(y^2+z^2)\,\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z\,]\,\hat{\imath}$$

$$= [-xy\omega_x + (z^2+x^2)\,\omega_y - yz\omega_z]\,\hat{\jmath}$$

$$= [-zx\omega_x - yz\omega_y + (x^2+y^2)\,\omega_z]\,\hat{k} \qquad \text{A.1}$$

Recordemos que esta última expresión es el integrando de la ecuación 1.29, es decir, vamos a tener para $\hat{\imath}$

$$\int_S (y^2+z^2)\,\omega_x\, dm - \int_S xy\omega_y\, dm - \int_S zx\omega_z\, dm \qquad \text{A.2}$$

pero

$\int (y^2+z^2)\, dm = I_{xx}$ el momento de inercia, con respecto al eje x

$\int xy\, dm = I_{xy}$ es el producto de inercia xy

$\int xz\, dm = I_{xz}$ s el producto de inercia xz

Si el cuerpo es simétrico y calculamos con respecto a estos, las integrales de momentos y productos de inercia, resulta que los productos de inercia se anulan, es decir:

$$\int xy\, dm = 0 \qquad \int xz\, dm = 0 \qquad \text{etc.}$$

y sólo quedan los términos

$$\int (y^2 + z^2)\, dm = I_{xx} \qquad \text{A.3}$$

$$\int (z^2 + x^2)\, dm = I_{yy} \qquad \text{A.4}$$

$$\int (x^2 + y^2)\, dm = I_{zz} \qquad \text{A.5}$$

entonces del resultado del producto cruz, expresión A.1 sólo nos queda

$$(y^2 + z^2)\, \omega_x \hat{\imath} + (z^2 + x^2)\, \omega_y \hat{\jmath} + (x^2 + y^2)\, \omega_z \hat{k}$$

que integrada queda

$$\mathbf{L}_{cm} = \omega_x \int_S (y^2 + z^2)\, dm\ \hat{\imath} + \omega_y \int_S (z^2 + x^2)\, dm\ \hat{\jmath} + \omega_z \int_S (x^2 + y^2)\, dm\ \hat{k}$$

de aquí obtenemos la ecuación

$$\mathbf{L}_{cm} = I_x\, \omega_x \hat{\imath} + I_y\, \omega_y \hat{\jmath} + I_z\, \omega_z \hat{k} \qquad \text{A.6}$$

que expresada en componentes es

$$\mathbf{L}_x = I_x\, \boldsymbol{\omega}_x \qquad \mathbf{L}_y = I_y\, \boldsymbol{\omega}_y \qquad \mathbf{L}_z = I_z\, \boldsymbol{\omega}_z \qquad 1.30$$

que es lo que deseábamos demostrar.

UNIDAD 2

Trabajo y energía para el cuerpo rígido

Objetivo General

Identificar y aplicar los conceptos de trabajo y energía mecánica a la dinámica del cuerpo rígido.

Objetivos Específicos

a) Identificar el concepto de trabajo mecánico, ejemplificando diferentes situaciones y resolver problemas afines.

b) Definir el concepto de potencia mecánica y aplicarlo en problemas prácticos.

c) Definir los conceptos de energía cinética traslacional y rotacional y aplicarlos en situaciones prácticas.

d) Identificar cuando una fuerza es conservativa.

e) Calcular la energía potencial para diferentes fuerzas conservativas.

f) Identificar las condiciones para las cuales se conserva la energía mecánica en el movimiento de un cuerpo rígido.

g) Aplicar la conservación de la energía en la solución de problemas del movimiento de un cuerpo rígido.

h) Definir el concepto de impulso y aplicarlo en la solución de problemas de colisiones entre dos cuerpos.

Introducción

Uno de los hechos que caracteriza a la Física y que la hace diferente a otras disciplinas, es la existencia de principios de conservación, los cuales establecen que no importa lo que ocurra con un sistema hay ciertas cantidades cuyos valores se mantienen constantes. Si se aplica uno o más principios de conservación a un sistema se puede determinar que tipo de eventos pueden ocurrir en éste y cuáles no. Frecuentemente se pueden sacar conclusiones sobre el comportamiento de las partículas de un sistema, sin necesidad de hacer una investigación detallada, sino simplemente haciendo un análisis de la conservación de algunas cantidades.

En la física se ha tenido éxito de la aplicación de algunos principios de conservación, ya que en muchos fenómenos naturales, bajo ciertas condiciones, se conserva: la energía, el momento lineal, el momento angular y otras cantidades.

Esta unidad se refiere a la conservación de la energía aplicada al movimiento de un cuerpo rígido. Para este propósito es necesario primero hablar del trabajo mecánico, que es lo que se hace a continuación

2.1 Impulso y momento lineal

La Segunda Ley de Newton aplicada a una partícula puntual, se conoce generalmente como

$$\mathbf{F}_N = m\mathbf{a}$$

y describe la forma como las fuerzas influyen sobre el movimiento de la partícula, cuando la masa es constante. Si se considera el momento lineal definido como

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad 2.1$$

con unidades de medida $Kg\,\frac{m}{seg}$ o Nseg, la Segunda Ley de Newton se puede escribir como:

$$\mathbf{F}_N = m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\,(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad 2.2$$

esta es una ecuación vectorial que en componentes $x,y,$ queda como

$$F_x = \frac{d}{dt} p_x \qquad F_y = \frac{d}{dt} p_y \qquad 2.3$$

A partir de la Segunda Ley de Newton, se puede determinar el efecto que produce una fuerza **F** actuando en un intervalo Δt, despejando $\mathbf{dp}$

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}_N \, dt$$

e integrando ambos lados de la ecuación

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_N \, dt$$

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \Delta \mathbf{p} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_N \, dt$$

Al miembro derecho de esta ecuación se le llama impulso de $\mathbf{F}_N$ y se representa con la letra $\mathbf{J}$

$$\mathbf{J}_N = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_N \, dt \qquad 2.4$$

De la ecuación anterior

$$\mathbf{J}_N = \Delta \mathbf{p} \qquad 2.5$$

Esta ecuación expresa que el impulso que una fuerza $\mathbf{F}$, actuando en Δt, comunica a un cuerpo es igual al cambio en el momento lineal de éste.

La ecuación que define $\mathbf{J}_N$ se puede integrar fácilmente si $\mathbf{F}_N$ es constante

$$\mathbf{J}_N = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_N \, dt = \mathbf{F}_N \int_{t_1}^{t_2} dt = \mathbf{F}_N \, (t_2 - t_1)$$

$$\mathbf{J}_N = \mathbf{F}_N \, \Delta t \qquad 2.6$$

Esta ecuación también se puede escribir como

$$\mathbf{F}_N = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$$

para una $\mathbf{F}_N$ constante.

Si $\mathbf{F}_N$ es función del tiempo, se puede tomar el valor promedio de la fuerza y de esta manera se obtiene el impulso como

$$\mathbf{J} = \overline{\mathbf{F}}\Delta t \qquad 2.7$$

donde $\overline{\mathbf{F}}$ es el valor promedio de la fuerza en el intervalo Δt, definido como

$$\overline{\mathbf{F}} = \frac{1}{\Delta t}\mathbf{F}_N \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F}(t)\, dt$$

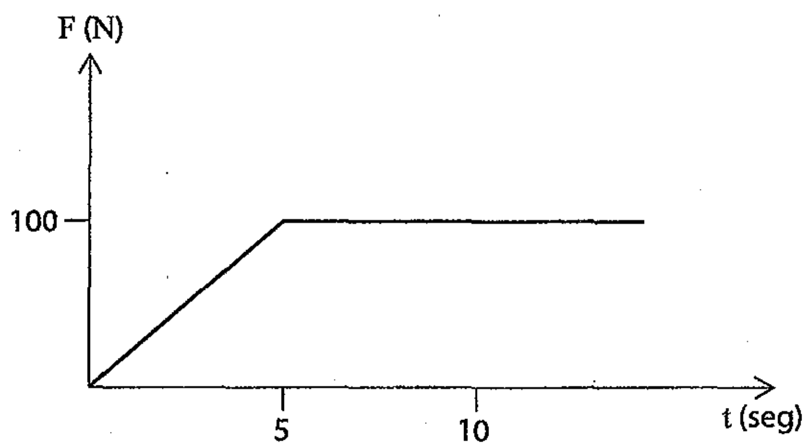
Asimismo

$$\overline{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{J}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$$

Si se conoce la fuerza en función del tiempo mediante la gráfica de t *versus* $\mathbf{F}$, se calcula la integral de $\mathbf{F}dt$ a través el área bajo la curva y como consecuencia se obtiene $\mathbf{J}$.

Ejemplo

Un bloque de 100 kg está sujeto a una fuerza que depende del tiempo de la forma como muestra la siguiente gráfica. Si el bloque parte del reposo, calcular su velocidad en $t = 10$ seg.



$$\Delta \mathbf{p} = m\,[\,v(10) - v(0)] = \int_0^{10} F(t)dt$$

pero $v(0) = 0$, por lo tanto

$$v(10) = \frac{1}{m}\int_0^{10} F(t)dt$$

esta integral se puede calcular a través del área bajo la curva de la gráfica de t *vs* F. La forma del área bajo la curva es un triángulo entre 0 y 5 segundos y un rectángulo entre 5 y 10 segundos, por lo tanto la integral es igual a

$$\int_0^{10} F(t)dt = \frac{100 \times 5}{2} + 100 \times 5 = 750 \text{ Nseg}$$

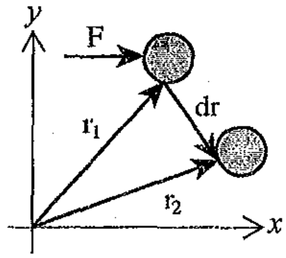
y la velocidad a

$$v(10) = = \frac{750}{100} = 7.5 \text{ m/seg}$$

2.2 Trabajo mecánico

2.2.1 Movimiento de traslación

Si una fuerza $\mathbf{F}$ actúa sobre un cuerpo a lo largo de un desplazamiento $d\mathbf{r}$, como muestra la figura:



El trabajo mecánico hecho por la fuerza $\mathbf{F}$ sobre el cuerpo se define como

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \qquad 2.8$$

donde $\mathbf{F}.d\mathbf{r}$ es el producto escalar entre los vectores $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$, definido como

$$\mathbf{F}.d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dy = F dr \cos\theta$$

y por lo tanto

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_2}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dy \qquad 2.9$$

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F \cos\theta \, dr \qquad 2.10$$

en la ecuación (2.9) F_x, F_y, F_z, dx, dy y dz son las componentes del vector $\mathbf{F}$ y del vector de desplazamiento $d\mathbf{r}$, respectivamente. En la ecuación (2.10), θ es el ángulo entre $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$.

De la definición es claro que W es una cantidad escalar cuyas unidades son *newton-m*, o *joules*. Nótese asimismo, que para que exista trabajo debe actuar una fuerza y simultáneamente debe haber un desplazamiento del cuerpo.

Trabajo hecho por una fuerza constante

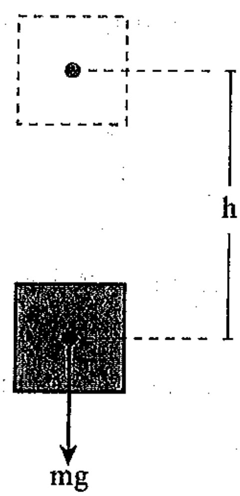
Si $\mathbf{F}$ es constante se puede fácilmente llevar a cabo la integral

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F\,\cos\theta\, dr = F\cos\theta \int_{r_1}^{r_2} dr = F\Delta r\cos\theta \qquad 2.11$$

Ejemplos

(a) Trabajo hecho por el peso mg

Supóngase que el cuerpo se mueve hacia arriba, como muestra la figura:



en virtud de que en este caso la fuerza $\mathbf{F}$ es constante, con magnitud $F = -mg$, y con dirección a lo largo del eje y apuntando siempre hacia abajo, se puede utilizar la ecuación (2.11), válida para calcular el trabajo hecho por una fuerza constante.

$$W = F\Delta r\cos\theta$$

en este caso $\theta = 180°$ ya que $\mathbf{F}$ apunta hacia abajo y el desplazamiento $\Delta r = h$ hacia arriba, por lo tanto:

$$W = mgh\cos 180° = -mgh$$

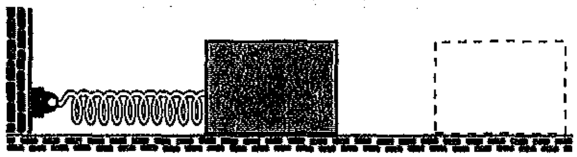
Si el cuerpo se mueve hacia abajo $\theta = 0°$, entonces:

$$W = mgh\cos 0° = mgh$$

Se puede comprobar fácilmente que si el cuerpo se mueve sobre un plano inclinado, el resultado es el mismo que para el caso anterior, para el trabajo hecho por el peso, donde h en este caso es la diferencia en altura respecto al piso, del punto inicial y el punto final del movimiento del cuerpo sobre el plano inclinado.

(b) Trabajo hecho por la fuerza del resorte

La figura muestra un resorte con una masa m atada a uno de sus extremos, como muestra la siguiente figura:



$x_0 = 0$ $\qquad\qquad$ x

La fuerza que ejerce el resorte sobre el cuerpo, está dada por la ley de Hooke, a saber

$$\mathbf{F} = -\,kx\,\hat{\imath}$$

donde k es la constante del resorte y x es la deformación del mismo, la cual coincide con la posición del cuerpo con respecto al origen colocado en la posición en donde el resorte no está deformado, $\hat{\imath}$ es el vector unitario a lo largo del eje x. De esta manera el trabajo hecho por la fuerza que ejerce el resorte sobre el cuerpo al desplazarse del origen hasta una posición x, está dado por

$$W = \int_{x=0}^{x} F\cos\theta\,dx$$

En este caso θ = 180º, ya que el desplazamiento es hacia la derecha y la fuerza apunta hacia la izquierda:

$$W = \int_{x=0}^{x} kx\cos 180^\circ\,dx = -k\int_{x=0}^{x} x\,dx = -\frac{1}{2}kx^2 \qquad 2.12$$

(c) Trabajo hecho por la fuerza de fricción

La fuerza de fricción es una fuerza constante que siempre actúa en sentido contrario al desplazamiento, por lo que se puede calcular mediante la ecuación

$$W = F\Delta r \, cos\, \theta$$

Siendo $F = \mu N$, $\theta = 180°$ y $\Delta r = d$, por lo que

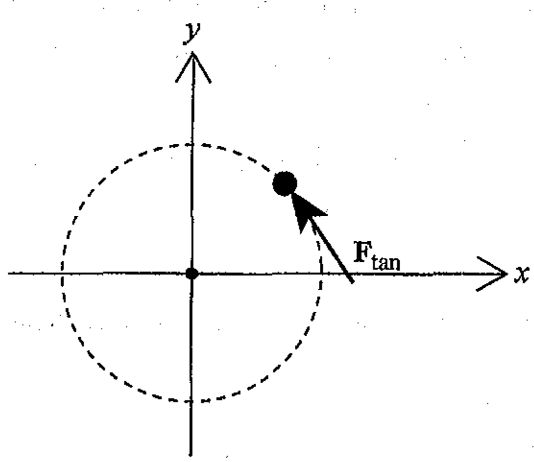
$$W = F\Delta r \, cos\, \theta \; = \; \mu N d \, cos\, 180°$$

$$W = -\mu N d \qquad 2.13$$

d es la distancia recorrida mientras actúa la fuerza y N la fuerza normal.

2.2.2 Movimiento de rotación

Para un movimiento de rotación el trabajo mecánico toma una forma diferente, como se ve a continuación. Sea una partícula de masa m que se mueve en una trayectoria circular, como muestra la siguiente figura:



Y sea una fuerza $\mathbf{F}_{tan}$ actuando sobre la partícula en forma tangencial como muestra la figura, de acuerdo a la definición de trabajo,

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F_{tan} \, cos\, \theta \, ds \qquad 2.14$$

siendo $ds = rd\theta$ la diferencial de arco de circunferencia, ya que el cuerpo se mueve sobre la circunferencia. Asimismo, ds y F_{tan} son perpendiculares entre si, de esta manera:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_{tan}\, r\, d\theta$$

pero de acuerdo con la Unidad 1, el producto $r F_{tan}$ es igual a la torca ($\boldsymbol{\tau}$) que ejerce F_{tan} sobre la partícula, por lo tanto el trabajo para el movimiento de rotación se puede escribir como

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta \qquad 2.15$$

2.2.3 Movimiento general en un plano

Un movimiento general en un plano se presenta cuando un sólido realiza simultáneamente un movimiento de rotación y uno de traslación, en este caso el trabajo mecánico se calcula de la siguiente manera:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r} + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta \qquad 2.16$$

A partir de la primera integral se obtiene el trabajo para el movimiento de traslación y con la segunda para el movimiento de rotación.

2.3 Potencia mecánica

En la física aplicada el trabajo realizado por unidad de tiempo, es una cantidad que frecuentemente es más importante que el trabajo mismo, dicha cantidad se define como

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad 2.17$$

A partir de esta ecuación se obtiene la potencia instantánea. En ocasiones conviene calcular la potencia promedio o media para un intervalo de tiempo Δt, como

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad 2.18$$

Las unidades de medida de la potencia en el sistema internacional, son

$$P = \frac{\text{joule}}{\text{s}} = \text{watt}$$

Otras unidades que se utilizan para medir la potencia son el kilowatt

$$1 \text{ kilowatt} = 1000 \text{ watt}$$

y en el sistema inglés es el caballo de fuerza (hp)

$$1 \text{ hp} = 550 \ \frac{\text{pié - libra}}{\text{s}}$$

El hp es una unidad utilizada frecuentemente en la ingeniería, en tanto el watt y el kilowatt se utilizan en el trabajo científico. La equivalencia entre ambas unidades es

$$1 \text{ hp} = 746 \text{ watt}$$

La ecuación para la potencia instantánea se puede expresar de la siguiente manera:

$$W = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F}.\mathbf{dr}}{dt} = \mathbf{F}.\frac{\mathbf{dr}}{dt} = \mathbf{F}.\mathbf{v} \qquad 2.19$$

2.4 Energía cinética de traslación y de rotación

2.4.1 Energía cinética de traslación

Sea una partícula sujeta a una fuerza F, de acuerdo a la definición de trabajo mecánico (ec. 2.8)

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F}.\mathbf{dr}$$

y tomando en cuenta la 2da. Ley de Newton

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

El trabajo se puede expresar como

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F}.\mathbf{dr} = \int_{r_1}^{r_2} m\mathbf{a}.\mathbf{dr} = m\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{a}.\mathbf{dr} = m\int_{r_1}^{r_2} \frac{d\mathbf{v}}{dt}.\mathbf{dr}$$

$$W = m\int_{r_1}^{r_2} d\mathbf{v}.\frac{d\mathbf{r}}{dt} = m\int_{v_1}^{v_2} d\mathbf{v}.\mathbf{v} = m\int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = K_2 - K_1 = \Delta K \qquad 2.20$$

donde el término $K = \frac{1}{2}mv^2$ corresponde a la energía cinética. A la ecuación (2.20) se le conoce como el Teorema Trabajo – Energía Cinética.

Para el caso del movimiento de traslación de un cuerpo rígido en virtud de que todas las partículas que integran el cuerpo se mueven con la misma velocidad, la energía cinética de traslación del cuerpo se puede escribir como

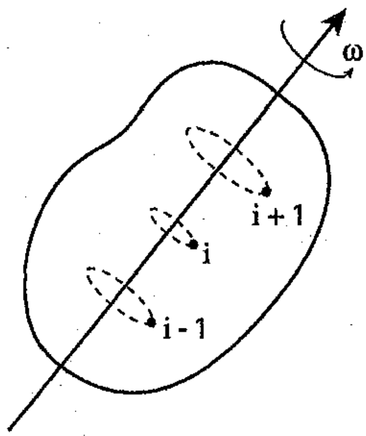
$$K_T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}m_i v^2 = \frac{1}{2}v^2\sum_{i=1}^{N} m_i = \frac{1}{2}Mv^2$$

siendo M la masa total del cuerpo rígido. Así la energía cinética de traslación de un cuerpo rígido es igual a

$$K_T = \frac{1}{2}Mv^2 \qquad 2.20$$

2.4.2. Energía cinética de rotación

Sea un cuerpo rígido que rota con una velocidad angular ω ; en torno a un eje fijo como muestra la figura:



Todas las partículas que integran el cuerpo describen trayectorias circulares con su centro colocado sobre el eje de rotación y se mueven con la misma velocidad angular, así la energía cinética de cada partícula está dada por

$$K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

Y la energía de rotación del cuerpo rígido como

$$K_R = \sum_{i=1}^{N} K_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Ya que cada partícula describe un movimiento circular $v_i = \omega r_i$, siendo r_i el radio de la circunferencia que describe cada partícula.

$$K_R = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \omega r_i^2 = \frac{1}{2}\omega \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

el término $\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$ es el momento de inercia I con respecto al centro de masa, como se vio en la Unidad 1, así

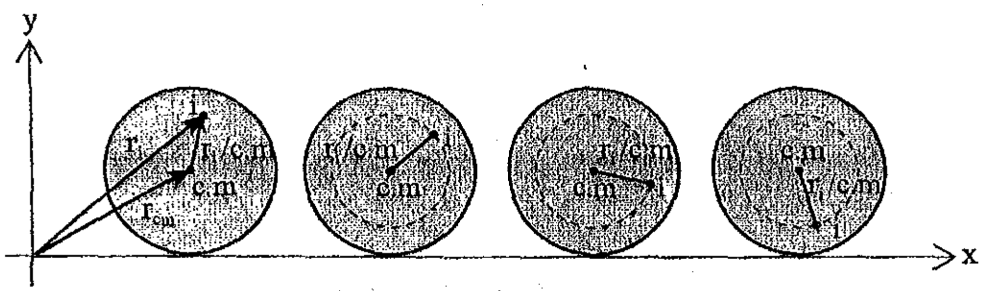
$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \int r^2 dm$$

De esta manera la energía cinética de rotación de cuerpo rígido se expresa como

$$K_R = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad 2.22$$

2.4.3 Energía cinética para el movimiento general en un plano

Considérese un disco rígido que se mueve sobre un plano horizontal llevando a cabo un movimiento de traslación y uno de rotación simultáneamente, como muestra la figura.



El vector de posición de la partícula i respecto al origen O, se puede escribir como

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{c.m} + \mathbf{r}_{i/c.m}$$

Siendo $\mathbf{r}_{c.m}$ el vector de posición del centro de masa respecto a O, y $\mathbf{r}_{i/c.m}$ el vector de posición de la partícula i con respecto al centro de masa. Si derivamos la anterior ecuación respecto al tiempo, se obtiene

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{c.m} + \mathbf{v}_{i/c.m} \qquad 2.23$$

En esta ecuación $\mathbf{v}_i$ y $\mathbf{v}_{c.m}$ son las velocidades de la partícula i y del centro de masa, respecto al origen O, respectivamente, y $\mathbf{v}_{i/c.m}$ la velocidad de la partícula i respecto al centro de masa. Si ahora se considera que el Movimiento General en un Plano de un cuerpo, se puede observar como el movimiento de traslación del centro de masa, más el movimiento de rotación alrededor del centro de masa, entonces $\mathbf{v}_{i/c.m}$, la velocidad de la partícula i con respecto al centro de masa, es la velocidad tangencial de la partícula alrededor del centro de masa, por lo tanto se puede escribir como

$$v_{i/c.m} = \omega r_{i/c.m} \qquad 2.24$$

donde ω es la velocidad angular.

La energía cinética está dada por

$$K_T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

sustituyendo $\mathbf{v}_i$ de la ecuación 2.24

$$K_T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_{c.m} + \mathbf{v}_{i/c.m}) \cdot (\mathbf{v}_{c.m} + \mathbf{v}_{i/c.m})$$

$$= \frac{1}{2} m_i (v_{c.m}^2 + 2\mathbf{v}_{c.m} \cdot \mathbf{v}_{i/c.m} + v_{i/c.m}^2)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{c.m}^2 + \mathbf{v}_{c.m} \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_{i/c.m} + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{i/c.m}^2$$

$$= \frac{1}{2} M v_{c.m}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{c.m}^2$$

Ya que

$$\sum_i m_i = M \qquad \text{y} \qquad \sum_i m_i \mathbf{v}_{i/c.m} = 0$$

por ser este último el momento lineal del centro de masa, respecto a si mismo. Sustituyendo en esta última expresión $v_{i/c.m}$ de la ecuación 2.24,

$$K_T = \frac{1}{2} M v_{c.m}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \, \omega^2 r_{i/c.m}^2$$

pero ω es la misma para todas las partículas de cuerpo, por lo que

$$K_T = \frac{1}{2} M v_{c.m}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i \, r_{i/c.m}^2$$

$$K_T = \frac{1}{2} M v_{c.m}^2 + \frac{1}{2} I' \omega^2 \qquad 2.25$$

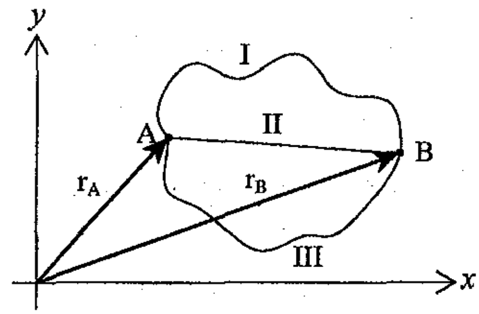
ya que $\sum_i m_i \, r_{i/c.m}^2 = I'$, es el momento de inercia del cuerpo respecto a un eje que pasa por el centro de masa.

En la ecuación 2.25, el primer término corresponde a la energía cinética de traslación y el segundo a la energía cinética de rotación.

2.5 Energía potencial

2.5.1 Fuerzas conservativas

Si un cuerpo sujeto a una fuerza F, se mueve del punto A al B siguiendo trayectorias diferentes, como muestra la figura:



en general es de esperarse que el trabajo dependa de la trayectoria ya que la longitud de esta varía de trayectoria a trayectoria. Sin embargo, existen fuerzas en la naturaleza cuyo trabajo que realizan sobre un cuerpo no depende de la trayectoria sino únicamente de las coordenadas del punto inicial y del punto final de la misma, a estas fuerzas se les conoce como conservativas. Esto es

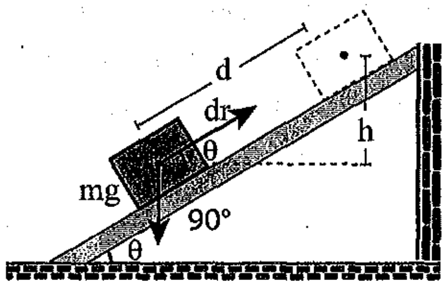
$$W = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = -(V_2 - V_1) = -\Delta V \qquad 2.26$$

donde **F** es la fuerza conservativa y V una función que depende únicamente de las coordenadas, V_2 es la función V evaluada en el límite superior r_2 y V_1 la función evaluada en r_1. El signo menos es una convención que se usa para definir la función V. A esta función V(r) se le conoce como la energía potencial. Esto implica que cada fuerza conservativa tendrá asociada una energía potencial la cual es la función V(r), cuya forma depende de la fuerza, como es el caso de las fuerzas del resorte, el peso, la gravitacional y la eléctrica. Si el trabajo depende de la trayectoria entonces la fuerza no es conservativa y no tendrá asociada una energía potencial V(r), como es el caso de la fuerza de fricción.

2.5.2 Determinación de las energías potenciales debidas al peso y a la fuerza del resorte

a) Energía potencial debida al peso

Supóngase que un cuerpo de masa m se mueve hacia arriba sobre un plano inclinado, como muestra la siguiente figura:



como el peso es una fuerza constante el trabajo se puede calcular como:

$$W = mgd\,cos\,(\theta + 90°)$$

pero $cos\,(\square + 90°) = -sen\,\square$, por lo tanto

$$W = -mgd\,sen\,\theta$$

en la figura anterior se puede apreciar que $h = d\,sen\,\theta$, de esta manera

$$W = -mgh$$

por otro lado $W = -(V_2 - V_1)$, donde $V_2 = V(h)$ y $V_1 = V(0)$, entonces

$$-\left[V(h) - V(0)\right] = -mgh$$

de donde se puede despejar V(h)

$$V(h) = mgh + V(0)$$

si se establece el nivel cero de la energía potencial en $h = 0$, entonces $V(0) = 0$, de esta manera la energía potencial debida al peso esta dada por la expresión:

$$V(h) = mgh \qquad 2.27$$

Nótese que esta energía puede ser positiva o negativa dependiendo del signo de h. Para el caso de un cuerpo rígido, tomando en consideración que el centro de masa es un punto que se comporta como si toda la masa estuviera concentrada en él, es el punto que se utiliza para determinar la altura h para el cálculo de la energía potencial.

b) Energía potencial debida a la fuerza del resorte

En el inciso 2.2.1 se calculó el trabajo hecho por la fuerza del resorte sobre un cuerpo, al moverse este desde el origen localizado en la posición en la cual el resorte no está deformado hasta un posición x, el resultado obtenido fue:

$$W = -\frac{1}{2}kx^2$$

por otro lado, como la fuerza del resorte es conservativa, el trabajo está dado por $W = -\left[V(x) - V(0)\right]$, por lo tanto

$$-\left[V(x) - V(0)\right] = -\frac{1}{2}kx^2$$

despejando $V(x)$

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + V(0)$$

si se define $V(0) = 0$, se obtiene la energía potencial debida a la fuerza del resorte como:

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 \qquad 2.28$$

Nótese que está energía siempre es positiva ya que la posición x está elevada al cuadrado.

2.6 Conservación de la energía mecánica

De acuerdo al Teorema Trabajo-Energía Cinética, el trabajo neto (W_N) realizado por un conjunto de fuerzas externas que actúa sobre un cuerpo rígido esta dado por la ecuación (2.20)

$$W_N = \Delta K$$

siendo ΔK el incremento de la energía cinética del cuerpo. Si el conjunto de fuerzas externas actuando sobre el cuerpo está formado por fuerzas conservativas y no conservativas, W_N se puede escribir como

$$W_N = W_{FC} + W_{FNC}$$

donde W_{FC} y W_{FNC} es el trabajo hecho por las fuerzas conservativas y por las no conservativas, respectivamente. Tomando en consideración esta ecuación el Teorema Trabajo-Energía se puede escribir como

$$W_{FC} + W_{FNC} = \Delta K$$

Pero anteriormente se vio de la definición de energía potencial que para las fuerzas conservativas $W_{FC} = -\Delta V$

$$-\Delta V + W_{FNC} = \Delta K$$

$$W_{FNC} = \Delta K + \Delta V = \Delta (K + V)$$

$$W_{FNC} = \Delta E$$

donde $E = K + V$, es la energía mecánica. Nótese en esta última ecuación que si

$$W_{FNC} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta E = 0$$

lo cual implica que

$$E_f = E_i = \text{const.} \tag{2.29}$$

Esto último se conoce como el principio de conservación de la energía mecánica, *el cual establece que si el trabajo hecho por las fuerzas no conservativas sobre un sistema es cero, la energía mecánica del mismo permanece constante.*

W_{FNC} es cero en los siguientes casos:

a) Cuando sólo actúan fuerzas conservativas sobre el sistema.

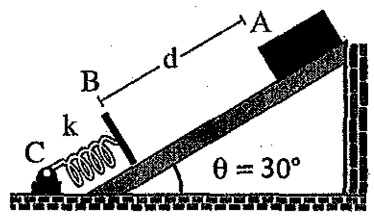
b) Cuando las fuerzas no conservativas actúan en forma perpendicular al desplazamiento del cuerpo, como en el caso de la fuerza normal.

c) Cuando el cuerpo rueda sin resbalar, en este caso la fuerza no conservativa que es la fuerza de fricción actúa sobre un punto del cuerpo que se encuentra en reposo, por lo tanto el desplazamiento del mismo es cero.

A continuación veremos ejemplos de aplicación del principio de conservación de la energía mecánica.

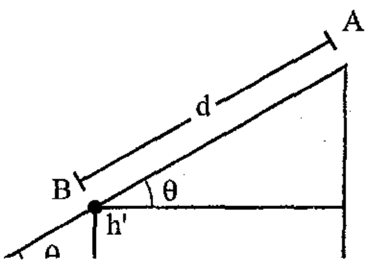
Ejemplo 1

Un bloque de masa m se encuentra en reposo sobre un plano inclinado en la posición que muestra la figura, para incidir posteriormente sobre un resorte de constante k. Suponiendo que no actúan fuerzas de fricción, calcular



a) La velocidad del bloque en el punto B.

b) La máxima compresión que sufre el resorte una vez que el cuerpo se impacta contra él.



$h = sen\ 30°$

$k = 100$ N/m $\qquad m = 1.5$ kg

$\theta = 30°$ $\qquad d = 80$ cm

Solución

En virtud de que no hay fricción y solamente actúan fuerzas conservativas como son el peso y la fuerza del resorte, la energía mecánica del cuerpo se conserva, por lo tanto para las posiciones A, B y C

$$E_A = E_B = E_C$$

donde

$$E_A = mgh$$

ya que en la posición A el cuerpo se encuentra en reposo, y

$$E_B = \frac{1}{2}mv^2$$

como consecuencia de que la altura del bloque respecto al punto B es cero, considerando la energía potencial $V(B) = 0$, igualando ambas energías

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

despejando v y tomando en cuenta que $h = d\,sen\,\theta$

$$v = \sqrt{2\,gd\,sen\,30°} = \sqrt{2(9.8)(0.8)(0.5)} = 2.8 \text{ m/seg}$$

Para calcular la máxima compresión del resorte se parte de las posiciones A y C,

$$E_A = E_C$$

ya que en la posición C el bloque está en reposo y el resorte alcanza su máxima compresión

$$E_C = \frac{1}{2}kx_{max}^2 - mgh'$$

igualando las energías en los puntos A y C

$$mgh = \frac{1}{2}kx_{max}^2 - mgh'$$

donde $h' = x_{max}\,sen\,\theta$

$$mgh = \frac{1}{2}kx_{max}^2 - mgx_{max}\,sen\,\theta$$

resulta una ecuación de segundo grado y sus soluciones son

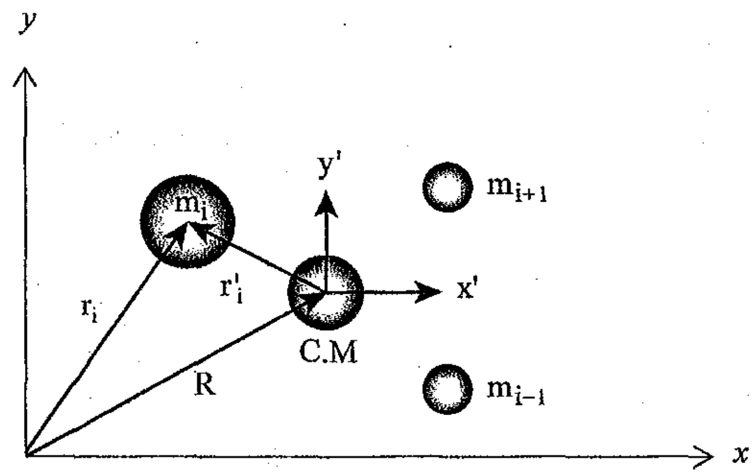
$$x_{max1} = 0.42 \text{ m}$$

$$x_{max2} = -0.28 \text{ m}$$

en virtud de que el origen se encuentra en el punto B la solución para este caso es x_{max2}

2.7 Energía de un sistema de partículas con respecto al sistema de referencia fijo en el centro de masa

Considérese un sistema de referencia $O(x,y)$ fijo en la tierra(laboratorio) y un sistema $O'(x',y')$ fijo en el centro de masa de un sistema de partículas, como muestra la figura



donde $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{R}$ son los vectores de posición de la partícula m_i y del centro de masa del sistema con respecto al sistema fijo en O, respectivamente; $\mathbf{r}_i'$el vector de posición de m_i respecto a O', el sistema de referencia fijo en el centro de masa.

De la figura anterior se puede inferir que los vectores $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{r}_i'$, están relacionados de la siguiente manera:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i' + \mathbf{R} \qquad 2.30$$

derivando con respecto al tiempo ambos lados de esta ecuación, se obtiene

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i' + \mathbf{V} \qquad 2.31$$

ecuación que relaciona la velocidad $\mathbf{v}_i$ de la partícula i medida con respecto a O, con su velocidad medida con respecto al centro de masa, siendo $\mathbf{V}$ la velocidad del centro de masa medida respecto a O.

La energía cinética de un sistema con respecto al sistema fijo en el laboratorio está dado por

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

y con respecto al sistema fijo en el centro de masa, por

$$K' = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v'^2_i$$

la relación entre ambas expresiones se obtiene a partir de la ecuación que relaciona a $\mathbf{v}_i$ y a $\mathbf{v}_i'$

$$K' = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{V})\cdot(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (v_i^2 - 2\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{V} + V^2) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}{}' (m_i v_i^2 - 2m_i\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{V} + m_i V^2)$$

$$K' = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{2}(-2MV^2 + MV^2) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \frac{1}{2} MV^2$$

finalmente

$$K = K' + K_{c.m} \qquad 2.32$$

donde K es la energía cinética del sistema respecto al laboratorio, K' es la energía del sistema respecto al centro de masa y $K_{c.m}$ es la energía cinética del centro de masa, están dado por

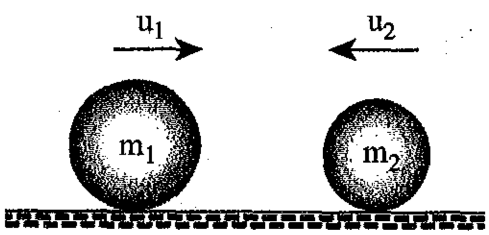
$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad ; \quad K' = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v'^2_i \quad ; \quad K_{c.m} = \frac{1}{2} MV^2$$

Choques

En el momento que dos cuerpos chocan entre sí, generalmente sucede que la fuerza externa actuando sobre ellos es cero o es muy pequeña en comparación con la fuerza impulsiva que se genera entre los cuerpos en el momento del choque, por tal motivo el momento lineal del sistema formado por los dos cuerpos que chocan es constante. Así que la ley de conservación del momento lineal se puede utilizar en la solución de problemas de choques.

Se tiene resuelto un problema de un choque entre dos cuerpos, cuando se encuentran las velocidades de los cuerpos después del choque en términos de las velocidades iniciales de los cuerpos y de las masas de los mismos, como se describe a continuación:

Sean dos cuerpos de masa m_1 y m_2 que se mueven con velocidades iniciales u_1 y u_2, respectivamente, como muestra la figura, calcular las velocidades después del choque.



En virtud de que no actúan fuerzas externas, se conserva el momento lineal

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}'$$

donde $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}'$ son los momentos lineales del sistema antes y después del choque, respectivamente, siendo:

$$\mathbf{P} = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2$$

y $\mathbf{P}'$

$$\mathbf{P}' = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$$

donde $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son las velocidades antes y después del choque, entonces

$$m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \qquad 2.43$$

en esta última ecuación se puede apreciar que se tienen dos incógnitas, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, por lo que se requiere de una segunda ecuación, la cual se obtiene a continuación mediante la clasificación de los choques.

A. Choques en una dimensión

En este tipo de choques por ser en una sola dimensión no se requiere expresar las ecuaciones en forma vectorial.

a) Choque inelástico

En este tipo de choque los cuerpos quedan pegados después del mismo, por lo que se mueven con la misma velocidad. De esta manera las ecuaciones para el choque inelástico en una dimensión son:

$$m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \qquad 2.43$$

$$v_1 = v_2 \qquad 2.44$$

sustituyendo la ecuación 2.36 en 2.35

$$m_1u_1 + m_2v_2 = m_1v_2 + m_2v_2$$

$$v_1 = v_2 = \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2}$$

b) Choque elástico

En este tipo de choque se mantiene constante la energía antes y después del mismo, por lo tanto las ecuaciones para este tipo de choque son:

$$m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \qquad 2.43$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad 2.45$$

Se pueden mezclar estas dos últimas ecuaciones para obtener un tercera en donde no aparezcan los cuadrados de las velocidades y de esta manera se facilite el encontrar la solución para obtener los valores de v_1 y v_2, como se muestra a continuación. En las ecuaciones 2.43 y 2.45 se pasan al lado izquierdo los términos que contienen m_1

$$m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2) \qquad 2.46$$

$$m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - u_2^2) \qquad 2.47$$

dividiendo miembro a miembro las ecuaciones 2.46 y 2.47 y tomando en cuenta que $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$, esta ecuación se reduce a

$$u_1 + v_1 = v_2 + u_2$$

Expresión que se puede escribir como

$$v_2 - v_1 = -(u_2 - u_1) \qquad 2.48$$

Esta ecuación se conoce como la conservación de la velocidad relativa ya que el miembro izquierdo es la velocidad relativa después del choque y el miembro derecho es la velocidad relativa antes del choque con el signo cambiado. Así las ecuaciones para el choque elástico en una dimensión son

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \qquad 2.43$$

$$v_2 - v_1 = -(u_2 - u_1) \qquad 2.48$$

La soluciones de las ecuaciones 2.43 y 2.48 para v_1 y v_2, son las siguientes

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \qquad 2.49$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2 \qquad 2.50$$

Si se define el coeficiente de restitución e para un choque de cualquier tipo, como

$$v_2 - v_1 = -e\,(u_2 - u_1) \qquad 2.51$$

Siendo e una constante cuyo valor es cero para un choque inelástico, uno para un choque elástico y mayor que cero pero menor que uno para otro tipo de choque cualquiera. Si se considera esta ecuación y la ecuación 2.43 para la conservación del momento lineal, se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ las velocidades después del choque, cuya solución es

$$v_1 = \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{(1+e)m_2}{m_1 + m_2} u_2 \qquad 2.52$$

$$v_2 = \frac{(1+e)m_1}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{m_2 - em_1}{m_1 + m_2} u_2 \qquad 2.53$$

y la pérdida de energía cinética en el choque está dada por

$$\Delta K = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \frac{1}{2}(m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2)$$

sustituyendo las expresiones para $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ y reduciendo, se obtiene

$$\Delta K = -\frac{1}{2}(1 - e^2)\,\mu\,(u_2 - u_1)^2 \qquad 2.54$$

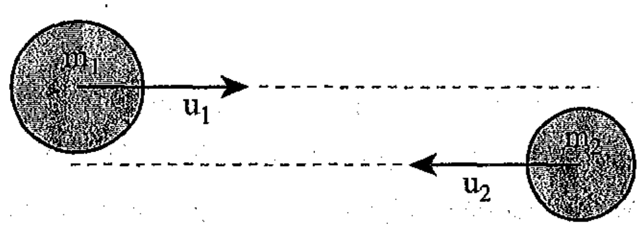
siendo μ la masa reducida del sistema, definida como

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

B. Dos Dimensiones (Choque oblicuo)

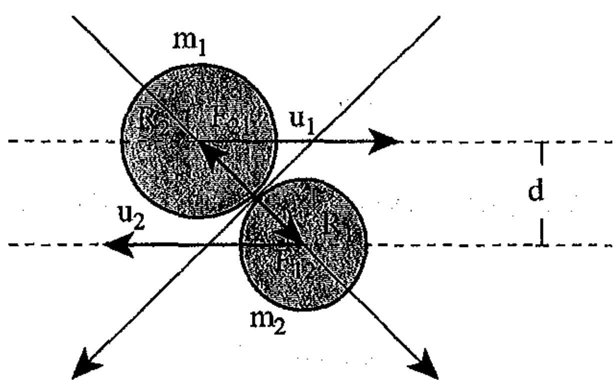
Sean dos esferas que chocan como muestra la figura

Antes del choque



para este tipo de choques conviene usar los ejes tangencial y normal en lugar de los ejes x, y, para aprovechar que en el momento del choque las fuerzas (F_{12} y F_{21}), que actúan son perpendiculares a la superficie de contacto entre las dos esferas y por lo tanto solo tiene componente en la dirección normal como muestra la figura

Durante el choque



Si expresamos las velocidades antes ($\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$) y después ($\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$) del choque para ambos cuerpos, en sus componentes tangencial (u_{1t}, u_{2t}, v_{1t} y v_{2t}) y normal (u_{1n}, u_{2n}, v_{1n} y v_{2n}), las primeras permanecen constantes por no actuar fuerzas en la dirección tangencial. Tomando esto en consideración y el hecho que no actúan fuerzas externas sobre las esferas y por lo tanto se conserva el momento lineal del sistema, las ecuaciones que describen el choque son:

$$u_{1t} = v_{1t} \qquad 2.55$$

$$u_{2t} = v_{2t} \qquad 2.56$$

$$m_1 u_{1n} + m_2 u_{2n} = m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} \qquad 2.57$$

nótese que en esta última ecuación solamente aparece la componente normal del momento lineal, esto se debe a que, como lo muestran las dos primeras ecuaciones, la componente tangencial de las velocidades antes y después del choque son iguales por lo que las correspondientes componentes tangenciales del momento lineal se anulan entre si. Estas tres ecuaciones constituyen un sistema con cuatro incógnitas, a saber, v_{1t}, v_{2t}, v_{1n} y v_{2n}, para encontrar su valor se requiere de una ecuación más. Esta se obtiene al clasificar los choques, como se hace a continuación.

a) Choque inelástico

En un choque inelástico en dos dimensiones la componente normal de las velocidades de ambos cuerpos después del choque es igual, por lo que la cuarta ecuación para este tipo de choque en dos dimensiones es

$$v_{1n} = v_{2n} \qquad 2.58$$

La solución para las componentes tangencial y normal de las velocidades después del choque $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, son :

$$v_{1t} = u_{1t} \qquad 2.55$$

$$v_{2t} = u_{2t} \qquad 2.56$$

$$v_{1n} = v_{2n} = \frac{m_1 u_{1n} + m_2 u_{2n}}{m_1 + m_2} \qquad 2.59$$

b) Choque elástico

Para este choque al igual que en una dimensión, se conserva la energía cinética del sistema y si se combina su ecuación con la conservación del momento lineal se obtiene de igual manera la conservación de la velocidad relativa, aunque en este caso para la componente normal de las velocidades antes y después del choque,

$$v_{2n} - v_{1n} = -(u_{2n} - u_{1n}) \qquad 2.60$$

Si se combina esta ecuación con la conservación de la componente normal del momento lineal, se obtienen las componentes normales de las velocidades antes y después del choque,

$$v_{1n} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_{1n} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_{2n} \qquad 2.61$$

$$v_{2n} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_{1n} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_{2n} \qquad 2.62$$

Si se toma en consideración el coeficiente de restitución definido anteriormente como

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = -e(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \qquad 2.51$$

y el hecho que la componente tangencial de las velocidades antes y después del choque son iguales esta última ecuación se transforma en

$$v_{2n} - v_{1n} = -e(u_{2n} - u_{1n}) \qquad 2.63$$

Con esta última ecuación conjuntamente con la conservación del momento lineal en su componente normal, ecuación 2.57, se obtiene la solución para la componente normal de las velocidades después del choque, la cual esta dada en función de e mediante las siguientes ecuaciones

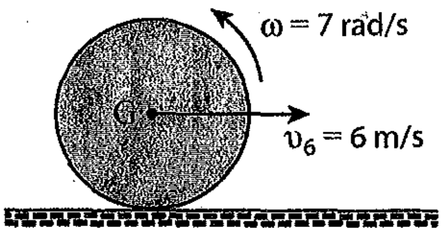
$$v_{1n} = \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} u_{1n} + \frac{(1+e)m_2}{m_1 + m_2} u_{2n} \qquad 2.64$$

$$v_{2n} = \frac{(1+e)m_1}{m_1 + m_2} u_{1n} + \frac{m_2 - em_1}{m_1 + m_2} u_{2n} \qquad 2.65$$

2.9 Problemas complementarios

1. En el instante que se muestra en la figura el cilindro de masa $M=10$ kg y radio $r=0.8$ m, el cilindro tiene la velocidad angular ω en sentido opuesto al movimiento de las manecillas de reloj y el centro del cilindro tiene la velocidad V.

Calcular la energía cinética traslacional y rotacional así como la energía cinética total.



Solución

Energía cinética traslacional K_T

$$K_T = \frac{1}{2} m v_G^2 = \frac{1}{2} (10 \text{ kg}) (6 \text{ m/s})^2 = 180 \text{ J}$$

Energía cinética rotacional K_R

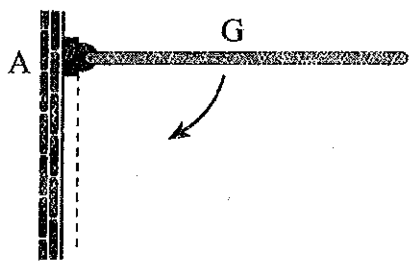
$$K_R = \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M r^2\right) \omega^2 = \frac{1}{4} [10 \text{ kg } (0.8 \text{ m})^2] (7 \text{ rad/s}) = 78.4 \text{ J}$$

Energía cinética total

$$K = K_T + K_R = 158.4 \text{ J}$$

¿está el cilindro rodando sin resbalar?

2. La barra delgada uniforme de masa m=20 kg y longitud l=1.2 m está sostenida por un perno. En la posición horizontal parte del reposo y cuando llega a la posición vertical tiene una velocidad angular ω. **Calcular la energía cinética de la barra en el momento en que está verticalmente abajo.**



Solución

Energía cinética de la barra en movimiento plano

$$K = K_T + K_R = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$$

pero $v_G = \omega \frac{l}{2}$

$$K = \frac{1}{2}m(\omega \frac{l}{2})^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{12}ml^2)\omega^2 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{24})ml^2\omega^2 = \frac{1}{6}ml^2\omega^2$$

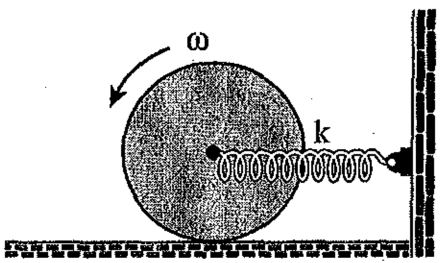
Energía cinética de la barra en rotación pura

$$K = \frac{1}{2}I_A\omega^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega^2 = \frac{1}{6}ml^2\omega^2$$

3. El disco de masa m=15 kg y radio r=1.2 m tiene una velocidad angular ω=15 *rad/s* y el resorte de constante k=20 N/m está sin deformar en el instante que muestra la figura. Calcular el alargamiento máximo del resorte. El disco rueda sin resbalar.

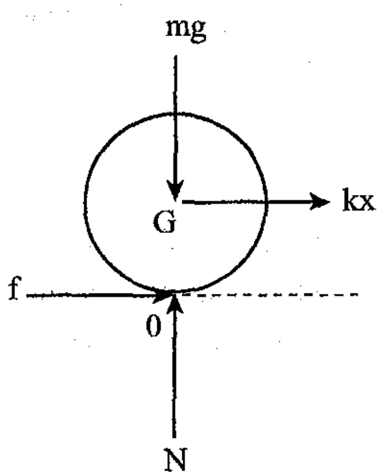
Solución

La única fuerza que realiza trabajo es la fuerza del resorte (el peso y la normal no realizan trabajo porque son perpendiculares al desplazamiento del disco y la fuerza de fricción estática f no realiza trabajo) y éste es negativo. En consecuencia utilizaremos el teorema del trabajo y la energía cinética.



Sistema: disco

D.C.L.



$$W = \Delta K$$

$$W = -\tfrac{1}{2}kx_{máx}^2$$

$$\Delta K = 0 - \tfrac{1}{2}I_0\,\omega^2$$

$$\therefore\ \tfrac{1}{2}kx_{máx}^2 = \tfrac{1}{2}I_0\,\omega^2$$

$$x_{máx} = \sqrt{\frac{I_0}{k}}\ \omega = \sqrt{\frac{3m}{2k}}\ \omega r$$

$$x_{máx} = 19.1\ m$$

Como en la configuración (disco y resorte) solamente el resorte realiza trabajo y la fuerza de éste es conservativa, podemos utilizar la conservación de la energía mecánica E porque esta configuración es conservativa.

$$E = cte$$

$$E_1 = E_2$$

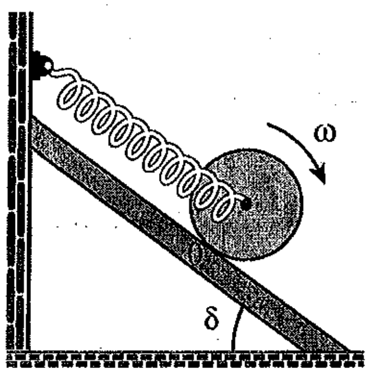
$$E_1 = \tfrac{1}{2}I_0\,\omega^2$$

$$E_2 = \tfrac{1}{2}kx_{máx}^2$$

$$\therefore\ x_{máx} = \sqrt{\frac{3m}{2k}}\ \omega r$$

$$x_{máx} = 19.1\ m$$

4. En la figura se muestra el momento en que el resorte (de constante k=100 N/m) está sin deformar y el disco de masa m=15 kg uniforme y radio r =1.2 m tiene una velocidad angular ω=5 rad/s en el sentido que se indica. Calcular la máxima distancia que baja el disco a lo largo del plano inclinado. El disco rueda sin resbalar y δ=30°.



Solución

El resorte hace trabajo, el disco cambia de altura en el plano inclinado, el peso realiza trabajo, como estas fuerzas son conservativas, se conserva la energía mecánica (la normal y la fuerza de fricción estática no realizan trabajo).

Configuración 1. Cuando el resorte está sin deformar y el disco tiene velocidad angular ω.

$$K_1 = \frac{1}{2} I_o \omega^2$$

$$(U_g)_1 = 0 \qquad (U_k)_1 = 0$$

$$E_1 = \frac{1}{2} I_o \omega^2 = \frac{3}{4} mr^2\omega^2$$

Configuración 2. Cuando el resorte está alargado y el disco en reposo momentáneamente.

$$K_2 = 0$$

$$(U_g)_2 = -mg\,l\,sen\,\delta \;,$$

l es la longitud del resorte que se enrolla en el disco y es la máxima distancia que recorre el disco en el plano inclinado

$$(U_k)_2 = \frac{1}{2} kl^2$$

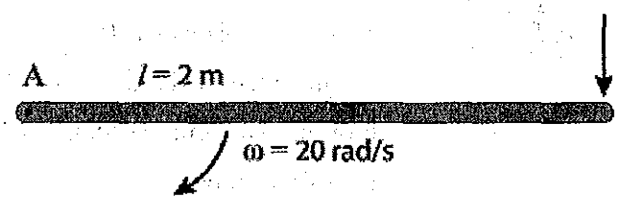
$$\therefore \quad E_2 = -mg\,l\,sen\,\delta + \frac{1}{2} kl^2$$

$$\therefore \quad -mg\,l\,sen\,\delta + \frac{1}{2} kl^2 = \frac{3}{4} mr^2\omega^2$$

o $\quad l^2 - 1.47\,l - 8.1 = 0$

$l = 3.64$ m

5. La varilla uniforme de 5 kg está sujeta a la fuerza F=20 N y articulada en A. Cuando la varilla está en la posición que se ilustra, tiene una velocidad angular ω=20 *rad/s*. Determine la velocidad angular en el instante que ha girado 270°. La fuerza F siempre es perpendicular a la varilla y el movimiento ocurre en el plano vertical. La longitud de la varilla es 2 m.



Solución

La únicas fuerzas que trabajarán son el peso de la varilla y F. La fuerza F y el peso de la varilla son conservativas, por lo tanto, se conserva la energía mecánica.

Configuración 1. Cuando la varilla está horizontal.

$E_1 = \frac{1}{2} I_A \omega_1^2$, donde $(U_g)_1 = 0$, $(U_f)_1 = 0$

Configuración 2. Cuando la varilla está vertical.

$E_2 = \frac{1}{2} I_A \omega_2^2 + mg\frac{l}{2} - F\left(\frac{3}{2}\pi l\right)$

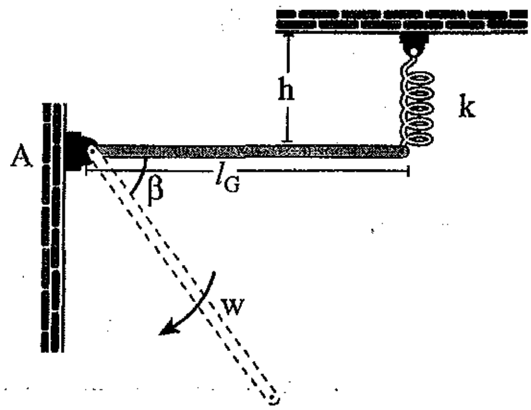
$E_1 = E_2$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \frac{(3F\pi - mg)l}{I_A}}$$

$I_A = \frac{1}{3} m l^2$

$\omega_2 =$ 21.02 rad/s

6. La barra homogénea de masa M y longitud l se deja oscilar alrededor de la articulación A. El resorte que está sujeto al otro extremo de la barra es de constante R, inicialmente su deformación es nula. Calcular la velocidad angular de la barra después de haber rotado un ángulo β. La barra inicialmente está en reposo en la posición horizontal.



Solución

En esta configuración las únicas fuerzas que realizan trabajo son: el peso de la barra (porque baja el centro de gravedad G de la barra) y la fuerza del resorte (porque el resorte se estira). Por lo que se conserva la energía mecánica.

K = 200 N/m
M = 80 kg
l = 0.9 m
h = 1.0 m
β = 30°

Configuración 1. Cuando la barra está horizontal

Como la barra está en reposo, su energía cinética $K_1 = 0$ en esta posición tomó como energía potencial gravitatoria

$$(Ug)_1 = 0$$

Como el resorte no está deformado, no hay energía potencial elástica

$$(U_k)_1 = 0$$

$$\therefore \quad E_1 = 0$$

Configuración 2. El instante en que la barra ha rotado 30°

$$E_2 = \tfrac{1}{2} I_A \omega^2 - Mg \tfrac{l}{2} sen\,\beta + \tfrac{1}{2} k \left[\sqrt{(h + l sen\,\beta)^2 + (l - l cos\,\beta)^2} - h\right]^2$$

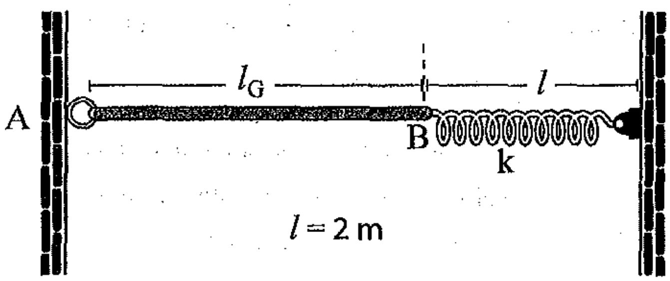
como $E_1 = E_2$

de esta última igualdad se tiene:

$$\omega = \frac{Mg\, l\, sen\,\beta - k\left[\sqrt{(h + l sen\,\beta)^2 + (l - l cos\,\beta)^2} - h\right]^2}{I_A}$$

ω = 14.3 *rad/s*

7. Cuando la barra AB de 15 kg está horizontal, se encuentra en reposo y el resorte no está estirado. Determine la constante k del resorte de modo que el movimiento de la barra se detenga momentáneamente cuando ha girado hacia abajo 90°.



Solución

En esta configuración el peso de la barra y el resorte realizan trabajo, dado que estás fuerzas son conservativas, se conserva la energía mecánica.

Configuración 1. Barra y resorte están horizontales.

$$K_1 = 0$$

$$(Ug)_1 = 0 \qquad (Uk)_1 = 0$$

$$E_1 = 0$$

Configuración 2. Barra vertical.

$$K_2 = 0$$

$$(Ug)_2 = -mg\frac{l}{2}$$

$$(Uk)_2 = \frac{1}{2}k\left[\sqrt{l^2 + (2l)^2} - l\right]^2$$

$$\therefore$$

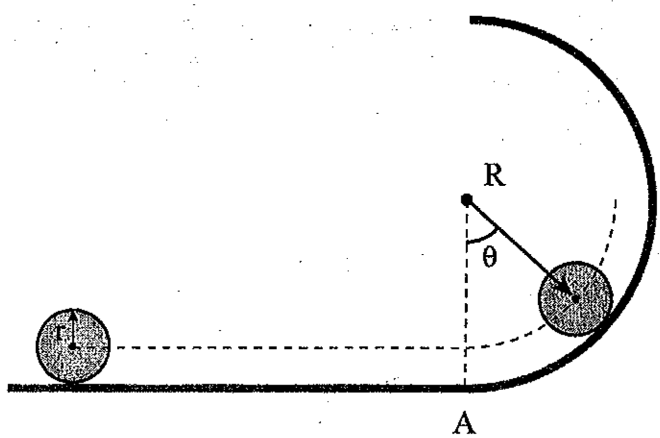
$$E_2 = -mg\frac{l}{2} + \frac{1}{2}k\left[\sqrt{l^2 + (2l)^2} - l\right]^2$$

como $E_1 = E_2$ en esta igualdad tenemos:

$$k = \frac{mg}{(\sqrt{5} - 1)^2 l^2}$$

$$k = 29.7 \text{ N/m}$$

8. El cilindro tiene una masa uniforme de 10 kg y un radio r = 100 mm; rueda sin resbalar sobre la superficie. En la parte horizontal (punto A) el centro del cilindro lleva una velocidad de 5 m/s. Determine la velocidad angular y la fuerza normal que ejerce sobre la pista cuando alcanza la posición θ=90°; tome R=500 mm.



Solución

Aquí solamente realiza trabajo el peso del cilindro, como éste es conservativo, la energía mecánica es constante.

Configuración 1. El cilindro está en A.

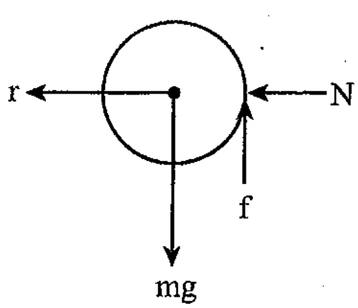
$K_1 = \frac{1}{2} I_A \omega_1^2$

$(Ug)_1 = 0$

$\therefore E_1 = \frac{1}{2} I_A \omega^2$ donde $I_A = \frac{3}{2} mr^2$

Sistema: cilindro

D.C.L.



Configuración 2. El cilindro está en la posición en que 0=90°

$K_2 = \frac{1}{2} I_A \omega_2^2$

$(Ug)_2 = mgR$

$\therefore \quad E_1 = E_2$

$\frac{1}{2} I_A \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_A \omega_2^2 + mgR$

Condición de resbalamiento $\omega_1 = V_1 r$

$\therefore \quad \omega_2 = \sqrt{(\frac{V_1}{r})^2 - \frac{4}{3} g \frac{R}{r^2}}$

$\omega_2 = 42.97$ rad/s

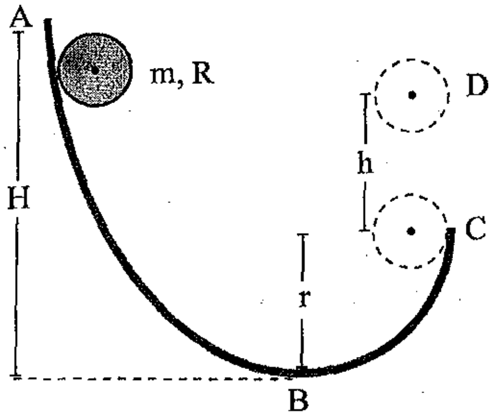
$\Sigma F_r = N = m\omega_3^2 R$

Donde: $\omega_3 = \omega_2 \frac{r}{R}$

$N = 369.3$ N

Nota: ω_3 es la velocidad angular con que gira la línea recta que une el centro de la superficie circular con el centro del cilindro.

9. La bola uniforme de masa m= 0.4 kg y radio R= 0.1 m, es soltada del reposo en A y rueda sin resbalar sobre la pista mostrada. La parte BC de la pista es circular.



H = 5 m

r = 1 m

Calcular:

(a) La velocidad angular de la bola en el punto C.

(b) La máxima altura que alcanza en D, (calcular h)

Solución

La única fuerza que realiza trabajo es el peso de la bola y éste es conservativo, por lo tanto se conserva la energía mecánica (normal y fuerza de fricción estática no efectúan trabajo).

Configuración 1. La bola está en el punto A

$K_A = 0$ porque está la bola en reposo

$(Ug)_A = mgH$ Se considera que el nivel cero de la energía potencial gravitatoria está en B

$\therefore \quad E_A = mgH$

Configuración 2. La bola se encuentra en C.

$K_c = \frac{1}{2} I_c \omega_c^2$ donde $I_c = \frac{7}{5} mR^2$

$(Ug)_c = mgr$

$\therefore \quad E_A = \frac{1}{2} I_c \omega_c^2 + mgr$

como $E_A = E_c$ de esta igualdad se obtiene:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{10}{7} \frac{g\,(H - r)}{R^2}}, \quad \omega_c = 74.83 \text{ rad/s}$$

Configuración 3. La bola se encuentra en D girando con velocidad angular ω_c (dado que de C a D se conserva el momento angular) y la velocidad del centro de la bola es cero.

$K_D = \frac{1}{2} I_G \omega_c^2$ aquí $I_G = \frac{2}{5} mr^2$

$(Ug)_D = mg(r + h)$

$\therefore \quad E_D = \frac{1}{2} I_G \omega_c^2 + mg(r + h)$

Por lo que $E_c = E_D$

$\frac{1}{2} I_c \omega_c^2 + mgr = \frac{1}{2} I_G \omega_c^2 + mg(r + h)$

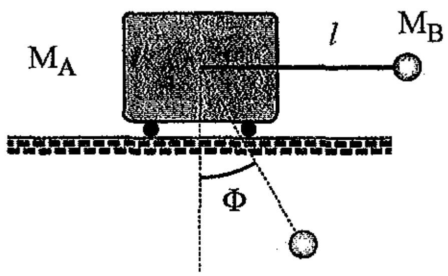
de esta última ecuación despejamos h

$h = \frac{r\omega_c}{\sqrt{2g}}$

$h = 1.7 \text{ m}$

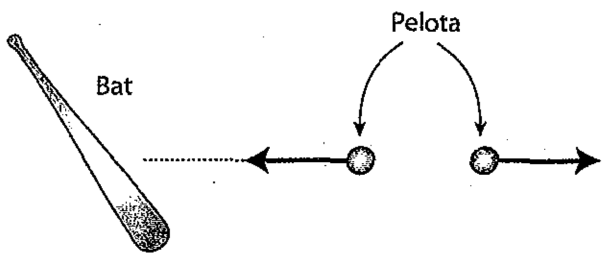
2.10 Problemas propuestos

1. Un carrito de masa M_A tiene una pelotita de masa M_B suspendida horizontalmente como se muestra. Si se suelta la pelotita desde el reposo, calcular la velocidad del carrito cuando la pelotita hace un ángulo Φ con la vertical, suponiendo que no hay fricción.



$$V = \sqrt{\frac{2M_B\, g\, l\cos\theta}{(M_A+M_B)\left[\left(\frac{M_A}{M_B}\right)^2 + \left(\frac{M_A}{M_B}+1\right)^2 \tan^2\Phi\right]}}$$

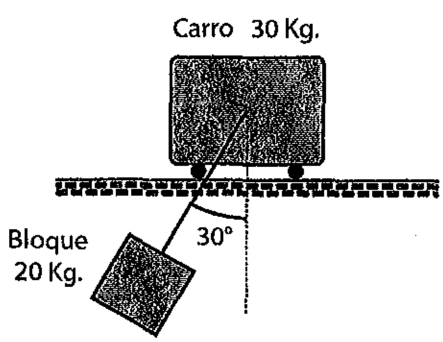
2. La pelota de masa 200 g se mueve horizontalmente hacia la izquierda con una rapidez de 50 m/s cuando es golpeada por el bat, saliendo disparada horizontalmente hacia la derecha con una rapidez de 50 m/s. ¿Cuál es el impulso proporcionado por el bat?



$F\Delta t = 20$ NS

en dirección del movimiento de la pelota.

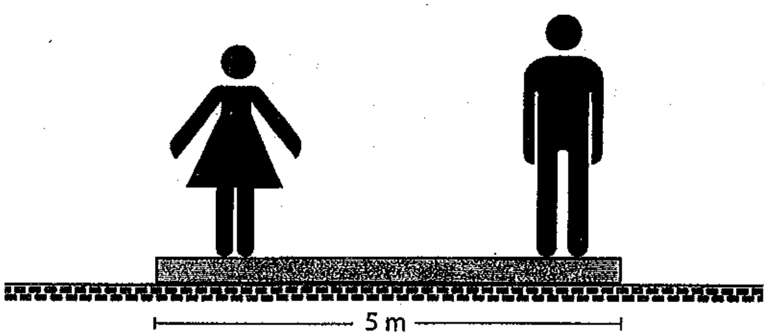
3. El bloque de masa 20 kg está suspendido de un cordón de 2 m de longitud fijo a un carro de 30 kg. El carro puede rodar libremente en una vía horizontal sin rozamiento. El sistema se suelta desde el reposo en la posición indicada en el diagrama. Calcular las velocidades del bloque y del carro cuando el bloque está en la posición donde el cordón se encuentra verticalmente por debajo del carro.



Carro: 1.18 m/s

Bloque: 1.77 m/s

4. Un muchacho A con una masa de 80 kg y una chica B con una masa de 60 kg permanecen de pie sin moverse en los extremos de un tablón cuya masa es de 20 kg. Si intercambian posiciones (A pasa a la posición B y B pasa a la posición A), determine la posición final del tablón después del mencionado intercambio. Desprecie la fricción.

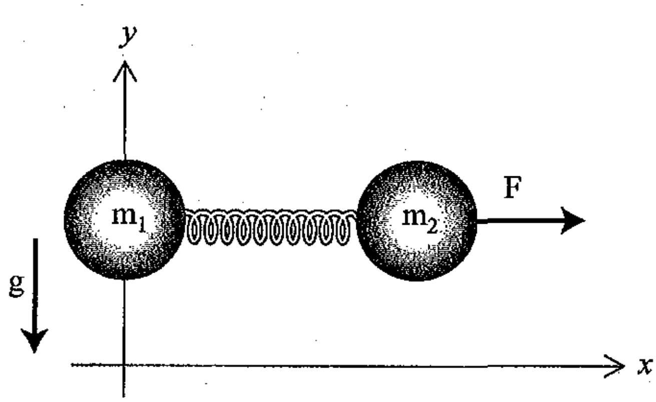


$x = 0.625$ m

5. Para el sistema {m_1, m_2, Resorte), calcular los vectores velocidad y aceleración del centro de masa para cualquier instante. Inicialmente el sistema está en reposo como se muestra en la figura, y a partir de esta configuración se aplica la fuerza horizontal constante F.

El sistema se mueve en un plano vertical bajo la acción de la gravedad terrestre.

Datos: $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 3$ kg, $F = 40$ N

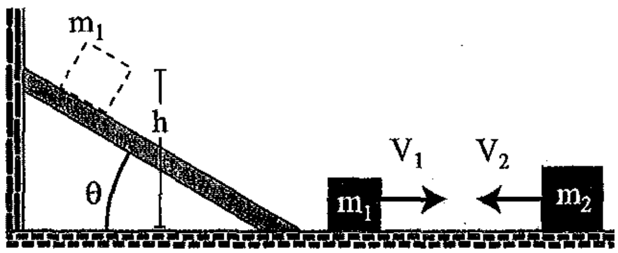


$$\vec{V}_{cm} = (8\,\frac{m}{s^2}t,\ -9.8\,\frac{m}{s^2}\,t),\quad \vec{a}_{cm} = (8,\ -9.8)\frac{m}{s^2}$$

6. Un bloque de masa m_1 desciende desde el reposo y una altura h, a lo largo de una rampa inclinada a un ángulo θ con respecto a la horizontal. Poco después de llegar al pie de la rampa se encuentra con otro bloque, de masa m_2, que viaja a velocidad V_2 como se muestra. En el choque los dos bloques quedan pegados.

Calcular su velocidad común después del choque. Suponer lisas todas las superficies de movimiento.

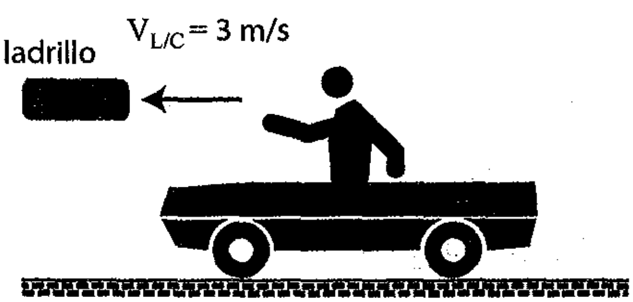
Datos:
$m_1 = 2$ kg, $m_2 = 4$ kg, $\theta = 45°, h = 2.5$ m, $V_2 = 3.6$ m/s



V= - 0.0666 m/s

7. Un joven que pesa 60 kg está sentado en un carro de 40 kg y quiere simular una propulsión de reacción lanzando ladrillos desde el carro. Ignore las fuerzas horizontales sobre las ruedas. El joven lanza un ladrillo de 4 kg. Cuando el ladrillo abandona (horizontalmente) la mano lanzadora del joven, su velocidad con respecto al carro es de 3 m/s.

Determinar la velocidad que alcanza el carro con respecto a Tierra después del lanzamiento.



V= - 0.115 m/s

8. Dos partículas de masas m_1 y m_2 se mueven bajo la acción única de sus pesos en un plano vertical. Al tiempo $t = 0$ s tienen las posiciones y velocidades indicadas en la figura.

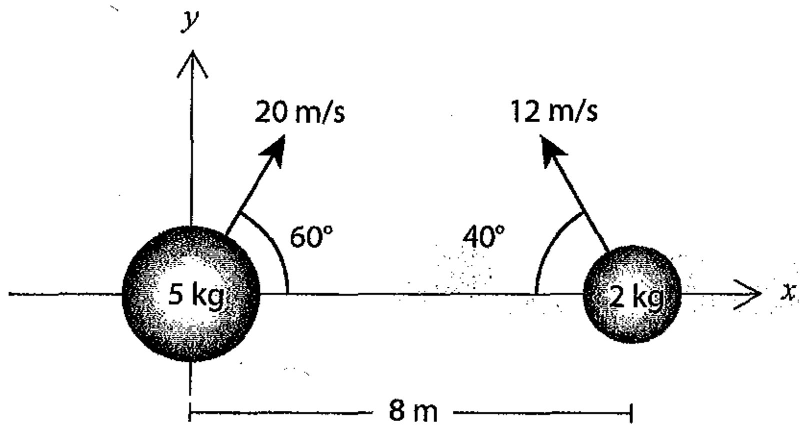
Calcular para el tiempo $t = 2$ s:

a) La fuerza total externa y la aceleración del centro de masa.

b) La velocidad y la posición del centro de masa.

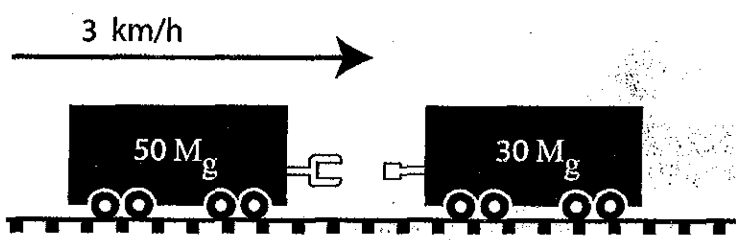
c) ¿Qué trayectoria sigue cada una de las partículas?

d) ¿Qué trayectoria sigue el centro de masa?



$\vec{F} = -\hat{j}\,24.5$ N, $\vec{a}_{cm} = -\hat{j}\,9.8\ \frac{m}{s^2}$

9. Un vagón de ferrocarril de 50 Mg, que se mueve a una velocidad de 3 km/h, debe acoplarse a otro vagón de 30 Mg que está en reposo. Obténgase la fuerza impulsiva promedio que actúa sobre cada vagón si el acoplamiento se efectúa en 0.4 s.



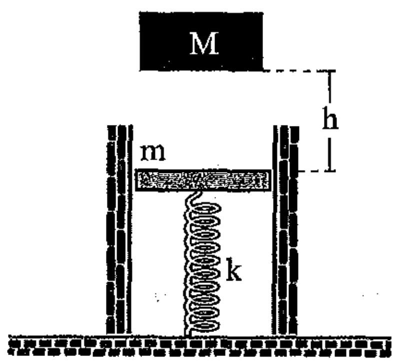
F= 3.47×10^4 N en la dirección del movimiento de los vagones

10. Un resorte lineal de constante elástica k está confinado entre paredes lisas. Inicialmente el resorte y la tabla que sostiene, de masa m, están en equilibrio. Se deja caer un bloque de masa M desde un punto a una altura h sobre la tabla. En el choque el bloque y la tabla quedan unidos. Calcular la máxima compresión del resorte.

Nota. Despreciar la masa del resorte y el impulso comunicado al bloque y la tabla por la gravedad durante el choque.

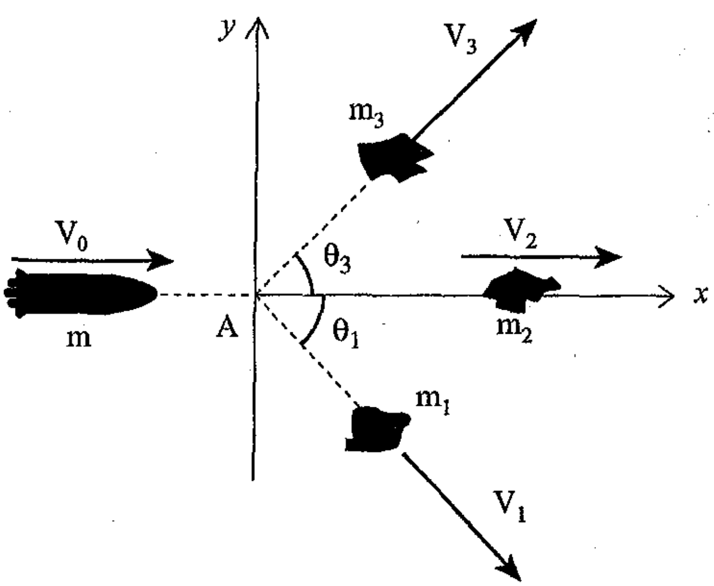
Datos:

$k = 3000$N/m, $m = 2$kg, $M = 5$kg, $h = 0.5$m.



$Y_{máx} = 0.1256$ m

11. Un cohete (rastreado con radar) se mueve a una velocidad $V_0 = 8000$ km/h. En el punto A se rompe en tres partes. Los fragmentos se mueven en el plano XY con $V_1 = 9000$ km/h, $\theta_1 = 45°$, $V_2 = 10{,}000$ km/h, $\theta_2 = 0°$, $V_3 = 11{,}000$ km/h y $\theta_3 = 45°$. Se recupera m_1 y se conoce que es de 1600 kg. Calcular m_2, m_3 y 1a masa total m del cohete.

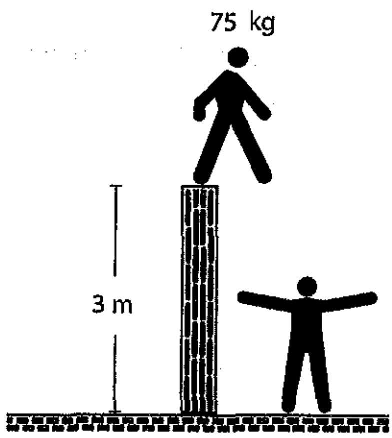


$m_2 = 1454$ kg

$m_3 = 1309.1$ kg

$m = 4363.1$ kg

12. Después de escalar una pared, un hombre se deja caer 3 m hasta el suelo. Si su cuerpo se detiene por completo 0.10 s después de que sus pies tocan por primera vez el suelo, determínese la componente vertical de la fuerza impulsiva promedio que el suelo aplica a sus pies.



$F = 5016.087$ N verticalmente hacia arriba.

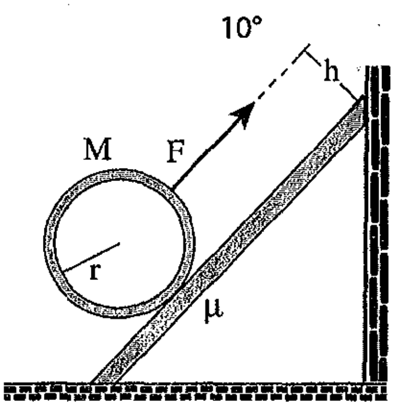
13. Una bala penetra un bloque de madera y queda incrustada en él. El bloque, originalmente en reposo, descansa sobre una superficie lisa y está unido a un resorte elástico sin masa y no deformado. Obtener la distancia que recorre el bloque antes de detenerse.

Datos:

$m = 40$ g, $M = 6$ kg; $v = 800$ m/s; $k = 3000$ N/m

$\delta = 0.24$ m

14. ¿A qué altura h sobre el plano inclinado debe aplicarse la fuerza constante F para que el aro delgado no rote mientras asciende? La masa del aro es M, su radio es r y hay fricción de coeficiente μ con el plano. Datos: $F = 40$ N, $M = 12$ kg, $c = 0.5$ m, $\mu = 0.2$

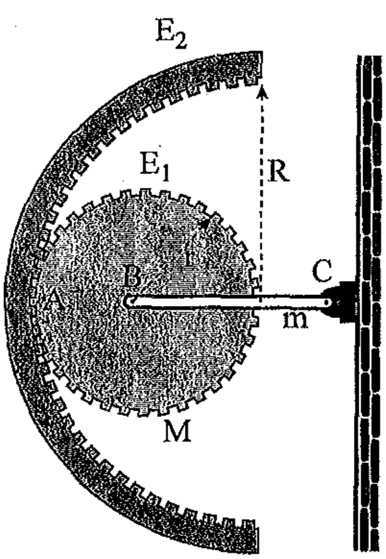


$h = 0.7$ m

15. E_2 es un engrane **fijo** con centro en C. E_1 es un engrane acoplado a E_2 y articulado en su centro B a una barra, a su vez articulada en el punto fijo C. El sistema parte del reposo cuando la barra está en posición horizontal. Calcular la velocidad de B cuando la barra ha girado un ángulo β bajo la acción de la gravedad. Considere el engrane como si fuese un disco para efectos de calcular su momento de inercia.

Datos: $R = 1.4$ m, $r = 0.6$ m, $M = 6$ kg, $m = 3$ kg, $\beta = 37°$

Sugerencia. Encuentre la relación entre las velocidades angulares del engrane E_1 y la barra BC considerando el movimiento del centro B por una parte alrededor de C, y por la otra como punto del engrane que "rueda sin resbalar" sobre el engrane fijo E_2.



$V = 2.68$ m/s

UNIDAD 3

Oscilaciones

Objetivo General

Identificar y aplicar los conceptos de dinámica del cuerpo rígido y métodos energéticos en la solución de problemas de oscilaciones.

Objetivos Específicos

a) Describir el movimiento armónico e identificar los parámetros que lo caracterizan.

b) Aplicar los conceptos de movimiento armónico a los casos de péndulo simple y péndulo físico.

c) Describir el efecto de amortiguamiento en un sistema oscilante y determinarlo en el caso de sistemas simples.

d) Identificar las circunstancias en las que un sistema oscila en forma forzada y las condiciones en las cuales entra en resonancia.

Introducción

Los fenómenos naturales que tienen que ver con las oscilaciones o vibraciones, son tan comunes en nuestra vida diaria como el latir de nuestros corazones, o como el día y la noche, o cuando vemos las cuerdas de una guitarra tocar. La tierra también lleva a cabo un movimiento periódico como si fuera una campana, o las vibraciones de las moléculas, todos estos fenómenos tienen que ver con los llamados movimientos periódicos, etcétera.

¿Cuándo es que una partícula lleva a cabo un movimiento periódico?

Cuando ésta es capaz de recuperar su estado en intervalos de tiempo fijos, es decir, cuando la partícula tiene la misma posición y velocidad al cabo de tiempos fijos.

El período es entonces el intervalo de tiempo T donde la partícula recupera su estado inicial.

3.1 Teoría del oscilador armónico simple

Hablemos primero de la Ley de Hooke, si de un resorte colgamos un ladrillo sabemos que el resorte está soportando una carga y decimos que está sometido a una fuerza o tensión. El efecto de esta fuerza es alargar el resorte. En caso de que esta fuerza sea pequeña, el alargamiento del resorte puede ser tan pequeño que no lo percibamos. Se ha encontrado experimentalmente que el factor que determina el alargamiento no es tanto la fuerza aplicada sino la fuerza por unidad de área, donde el área es de una sección transversal del resorte. Para fines prácticos nosotros diremos que nuestros resortes son "hookianos", es decir, ejercen fuerzas proporcionales a sus alargamientos, más allá del largo inicial del resorte.

Pensemos en una partícula de masa m unida a un resorte, puesta en un riel de aire (esto es con objeto de eliminar la fricción entre la masa y la superficie donde está colocada), que se mueve de un lado a otro, es decir que recupera su posición y velocidad inicial (es periódico).

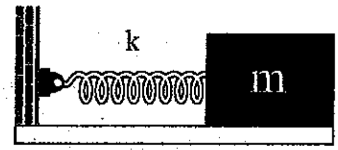


Fig.1

De acuerdo con la Segunda Ley de Newton

$$F(x) = ma(x)$$

Pero como tenemos un resorte atado de la masa, sabemos que este resorte obedece a la ecuación

$$F(x) = -kx$$

de ahí que igualando tenemos

$$ma(x) = -kx \qquad 3.1$$

realizando un poco de algebra y reescribiendo la aceleración como $\ddot{x}$, obtenemos

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}(x) = 0 \qquad 3.2$$

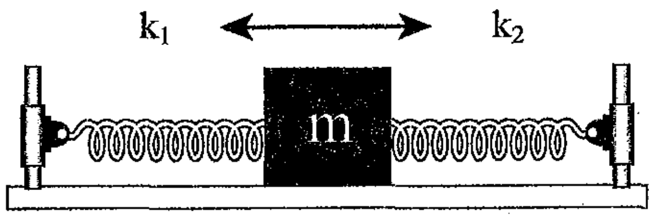
llamemos ω^2 al cociente $\frac{k}{m}$, escribiendo

$$\ddot{x} + \omega^2(x) = 0 \qquad 3.3$$

Si un objeto se mueve satisfaciendo una ecuación de este tipo, se dice que está ejecutando un movimiento armónico simple. El origen de este nombre tiene que ver con las oscilaciones de las cuerdas de los instrumentos musicales. Si a estas se las pulsa haciéndolas oscilar con pequeñas amplitudes, entonces sus movimientos son, con gran aproximación, movimientos armónicos simples.

3.2 Oscilador especial

Comenzamos experimentando con un oscilador especial. Se trata de un riel de "aire" en el cual se mueve un carril. El carril está ligado a dos resortes, los que a su vez están sujetos a dos postes fijos. En su posición de reposo, ambos resortes están tensos.



El carril oscila atado a resortes que jalan en sentidos opuestos

Fig.2

Con este montaje es fácil hacer algunos experimentos. Como el deslizador se puede mover solamente a lo largo de una línea recta, instalamos en esta recta a un eje de coordenadas al que vamos a llamar X. El origen lo instalamos en el punto de equilibrio del deslizador.

a) Sacamos al carril de su posición de equilibrio, llevándolo hasta una distancia x_0 y desde allí lo soltamos. Se observa que el período de oscilación es independiente de la posición inicial x_0.

b) Si al deslizador le ponemos carga extra, por ejemplo agregándole un poco de plastilina, se observa que su período de oscilación aumenta.

c) Podemos aumentar o disminuir la separación de los postes fijos a los que están atados los resortes y se encuentra que esto no hace cambiar el período de oscilación.

d) Inclinamos el riel de aire. Naturalmente cambia el punto de equilibrio del deslizador, pero de nuevo se encuentra que esto no cambia el período que tenía cuando oscilaba horizontalmente.

Explicar estos cuatro comportamientos del deslizador serán las tareas para nuestra teoría.

La hipótesis más simple que podemos hacer respecto a los resortes, es que son hookianos, es decir, ejercen fuerzas proporcionales a sus alargamientos más allá del largo inicial del resorte.

Llamemos $\mathbf{F}_{10}$ a la fuerza que el resorte de la izquierda aplica al deslizador cuando $x = 0$ y $\mathbf{F}_{20}$ a la correspondiente fuerza ejercida por el otro resorte. Entonces $\mathbf{F}_{10} + \mathbf{F}_{20} = 0$.

Si llamamos x a la posición del deslizador, las fuerzas que los resortes le aplican al deslizador cuando está en la posición x, se pueden escribir

$$\mathbf{F}_1(x) = \mathbf{F}_{10} - k_1 x\hat{\imath}$$

$$\mathbf{F}_2(x) = \mathbf{F}_{20} - k_2 x\hat{\imath}$$

así que la fuerza neta resulta ser

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}_1(x) + \mathbf{F}_2(x) = -(k_1 + k_2)\, x\hat{\imath} \qquad 3.4$$

En resumen, si la suma de las constantes elásticas las llamamos simplemente k, se ve que la fuerza neta sobre el deslizador es

$$\mathbf{F}(x) = -k\,\mathbf{x} \qquad 3.5$$

Esta es una fuerza lineal –depende solamente de la primera potencia de la coordenada x– y es una fuerza de restitución ya que siempre jala hacia el origen: si el deslizador está a la izquierda del origen la fuerza es hacia la derecha y si el deslizador está a la derecha, la fuerza es hacia la izquierda.

Aprovechando ahora que $\mathbf{F}(x) = m\,\mathbf{a}$, podemos escribir la ecuación

$$m\ddot{x} = -k\,\mathbf{x}$$

o lo que es lo mismo, llamando ω^2 al cociente $\frac{k}{m}$,

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 \mathbf{x} = 0} \qquad 3.6$$

La ecuación diferencial 3.6 es muy conocida, más adelante la resolveremos.

La solución particular depende de cómo hacemos que parta el oscilador, esto es, si $[x(0) = x_0(x),\ \dot{x}(0) = 0]$ su solución será:

$$x(t) = X_0 \cos \omega t \qquad 3.7$$

El factor que multiplica t en el argumento del coseno debe ser igual a $\frac{2\pi}{T}$, en que T es el período, así que éste es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad 3.8$$

La ecuación 8 muestra que el período solamente depende de las constantes elásticas de los resortes y de la masa del deslizador, y no depende en absoluto de la amplitud x_0, así que de una sola vez la ecuación da cuenta de las observaciones iniciales a) y b).

En cuanto a la observación c), es natural que así sea, ya que al separar o acercar los postes a que están atados los resortes, no cambian las constantes de estos.

Finalmente, respecto a la observación d), notemos que inclinar el riel equivale a aplicarle al deslizador una fuerza constante F_0, así que ahora la fuerza disponible para acelerar el deslizador es $-k\,\hat{\imath} + F_0\hat{\imath}$ y su ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \qquad 3.9$$

o escrita de otro modo, la ecuación que debemos resolver es

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \qquad 3.10$$

Basta un pequeño cambio de variable para ver que esta ecuación es formalmente idéntica a la del oscilador armónico. En efecto la ec. 3.10 se puede escribir

$$\ddot{x} + \omega^2 \left[x - \frac{F_0}{m\omega^2} \right] = 0 \qquad 3.11$$

y si hacemos la substitución $x - \frac{F_0}{m\omega^2} \equiv x$, se encuentra que se cumple

$$\ddot{x} + \omega^2 s = 0 \qquad 3.12$$

La solución de esto es naturalmente $s = x_0 \, cos \, \omega t$ así que

$$x\,(t) = \frac{F_0}{m\omega^2} + s_0 \,(cos \, \omega t + \delta) \qquad 3.13$$

Sintetizando: una vez que inclinamos el riel de aire, el movimiento de éste sigue siendo armónico simple, claro que esta vez no está centrado en $x = 0$, sino que la oscilación ocurre, tal como se vio experimentalmente en otro punto, que es $X_1 = \frac{F_0}{m\omega^2}$

3.3 Consideraciones energéticas en el movimiento oscilatorio

La fuerza responsable del movimiento oscilatorio es

$$F = K\chi$$

se deduce que es un tipo de movimiento en el cual la fuerza se deriva de un potencial.

Realmente, si escribimos

$$F = \frac{-dU}{dx} \quad \text{esto es,} \quad U = -\int F dx$$

resulta que

$$U = \tfrac{1}{2} Kx^2 = \tfrac{1}{2} KA^2 \cos^2(\omega_0 t + \delta)$$

Esta es la energía potencial del movimiento

Por otro lado, la energía cinética es

$$E = \tfrac{1}{2} mv^2$$

$$v = -\tfrac{1}{2} A\omega_0 \, sen\, (\omega_0 t + \delta)$$

pero

$$E = \tfrac{1}{2} KA^2 sen^2(\omega_0 t + \delta) \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Entonces, la energía total

$$K = E + U = \tfrac{1}{2} KA^2 \cos^2(\omega_0 t + \delta) + \tfrac{1}{2} KA^2 sen^2(\omega_0 t + \delta)$$

$$K = \frac{1}{2}KA^2$$

La energía total es proporcional al cuadrado de la amplitud. La energía total es constante; el modo con que esta energía se distribuye en forma de energía potencial y cinética varía, sin embargo, con el tiempo, como se indica en la figura siguiente.

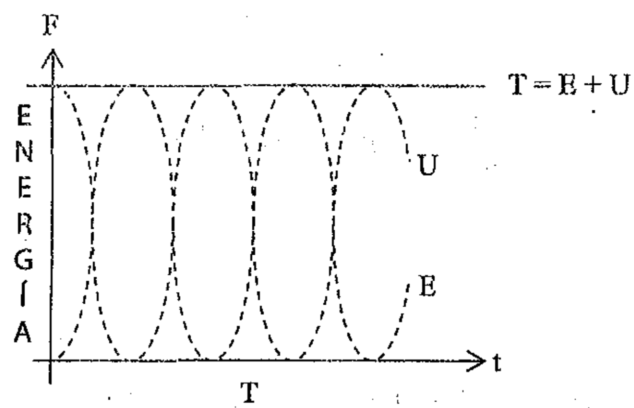


Fig.3

3.4 Una masa que cuelga

Un ejemplo muy popular de oscilador armónico, es el de un objeto cualquiera que cuelga de un resorte. En este caso sobre el cuerpo actúa una fuerza constante hacia abajo, su peso, y una fuerza variable siempre hacia arriba, la fuerza aplicada por el resorte.

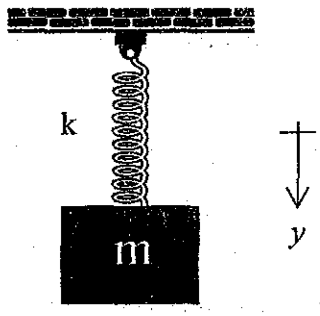


Fig. 5

Como se muestra en la figura, elegimos un eje de coordenadas vertical, dirigido hacia abajo, con su origen en la parte superior del resorte. El largo del resorte cuando no está siendo estirado por fuerza, es L. Entonces las fuerzas que actúan sobre la masa, debidas al resorte y a la Tierra, son

$$\mathbf{F}_{\text{resorte}} = -k(y - L)\,\hat{\jmath} \qquad\qquad \mathbf{F}_{\text{tierra}} = +mg\,\hat{\jmath}$$

La fuerza total sobre la masa es entonces

$$\mathbf{F}_{\text{total}} = (mg - k\,(y - L))\,\hat{\jmath} \qquad 3.14$$

Esta fuerza es la que se representa en la parte derecha de la figura 3. Esta fuerza se anula en el punto y_0 tal que

$$mg - k\,(y_0 - L) = 0 \qquad 3.15$$

Colocado en este punto la masa, se dice que el ladrillo está en equilibrio ya que las fuerzas sobre él se cancelan. Basta mirar a la figura 5 para darse cuenta que la ecuación (3.11) se simplificaría bastante si cambiamos el origen y lo ponemos en el punto de equilibrio, puesto que si desde allí medimos las coordenadas y, la fuerza neta sobre el ladrillo es $\mathbf{F} = -\,ky\hat{\jmath}$. Entonces, si escribimos la ecuación de aceleración de la masa, ésta resulta ser

$$M\ddot{y} + ky = 0 \qquad 3.16$$

Como se ve, conviene elegir el origen de coordenadas en el punto de equilibrio del objeto, el punto en que el jalón del resorte es del mismo tamaño que el jalón gravitatorio.

A la ecuación 3.3 también podemos llegar viendo desde el lado de la conservación de la energía. La energía cinética de la masa es $\frac{1}{2}Mv^2$, mientras que su energía potencial es $\frac{1}{2}ky^2$. Si alguien cree que hace falta agregar la energía potencial gravitatoria, recordamos que hemos instalado nuestro origen de coordenadas en el punto de equilibrio y que por tanto ya no hace falta. La energía total es entonces

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}ky^2 \qquad 3.17$$

y derivando respecto al tiempo e igualando la derivada a cero se llega a la ecuación 3).

3.5 Efecto de la masa del resorte

Podríamos pensar que esto confirma que la ecuación 3.3 es correcta, pero justamente el argumento energético muestra que la ecuación 3.3 no puede estar bien, ya que no hemos tomado en cuenta toda la energía cinética que hay. En efecto solamente consideramos la energía cinética del ladrillo, pero no tomamos en cuenta la energía cinética del resorte.

Todos los puntos de la masa se mueven con la misma velocidad, así que es fácil calcular su energía cinética. No es este el caso del resorte, ya que su extremo superior siempre tiene velocidad cero, su extremo inferior tiene siempre una velocidad igual a la del ladrillo, mientras sus puntos intermedios ... tienen velocidades intermedias que no conocemos. Veamos cómo estimar la energía cinética del resorte. Debe ser igual a la suma de las energías cinéticas de cada uno de los trocitos en que podemos imaginar que está dividido. Si a la masa por unidad de largo del resorte la llamamos λ, entonces la masa de un elemento de resorte de largo dy es $dm = \lambda dy = (M/L)dy$. La masa por unidad de largo del resorte no es constante mientras el ladrillo oscila, pero si las oscilaciones son de pequeña amplitud, entonces λ es muy aproximadamente constante.

Entonces la energía cinética del resorte la podemos escribir así

$$K_{resorte} = \int_0^L \tfrac{1}{2}\, dm\, y^2 = \frac{\lambda}{2} \int_{aire}^{L} y^2 dy$$

en que $\dot{y}$ es la velocidad del elemento de masa dm que está ubicado en el punto de coordenadas y. Para poder calcular esta integral necesitamos poder expresar a la velocidad de dm como una función de su posición, y si llamamos v a la velocidad del ladrillo, la hipótesis más sencilla que podemos hacer es que la velocidad de los distintos puntos del resorte es

$$\dot{y} = \frac{v}{L} y$$

En efecto, esta función correctamente nos dice que el extremo superior del resorte no se mueve, que el extremo inferior se mueve con velocidad v, igual que el resorte y que los puntos intermedios se mueven con velocidades que crecen linealmente desde el extremo quieto hasta el extremo móvil.

La energía cinética del resorte es entonces

$$K = \frac{\lambda}{2}\int_0^L (v/L)^2 x^2\, dx = \frac{1}{2}\,\frac{m}{3}\,v^2$$

La energía total del sistema, incluida la energía cinética del resorte es entonces

$$\tfrac{1}{2}(M + \tfrac{1}{3}m)v^2 x^2 + \tfrac{1}{3}ky^2$$

de donde se desprende que la frecuencia no es k/m, como estábamos creyendo sino

$$\omega^2 = \frac{k}{M + m/3}$$

Casi siempre en los laboratorios $m \ll M$, así que no hace falta tomar en cuenta la corrección anterior.

3.6 Comentarios respecto al oscilador armónico

Ya que sabemos algunas cosas respecto a la ecuación $\ddot{x}+\omega^2 x=0$, podemos hacer algunos comentarios en torno a ella. El primero es que el oscilador armónico no existe. Esto significa lo siguiente: no existe ningún sistema físico en que la única fuerza presente sea una fuerza del tipo $-k\vec{\chi}$. No existen resortes hookianos, así que la ecuación es una realidad matemática y una aproximación de la realidad.

Si a nuestro deslizador lo ponemos a funcionar y lo dejamos tranquilo, observando lo que sucede, vemos que después de unos pocos minutos se detiene. Esto no corresponde el comportamiento de un oscilador armónico y se debe a que el deslizador no solamente interactúa con los resortes, sino también interactúa con el aire. El desperdicio principal proviene de la interacción del deslizador con el aire del "colchoncito entre él y el riel". Una ecuación de movimiento más correcta debe incluir esa interacción, pero está claro que la ecuación que obtendremos ya no será la ecuación 3.3 y por lo tanto el movimiento no será armónico simple.

¿Por qué estudiar un movimiento irrealizable en la práctica? Las razones son varias. Lo estudiamos por lo mismo que estudiamos la línea recta: la simplicidad matemática. Tampoco existen movimientos estrictamente a lo largo de una línea recta, aunque hay algunos que se aproximan mucho. De entre todas las ecuaciones diferenciales no triviales, la ecuación $\ddot{x}+\omega^2 x=0$ es la más sencilla de todas. Incluso según algunos matemáticos, es a partir de ella que uno puede definir las llamadas funciones circulares: el seno y el coseno. Estas son las más sencillas funciones periódicas y el mundo nos ofrece muchos ejemplos de fenómenos periódicos, así que es muy bueno disponer de este tipo de funciones.

Aunque en rigor no existen osciladores armónicos, al estudiar las soluciones de $\ddot{x}+\omega^2 x=0$, con toda naturalidad somos conducidos a definir algunos términos que luego usamos en muchas otras circunstancias: amplitud, período, fase.

La razón de más peso para estudiar el oscilador armónico es la siguiente:

Por complicada que sea una oscilación, se le puede expresar como suma de osciladores armónicos con diversas amplitudes y fases. Este es un teorema famoso debido a Fourier, un matemático muy importante.

Estamos en la época de las computadoras y del cálculo numérico y es tan fácil equivocarse al transformar un método de cálculo en un programa, que conviene tener siempre a la mano una ecuación diferencial con solución exacta conocida, como es el caso de $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Con la solución de esta ecuación, lo primero que hacemos cuando queremos aquilatar las bondades de un nuevo método de integración, es probarlo con algo conocido. En este caso sería la solución $x = A\,cos\,\omega t + B\,sen\,\omega t$.

3.7 Oscilador armónico amortiguado

Ecuación de movimiento

Considerando que en un O.A.S. actúa una fuerza amortiguadora dada por:

$$F = -b\dot{x} = -b\ddot{x} =, \quad \text{con} \quad b = \text{cte}$$

La ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} = -kx - b\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Solución de la ecuación

Para la solución de la ecuación se tienen tres casos:

i) Caso subamortiguado

Es el caso en el que: $\omega_0 > \gamma$,

donde $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, $\gamma = \dfrac{b}{2m}$ y la solución es:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \delta)$$

donde $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$, A_0 y δ son constantes que dependen de las codiciones iniciales de movimiento. En este caso el movimiento de m es oscilatorio, de periodo T dado por:

$$T = -b\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

La amplitud del movimiento decae exponencialmente de la forma:

$$A = A_0 e^{-\gamma t}$$

ii) Amortiguamiento crítico

Es el caso en que $\omega_0 = \gamma$ y la solución es:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(C_1 + C_2 t)$$

Donde C_1 y C_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales de movimiento.

En el caso en que las condiciones iniciales son:

$$x(t=0) = A_0: \quad \text{Posición inicial}$$

$$x(t=0) = 0: \quad \text{Velocidad inicial}$$

se tiene que:

$$C_1 = A_0 \quad \text{y} \quad C_2 = \gamma A_0$$

por lo que la solución para este caso se expresa finalmente como:

$$x(t) = A_0(1 + \gamma t)\, e^{-\gamma t}$$

En este caso el movimiento de m no es oscilatorio; simplemente tiende a quedarse en reposo.

iii) Caso sobreamortiguado

Es el caso en el que: $\omega_0 < \gamma$ y la solución es:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[C_1 \exp\left(-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2 t}\right) + C_2\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2 t}\right)\right]$$

Donde C_1 y C_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales de movimiento.

En el caso en que las condiciones iniciales son:

$$x(t = 0) = A_0: \quad \text{Posición inicial}$$

$$x(t = 0) = 0: \quad \text{Velocidad inicial}$$

se tiene que:

$$C_1 = \frac{A_0}{2}\left(1 - \sqrt{1 - Q^2}\right) \quad \text{y}$$

$$C_2 = \frac{A_0}{2}\left(1 + \sqrt{1 + Q^2}\right)$$

Donde: $Q = \dfrac{\omega_0}{\gamma}$ es el factor de calidad del oscilador.

Por lo tanto, la solución para este caso puede expresarse como:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} e^{-\gamma t}\left\{\left(1 + \sqrt{1 - Q^2}\right) \exp\left[\omega_0 \frac{1}{Q^2} - 1t\right] + \left(1 - \sqrt{1 - Q^2}\right) \exp\left[-\omega_0 \frac{1}{Q^2} - 1t\right]\right\}$$

En este caso el movimiento de m tampoco es oscilatorio; se va acelerando a la posición de equilibrio más lentamente que en el caso de amortiguamiento crítico.

3.8 Oscilador armónico forzado

Si sobre un oscilador armónico amortiguado actúa una fuerza periódica del tipo

$$F = F_0 \cos\omega_f t$$

con $F_0 = cte$ entonces la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos\omega_f t$$

la cual reescribimos como sigue:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos\omega t$$

cuya solución general es:

$$x(t)_0 = x_h(t) + A\cos(\omega_f t + \delta)$$

donde $x_h(t)$ es la solución general de la ecuación homogénea que decae exponencialmente. A x_h se le llama el término transitorio; para t suficientemente grande, $x_h \to 0$ tal que:

$$x_h(t) \ll A\cos(\omega_f t + \delta)$$

Que es la solución permanente y representa un movimiento armónico simple de frecuencia angular ω_f y donde la amplitud A y δ son constantes cuyos valores son:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2 t)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}$$

$$\delta = arctan \frac{2\gamma\omega_f}{\omega_f^2 - \omega_f^2}$$

Es decir, A depende de ω_f; el valor máximo de A se obtiene para el valor de ω_f dado por:

$$\omega_f = \sqrt{\omega_f^2 - 2\gamma^2} = \omega_R$$

y es:

$$A_{max} = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{F_0/m}{2\gamma\beta\omega}$$

con: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

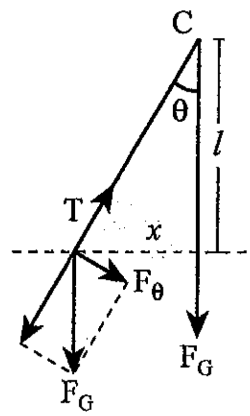
A este valor de $\omega_f = \omega_R$ se le llama la **frecuencia angular de resonancia.**

Si no hay amortiguamiento, $\gamma = 0$ y entonces: $\omega_R = \omega_0$

3.9 Ejemplos

Péndulo Simple

Se suspende un cuerpo de masa gravitacional m_0 de un punto C por medio de un hilo largo (figura 5). Alejando el cuerpo de la posición de equilibrio (vertical), oscila bajo la acción de la componente del peso que no queda equilibrada por la tensión de la cuerda.



El peso del cuerpo es

$$F_0 = -F_0 \, sen\, \theta = -m_0 \, sen\, \theta$$

De acuerdo con la Segunda Ley de Newton, $F_0 = m_1 a_0$; donde

$$a_0 = -\left(\frac{m_0}{m_1}\right) g \, sen\, \theta$$

La aceleración en cada ángulo depende de la razón $\left(\frac{m_0}{m_1}\right)$

Para pequeños ángulos, $sen\, \theta = \theta = (x/l)$. La ecuación de movimiento es, en estas condiciones

$$x - \frac{x}{l} \frac{m_0}{m_1} g$$

cuya solución es

$$x = x_0 \, sen \, \omega t$$

$$\theta = \omega t$$

Como se puede verificar por substitución; de donde se concluye que, si $\omega = 2\pi/T$, el período será

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{\frac{m_0}{m_1}}$$

Todas las observaciones indican que T es independiente de la composición química, la temperatura, el estado cristalino, etc., de los cuerpos que oscilan. Por consiguiente, m_0 y m_1 no pueden diferir sino por una constante. Experiencias realizadas por Newton indican que la proporcionalidad es buena dentro de una parte en 1,000. Bessel realizó medidas más precisas de esta proporcionalidad (1 parte en 60,000).

Péndulo de Torsión

Si tuviéramos un disco (o un cuerpo cualquiera) suspendido de una barra de metal (u otro material elástico) (figura 3) y si hiciéramos girar el disco un ángulo θ, la barra también se torcerá y surge un movimiento restaurador * que, como vimos es

$$M = -C\theta$$

Donde C es la constante elástica de torsión. Si ahora soltamos el disco, la ecuación de movimiento de este cuerpo rígido es

$$M = -C\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

O sea,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{C}{I}\theta \qquad \text{Fig. 5}$$

El movimiento es, pues, oscilador, de frecuencia

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{I}{C}}}$$

La medida de T (período de oscilación) permite la determinación de I, o conociendo I, de la C, y por consiguiente, el módulo de rigidez del material de la barra se calcula por la relación

$$C = \frac{\pi\mu R^4}{2l}$$

Experiencia de laboratorio: ***Péndulo de torsión***

3.10 Problemas complementarios

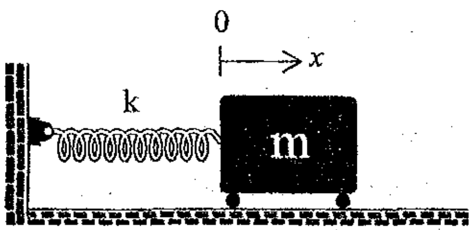
1. La coordenada x mide el desplazamiento, de la masa m= 9 kg, respecto a su posición de equilibrio, k=81 N/m. En t=0 la masa se suelta del reposo en la posición x= 0.1 m

(a) Determine el periodo y la frecuencia natural de las vibraciones resultantes.

(b) Determine x en función del tiempo t.

(c) Dibuje el diagrama de x para valores de pt de 0 a 4 radianes, mostrando el ángulo 0.

(d) Grafique x en función del tiempo entre t=0 y t=35.



Solución

(a) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{81\ N/m}{9\ kg}} = 3$ rad/s

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi s = 2.1\ s$$

(b) Sabemos que $x = A\cos(Pt - \phi)$ y su derivada $V = AP\,sen(\omega t - \phi)$ describen el M.A.S.

Al sustituir las condiciones iniciales (c.i.) en las ecuaciones anteriores tenemos:

$$0.1 = A\cos(-\phi) \qquad 1$$

$$0 = AP\,sen(-\phi) \qquad 2$$

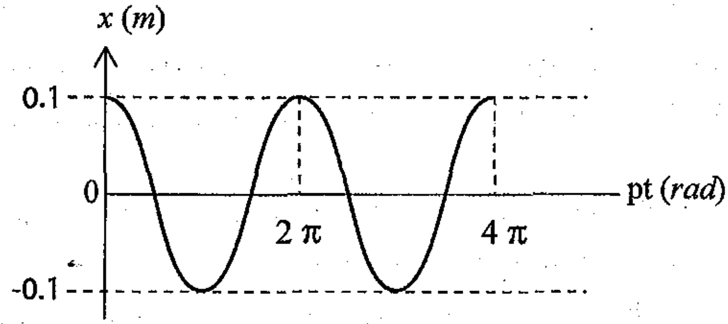
De estas dos ecuaciones tenemos A=0.1m

al sustituir este valor en (1) y utilizar que $\cos(-\phi) = \cos(\phi)$ encontramos:

$$\phi = 0 \qquad \therefore \qquad x = 0.1\cos(3\,t) : m$$

(c)

$$x = 0.1\ cos\ 3t:\ m$$



Otra forma de calcular la amplitud:

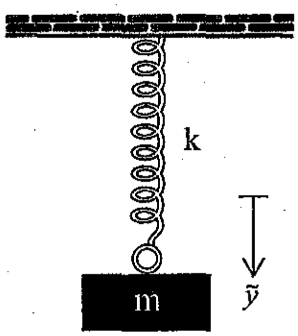
Dado que se conserva la energía mecánica, inicialmente tenemos energía potencial (el resorte está alargado) pero la partícula está en reposo, así que la energía mecánica es energía potencial solamente.

$$E = \frac{1}{2}kA_i^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

de aquí obtenemos que $A = A_i = 0.1$ m

2. Un cuerpo suspendido de masa 10 Kg y k= 90 N/m. En t=0 s su desplazamiento RESPECTO A LA POSICIÓN DE EQUILIBRIO es y=0.2 m y se mueve hacia abajo a 1.5 m/s

(a) Determine el periodo y la frecuencia natural de las vibraciones resultantes.
(b) Determine y en función del tiempo t.
(c) Grafique y en función del tiempo entre t=0 y t=4.2 s y mostrar θ



Solución

(a) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{90\ N/m}{10\ kg}} = 3$ rad/s

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi = 2.1$ s

(b) Para el M.A.S.

La energía inicial es:

$E_i = \frac{1}{2} k\tilde{y}_i^2 = \frac{1}{2} mV_i^2$

$E_i = \frac{1}{2} 90\,(0.2)^2 + \frac{1}{2} 10\,(1.5)^2$: J

$\therefore\ E_i = 13.5$ J

En la máxima deformación del resorte respecto a su posición de equilibrio

$E = \frac{1}{2} kA^2$ como $E_i = E$ entonces $\frac{1}{2} kA^2 =$ 13.5 J

$A = 0.538$ m

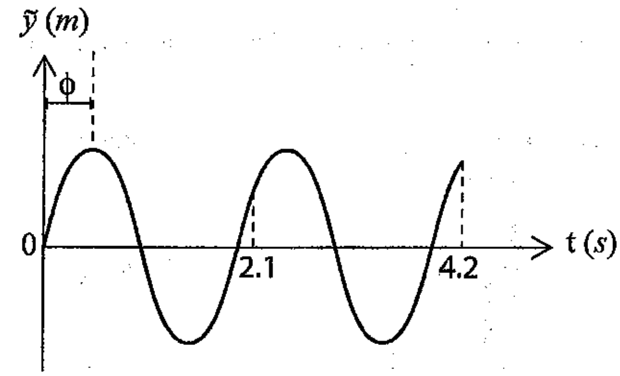
Al emplear las c.i. $0.2 = 0.538\ cos\,(-\phi)$: m

$1.5 = -0.538\,(3)\ sen\,(-\phi)$: m/s

De estas ecuaciones obtenemos $\varphi = 1.19$ rad

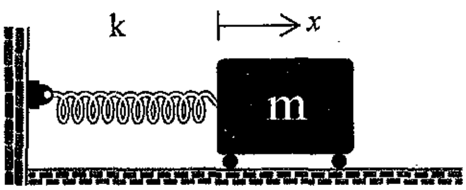
$\tilde{y} = 0.538\, cos\,(3t - 1.19)$: m

(c)



3. La energía total de un oscilador armónico simple es 20 J. En t=0 la posición es x= 0.5 m y la velocidad V=3 m/s. La amplitud del movimiento es A=1.2 m. Calcule

(a) la constante del resorte k, la masa m del bloque, la frecuencia angular P, la constante de fase θ.
(b) La posición, la velocidad y aceleración después de 3 s.



Solución

(a) La energía total es:

$$\tfrac{1}{2}\,E = kA^2$$

$$\Longrightarrow \quad k = \frac{2E}{A^2} = \frac{2\,(20\text{ J})}{(1.2\text{ m})^2} = 27.78\text{ N/m}$$

en t = 0

$$0.5 = 1.2\,cos\,(-\phi) \;:\; \text{m} \qquad 1$$
$$1.5 = -1.2\,P\,sen\,(-\phi) \;:\; \text{m/s} \qquad 2$$

De estas 2 ecuaciones obtenemos

$$\left(\frac{0.5}{1.2}\right)^2 + \left(\frac{3.0}{1.2\,P}\right)^2 = 1$$

De aquí tenemos que

$$\omega = \frac{3.0}{1.2\sqrt{1-\left(\frac{0.5}{1.2}\right)^2}}\text{ rad/s} = 2.75\text{ rad/s}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{k}{P^2} = \frac{27.78}{(2.75)^2}\text{ kg} = 3.67\text{ kg}$$

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{0.5}{1.2}\right) = 1.141 \text{ rad}$$

(b)

$$x = 1.2 \cos(2.75\,t - 1.141) \ : \text{m}$$

$$\frac{dx}{dt} = V = -1.2\,(2.75)\,sen\,(2.75\,t - 1.141) \ : \text{m/s}$$

$$\frac{dv}{dt} = a = -1.2\,(2.75)^2 \cos(2.75\,t - 1.141) \ : \text{m/s}^2$$

en t = 3 s

$x = 0.81$ m

V = -2.43 m/s

a = -6.15 m/s^2

4. Un oscilador armónico simple masa puntual-resorte tiene una constante elástica $k=1600$ N/m y un periodo $t=1.25$ s, se coloca después en un medio disipativo de tal forma que su amplitud inicial $A_0=2.7$ m decae a $A_f=0.3$ m al cabo de 10 oscilaciones. Calcular el coeficiente de amortiguamiento viscoso, el periodo de las oscilaciones amortiguadas y el coeficiente de amortiguamiento viscoso crítico.

Solución

Sabemos que 10 oscilaciones tardan un tiempo igual a diez periodos, esto es, 10 T'

y que las amplitudes están relacionadas por

$$A_f = A_0 e^{-\frac{b}{am}10\,T'}$$

$$\frac{A_f}{A_0} = e^{-\frac{10}{2}\frac{b}{m}T'} \qquad 1$$

Por otra parte

$$\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \frac{2\pi}{T'}$$

o $$T' = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}} \qquad 2$$

Aquí desconocemos P y m

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad m = k\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

$$m = 1600\left(\frac{1.2}{2\pi}\right)^2 \text{ kg} = 58.361 \text{ kg}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1600}{58.361}} \text{ rad/s} = 5.236 \text{ rad/s}$$

$\therefore$ de la ecuación (2) tenemos

$$\frac{b}{2m} = \sqrt{\omega_0^2 - (\frac{2\pi}{T'})^2} \qquad 3$$

La ecuación (1) se trasforma en la siguiente

$$ln\left(\frac{A_0}{A_f}\right) = 10 \ \frac{b}{2m} T' \qquad 4$$

(3) en (4)

$$\ln \frac{A_0}{A_f} = 10 \sqrt{\omega_0^2 - (\frac{2\pi}{T'})^2} \ T'$$

de aquí se despeja T' y resulta

$$T' = \frac{\sqrt{\left[\frac{\ln \frac{A_0}{A_f}}{10}\right]^2 + (2\pi)^2}}{\omega}$$

sustituyendo valores

$$\frac{\sqrt{\left[\frac{\ln (9)}{10}\right]^2 + (2\pi)^2}}{5.236} \text{ s}$$

$$T' = 1.2 \text{ s}$$

de la ecuación (4) despejamos b

$$b = \frac{m \ln\left(\frac{A_0}{A_f}\right)}{5T'}$$

$$b = \frac{158.361 \ \ln 9}{5(1.2)} \ \text{kg/s}$$

$$b = 21.372 \ \text{kg/s}$$

$$b_c = 2mP$$

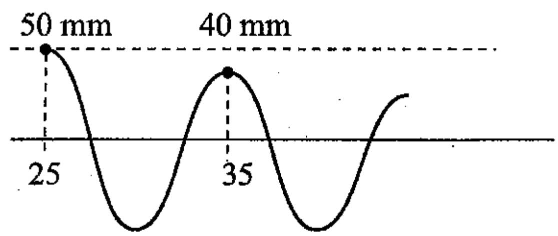
$$b_c = 2(58.361 \ \text{kg})(5.236 \ \text{rad/s})$$

$$b_c = 611.156 \ \text{kg/s}$$

Como $b<b_c$ este oscilador es subamortiguado, lo que habíamos considerado en nuestros cálculos.

5. Un resorte fijo por uno de sus extremos y una partícula fija al extremo libre del resorte, oscilan en un medio viscoso. El máximo de 50 mm del punto de equilibrio se observa en t=25 s, y el máximo inmediato siguiente en t=35 s, como muestra la figura.

¿Cuál era la posición de la partícula en el instante t=0 s, en t=3.55 s y en t=4.25 s?



Solución

De la gráfica observamos que el periodo T'=1 s de donde podemos utilizar

$A_f = A_i e^{-\frac{b}{2m}nT'}$ donde n es un entero positivo

De esta ecuación obtenemos la siguiente:

$ln\left(\frac{A_i}{A_f}\right) = \frac{b}{2m}nT'$ A esta fórmula se le conoce como DECREMENTO LOGARÍTMICO

En este problema n=1

$ln\,\frac{50}{40} = \frac{b}{2m} = 0.223143551$

El máximo en t=0 s está dado por

$ln\,\frac{A_0}{50} = 2\,(\frac{b}{2m}) \quad \Longrightarrow \quad A_0 = 50\,e^{2\,(\frac{b}{2m})}$: mm

$A_0 = 50\ e^{2(0.223143551)}$

$A_0 = 82.441$ mm

El decremento logarítmico cambia solamente de signo en medio periodo.

Vamos a calcular la posición del oscilador en 3.5 s dado el máximo en 3 s.

$A_{3.5} = -\ A_3 e^{-0.223143551 \times 0.5\ \text{mm}}$

$A_{3.5} = 35.777$ mm

Sabemos que x(t) para el oscilador armónico amortiguado es

$x(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega' t - \phi')$

pero $\omega' = \frac{2\pi}{T'} = 6.2831$ rad/s y $\phi' = 0$

Ahora bien:

$A_{4.2} = -\ A_0 e^{-0.223143551 \times 4.2} \cos(6.2831 \times 4.2)$

$A_{4.2} = 82.441 e^{0.9372} \cos 26.38902$

$A_{4.2} = 9.99$ mm

5. Un oscilador armónico simple tiene un resorte de constante k una masa m=30 Kg y una frecuencia f = 9 rad. Se coloca después en un medio viscoso de tal forma que su amplitud decae a una quinta parte de su valor inicial después de 20 oscilaciones. Para contrarrestar el amortiguamiento se aplica una fuerza armónica F(t)=18 *cos* P"t. Determine para qué valor de P" tenemos oscilaciones de máxima amplitud así como la máxima amplitud.

Solución

La máxima amplitud ocurre cuando hay resonancia, es decir:

$$\omega'' = P = 9 \text{ rad/s}$$

Para calcular la máxima amplitud, recurramos a la siguiente expresión:

$$A_{máx} = \frac{\frac{Fo}{k}}{2\left(\frac{b}{b_c}\right)} \qquad \text{donde} \qquad F_0 = 18\text{ N}$$

$$k = \omega^2 m = (9 \text{ rad/s})^2 30 \text{ Kg} = 2430 \text{ N/m}$$

$$b_c = 2m\omega = 2(30 \text{ Kg})\, 9 \text{ rad/s} = 540 \text{ rad/s}$$

Para calcular b usaremos el decremento logarítmico:

$$ln \frac{A_0}{\frac{1}{5}A_0} = \frac{b}{2m} 20T'$$

pero $T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{P^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}}$

$$ln5 = \frac{b}{2m} 20 \frac{2\pi}{\sqrt{P^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}}$$

$$\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}\; ln5 = \frac{2}{3}\pi b$$

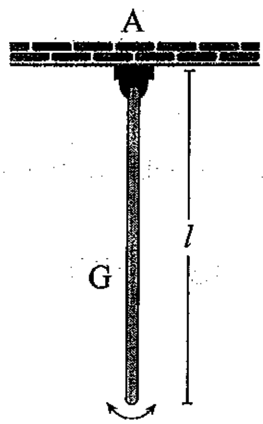
de esta ecuación obtenemos:

$$b = \frac{\omega ln5}{\sqrt{(\frac{ln5}{60})^2 + (\frac{2}{3}\pi)^2}} \qquad b = 6.915 \text{ kg/s}$$

Ya con estos cálculos, podemos evaluar la amplitud máxima

$$A_{máx} = \frac{18\text{ N}}{2430\frac{\text{N}}{\text{m}} + 2(\frac{6.915}{540})} \qquad A_{máx} = 0.29\text{ m}$$

6. El péndulo físico que consiste de una varilla uniforme de longitud l, puede oscilar alrededor de la articulación A donde no hay fricción. Calcular la frecuencia del péndulo para pequeñas oscilaciones.



Sistema: Varilla

D.C.L.

Solución 1

Desviamos a la varilla de su posición verticalmente un ángulo θ en sentido opuesto al movimiento de las manecillas de reloj.

$$\Sigma M_A = -mg\,\frac{l}{2}\,sen\,\theta = I_A\alpha$$

donde $I_A = \frac{1}{3}ml^2$ y $\alpha = \ddot{\theta}$

$$\therefore \quad \frac{1}{3}ml^2\,\ddot{\theta} = -mg\,\frac{l}{2}\,sen\,\theta$$

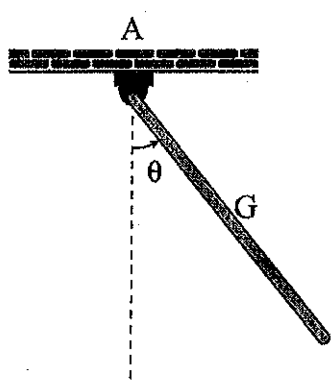
$$\ddot{\theta} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\,sen\,\theta = 0$$

para pequeñas oscilaciones $sen\,\theta = \theta$

$$\therefore \quad \ddot{\theta} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\,\theta = 0$$

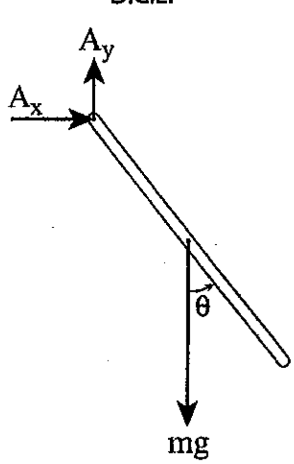
Que es la ecuación Diferencial que describe un M.A.S

$$\therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}}$$



Sistema: Varilla

D.C.L.



Solución 2 (método de energía)

La única fuerza que trabaja es el peso de la varilla por lo que se conserva la energía.

$$mg\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}I_A\,\dot{\theta}^2 = E = \text{constante}$$

derivemos esta ecuación respecto al tiempo, lo que nos queda es:

$$mg\,\frac{l}{2}\,sen\,\theta\cdot\dot{\theta} + I_A\,\dot{\theta}\cdot\ddot{\theta} = 0$$

dividamos esta última ecuación por $\ddot{\theta}$ (ya que no es cero) y por

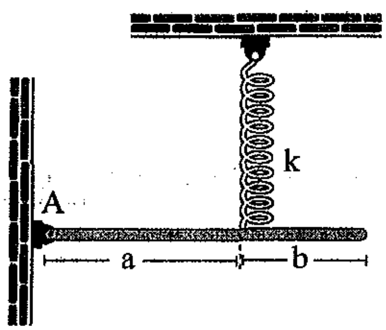
$$g\,\frac{l}{2}\,sen\,\theta + \frac{1}{3}l^2\,\ddot{\theta} = 0$$

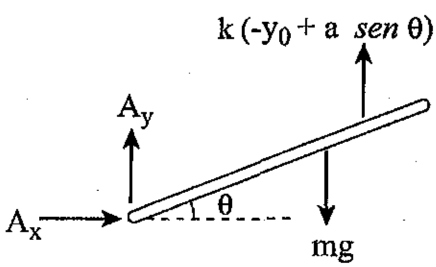
si $sen\,\theta \approx 0$

$\ddot{\theta} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\,sen\,\theta = 0$ que es la ecuación Diferencial de un M.A.S.

$$\therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}}$$

7. La varilla uniforme de masa m=15 kg, articulada en A y sujetada por el resorte de constante k=125 N/m, está en equilibrio cuando se encuentra horizontal, como muestra la figura. Establecer la ecuación diferencial que cumple con el movimiento armónico simple para pequeñas oscilaciones con respecto a la posición de equilibrio y calcular la frecuencia angular.





Solución

Utilizaremos el método de conservación de la energía porque las únicas fuerzas que realizan trabajo son conservativas.

$$\tfrac{1}{2}I_A\,\dot\theta^2 + mg\tfrac{l}{2}\,sen\,\theta + \tfrac{1}{2}k\,(-y_0 + a\,sen\,\theta)^2 = E = \text{constante}$$

derivar esta expresión respecto al tiempo

$$I_A\,\dot\theta\cdot\ddot\theta + mg\tfrac{l}{2}\cos\theta\cdot\dot\theta + k\,(-y_0 + a\,sen\,\theta)\,a\cos\theta\cdot\dot\theta = 0$$

En la posición de equilibrio:

$$\overset{\curvearrowleft}{\Sigma M_A} = ky_0\,a - mg\tfrac{l}{2} = 0$$

La última ecuación de la energía nos queda:

$$I_A\,\dot\theta\cdot\ddot\theta + ka^2\,sen\,\theta\cos\theta\cdot\dot\theta = 0$$

Dividiendo esta ecuación por $\dot\theta$ (ya que no es cero)

y $sen\,\theta \approx \theta$ y $\cos\theta = 1\dot\theta$

nos da:

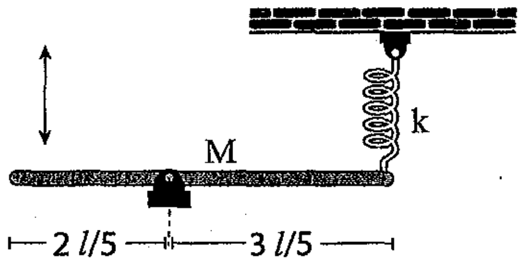
$$I_A\ddot\theta + ka^2\,\theta = 0 \quad \text{donde} \quad I_A = \tfrac{1}{3}\,ml^2$$

o $\boxed{\ddot\theta + \frac{3\,ka^2}{ml^2}\,\theta = 0}$ M.A.S.

$$\omega = \frac{a}{l}\sqrt{\frac{3k}{m}} = \frac{1.5}{2.4}\sqrt{\frac{3(125\text{ N/m})}{5\text{ kg}}} = 5.41\text{ rad/s}$$

3.11 Problemas propuestos

1. Establezca la ecuación de movimiento para el sistema mostrado en la figura. Suponiendo oscilaciones pequeñas, calcule el periodo del movimiento. Suponga que la barra está en equilibrio en la posición mostrada.



$$\ddot{\theta} + 3.86\,\frac{K}{M}\,\theta = 0$$

$$T = 2\pi\sqrt{3.86\frac{k}{M}}$$

2. La energía mecánica total de un oscilador armónico simple formado por una masa m y un resorte de constante K en posición horizontal es E= 22 J. Si la posición y la velocidad iniciales t = 0 s son $x_i = 3.5$ m, $V_i = 15$ m/s, y la amplitud del movimiento es A= 4 m, calcule:

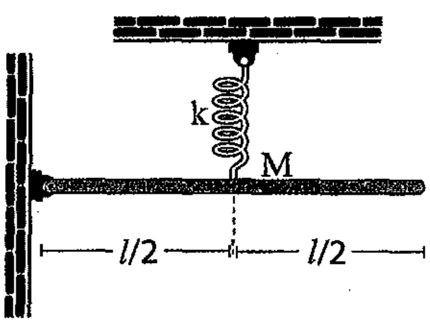
a) La constante del resorte, la masa del bloque, la frecuencia angular, la constante de fase.

b) La posición, la velocidad y la aceleración después de 8 segundos.

a) $k = 2.75$ N/m, $m = 0.0458$ kg, $\omega_0 = 7.746$ rad/s, $\delta = 0.50536$ rad

b) $x\,(8\text{ s}) = 0.8$ m, $V(8s) = 30.3566$ m/s, $a = -48.0534$ m/s^2

3. Establecer la ecuación de movimiento en la aproximación de pequeñas oscilaciones angulares para el sistema mostrado en la figura y determinar el periodo del movimiento. Considere que la barra está en equilibrio en la posición mostrada.



$$\ddot{\theta} + \frac{3}{2}\frac{k}{M}\theta = 0$$

$$T = \frac{8}{9}\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$$

4. Un oscilador armónico simple está constituido por una masa $m = 5$ kg unida a un resorte de constante K; el resorte se alarga 0.05 m cuando se le suspende una masa de 4 kg. Si para T= 0.5 s, tiene una posición X= -0.15 m y velocidad $V = +3$ m/s, determine:

a) La amplitud, la constante de fase, la frecuencia angular y el tiempo que tarda en 3 oscilaciones.

$$A = 0.283 \text{ m}, \quad \delta = 2.13 \text{ rad}, \quad \omega_0 = 12.522 \text{ rad/s}, \quad t = 1.55 \text{ s}$$

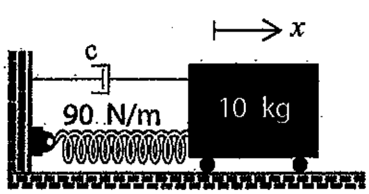
b) La energía cinética y la energía potencial del oscilador cuando la masa se encuentra en X= + 0.1 m

$$K = 35.24 \text{ J}, \quad U = 3.92 \text{ J}$$

5. Un oscilador armónico simple tiene un resorte de constante $K = 1500$ N/m y masa $m = 25$ kg. Se pone a oscilar dentro de un medio disipativo, así que la amplitud inicial $A_i = 2.5$ m decae al valor $A_f = 0.8$ m después de 13 oscilaciones. Calcule la constante de amortiguamiento y la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas.

$$C = 5.4 \text{ kg/s}, \quad \omega^1 = 7.74 \text{ rad/s}$$

6. La constante de amortiguamiento del oscilador mostrado es C = 20 N-s/m. ¿Cuáles son el periodo y la frecuencia natural del sistema amortiguado?



$$\omega^1 = \sqrt{8} \text{ rad/s}$$

$$T' = \frac{2\pi}{\sqrt{8}} \text{ s}$$

7. La energía total de un oscilador armónico simple formado por una masa m y un resorte de constante K en posición horizontal es $E = 18$ J. Si la posición y la velocidad iniciales $t = 0$ s, son $X_i = 3$ m, $V_i = 12$ m/s y la amplitud del movimiento es $A = 3.5$ m, calcule:

a) La constante del resorte, la masa del bloque, la frecuencia angular y la constante de fase:

$$k = 2.49 \text{ N/m}, \quad m = 6.6 \times 10\text{-}2 \text{ kg}, \quad \omega_0 = 6.67 \text{ rad/s}, \quad \delta = 0.54 \text{ rad}$$

b) La posición, la velocidad y la aceleración después de 4 s:

$$x(4\text{ s}) = 1.87 \text{ m}, \quad V(4\text{ s}) = -19.72 \text{ m/s}, \quad a(4\text{ s}) = -83.3 \text{ m/s}^2$$

8. Un oscilador armónico simple tiene un resorte de $K = 2400$ N/m y una frecuencia angular $W_0 = 10$ rad/s. Se coloca después en un medio disipativo de tal forma que su amplitud decae a una décima parte de su valor inicial al cabo de 24 oscilaciones.

a) Calcule la constante de amortiguamiento y la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas:

$$C = 7.32 \text{ kg/s}, \qquad \omega^1 = 9.998 \text{ rad/s}$$

b) Para contrarrestar el amortiguamiento se aplica una fuerza periódica $F(t) = F_0\, cos(W_f t)$ con $F_0 = 18$ N. Determine el valor de W_f para tener oscilaciones de máxima amplitud:

$$b = \omega_f = \omega_0 = 10 \text{ rad/s}$$

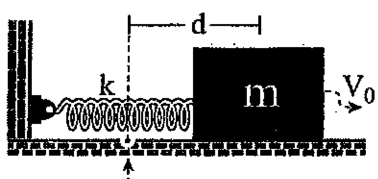
9. En el oscilador armónico simple mostrado:

Calcular:

δ: Ángulo de fase, A: amplitud del movimiento, ω_0: frecuencia angular, $V_{máx}$: rápidez máxima.

Despreciar: masa del resorte, dimensiones del bloque y la fricción.

$K = 800$ N/m, $d = 0.2$ m, $m = 3$ kg, $V_0 = 0.7$ m/s



Posición de equilibrio

$\delta = 0.21$ rad, $A = 20.45$ m, $\omega_0 = 16.33$ rad/s, $V_{máx} = 3.34$ m/s

10. La energía total de un oscilador armónico simple formado por una masa m y un resorte de constante K en posición horizontal, es $E = 20$ J. Si la posición y la velocidad iniciales, t = 0 s, son $X_i = 2$ m, $V_i = 10$ m/s, y la amplitud del movimiento es $A = 5$ m, calcule:

a) La constante del resorte, la masa del bloque, la frecuencia angular y la constante de fase:

$k = 1.6$ N/m, $m = 0.336$ kg, $W_0 = 2.18$ rad/s, $\delta = 1.16$ rad

b) La posición, la velocidad y la aceleración después de 5 s:

$x(5\ s) = 4.75$ m, $V(5\ s) = 3.38$ m/s, $a(4\ s) = 22.6$ m/s^2

11. Se cuelga de un muelle un objeto de 1 g. de masa y se le deja oscilar. Para $t = 0$, el desplazamiento era de 43.785 cm y la aceleración -1.7514 cm/seg^2. ¿Cuál es la constante del muelle?

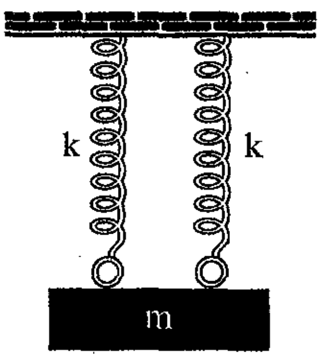
$$K = 25 \text{ dinas/cm}$$

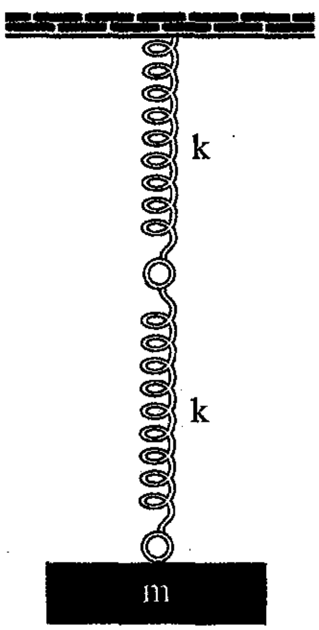
12. Una masa m cuelga de un muelle uniforme de constante K.

a) ¿Cuál es el período de las oscilaciones del sistema?

b) ¿Cuál sería el período si la masa m se colgase de modo que:

1. Estuviese sujeta a dos muelles idénticos situados uno junto al otro:
2. Estuviese sujeta al extremo inferior de dos muelles idénticos conectados uno a continuación del otro:





a) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

b) 1. $\frac{T_0}{\sqrt{2}}$

2. $\sqrt{2}\, T_0$

13. Una varilla uniforme de longitud L se sujeta por un clavo a un poste de modo de dos tercios de su longitud están por debajo del clavo. ¿Cuál es el período de las oscilaciones pequeñas de la varilla?

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Introducción a la dinámica del cuerpo rígido
Se terminó de imprimir en
el mes de noviembre del año 2008
en los talleres de la Sección de Impresión
y Reproducción de la Universidad
Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco

La edición
estuvo a cargo de
la Sección de Producción
y Distribución Editoriales
Se imprimieron 100 ejemplares
más sobrantes para reposición