

Universidad
Autónoma
Metropolitana



Casa abierta al tiempo **Azcapotzalco**

La geometría de los medios conductores en movimiento

IDONEA COMUNICACION DE RESULTADOS QUE PRESENTA

URIEL AGUILAR FERNANDEZ

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELECTROMAGNÉTICA

Director:

*Dr. César Simón López Monsalvo
Departamento de Ciencias Básicas, UAM-A*

Codirector:

*Dr. Alberto Rubio Ponce
Departamento de Ciencias Básicas, UAM-A*



Declaratoria

- Yo, Dr. César Simón López Monsalvo, declaro que aprobé el contenido del presente reporte de Idónea Comunicación de Resultados y doy mi autorización para su publicación en la Biblioteca Digital, así como en el repositorio Institucional Zaloamati de la UAM Azcapotzalco.

Firma



- Yo, Dr. Alberto Rubio Ponce, declaro que aprobé el contenido del presente reporte de Idónea Comunicación de Resultados y doy mi autorización para su publicación en la Biblioteca Digital, así como en el repositorio Institucional Zaloamati de la UAM Azcapotzalco.

Firma



- Yo, Ing. Uriel Aguilar Fernandez, doy mi autorización a la Coordinación de Servicios de Información de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, para publicar el presente documento en la Biblioteca Digital, así como en el repositorio Institucional Zaloamati de la UAM Azcapotzalco.

Firma



Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todas aquellas personas que, de una u otra manera, han sido parte fundamental de esta parte de mi vida tanto en el ámbito académico como personal.

En primer lugar, quiero agradecer a mis padres, quienes con su amor, apoyo incondicional y confianza en mí han sido mi mayor motivación.

A toda mi familia, por estar siempre a mi lado, brindándome su respaldo, comprensión y ánimos en los momentos más difíciles.

A mis asesores, por su paciencia, guía y conocimientos compartidos. Gracias por ayudarme a crecer tanto académica como personalmente, y por enseñarme a ser un mejor profesional.

A la UAM, mi alma mater, por brindarme las herramientas necesarias para desarrollarme en el ámbito académico, y por ser un espacio de crecimiento y aprendizaje continuo.

Al programa de estudios de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electromagnética por ofrecerme una formación integral, que ha sido clave en mi desarrollo académico y profesional.

Finalmente, quiero agradecer a mis amigos, los que están en México y los que viven en otra patria, a mis estudiantes y compañeros de trabajo.

A todos, gracias por formar parte de este logro que es tanto mío como de ustedes.

Resumen

Este estudio presenta una formulación covariante de la ley de Ohm, integrando la geometría diferencial con los principios de la relatividad especial para resolver inconsistencias de larga data en la teoría electromagnética clásica. Los modelos newtonianos tradicionales no se alinean con las simetrías inherentes del electromagnetismo y la relatividad, lo que crea una necesidad urgente de un enfoque más integral. Al centrarse en el papel, a menudo pasado por alto, del observador y emplear herramientas geométricas avanzadas, esta investigación proporciona una profunda comprensión de la conducción eléctrica en diversas condiciones.

Durante más de un siglo, las teorías microscópicas han derivado con éxito la ley de Ohm a partir de principios termodinámicos. Sin embargo, estos modelos, basados en la física newtoniana, implican una propagación instantánea, una noción incompatible con los principios relativistas. Este estudio introduce un modelo covariante que respeta las simetrías del electromagnetismo y destaca el papel crucial del observador, abordando las lagunas dejadas por las formulaciones clásicas.

El enfoque geométrico adoptado aquí enfatiza el papel central del observador, proporcionando interpretaciones más claras de los datos experimentales y las predicciones teóricas. Esta investigación cierra la brecha entre las teorías electromagnéticas clásicas y modernas, ofreciendo conocimientos prácticos para el diseño de sistemas electromagnéticos avanzados y aplicaciones en ciencia de materiales. Al asegurar la independencia del sistema de coordenadas y del observador, el modelo subraya las simetrías inherentes en las leyes físicas, ofreciendo un marco robusto para entender la conducción eléctrica en contextos relativistas.

Abstract

This study pioneers a covariant formulation of Ohm’s law, melding differential geometry with the principles of special relativity to resolve long-standing inconsistencies in classical electromagnetic theory. Traditional Newtonian models fail to align with the inherent symmetries of electromagnetism and relativity, creating a pressing need for a more comprehensive approach. By focusing on the often-overlooked role of the observer and employing advanced geometric tools, this research provides a profound understanding of electrical conduction across various conditions.

For over a century, microscopic theories have successfully derived Ohm’s law from thermodynamic principles. However, these models, rooted in Newtonian physics, imply instantaneous propagation—a notion incompatible with relativistic principles. This study introduces a covariant model that respects the symmetries of electromagnetism and highlights the critical role of the observer, addressing gaps left by classical formulations.

The geometric approach adopted here emphasizes the observer’s central role, providing clearer interpretations of experimental data and theoretical predictions. This research bridges the gap between classical and modern electromagnetic theories, offering practical insights for the design of advanced electromagnetic systems and material science applications. By ensuring coordinate and observer independence, the model underscores the inherent symmetries in physical laws, offering a robust framework for understanding electrical conduction in relativistic contexts.

Contenido

Agradecimientos	II
Resumen	III
Abstract	IV
Contenido	V
Índice de Figuras	VI
1. Introducción	1
2. Modelo de Drude	4
2.1. Ley de Ohm	4
2.2. Ley de Ohm a partir de modelo de Drude	4
2.2.1. Conductividad Eléctrica	6
3. Simetrías de la teoría electromagnética	8
3.1. Simetrías en la física	8
3.2. Ecuaciones de Maxwell	9
3.2.1. Relaciones Constitutivas	11
3.2.2. Potenciales	12
3.3. Relatividad	14
3.3.1. Relatividad Galileana	14
3.3.2. Relatividad Especial	17
3.3.3. Transformaciones de Lorentz	17
3.4. Transformación de la conductividad	20
4. Electromagnetismo geométrico	22
4.1. Perspectiva geométrica	22
4.2. Ecuaciones de Maxwell en Formas Diferenciales	23
4.3. Ley de Ohm en formas diferenciales	26
4.4. Elementos del modelo	26
4.4.1. Métrica	26
4.4.2. Densidad de corriente	26
4.4.3. Observador	27
4.5. Construcción del modelo geométrico de la de Ohm	28
4.5.1. Contracción de una p -forma con un campo vectorial	29
5. Conclusiones y perspectivas a futuro	33

6. Referencias **35**
A. Introducción a los Conceptos de Geometría Diferencial **37**

Índice de Figuras

2.1. Material conductor sometido a un campo eléctrico \vec{E} 5
3.1. Sistemas coordenado, donde Δs es la distancia entre dos puntos. 15
3.2. Sistema coordenado con una rotación rígida. 15
A.1. Variedad Diferenciable. 37

1. Introducción

¿Un conductor en movimiento tiene mayor conductividad eléctrica?

Esta pregunta, que a primera vista puede parecer sencilla, abarca una amplia gama de disciplinas, incluyendo física, matemáticas e ingeniería, debido a que admite análisis desde diversas perspectivas. Explorar esta cuestión no solo enriquece nuestra comprensión teórica, sino que también tiene el potencial de impactar en campos como el electromagnetismo y la ingeniería de materiales.

Si nos centramos únicamente en el enfoque de la física, ya nos enfrentamos a un problema considerable, que puede ser analizado desde los principios clásicos hasta enfoques contemporáneos. En otras palabras, a pesar de su aparente sencillez, esta pregunta guarda una profundidad que merece nuestra atención. Actualmente, podemos encontrar bibliografía que ofrece pistas sobre esta cuestión, particularmente en relación con la formulación vectorial de la ley de Ohm en el marco de la relatividad. Esta versión relativista de la ley de Ohm extiende su aplicación a sistemas en movimiento, abordando las complejidades que surgen al combinar el electromagnetismo y relatividad. Por otro lado, también podemos abordar este problema integrando otro tipo de herramientas, como lo es la geometría diferencial. Esta rama de la matemática, que juega un papel crucial en el estudio de las variedades en relatividad general, también ha encontrado aplicaciones significativas en el electromagnetismo, proporcionando un lenguaje adecuado para describir fenómenos en espacios curvos y situaciones donde las aproximaciones clásicas resultan insuficientes [1–7].

Una pieza clave en la discusión sobre la conducción eléctrica y fundamental en la formulación de la teoría electromagnética es, por supuesto, la ley de Ohm. Desde el siglo XIX, disponemos de una teoría microscópica conocida como el modelo de Drude, que permite deducir la ley de Ohm a partir de principios clásicos. La ley de Ohm, al igual que la ley de Fourier para la conducción de calor, describe una relación directa entre las variables locales: en el caso de la ley de Fourier, se relaciona el flujo de calor con el gradiente de temperatura, y en el caso que estudiaremos, la densidad de corriente con el gradiente del potencial eléctrico. Sin embargo, ambos modelos suponen una respuesta inmediata a los cambios en los gradientes de las variables, una suposición que es esencialmente newtoniana y que no es consistente con las simetrías del electromagnetismo ni con los principios de la relatividad especial [8, 9]. Por otro lado, el formalismo de la electrodinámica propone modelos que sí consideran la teoría de la relatividad especial; sin embargo, estos se centran únicamente en esta teoría, sin abordar completamente sus implicaciones en la ley de Ohm [1, 2].

Esta situación nos motiva a buscar nuevas formas de entender esta ley. Un objetivo importante de este trabajo es proponer una formulación de la ley de Ohm que no solo resuelva las limitaciones del enfoque clásico, sino que también mejore las versiones relativistas existentes. Queremos establecer una relación constitutiva geométrica equivalente a la ley de Ohm para un conductor en movimiento y un observador estático en el marco de referencia de laboratorio. Esto es, dada una variedad diferenciable de n dimensiones equipada con una métrica con signa-

tura de Lorentz que caracteriza un material conductor, una forma de campo electromagnético F y un observador tipo tiempo, establecer una relación lineal para la respuesta conductiva del medio, esto es, una relación lineal entre la forma de corriente inducida $j_{\text{ind}} \in \Lambda_M^{n-1}$ y el campo externo aplicado $F \in \Lambda_M^2$. En nuestro enfoque, formulamos la ley de Ohm en términos de formas diferenciales, integrando un elemento geométrico que representa al observador. Esto permite que la ley de Ohm no solo sea covariante, sino también dependiente de la perspectiva del observador, lo cual es crucial para describir fenómenos en espacios curvos y en contextos donde el papel del observador es esencial para la interpretación física. Esta construcción geométrica nos permite desarrollar una versión de la ley de Ohm que está en consonancia con las simetrías del electromagnetismo, pero que también reconoce la influencia del observador en la formulación de las leyes físicas.

Empleando geometría diferencial, podemos abordar el fenómeno de la conducción eléctrica desde una perspectiva innovadora que incorpora la relatividad especial. Este enfoque nos permite comprender mejor la naturaleza física del fenómeno, y en el proceso de construcción de los modelos, pone un énfasis diferente en la relación entre los elementos fundamentales, en nuestro caso, la ley de Ohm. Aunque en formulaciones anteriores ya se consideraban los elementos constitutivos de la ley de Ohm, la perspectiva geométrica permite una visión más clara y estructurada de cómo estos elementos interactúan en el contexto relativista. Usando formas diferenciales, ganamos precisión y claridad; por ejemplo, al formular las ecuaciones de Maxwell en términos de formas diferenciales, se garantiza que la descripción es independiente del sistema de coordenadas específico utilizado. En este enfoque, el observador sigue siendo crucial, ya que su estado de movimiento y marco de referencia pueden influir en la interpretación de los campos electromagnéticos y las corrientes. La construcción geométrica, sin embargo, nos brinda una ventaja significativa al eliminar ambigüedades asociadas con la elección del sistema de coordenadas, permitiéndonos centrarnos en la verdadera simetría del problema, como la invariancia bajo transformaciones de Lorentz. Esto remueve las ambigüedades relacionadas con las posibles inconsistencias en la interpretación de las leyes físicas al cambiar de un sistema de coordenadas a otro, y nos proporciona una estructura más coherente y robusta para describir el fenómeno. En este espíritu, Lewis escribe: *“algunas veces la mera formulación de un problema en el lenguaje de la geometría diferencial, una vez que uno se está preguntando de manera correcta, este (a) se resuelve solo o (b) se manifiesta con una precisión casi imposible”* [10].

El estudio de las relaciones constitutivas utilizando geometría diferencial en el campo del electromagnetismo no solo es de vital importancia en las ciencias básicas, sino que también tiene un impacto significativo en la ingeniería y se extiende a áreas como la superconductividad, la óptica, y el diseño de sistemas mecánicos avanzados, entre otras [11–14]. Esta disciplina nos permite emplear conceptos como las formas diferenciales, las conexiones y curvaturas, y el uso del tensor electromagnético, que son sumamente útiles para abordar una amplia gama de problemas en ciencias. Estos conceptos permiten una formulación independiente de las coordenadas específicas, lo cual es crucial en la descripción de fenómenos en contextos relativistas. En nuestro estudio, hacemos un uso extensivo de estos métodos, con un enfoque particular en la figura del observador, integrándolo en la formulación geométrica para reflejar su papel en la interpretación de los fenómenos electromagnéticos.

Podemos pensar al observador como la persona que analiza el fenómeno en el laboratorio; en nuestro caso, el encargado de medir la corriente inducida, observando cómo el campo eléctrico interactúa con el material conductor, y los fenómenos que ocurren durante todo este proceso. En el contexto de la relatividad y la electrodinámica, el concepto de observador se refiere al

marco de referencia desde el cual se describen y se miden estos fenómenos. Este marco de referencia es crucial para la formulación de leyes físicas, como la ley de Ohm, ya que determina cómo se perciben los eventos en el espacio-tiempo. Desde un punto de vista teórico, definimos al observador como un ente que se desplaza a lo largo del tiempo sin interactuar directamente con los eventos, limitándose a registrar cómo estos se manifiestan en su marco de referencia.

La importancia que le damos al observador en nuestra formulación no sólo considera las interacciones clásicas del electromagnetismo, como la relación entre los campos eléctricos, magnéticos y las corrientes en conductores en movimiento, sino que también abre nuevas interpretaciones de la teoría electromagnética. Estas incluyen cómo los fenómenos electromagnéticos dependen del estado de movimiento del observador, especialmente en situaciones de altas velocidades relativas o en presencia de campos intensos. Este enfoque metodológico, centrado en el observador, permite una mejor comprensión de cómo las propiedades electromagnéticas se manifiestan en materiales conductores bajo condiciones extremas, tales como velocidades altas, campos electromagnéticos fuertes. Al adoptar esta perspectiva, desafiamos los supuestos del electromagnetismo clásico, que se basa en la independencia del marco de referencia inercial, y exploramos cómo la interacción entre los campos y el movimiento relativo puede alterar la interpretación de los fenómenos. Esto nos permite abordar problemas complejos, como la eficiencia energética en conductores o la precisión en dispositivos ópticos. Este vínculo entre teoría y la práctica subraya que el estudio profundo de conceptos teóricos es esencial para el avance académico, científico y el desarrollo de tecnologías innovadoras.

La formulación geométrica, aunque poderosa, no es una herramienta para resolver todos los problemas, tiene sus limitaciones. Históricamente, incluso Einstein expresó ciertas dudas sobre la utilidad de geometrizar los modelos de gravitación [15]. A primera vista, esta aproximación parece agregar más capas de teoría y símbolos complejos, junto con una matemática difícil de manejar, complicando aún más una teoría ya de por sí complicada. Pero, ¿es realmente así o solo una percepción errónea? Esta cuestión no tiene una respuesta definitiva, ya que hay diversas opiniones al respecto. Sin embargo, a pesar de no ser la intención principal, en este trabajo se demuestra que los cálculos involucrados no son más complicados que los que se abordan en cursos de matemáticas avanzadas a nivel universitario. Al respecto, Frankel dice: *La mayoría de los problemas son simples y requieren cálculos sencillos. Si encuentras que los cálculos se vuelven inmanejables, lo más probable es que no estés aprovechando las herramientas desarrolladas en este libro.* [5]. El objetivo de emplear la formulación geométrica es aprovechar las ventajas que ofrece al formular el modelo de la ley de Ohm para conductores en movimiento. Además, esto nos permite explorar una formulación geométrica del electromagnetismo.

2. Modelo de Drude

En 1900, Paul Drude propuso un modelo para explicar las propiedades de transporte de cargas en metales. Su aproximación permitió un entendimiento más profundo del comportamiento de los electrones dentro de los conductores metálicos. Este enfoque permitió derivar relaciones importantes entre la conductividad eléctrica y la movilidad de los electrones. Drude introdujo conceptos como el tiempo de relajación, que mide el intervalo promedio entre colisiones electrónicas, y proporcionó una explicación cuantitativa para la ley de Ohm a nivel microscópico. Aunque el modelo de Drude fue posteriormente reemplazado por un modelo cuántico, ha jugado un papel importante en el desarrollo de la física del estado sólido y sigue siendo una herramienta pedagógica valiosa para entender la conducción en metales.

2.1. Ley de Ohm

Drude desarrolló su teoría en una época en que la ley de Ohm ya estaba bien establecida experimentalmente por medio de la relación:

$$V = RI, \tag{2.1}$$

donde V es la diferencia de potencial con unidades de volts [V], I es la corriente eléctrica en amperes [A] y la resistencia R en Ohms. La ley de Ohm, establece que la corriente que fluye en un conductor entre dos puntos, es directamente proporcional al voltaje aplicado entre esos dos puntos, siempre y cuando la temperatura se mantenga constante. La ecuación 2.1 es la forma macroscópica de la ley de Ohm, la cual se utiliza comúnmente para el análisis de circuitos eléctricos, se presenta habitualmente en los primeros cursos y libros introductorios de electricidad y magnetismo. No obstante, la ley de Ohm tiene sus limitaciones. Solo se cumple en el régimen lineal, donde las condiciones no son extremas. Esto significa que, si sometemos al material a temperaturas muy altas, campos eléctricos intensos o corrientes alternas de alta frecuencia, el comportamiento del material puede volverse no lineal, y la relación entre corriente y voltaje dejará de ser proporcional. En estos casos, la resistencia del material podría cambiar o incluso desaparecer, como ocurre con los superconductores a temperaturas muy bajas. Además, existen materiales que no obedecen la ley de Ohm, como los semiconductores, donde la corriente no varía de manera lineal con el voltaje. Estos materiales, como el silicio, se comportan de manera distinta según el campo eléctrico aplicado o la temperatura, lo que los convierte en componentes clave en dispositivos electrónicos como los transistores. Por tanto, la ley de Ohm se aplica principalmente a materiales que mantienen su resistencia estable bajo condiciones normales y campos eléctricos relativamente pequeños.

2.2. Ley de Ohm a partir de modelo de Drude

El modelo de Drude aplica la teoría cinética de los gases a los electrones en un metal, tratándolos como un gas de partículas cargadas en movimiento constante. Este modelo supone que los electrones se dispersan al interactuar con los iones del material, adaptando así la teoría cinética para describir el movimiento de los electrones en un conductor. De acuerdo con Feynman [16], las ideas fundamentales del modelo de Drude incluyen:

- **Partículas Clásicas:** Los electrones se comportan como partículas clásicas, obedeciendo las leyes del movimiento de Newton.
- **Colisiones:** Los electrones sufren colisiones con los iones, con un tiempo libre promedio entre colisiones denotado como τ .
- **Efecto del Campo Eléctrico:** Un campo eléctrico externo acelera los electrones, lo que resulta en una velocidad de deriva.

Consideremos un material conductor homogéneo e isotrópico que se somete a un campo eléctrico constante \vec{E} , como se ilustra en la figura 2.1. En respuesta, las cargas libres del conductor comienzan a moverse bajo la acción del campo \vec{E} . Este movimiento de las cargas es provocado directamente por el campo eléctrico.

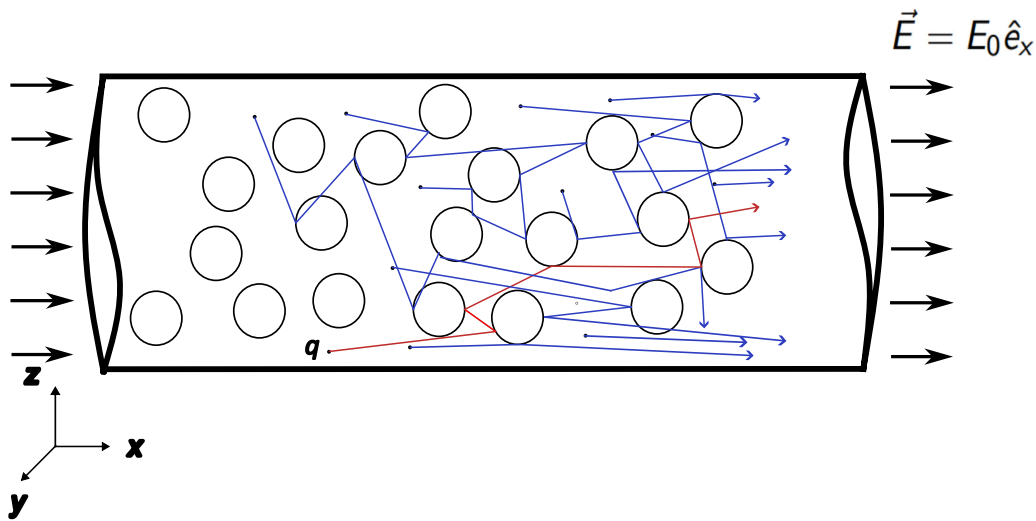


Figura 2.1: Material conductor sometido a un campo eléctrico \vec{E}

Hay que recordar que estamos considerando las cargas como partículas que son dispersadas; es decir, no se mueven en línea recta dentro del conductor, sino que interactúan con los iones al intentar desplazarse de un punto a otro debido a la presencia del campo eléctrico. Dado que estamos pensando en un material muy largo, analizar el movimiento de cada portador de carga individualmente no tiene sentido, por lo que consideraremos la velocidad de arrastre de todos ellos. Por lo tanto la fuerza neta sobre un electrón debido a un campo eléctrico \vec{E} se expresa como:

$$m \frac{d\langle \vec{v} \rangle}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m\langle \vec{v} \rangle}{\tau}, \quad (2.2)$$

donde, m es la masa del electrón, e es la carga del electrón, $\langle \vec{v} \rangle$ es la velocidad promedio del electrón, y τ es el tiempo libre medio entre colisiones. El segundo término de la derecha de la ecuación 2.2, corresponde a un tipo de fuerza de fricción debido a las múltiples colisiones de los portadores de carga con los iones, en consecuencia, el movimiento de los electrones se encuentra amortiguado. Esta ecuación representa el equilibrio entre la fuerza eléctrica que acelera a los electrones y la fuerza disipativa debido a las colisiones con los iones del material. En un estado estacionario, la aceleración del electrón es cero, es decir, $\frac{d\langle \vec{v} \rangle}{dt} = 0$, porque la

velocidad promedio de los electrones se ha estabilizado y no cambia con el tiempo, por lo tanto:

$$0 = -e\vec{E} - \frac{m\vec{v}_a}{\tau}, \quad (2.3)$$

notese que hemos renombrado a la velocidad promedio de los electrones, como velocidad de arrastre $\langle \vec{v} \rangle = \vec{v}_a$, lo cual es útil para definir la a la conductividad. Despejando \vec{v}_a :

$$\vec{v}_a = -\frac{e\vec{E}\tau}{m}, \quad (2.4)$$

esta expresión muestra que la velocidad de arrastre es directamente proporcional al campo eléctrico aplicado y al tiempo de relajación, e inversamente proporcional a la masa del electrón. Por otro lado, la densidad de corriente eléctrica \vec{j} es proporcional al número de electrones libres por unidad de volumen (n), la carga del electrón (e), y la velocidad de arrastre (\vec{v}_a) mediante la ecuación:

$$\vec{j} = -ne\vec{v}_a. \quad (2.5)$$

Sustituyendo la expresión para \vec{v}_a , obtenemos:

$$\vec{j}_{ind} = -ne \left(-\frac{e\vec{E}\tau}{m} \right) = ne^2 \frac{\tau}{m} \vec{E}. \quad (2.6)$$

En esta última ecuación renombramos a la densidad de corriente como \vec{j}_{ind} , ya que corresponde a la corriente inducida por acción del campo.

2.2.1. Conductividad Eléctrica

Agrupando los términos del lado derecho de la ecuación 2.6, podemos definir a la conductividad eléctrica del material σ mediante la relación:

$$\sigma = ne^2 \frac{\tau}{m}. \quad (2.7)$$

Este análisis asume una temperatura fija, y ya que los parámetros n , e , y m son constantes, entonces podemos decir que esta propiedad depende únicamente del tiempo libre medio entre colisiones τ . Este tiempo corresponde al intervalo entre colisiones sucesivas de un electrón a lo largo de su trayectoria en el camino libre medio dentro del conductor, el cual es representado por la línea roja en la figura 2.1. Por lo anterior, podemos decir que σ es única para cada material, ya que el camino libre medio depende de la estructura cristalina de cada material.

Finalmente llegamos a la relación constitutiva que representa a la ley de Ohm en forma vectorial:

$$\vec{j}_{ind} = \sigma \vec{E}, \quad (2.8)$$

la cual es una herramienta poderosa para entender y predecir el comportamiento de los materiales conductores bajo la influencia de campos eléctricos, esta forma de la ley de Ohm es la que encontramos en la bibliografía [1, 17].

Como se pudo ver en todo este análisis, se tienen que hacer muchas imposiciones importantes para poder llegar a la ecuación 2.8. Estas imposiciones incluyen la consideración de un sistema estacionario y la homogeneidad del material. Sin embargo, para el caso estacionario, este resultado funciona bien y es el que se usa comúnmente en el electromagnetismo clásico, razón por la cual es la base de la construcción del modelo geométrico de la ley de Ohm.

3. Simetrías de la teoría electromagnética

El viaje de las ecuaciones de Maxwell comenzó a mediados del siglo XIX con la unificación de las leyes de electricidad y magnetismo. Esto marcó una revolución en la física, prediciendo las ondas electromagnéticas y abriendo camino a innovaciones tecnológicas que hoy en día son fundamentales, tales como: como la radio, la televisión, la tecnología de microondas, la comunicación por satélite, los sistemas de radar, etc. Sin embargo, hacia finales de ese siglo, el electromagnetismo enfrentaba desafíos teóricos, particularmente en relación con la necesidad de un medio de propagación (el éter) para las ondas electromagnéticas. Los resultados de los experimentos de Michelson y Morley para detectar el movimiento de la Tierra a través del éter sugirieron que las bases de la física clásica necesitaban revisión.

Hendrik Lorentz, quien estaba trabajando sobre estos desafíos, desarrolló un conjunto de transformaciones matemáticas, conocidas ahora como las Transformaciones de Lorentz, diseñadas para explicar cómo las mediciones de espacio y tiempo de dos observadores se relacionan cuando se mueven a una velocidad constante relativa entre sí. Lorentz intentó resolver los problemas relacionados con el éter postulando que los objetos físicos se contraen en la dirección del movimiento y que el tiempo medido por un observador puede variar dependiendo de su movimiento relativo respecto al éter, una idea que se conoció como la contracción de Lorentz y la dilatación del tiempo. Estas ideas fueron propuestas para reconciliar las inconsistencias observadas en los experimentos, como el experimento de Michelson-Morley, que no lograba detectar el éter como un medio de propagación de las ondas electromagnéticas. Aunque las ideas de Lorentz no eliminaban la necesidad del éter, sí proporcionaban un marco matemático que mantenía su existencia teórica, mientras explicaban por qué el éter no podía ser detectado experimentalmente.

A principios del siglo XX Albert Einstein, utilizó las transformaciones de Lorentz y la constancia de la velocidad de la luz en el vacío, independientemente del sistema de referencia desde el cual se mida, para enunciar la teoría de la relatividad especial. Esta teoría eliminó la necesidad del éter al demostrar que las leyes de la física, incluidas las ecuaciones de Maxwell, son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales, independientemente del estado de movimiento del observador. En lugar de requerir un medio como el éter para la propagación de las ondas electromagnéticas, la relatividad especial unificó el espacio y el tiempo en una sola entidad conocida como espacio-tiempo, donde estas ondas pueden propagarse sin la necesidad de un fondo material. Con ello, no solo se redefinió la estructura fundamental del espacio y el tiempo, sino que también se sentaron las bases para futuras exploraciones en la física teórica y experimental.

3.1. Simetrías en la física

En la exploración de las leyes físicas, el concepto de simetría desempeña un papel fundamental, no solo como una curiosidad matemática, sino como un principio esencial que moldea nuestra comprensión de la naturaleza. En términos formales, una simetría en física es una transformación que deja inalteradas las ecuaciones que describen un sistema, de modo que las

predicciones del comportamiento del sistema permanecen consistentes bajo dicha transformación. Estas simetrías pueden ser espaciales; como traslaciones y rotaciones, temporales; como inversiones de tiempo o más abstractas; como las simetrías gauge en teoría de campos.

Las simetrías en física revelan leyes de conservación y guían el comportamiento de los sistemas bajo diversos cambios. En este capítulo, revisaremos las simetrías inherentes a la teoría electromagnética, especialmente aquellas que preservan la forma de las ecuaciones de Maxwell a través de diferentes marcos de referencia, basándonos en conceptos de campos electromagnéticos, transformaciones, relatividad y observador.

3.2. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell son leyes fundamentales que describen cómo los campos eléctricos y magnéticos interactúan con sus fuentes, es decir las cargas y corrientes eléctricas. En la formulación clásica las ecuaciones de Maxwell se presentan en dos formas: integral y diferencial:

- **Ley de Gauss para el Campo Eléctrico:**

$$\oiint_{\partial\Omega_3} \vec{D} \cdot \hat{n} \, dS = \iiint_{\Omega_3} \rho_{ext} \, dV. \quad (3.1)$$

Esta ley indica que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada.

- **Ley de Gauss para el Campo Magnético:**

$$\oiint_{\partial\Omega_3} \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS = 0. \quad (3.2)$$

Esta ecuación establece que no existen los monopolos magnéticos, y que los campos magnéticos son siempre continuos, sin inicio ni fin.

- **Ley de Inducción de Faraday:**

$$\oint_{\partial\Omega_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Omega_2} \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS. \quad (3.3)$$

Esta relación, explica cómo un flujo de campo magnético variable en el tiempo genera un campo eléctrico circulante. Esta es la base de los generadores eléctricos y muchos otros dispositivos electromecánicos.

- **Ley de Ampère-Maxwell:**

$$\oint_{\partial\Omega_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Omega_2} \vec{j}_{ext} \cdot \hat{n} \, dS + \frac{d}{dt} \iint_{\Omega_2} \vec{D} \cdot \hat{n} \, dS. \quad (3.4)$$

Esta expresión, relaciona los campos magnéticos con la densidad de corrientes eléctricas y los cambios en el campo eléctrico.

Para cada una de ellas, \vec{B} y \vec{E} son los campos magnético y eléctrico respectivamente, mientras que \vec{H} y \vec{D} representan sus correspondientes campos inducidos en un medio dado. El término ρ_{ext} representa la densidad de carga eléctrica externa, mientras que \vec{j}_{ext} el vector de densidad de corriente eléctrica, estas son las fuentes de los campos. Nótese que los campos inducidos son los que están relacionados con las fuentes mientras que los campos fundamentales parecen independientes. El símbolo ∂ es el operador frontera, en este caso está actuando sobre el dominio de \mathbb{R}^3 , entonces $\partial\Omega_3$ representa la superficie que es frontera de una región abierta $\Omega_3 \subset \mathbb{R}^3$, mientras que $\partial\Omega_2$ es la curva que es frontera de la superficie abierta $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$. Comprender estas ecuaciones permite no solo explicar sino también predecir cómo los campos eléctricos y magnéticos interactúan bajo diferentes circunstancias. Esta capacidad predictiva es crucial para el diseño de tecnologías desde la escala microscópica de los circuitos integrados hasta la macroscópica de las redes de distribución eléctrica y las comunicaciones globales.

Por medio de los teoremas

$$\oint_{\partial\Omega_2} \vec{f} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Omega_2} \nabla \times \vec{f} \cdot \hat{n} \, dS, \quad (\text{Teorema de Stokes}) \quad (3.5)$$

$$\oiint_{\partial\Omega_3} \vec{f} \cdot \hat{n} \, dS = \iiint_{\Omega_3} \nabla \cdot \vec{f} \, dV, \quad (\text{Teorema de Gauss}) \quad (3.6)$$

podemos pasar de esta representación integral a una local (diferencial), ya que estos teoremas son resultados que se cumplen en todo \mathbb{R}^3 podemos emplearlos sin incumplir o afectar a las ecuaciones originales. Aquí, el enfoque cambia de variaciones en todo el campo en función del tiempo a variaciones en cada punto de forma infinitesimal, independientemente de otras variables, esta es la razón por la cual se nombran como la forma local de las ecuaciones de Maxwell. Esto hace necesaria la utilización de derivadas parciales, porque ahora estamos considerando cambios en \vec{E} con respecto a las coordenadas espaciales, de forma independiente en cada punto. La derivada parcial, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, en la forma diferencial de la ley de Faraday refleja la tasa de cambio local de \vec{B} en cada punto en el espacio, asumiendo que las coordenadas espaciales se mantienen fijas durante en este proceso. Dicho esto las ecuaciones de Maxwell en su forma local son:

- **Ley de Gauss para el Campo Eléctrico:**

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{ext}, \quad (3.7)$$

Esta ecuación establece que la divergencia del campo eléctrico \vec{D} en cualquier punto es proporcional a la densidad de carga eléctrica ρ_{ext} en ese punto. Esencialmente indica que las cargas eléctricas son la fuente de los campos eléctricos.

- **Ley de Gauss para el Magnetismo:**

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.8)$$

Esta relación afirma que el campo magnético \vec{B} no tiene divergencia; en otras palabras, no existen monopolos magnéticos, al igual que su contraparte integral. Todas las líneas del campo magnético forman lazos cerrados o se extienden hasta el infinito.

▪ **Ley de Faraday para la Inducción Electromagnética:**

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.9)$$

Esta ley describe cómo un campo magnético variable en el tiempo crea o induce el rotacional de un campo eléctrico. El signo negativo indica que el campo eléctrico inducido se opone al cambio en el campo magnético, según la Ley de Lenz.

▪ **Ley de Maxwell-Ampère:**

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{ext} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3.10)$$

Esta expresión describe como el efecto de un campo eléctrico variable en el tiempo, además de la densidad corriente eléctrica es fuente del rotacional del campo magnético.

Ya sea en la forma integral o diferencial, estas siguen siendo las mismas leyes. Sin embargo por su propia estructura se emplean para diferentes casos de estudio. Sin embargo aún tenemos ecuaciones de Maxwell desacopladas, para poder hablar de las simetrías que mantiene invariantes estas leyes, adicionalmente necesitaremos relaciones constitutivas entre los campos inducidos \vec{D} y \vec{H} y los campos fundamentales \vec{E} y \vec{B} . Es importante mencionar que dichas relaciones cambiarán dependiendo del medio, es decir la respuesta del medio va a ser diferente dependiendo del material.

3.2.1. Relaciones Constitutivas

En la teoría electromagnética, las relaciones constitutivas y las transformaciones de gauge son fundamentales para conectar las ecuaciones de Maxwell con las propiedades físicas de los materiales y para explorar la invariancia de las ecuaciones bajo ciertas transformaciones. Las relaciones constitutivas describen cómo los campos eléctricos y magnéticos inducen otros campos en diferentes medios. Estas relaciones son esenciales para entender cómo los materiales responden a los campos electromagnéticos y son clave para aplicar las ecuaciones de Maxwell en contextos prácticos. Dependiendo del medio, estas relaciones pueden variar significativamente, lo que afecta la manera en que los campos interactúan con la materia. En general podemos escribir las relaciones entre ambos campos como:

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B}), \quad (3.11)$$

$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B}). \quad (3.12)$$

La hipótesis que nosotros vamos a utilizar es que tenemos un medio homogéneo e isotrópico, por lo tanto las relaciones constitutivas tienen la siguiente forma [1]:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (3.13)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}, \quad (3.14)$$

$$\vec{j}_{ind} = \sigma \vec{E}, \quad (3.15)$$

adicionalmente colocamos la ley de Ohm en su forma vectorial, ya que esta es una relación constitutiva, pues relaciona dos campos fundamentales por medio de una propiedad única de los materiales como lo es la conductividad. Como habíamos anticipado, trabajaremos específicamente sobre materiales conductores, sin embargo, haremos un análisis corto con las relaciones constitutivas de un medio dieléctrico, para ilustrar una forma de las ecuaciones de Maxwell que motive la siguiente sección. Usando 3.13 y 3.14 podemos ahora encontrar la solución a las ecuaciones de Maxwell para este medio. Sin embargo, nos podremos dar cuenta que a medida que avanzamos, al igual que en el capítulo anterior, necesitamos de ciertas suposiciones relevantes y necesarias, aunque en este caso, adicionalmente estamos restando generalidad mediante dichas propuestas para llegar a nuestra demostración. Estas suposiciones además de ser indispensables, nos ayudan a simplificar los cálculos, ya que las cuatro ecuaciones en forma local, implican ocho ecuaciones y 12 incógnitas, pero usando estas relaciones constitutivas el problema se reduce a 8 ecuaciones escalares y 6 incógnitas.

3.2.2. Potenciales

Usando potenciales eléctricos y magnéticos [1, 17, 18] podremos reducir significativamente el problema a 4 ecuaciones y 4 incógnitas. Esto se realiza usando la identidad

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{f}) = 0, \quad (3.16)$$

y además sabiendo que 3.8 es válida en \mathbb{R}^3 . Entonces definimos un potencial \vec{A} :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (3.17)$$

usando este resultado en 3.9:

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.18)$$

Esta ecuación es válida en todo \mathbb{R}^3 . Para un potencial escalar ϕ , podemos escribir:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi, \quad (3.19)$$

o, de manera equivalente,

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi. \quad (3.20)$$

Utilizando las ecuaciones 3,17 y 3,20 podemos expresar las seis componentes de los campos \vec{E} y \vec{B} en términos de solo cuatro componentes: las tres componentes del potencial vector \vec{A} y el potencial escalar ϕ . Esto se logra al imponer la condición conocida como *norma de Lorentz*, la cual se define por la relación:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (3.21)$$

donde

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad (3.22)$$

es la velocidad de la luz en el medio, con μ y ϵ representando la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica del medio, respectivamente. La ecuación 3.21 lleva este nombre debido a su compatibilidad con las **transformaciones de Lorentz**, un principio fundamental en la **relatividad especial** que establece la invariancia de las leyes físicas en todos los sistemas de referencia inerciales. En el electromagnetismo, las ecuaciones de Maxwell se pueden reformular utilizando el potencial escalar ϕ y el potencial vectorial \vec{A} , que, juntos, forman el grupo (ϕ, \vec{A}) [18]. Esta condición es especialmente útil en la teoría electromagnética porque impone una restricción específica sobre los potenciales ϕ y \vec{A} , eliminando parte de la libertad de norma asociada a estos. La libertad de norma se refiere a la posibilidad de realizar transformaciones en los potenciales sin afectar los campos eléctricos y magnéticos observables. Sin la norma de Lorentz, esta indeterminación complica los cálculos y la interpretación física. Aunque es matemáticamente conveniente, la norma de Lorentz no siempre conduce a descripciones físicamente intuitivas, especialmente en entornos electromagnéticos complejos, en algunos caso la norma de Coulomb ($\nabla \cdot \vec{A} = 0$), podrían ser más adecuada dependiendo de la situación física específica y las propiedades que se desean enfatizar.

A continuación vamos a escribir las ecuaciones de Maxwell en forma local, usando las componentes del conjunto (\vec{A}, ϕ) , sustituyendo la relación constitutiva 3.13 y la ecuación para el potencial eléctrico 3.20 en ley de Gauss 3.7

$$\nabla \cdot \epsilon \left(-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \right) = \rho_{ext}, \quad (3.23)$$

$$\nabla^2\phi + \nabla \left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\rho_{ext}}{\epsilon}, \quad (3.24)$$

análogamente para la ley de Ampere-Maxwell 3.10:

$$\nabla \times \nabla \times \frac{\vec{A}}{\mu} = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \left(-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \right) + \vec{j}_{ext}. \quad (3.25)$$

$$\frac{1}{\mu} (\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{A}) = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \left(-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \right) + \vec{j}_{ext}. \quad (3.26)$$

$$-\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) + (\nabla \cdot \nabla)\vec{A} + \epsilon\mu \left(-\nabla \frac{\partial}{\partial t} \phi - \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} \right) = -\mu\vec{j}_{ext}. \quad (3.27)$$

$$\left(\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) = -\mu\vec{j}_{ext}. \quad (3.28)$$

Las ecuaciones 3.24 y 3.28 contienen toda la información de las ecuaciones de Maxwell, el siguiente paso consiste en desacoplar los potenciales, sustituyendo en 3.24 y 3.28 la ecuación de la norma de Lorentz 3.21:

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j}_{ext}, \quad (3.29)$$

y

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_{ext}}{\epsilon}. \quad (3.30)$$

Mediante este análisis matemático y claro mediante la elección de un sistema coordinado como pueden ser las coordenadas locales (x, y, z) , hemos encontrado las 4 ecuaciones que buscábamos para un medio homogéneo. Mediante la elección del sistema de coordenadas estas ecuaciones cambian así como sus soluciones. La solución individual a 3.29 y 3.30 es única y de hecho es la solución a la ecuación de onda no homogénea, con tres soluciones para $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y una para ϕ . Por medio de esta forma de las ecuaciones de Maxwell es más sencillo ver la invariancia bajo las transformaciones de Lorentz, lo cual es crucial para la consistencia teórica en la física relativista.

3.3. Relatividad

El concepto de relatividad es fundamental en física y ha evolucionado a lo largo del tiempo a través de las contribuciones de varios científicos. Inicialmente, fue Galileo Galilei quien sentó las bases de la relatividad con sus ideas sobre el movimiento relativo y las transformaciones que llevan su nombre. Estas ideas fueron posteriormente desarrolladas y formalizadas en la mecánica clásica de Isaac Newton. Sin embargo, fue Albert Einstein quien revolucionó nuestra comprensión de la relatividad con sus teorías de la Relatividad Especial y la Relatividad General. La Relatividad Especial, desarrollada en 1905, describe las leyes del movimiento en marcos de referencia inerciales y establece la constancia de la velocidad de la luz, uno de los resultados indirectos de los experimentos de Michelson y Morley. Diez años después, en 1915, Einstein presentó la Relatividad General, una teoría más amplia que describe la gravitación como una curvatura del espacio-tiempo causada por la masa y la energía. En esta sección, exploraremos la evolución del concepto de relatividad, comenzando con la Relatividad Galileana, pasando por la Relatividad Especial, y culminando con las transformaciones de Rindler.

3.3.1. Relatividad Galileana

Formulada por Galileo Galilei en el siglo XVII, es uno de los primeros marcos conceptuales que abordó la idea de movimiento relativo. Galileo propuso que las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales, es decir, en aquellos que se mueven a velocidad constante entre sí. Este principio, conocido también como el principio de relatividad de Newton, establece que no existe un marco de referencia absoluto y que el estado de movimiento uniforme de un sistema no afecta las leyes físicas que en él se aplican. En esencia, esto significa que los experimentos físicos realizados en un sistema en movimiento uniforme deben arrojar los mismos resultados que aquellos realizados en un sistema en reposo. Esta idea se formaliza mediante las transformaciones de Galileo, que describen cómo las coordenadas espaciales y temporales de un evento se transforman de un marco de referencia a otro que se mueve a velocidad constante con respecto al primero, asegurando que las leyes de la física mantengan su forma en ambos sistemas.

En el espacio euclídeo, donde se asume que el tiempo es absoluto, las leyes de Newton ofrecen un marco sólido para describir el movimiento y las interacciones de los cuerpos. Estas leyes, fundamentales en la mecánica clásica, establecen principios como la inercia, la relación entre fuerza y aceleración, y la acción-reacción, que han demostrado ser extremadamente efectivos para predecir y explicar el comportamiento de objetos en una amplia gama de situaciones cotidianas y experimentales. Comenzaremos el estudio de la invariancia de estas leyes, mediante una transformación en el espacio euclídeo bidimensional con coordenadas x y y , que mantiene

invariante la distancia Δs entre dos puntos. Usando el teorema de Pitágoras podemos ver que la distancia Δs está dada por

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2, \quad (3.31)$$

tal y como se muestra en la figura 3.1.

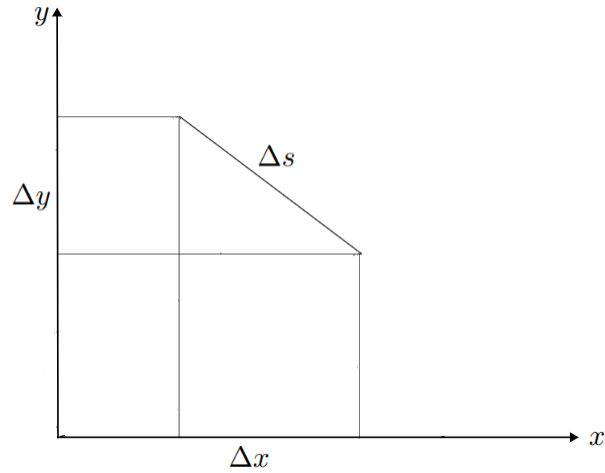


Figura 3.1: Sistema coordenado, donde Δs es la distancia entre dos puntos.

Para otro sistema coordenado definido por x' y y' que está rotado rígidamente con respecto al primero, mediante una transformación Λ , esto se muestra en la figura 3.2

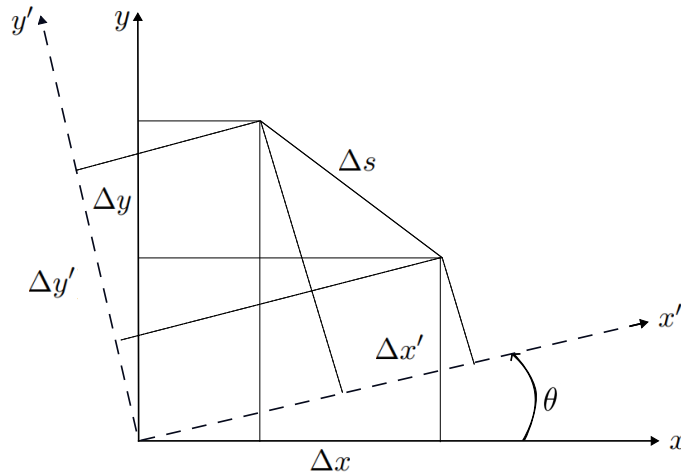


Figura 3.2: Sistema coordenado con una rotación rívida.

con

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

una transformación de rotación rívida, donde θ es el ángulo de rotación. en este sistema primado, vemos que la distancia entre los mismos puntos esta dada por:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2. \quad (3.33)$$

La distancia $(\Delta s)^2$ se mantiene invariante en ambos sistemas, lo que asegura que el teorema de Pitágoras sigue siendo válido bajo esta transformación. Este principio se puede extender a \mathbb{R}^3 , donde las distancias Δs se reemplazan por incrementos ds , sin alterar la definición de distancia. En coordenadas rectangulares, esta relación se expresa como:

$$(ds)^2 := (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2, \quad (3.34)$$

por medio de esta definición, podemos introducir al siguiente elemento que es fundamental para nuestro trabajo: La matriz métrica que define el teorema de Pitágoras en un espacio euclídeo y el producto interno que da la noción de distancia. En general lo único que pedimos que cumpla por el momento es que sea una matriz invertible. Por su puesto las rotaciones rígidas se pueden generalizar a el espacio tridimensional, por lo tanto, también podemos decir que la distancia entre dos puntos en \mathbb{R}^3 , no cambia ante tales cambios de coordenadas.

El grupo de transformaciones de Galileo es el conjunto de transformaciones que mantienen invariante la estructura espacial en el contexto de la mecánica clásica, es decir, la métrica que define las distancias entre puntos en el espacio euclidiano, sin considerar efectos relativistas. Este grupo describe cómo cambian las coordenadas espaciales entre sistemas de referencia inerciales que se mueven a velocidad constante entre sí, mientras que el tiempo es absoluto, es decir, es el mismo para todos los observadores. El grupo de Galileo está compuesto por las siguientes transformaciones:

- **Transformaciones de posición con velocidad constante:**

Representan el cambio de un sistema de referencia inercial a otro que se mueve con velocidad constante \vec{v} respecto al primero. La transformación se da por:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}t, \quad (3.35)$$

donde \vec{r} es la posición en el sistema inicial, y \vec{r}' es la nueva posición en el sistema moviéndose con velocidad \vec{v} .

- **Traslaciones en el espacio (desplazamientos del origen):**

Estas transformaciones corresponden a un desplazamiento del origen del sistema de referencia sin cambiar la orientación ni el movimiento relativo. La transformación es:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{r}_1, \quad (3.36)$$

donde \vec{r}_1 es un vector de traslación que desplaza el origen espacial en el sistema de referencia.

- **Rotaciones rígidas de los ejes coordenados:**

Las rotaciones corresponden a transformaciones que cambian la orientación de los ejes espaciales sin alterar el tiempo ni la magnitud de las distancias espaciales. La transformación se expresa como:

$$\vec{r}' = \Lambda \vec{r}, \quad (3.37)$$

donde Λ es una matriz ortogonal de rotación 3×3 tal que $\Lambda^\top \Lambda = I$, preservando las distancias y los ángulos en el espacio. Esta transformación es válida para cualquier $t \in \mathbb{R}$ y $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$.

El grupo de Galileo describe las simetrías de la mecánica clásica, y todas estas transformaciones actúan sobre la métrica espacial euclidiana g_0 , pero no modifica el tiempo de forma relativista. Este grupo define las simetrías subyacentes de la mecánica newtoniana.

3.3.2. Relatividad Especial

Introducida por Einstein en 1905, trata de objetos moviéndose a velocidades constantes y altas, especialmente cerca de la velocidad de la luz, y en ausencia de fuerzas gravitacionales. Se fundamenta en dos postulados principales:

- **Principio de Relatividad:** Las leyes de física son similares en todos los marcos de referencia inerciales, lo que significa que ningún marco inercial es inherentemente preferido sobre otro.
- **Constancia de la Velocidad de la Luz:** La velocidad de la luz en el vacío es constante, aproximadamente 299,792,452 m/s, y es independiente del movimiento de la fuente o del observador.

En relatividad especial, el espacio en el que trabajaremos no es el espacio euclídeo, por supuesto, necesitamos uno en el cual las ecuaciones de Maxwell sean válidas. Para ello, utilizaremos el espacio de Minkowski. Aquí, las coordenadas espaciales se usan como un sistema cartesiano estándar y se combinan con la coordenada temporal para formar lo que definiremos como nuestro nuevo marco de referencia inercial. Esto es válido siempre y cuando la coordenada temporal no se mueva con respecto a las coordenadas espaciales. De tal manera que si viajamos de un punto del espacio a cualquier otro en línea recta a velocidad constante, la diferencia de tiempo al final del viaje será la misma que si hubiéramos realizado el mismo viaje, a la misma velocidad, en otra dirección. El espacio de Minkowski es una variedad cuatro-dimensional (tres espaciales y una temporal) equipada con una métrica lorentziana. Este espacio, a diferencia del euclídeo, incorpora el tiempo como una cuarta dimensión que es inseparable de las otras tres dimensiones espaciales, reflejando la estructura fundamental del espacio–tiempo, donde el intervalo entre dos eventos se define como:

$$ds^2 := -(c dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (3.38)$$

donde c es un factor de conversión entre las coordenadas espaciales y la temporal, este factor puede ser positivo, negativo o incluso cero para dos eventos distintos. Esto es algo que vale la pena mencionar porque a diferencia del caso euclídeo, acá la norma de un *vector* puede ser negativa.

3.3.3. Transformaciones de Lorentz

El Grupo de Lorentz o Transformaciones de Lorentz es el conjunto de transformaciones que preservan la forma de la métrica en el espacio-tiempo de Minkowski, que es la métrica utilizada en la teoría especial de la relatividad para describir el espacio-tiempo. A diferencia del grupo de Galileo, que considera un tiempo absoluto y velocidades bajas, el grupo de Lorentz tiene en cuenta la constancia de la velocidad de la luz y la naturaleza interrelacionada del espacio y el tiempo. El grupo de Lorentz tiene varias propiedades importantes que lo diferencian del grupo de Galileo:

- **Invariancia del intervalo espacio-temporal:** A diferencia del grupo de Galileo, donde las transformaciones mantienen invariante solo la distancia espacial, el grupo de Lo-

rentz preserva el intervalo espacio-temporal ds^2 , que puede ser positivo, negativo o nulo, dependiendo de la naturaleza del evento (separación tipo tiempo, tipo espacio o nula).

- **Relatividad del tiempo y el espacio:** Las transformaciones de Lorentz mezclan el tiempo y el espacio, lo que refleja el hecho de que el tiempo no es absoluto y depende del observador. Este es un principio fundamental de la relatividad especial: diferentes observadores pueden medir diferentes tiempos y distancias para el mismo evento.
- **Simetría de las ecuaciones de Maxwell:** El grupo de Lorentz es fundamental en la teoría del electromagnetismo, ya que las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo estas transformaciones, lo que significa que tienen la misma forma para todos los observadores inerciales.

Como en el caso anterior encontramos una matriz de rotación espacial (esta puede cambiar dependiendo de los ejes espaciales de coordenadas):

$$\Lambda_{j'}^{i'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

con $\theta \in (0, 2\pi)$ y adicionalmente una matriz de rotaciones entre las direcciones del espacio y el tiempo llamadas **impulsos**, por ejemplo:

$$\Lambda_{j'}^{i'} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

aquí la variable ϕ está definida desde $-\infty$ hasta ∞ [19]. Vamos a ver cómo es la transformación en una dimensión espacial y la temporal, dejando invariantes las coordenadas y y z usando los **impulsos**:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

$$t' = t \cosh \phi - \frac{x}{c} \sinh \phi, \quad (3.42)$$

$$x' = x \cosh \phi - ct \sinh \phi. \quad (3.43)$$

Si fijamos $x' = 0$, obtenemos en la ecuación 3.43, un sistema de referencia que se está moviendo con una rapidez v , para ver esto vamos a despejar x para obtener una función dependiente del tiempo t

$$x = \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} ct = ct \tanh \phi, \quad (3.44)$$

luego derivamos con respecto al tiempo

$$\frac{dx}{dt} = v = c \tanh \phi, \quad (3.45)$$

despejando ϕ

$$\phi = \operatorname{artanh}\left(\frac{v}{c}\right), \quad (3.46)$$

usando las identidades:

$$\cosh(\operatorname{artanh}(a)) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}, \quad (3.47)$$

$$\sinh(\operatorname{artanh}(a)) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \quad (3.48)$$

y la ecuación 3.46 en 3.42 y 3.43 tenemos

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \frac{\frac{x}{c}(\frac{v}{c})}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ x' &= \frac{x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \frac{ct(\frac{v}{c})}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

simplificando y factorizando

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \quad (3.50)$$

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (3.51)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}. \quad (3.52)$$

Las ecuaciones 3.50 y 3.51 son de hecho las transformaciones de Lorentz que podemos hallar en la literatura [20]. La ecuación 3.50 se refiere a un concepto conocido como dilatación del tiempo, que modela como el tiempo se ralentiza para los objetos en movimiento según lo observado desde un marco estacionario, volviéndose más pronunciado a medida que los objetos se acercan a la velocidad de la luz. Por su parte, la ecuación 3.51 se refiere a la contracción de la longitud, que predice como los objetos en movimiento se observan más cortos en la dirección del movimiento desde una perspectiva estacionaria. Estas relaciones nos indican que a medida que cambia nuestro estado de movimiento, percibirás el espacio y el tiempo de manera diferente; en otras palabras, observadores diferentes miden cosas diferentes dependiendo de su estado de movimiento relativo. Esto subraya un principio fundamental de la relatividad especial: no existen marcos de referencia absolutos, y las mediciones de tiempo y espacio son relativas al estado de movimiento del observador.

Por otro lado, la distinción entre la masa en reposo y la masa en movimiento también es un efecto relativista. La masa en reposo es una propiedad intrínseca que no depende de la velocidad, mientras que la masa relativista varía con la velocidad de acuerdo con las transformaciones de Lorentz. La masa relativista m está relacionada con la masa en reposo m_0 mediante el factor de Lorentz γ :

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.53)$$

donde m es la masa relativista del objeto que depende de su velocidad, m_0 es la masa en reposo; la masa que tiene el objeto cuando está en reposo respecto a un observador y es invariante en todos los marcos inerciales, v es la velocidad del objeto y c es la velocidad de la luz en el vacío. Esta relación muestra que, a medida que la velocidad v del objeto se aproxima a la velocidad de la luz c , el denominador tiende a cero, lo que provoca que la masa relativista m tienda a infinito. Esto implica que es necesaria una cantidad infinita de energía para acelerar un objeto con masa hasta la velocidad de la luz.

Las transformaciones de Lorentz son cruciales para entender la invariancia de las ecuaciones de Maxwell y otros fundamentos de la física moderna, demostrando que las leyes físicas son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales. Esto es un punto importante en el presente trabajo; en un medio homogéneo, las ecuaciones de Maxwell son invariantes ante las transformaciones de Lorentz, es decir estas son las mismas para cualquier marco de referencia inercial.

3.4. Transformación de la conductividad

Ahora veremos como cambia el factor de la conductividad mediante las transformaciones de Lorentz. Esto es, en el capítulo 2, mediante el análisis del modelo de Drude, obtuvimos la relación de la conductividad eléctrica. Todos los elementos de los cuales depende el valor de σ son independientes, los cuales caracterizan a nuestro material conductor. Dentro de estas cantidades, sólo la carga es una cantidad fundamental en la física, y para los materiales conductores es la carga del electrón, las otras, tal y como hemos discutido en la sección anterior, sufrirán una transformación cuando sometamos nuestro conductor a un cambio en su estado de movimiento.

Consideremos un conductor sometido a un estímulo eléctrico tal y como lo describimos en el capítulo 2, por medio de la figura 2.1. Ahora, consideremos que este conductor se mueve en la dirección x , donde la conductividad en el marco de reposo se describe como:

$$\sigma = ne^2 \frac{\tau}{m}, \quad (3.54)$$

donde n es el número de portadores de carga por unidad de volumen. En este análisis, e es la carga del electrón, τ es el tiempo libre medio y m es la masa de los portadores de carga.

Considerando las transformaciones de Lorentz, el espacio y tiempo se transforman mediante las ecuaciones 3.50 y 3.51. Para el conductor en movimiento en la dirección x , el volumen total $V = A \cdot L$, donde A es el área transversal (perpendicular a la dirección del movimiento) y L es la longitud en la dirección x , se transforma debido a la contracción de Lorentz en la longitud L al tiempo $t = 0$:

$$x' = \gamma(x - vt) \implies L = \frac{L'}{\gamma}. \quad (3.55)$$

Así, el volumen transformado es:

$$V = A \cdot L = \frac{V'}{\gamma}. \quad (3.56)$$

El tiempo de relajación τ , que representa el tiempo libre medio entre colisiones de los portadores de carga, experimenta una dilatación temporal en el marco en movimiento:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right). \quad (3.57)$$

Cuando $x = 0$, es decir, cuando el observador está en el mismo punto que el evento, la transformación de tiempo se simplifica a:

$$\tau' = \gamma\tau. \quad (3.58)$$

La masa en reposo de los portadores de carga también se transforma bajo una transformación de Lorentz. La masa relativista se relaciona con la masa en reposo m mediante:

$$m' = \gamma m. \quad (3.59)$$

Ahora podemos obtener la expresión para la conductividad σ' en el marco en movimiento. Si N es el número de partículas, entonces, $n = N/V$, corresponde a la densidad de partículas, que se transforma de la siguiente manera

$$n' = \frac{N}{V'} = \gamma n. \quad (3.60)$$

El tiempo de relajación se dilata:

$$\tau' = \gamma\tau, \quad (3.61)$$

y la masa se incrementa:

$$m' = \gamma m. \quad (3.62)$$

Sustituyendo estas transformaciones en la expresión de la conductividad, obtenemos:

$$\sigma' = n' e^2 \frac{\tau'}{m'} = \gamma n e^2 \frac{\tau}{m}. \quad (3.63)$$

Simplificando:

$$\sigma' = \gamma\sigma. \quad (3.64)$$

Cuando un conductor se mueve a velocidad constante, su conductividad se ve modificada debido a efectos relativistas como: la contracción de la longitud, la dilatación del tiempo y el aumento de la masa de los portadores de carga. Mediante el resultado 3.64, podemos responder la pregunta central de este trabajo: Un conductor eléctrico aumentará el valor de su conductividad eléctrica respecto a su valor en el estado en reposo, y alcanzará un valor límite al aproximarse a una velocidad máxima, ya que la teoría de la relatividad prohíbe que cualquier objeto con masa alcance la velocidad de la luz. El análisis presentado solo es válido para movimientos a velocidad constante en el espacio de Minkowski, para obtener resultados más generales es necesario incorporar otros factores relativistas y electromagnéticos que influyen en la conductividad.

4. Electromagnetismo geométrico

May one plow with an ox and ass together? The like of you may write everything in quaternions, but in the transition period the bilingual method may help to explain the more perfect. —James Clerk Maxwell, in a letter to P. G. Tait.

A modo de breve perspectiva histórica, citamos esta parte de una carta escrita por James Clerk Maxwell, una de las figuras más imponentes en el campo del electromagnetismo, si no es que la principal tal y como lo menciona el Profesor Freeman J. Dyson que habla al respecto en su ensayo "Why is Maxwell's Theory so hard to understand?", en donde resalta el trabajo de Maxwell como uno de los más importantes en su generación, además de resaltar la idea de: porqué la falta de audacia muchas veces es contraproducente; esta idea resuena en muchos de nosotros, sobre todo en el contexto científico.

En esta carta Maxwell hace una reflexión bastante interesante a su colega P. G. Tait, sobre la elegancia y utilidad de usar cuaterniones para describir las leyes físicas. Destacó un método transicional que, aunque lejos de la perfección, ayuda a tender un puente de comprensión entre descripciones clásicas y formulaciones matemáticas más abstractas. Esta cita subraya un tema más amplio en física: el cambio de descripciones intuitivas y clásicas a modelos más sofisticados y, a menudo, contraintuitivos que ofrecen una mayor capacidad explicativa.

4.1. Perspectiva geométrica

En el capítulo anterior exploramos las ecuaciones de Maxwell desde una perspectiva relativista, enfatizando la importancia de la elección del sistema de coordenadas en su formulación y solución. Tradicionalmente, esta dependencia ha sido vista como esencial para la descripción de fenómenos electromagnéticos. Sin embargo, existe una metodología alternativa que prescinde del uso convencional de coordenadas, por medio de formas diferenciales y geometría diferencial, para revelar la estructura geométrica subyacente de las ecuaciones de Maxwell y de esta manera ver su independencia de cualquier sistema de referencia de una manera más directa. El enfoque geométrico no solo clarifica conceptos que suelen estar oscurecidos por transformaciones de coordenadas, sino que también proporciona un set de herramientas que tienen origen en el contexto gravitacional y que se pueden aplicar a la teoría electromagnética en contextos variados, incluyendo campos curvos del espacio-tiempo. Además, facilita la integración de la teoría electromagnética con otras áreas de la física, como la mecánica y la teoría cuántica de campos [3].

A lo largo de la discusión, que presentamos en este capítulo se exploran ejemplos y aplicaciones del formalismo, subrayando cómo este enfoque transforma nuestra comprensión y manipulación de los campos electromagnéticos. Esta metodología nos invita a reconsiderar nuestro entendimiento del electromagnetismo, abriendo la puerta a una interpretación donde las leyes de Maxwell se manifiestan en una forma puramente geométrica, liberada de las limitaciones de un sistema coordinado específico, lo que nos reafirma su carácter de postulado global.

4.2. Ecuaciones de Maxwell en Formas Diferenciales

Las cuatro componentes de las ecuaciones de Maxwell (\vec{A}, ϕ), son una forma cerrada del espacio de Minkowsky y cómo veremos a continuación también pueden ser representadas usando conceptos de geometría diferencial. Iniciaremos reescribiendo parte de las ecuaciones de Maxwell en forma integral, para expresar los campos \vec{E} , \vec{B} y la fuente ρ_{ext} como formas diferenciales. Ocultos a la vista vemos que las formas diferenciales subyacen en las ecuaciones de Maxwell en su forma integral como aquellos elementos que ocurren bajo el símbolo de la integral, por ejemplo, en el lado izquierdo de la ley de Faraday 3.1

$$\oint_{\partial\Omega_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (4.1)$$

tenemos una 1-forma

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = E_x dx + E_y dy + E_z dz, \quad (4.2)$$

para una integral de superficie, como en la ley de Gauss

$$\oint_{\partial\Omega_3} \vec{B} \cdot \hat{n} dS, \quad (4.3)$$

tenemos una 2-forma

$$\vec{B} \cdot \hat{n} dS = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy \quad (4.4)$$

y para una integral de volumen en el lado derecho de la ley de Gauss

$$\int_{\Omega_3} \rho_{ext} dV \quad (4.5)$$

tenemos una 3-forma

$$\rho_{ext} dV = \rho_{ext} dx \wedge dy \wedge dz, \quad (4.6)$$

los objetos representados en las ecuaciones 4.2, 4.4 y 4.6, son elementos de un espacio vectorial T_p^*M , con una dimensión extra en cada caso y donde la variedad M es el espacio de Minkowsky. Dicho esto, vamos a agrupar las formas de los campos E y B , en otra forma diferencial (2-forma) usando los vectores duales 4.2 y 4.4:

$$F = (E_x dx + E_y dy + E_z dz) \wedge (dt) + (B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy), \quad (4.7)$$

la adición del elemento dt , es necesaria, ya que la forma del campo eléctrico es una 1-forma, con esto además de volverlo una 2-forma podemos asegurar la coherencia de unidades junto con el elemento c cuya equivalencia la podemos ver en 3.22. Podemos escribir 4.7 de manera compacta como:

$$F = E \wedge dt + B, \quad (4.8)$$

Esta expresión se conoce como el tensor de Faraday y mediante la aplicación de la derivada exterior, podemos llegar a la primera ecuación de Maxwell en forma diferencial:

$$dF = d(E \wedge dt + B) = d(E \wedge dt) + dB, \quad (4.9)$$

si nos fijamos en el producto y su derivada

$$d(E \wedge dt) = d(E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt), \quad (4.10)$$

$$= E_x d(dx \wedge dt) + E_y d(dy \wedge dt) + E_z d(dz \wedge dt), \quad (4.11)$$

$$= E_x(dx \wedge dt) + E_y(dy \wedge dt) + E_z(dz \wedge dt), \quad (4.12)$$

del lado derecho

$$dB = d(B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy) \quad (4.13)$$

$$= B_x(dt \wedge dx) + B_y(dt \wedge dy) + B_z(dt \wedge dz), \quad (4.14)$$

dado que $\frac{E}{c} = B$ y estos tensores son antisimetricos: $dt \wedge dx = -dx \wedge dt$. Entonces:

$$dF = 0. \quad (4.15)$$

Sin el uso de una estructura matemática como lo pueden ser las ecuaciones 3.24 y 3.28 o incluso 3.29, esta expresión contiene a los campos eléctrico y magnético, además de que no hemos siquiera mencionado el uso de un sistema coordenado en particular, cosa que es una de las principales aclaraciones que se debe hacer en el tratamiento clásico como lo discutimos en el capítulo anterior. Ahora introduciremos a la 3-forma de las fuentes, esta forma no sólo contiene información de la forma de carga eléctrica 4.6, si no también de la de corriente, definida por:

$$J = (J_x dy \wedge dz + J_y dz \wedge dx + J_z dx \wedge dy) \wedge dt - \rho_{ext} dx \wedge dy \wedge dz, \quad (4.16)$$

o en su forma compacta

$$J = j \wedge dt - \rho, \quad (4.17)$$

por medio de esta vamos a encontrar la expresión en forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell que contiene las fuentes, es decir 3.1 y 3.4. Usando en dual de Hodge en 4.17 y 4.15 podremos igualar ambas expresiones como hicimos anteriormente:

$$d \star F = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \star J, \quad (4.18)$$

o en su forma alterna

$$\star d \star F = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} J, \quad (4.19)$$

ya que $\star \star J = J$. Aquí usamos la relación 3.22 con el despeje $\epsilon = \frac{1}{c^2 \mu}$. Las ecuaciones 4.15 y 4.19, son de hecho las ecuaciones de Maxwell en formas diferenciales pero más específicamente, son los postulados locales de estas. Tal como lo hicimos en el capítulo 3, podemos escribir las ecuaciones de Maxwell usando los potenciales, usando 4.15 y el lema de Poincaré [21]:

$$dd = d^2 = 0. \quad (4.20)$$

Entonces, para una forma de potencial A , tenemos

$$F = dA, \quad (4.21)$$

o a través del operador dual:

$$d \star A = 0, \quad (4.22)$$

o aplicando nuevamente la derivada exterior:

$$d \star dA = \mu J, \quad (4.23)$$

podemos reescribir a 4.23 por medio de la contracción

$$\star \square A = \mu J, \quad (4.24)$$

donde la expresión 4.24 al igual que en el capítulo anterior expresa toda la información de las ecuaciones de Maxwell en su forma local. Por medio del teorema de Stokes, podemos pasar de postulados locales a globales

$$\oint_{\partial\Omega} F = \int_{\Omega} dF, \quad (4.25)$$

o

$$\oint_{\partial\Omega} F = 0, \quad (4.26)$$

donde 4.26, es la ecuación de Maxwell en su forma global. En la formulación de las ecuaciones de Maxwell utilizando formas diferenciales, la invarianza de Lorentz se ilustra de manera bastante sutil y precisa. Como hemos podido ver a lo largo de este análisis, esta forma proporciona una manera natural y concisa de expresar estas leyes que es independiente de sistemas de coordenadas específicos, haciendo su invarianza de Lorentz más que evidente. En las ecuaciones 4.15 y 4.18, las formas F y $\star F$ están definidas independientemente de cualquier sistema de coordenadas, es decir, permanecen iguales bajo cualquier cambio suave de coordenadas, incluidas las transformaciones de Lorentz (rotaciones e impulsos), que describimos en el apartado de relatividad. Adicionalmente la invarianza de Lorentz también puede verse en las operaciones d (derivada exterior) y \star (operador estrella de Hodge) que también son invariantes bajo transformaciones de Lorentz. Por lo tanto, la forma de las ecuaciones de Maxwell permanece sin cambios bajo estas transformaciones, destacando su compatibilidad natural con la estructura del espacio-tiempo descrita por la teoría de la relatividad.

Podemos concluir esta exploración de las leyes de Maxwell a través de la lente de las formas diferenciales, donde descubrimos no sólo una reformulación de leyes conocidas sino una puerta de entrada a una comprensión más profunda. Este enfoque geométrico no sólo simplifica las matemáticas, haciendo que las leyes sean más accesibles y globales, sino que también resaltan sus simetrías fundamentales de la naturaleza. Además, este enfoque nos invita a considerar las implicaciones del electromagnetismo en el espacio-tiempo curvo, un paso preliminar hacia las geometrías complejas que se encuentran en la relatividad general. Al entrelazar el tejido de la teoría de campos con la curvatura del espacio-tiempo, las formas diferenciales ofrecen un marco convincente que algún día podría mejorar nuestra capacidad para diseñar dispositivos electromagnéticos más sofisticados o conducir a nuevas predicciones en el contexto de los fenómenos astrofísicos.

4.3. Ley de Ohm en formas diferenciales

El capítulo anterior sentó las bases de la geometría diferencial en el electromagnetismo, presentando además nuevas herramientas y generalizando otras que ya habíamos discutido previamente en el capítulo 3. A continuación, introduciremos algunos conceptos clave que servirán en esta formulación.

4.4. Elementos del modelo

4.4.1. Métrica

En física, especialmente en la teoría de la relatividad, el tensor métrico es crucial. Define la estructura geométrica del espacio-tiempo. Determina cómo se miden las distancias, los tiempos y cómo el campo gravitatorio afecta los movimientos de los cuerpos y la propagación de la luz. Formalmente es una función definida en una variedad que asigna una forma bilineal simétrica en cada punto de una variedad. Dada una variedad M , el tensor métrico g en un punto $p \in M$ es una forma bilineal simétrica y no degenerada en el espacio tangente $T_p M$ en p . Es decir, para dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in T_p M$, la métrica proporciona un escalar $g(\vec{u}, \vec{v})$ que representa el producto interno de \vec{u} y \vec{v} [11, 20].

Propiedades

- **Simetría:** $g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\vec{v}, \vec{u})$ para todos los vectores \vec{u}, \vec{v} . En notación tensorial: $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.
- **No degeneración:** El único vector \vec{u} que satisface $g(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ es el vector cero ($\vec{v} = \vec{0}$). En otras palabras implica que el determinante de la métrica en su forma matricial para cualquier vector no nulo: $\det(g) \neq 0$. Esto nos permite definir la métrica inversa $g^{\mu\nu}$, tal que $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta_{\sigma}^{\mu}$.

En una base coordenada cualquiera, podemos definirla como:

$$g = g_{\mu\nu} dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}. \quad (4.27)$$

4.4.2. Densidad de corriente

Se define como un propiedad física que se conserva [3, 22, 23]. Vamos a expresar esta densidad por medio de la siguiente expresión

$$\oint_{\partial\Omega_n} j \stackrel{!}{=} 0, \quad (4.28)$$

donde j es la forma de la corriente, ∂ es el operador frontera de una región Ω_n , el símbolo $\stackrel{!}{=}$ indica un postulado empírico. Es decir j es una $(n-1)$ -forma que atraviesa la frontera $\partial\Omega$ y el flujo total es cero. A través del Teorema de Stokes ahora en formas diferenciales, podemos escribir 4.28 en su forma local:

$$\oint_{\partial\Omega_n} j = \int_{\Omega_n} dj = 0, \quad (4.29)$$

o

$$dj = 0, \quad (4.30)$$

para cualquier región $\Omega_n \subset \mathcal{M}$ tal que $\dim(\Omega_n) = \dim(\mathcal{M}) = n$ y dj es una n -forma con $0 < n < \dim(\mathcal{M})$. La expresión 4.29 junto 4.25 son postulados que expresan la conservación de flujo y de campo respectivamente. De hecho, estas son las ecuaciones de Maxwell en su forma integral, en la representación geométrica. Esta representación, permite expresar la corriente eléctrica de una manera que es invariante con respecto a transformaciones de coordenadas, lo cual es esencial en espacios curvos o geometrías más complejas.

4.4.3. Observador

En el contexto de la geometría diferencial, particularmente en relación con la física y la teoría de la relatividad, un observador se puede definir por medio de una curva temporal en una variedad espacio-tiempo. Esta curva describe la línea de mundo de un observador que se mueve a través del espacio-tiempo. Las propiedades de esta curva, como su dirección y curvatura, codifican el movimiento y la orientación del observador en el espacio-tiempo. Este elemento cumple las siguientes características:

- **Curva Temporal:** Una curva $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ en una variedad espacio-tiempo \mathcal{M} , y γ una función suave. Para que esta curva represente a un observador, debe ser temporal, lo que significa que en cada punto a lo largo de la curva, el vector tangente $\dot{\gamma}(t)$ debe ser un vector con dirección $\frac{\partial}{\partial t}$ con respecto a la métrica propia del espacio-tiempo. Este requisito asegura que el observador viaje más lento que la velocidad de la luz y experimente tiempo.
- **Vector Tangente como Cuadri-Velocidad:** El vector tangente a la curva en cualquier punto se interpreta como la *Cuadri-Velocidad* del observador. Este vector no solo indica la dirección, sino también la velocidad a la que se mueve el observador. Se normaliza de modo que $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) < 0$, asegurando que la longitud del vector se conserve y corresponda a una parametrización de tiempo propio.
- **Campo de vectores duales a lo Largo de la Curva:** Para describir completamente a un observador, a menudo se usa un campo de vectores duales a lo largo de la curva. Esto consiste en un conjunto de campos vectoriales ortogonales a lo largo de γ . Los vectores adicionales en el campo de los duales, pueden representar la orientación espacial del observador y son ortogonales a la *four-velocity*, asegurando que abarcan el espacio ortogonal al movimiento del observador en cada punto.
- **Derivada Covariante:** La aceleración del observador se puede describir usando la derivada covariante de la *Cuadri-Velocidad* a lo largo de la curva misma. Si la derivada covariante $\partial_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t)$ es cero, se dice que el observador está en caída libre, sin experimentar aceleración propia.

Dicho esto, vamos a definir a nuestro observador en coordenadas del espacio de Minkowsky como el campo vectorial:

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial}{\partial t}. \quad (4.31)$$

Los elementos restantes ya los hemos discutido en el capítulo anterior: la forma de campo y la conductividad propia del material conductor etc. Por lo tanto podemos proceder con el ensamblaje de nuestro modelo geométrico de la ley de Ohm.

4.5. Construcción del modelo geométrico de la de Ohm

Para llegar a la relación constitutiva en formas diferenciales de la ley de Ohm, vamos a plantearnos la siguiente pregunta: ¿qué corriente j mide un observador?. La respuesta dependerá por supuesto de si el conductor está sometido a un campo y si está en reposo o no. Las formas F y J , dependen explícitamente de quién las mida. Para la 2-forma de campo F esta idea ya ha sido explorada a fondo en [23]. Para la forma de corriente, como podemos anticipar, cambiará dependiendo del tipo de movimiento que experimenta el conductor o el observador. Esta idea se discutió también en el capítulo 3, en el apartado de relatividad espacial; observadores diferentes miden cosas diferentes (distancias y tiempos), y podemos conocer exactamente estas medidas a través de las transformaciones de Lorentz.

Como primera formulación vamos a construir la versión covariante de la ley de Ohm en formas diferenciales, para el caso en que, tanto el conductor como el observador, están estáticos. Es decir la ley de Ohm usual, pero mediante una construcción geométrica, dándole por supuesto, el carácter de postulado global, al igual que hicimos en el capítulo anterior con las ecuaciones de Maxwell. El primer paso consiste en definir el espacio donde estamos trabajando, es decir el medio conductor homogéneo e isotrópico, este se va a definir por medio de la métrica:

$$g = \sum_{i,j=1}^3 g_{0ij} dx^i \otimes dx^j - \frac{1}{\epsilon\mu} dt \otimes dt, \quad (4.32)$$

donde ϵ y μ son las permitividades eléctricas y magnéticas del medio respectivamente. Recordemos que una sola variedad \mathcal{M} puede tener un número infinito de tensores métricos, cada uno de los cuales describe una geometría diferente. En este sentido, por medio del principio de Fermat (los caminos que extremizan la distancia que conectan dos puntos en la variedad \mathcal{M} , pueden drásticamente cambiar para cada par (\mathcal{M}, g)), cada tensor métrico puede ser considerado como un medio material en el cual se da la propagación de ondas electromagnéticas [23].

Comencemos con el análisis sin aplicar el campo al medio conductor. Como sabemos la corriente que debería medir el observador en este caso es cero pues lo único que vería el observador sería un flujo de cargas neto cero en el conductor. Sin embargo, hasta este punto estamos trabajando con formas diferenciales, tensores y campos vectoriales, por lo tanto, tenemos que hacer algunos ajustes en los siguientes pasos para que los cálculos tengan sentido; a continuación vamos escribir de manera general a nuestra forma de corriente como la suma de dos p-formas

$$j = dt \wedge \mathcal{J} - \rho, \quad (4.33)$$

donde la 1-forma dt , es el campo del observador en formas diferenciales. Este elemento en producto con \mathcal{J} es la corriente que mide el observador y la vamos a definir como el flujo de corriente. Esta serie de cálculos es necesaria para mantener la igualdad entre ambos términos, esto debido a cómo hemos definido a cada uno de estos. Esto se ve con mayor claridad si fijamos estos conceptos en el espacio de Minkowsky, aquí 4.33 es la ecuación 4.17 multiplicado por un factor constante que tiene que ver con el medio (en este caso el vacío), es decir, para el espacio-tiempo ($n = 4$) j es una 3-forma

$$dt \wedge \mathcal{J} = dt \wedge \mathcal{J} = (J_1 dy \wedge dz \wedge dt + J_2 dz \wedge dx \wedge dt + J_3 dx \wedge dy \wedge dt), \quad (4.34)$$

entonces la corriente \mathcal{J} será

$$\mathcal{J} = J_1 dy \wedge dz - J_2 dx \wedge dz + J_3 dx \wedge dy, \quad (4.35)$$

adicionalmente podemos ver que aplicado a ρ , tenemos

$$dt \wedge \rho = dt \wedge (\rho_{xyz} dx \wedge dy \wedge dz + \rho_{xyz} dy \wedge dz \wedge dt + \rho_{xyz} dz \wedge dx \wedge dt + \rho_{xyz} dx \wedge dy \wedge dt) = \rho_{xyz} dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt. \quad (4.36)$$

En una variedad \mathcal{M} , una forma diferencial ω de grado p , es una función p -lineal que asigna p campos vectoriales a un número real, cumpliendo la propiedad de antisimetría. Por otro lado un campo vectorial v en \mathcal{M} asigna un vector tangente a cada punto de la variedad. Por la forma en cómo hemos definimos la densidad j en 4.33, ρ es una $(n-1)$ -forma, sin embargo es transversal al observador, esto se puede ver más claro con la contracción de una p -forma y el campo vectorial del observador y la forma de las fuentes.

4.5.1. Contracción de una p -forma con un campo vectorial

La operación $\iota_v \omega$ (también conocida como el producto interior o el operador de inserción) contrae la forma p -diferencial ω con el campo vectorial v . Esta contracción reduce el orden de la forma en uno, resultando en una forma de $(p-1)$ -diferencial. :

$$\iota_v \omega [u_{(1)}, \dots, u_{(p-1)}] = p \cdot \omega [v, u_{(1)}, \dots, u_{(p-1)}], \quad (4.37)$$

esta sugiere que la contracción $\iota_v \omega$ al actuar sobre $(p-1)$ -campos vectoriales $\{u_{(i)}\}_{i=1}^{p-1}$ se calcula insertando el campo vectorial v como primer argumento en ω y multiplicando el resultado por p [23]. Mediante esta contracción podremos conectar todos los elementos de la formulación. En el contexto de nuestro trabajo, v es $\dot{\gamma}$, por lo tanto llamaremos a esta contracción $i_{\dot{\gamma}}$. En ese sentido, para la formulación geométrica de la ley de Ohm, el elemento $i_{\dot{\gamma}}$ representa al observador. De esta forma, podemos ver que ρ es un elemento transversal en j , mediante la contracción $i_{\dot{\gamma}}$, aplicada nuevamente (como una proyección) a ρ :

$$i_{\dot{\gamma}} \rho = i_{\dot{\gamma}} [i_{\dot{\gamma}} (dt \wedge j)] = 0, \quad (4.38)$$

mientras que al aplicarla sólo a la corriente medida por el observador, obtenemos:

$$i_{\dot{\gamma}} (dt \wedge j) = \rho. \quad (4.39)$$

En otras palabras, la corriente está sujeta a lo que mide nuestro observador. Con esta conclusión, ya tenemos el panorama puesto, el observador de momento no mide ninguna corriente, puesto que aunque ya los definimos aún no hemos hablado en forma del campo aplicado al conductor. El estímulo electromagnético que genera la corriente inducida, es decir la 2-forma 4.4. Tal y cómo hablamos en el capítulo 2, estamos pensando en un estímulo únicamente eléctrico. Entonces al aplicar la contracción del observador $i_{\dot{\gamma}}$ a la forma F , lo único que mediremos, será la 1-forma del campo eléctrico que planteamos en un inicio, es decir un campo eléctrico puro aplicado a un medio conductor:

$$i_{\dot{\gamma}} F = i_{\dot{\gamma}} (E \wedge dt + B) \quad (4.40)$$

$$i_{\dot{\gamma}} F = E_{\dot{\gamma}} = E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz, \quad (4.41)$$

aquí el elemento E_γ es el campo medido por el observador. Con esto podemos ver con más claridad la dependencia del observador y su importancia en nuestro problema. Esto es una consecuencia directa y surge naturalmente por medio del enfoque geométrico.

El siguiente paso es ensamblar una ley de Ohm en formas diferenciales para un observador i_γ . Para esto vamos a incluir todos los elementos con los que ya hemos trabajado hasta el momento. El primero es la corriente, que en su forma general se define:

$$j = j_{ind} + j_{ext}, \quad (4.42)$$

donde, j_{ind} es la corriente inducida por el campo eléctrico y j_{ext} es una corriente externa. Ya que estamos asumiendo que dentro del medio conductor $\Omega \subset \mathcal{M}$ no hay fuentes de campo puesto que F es un campo externo, entonces $j_{ext} = 0$. Esto implica que solo tenemos la respuesta del material al estímulo electromagnético j_{ind} dado por 4.33

$$j_{ind} = dt \wedge \mathcal{J} - \rho_{ind}, \quad (4.43)$$

donde ρ_{ind} es la densidad de carga inducida. Sabemos que en este caso, por medio de la contracción del observador directamente sobre 4.43

$$i_\gamma(j_{ind}) = i_\gamma(dt \wedge \mathcal{J} - \rho_{ind}), \quad (4.44)$$

mediríamos la densidad de corriente eléctrica clásica dada por la ley de Ohm 2.8

$$i_\gamma(dt \wedge \mathcal{J}) = \mathcal{J}_{ind}, \quad (4.45)$$

y por lo tanto

$$i_\gamma \rho_{ind} = 0. \quad (4.46)$$

Entonces tenemos a la 3-forma

$$j_{ind} = dt \wedge \mathcal{J} = J_1 dt \wedge dy \wedge dz + J_2 dt \wedge dx \wedge dz + J_3 dt \wedge dx \wedge dy, \quad (4.47)$$

luego al aplicar la contracción

$$i_\gamma(j_{ind}) = i_\gamma(J_1 dt \wedge dy \wedge dz + J_2 dt \wedge dx \wedge dz + J_3 dt \wedge dx \wedge dy), \quad (4.48)$$

por cada termino tenemos

$$i_\gamma(J_1 dt \wedge dy \wedge dz) = J_1 i_\gamma(dt \wedge dy \wedge dz) = J_1(dy \wedge dz), \quad (4.49)$$

$$i_\gamma(J_2 dt \wedge dx \wedge dz) = J_2 i_\gamma(dt \wedge dx \wedge dz) = J_2(dx \wedge dz), \quad (4.50)$$

$$i_\gamma(J_3 dt \wedge dx \wedge dy) = J_3 i_\gamma(dt \wedge dx \wedge dy) = J_3(dx \wedge dy), \quad (4.51)$$

luego obtenemos la corriente inducida que en formas diferenciales seria la 2 forma

$$\mathcal{J}_{ind} = (J_1 dy \wedge dz + J_2 dx \wedge dz + J_3 dx \wedge dy), \quad (4.52)$$

ya que $i_\gamma(j_{ind})$ en coordenadas locales es una 2-forma, y de momento estamos pensando en caso estático donde la relación entre corriente y campo está dado por 2.8. Emtonces tenemos

que igualar 4.52 a 4.41, pero ya que E_γ es una 1-forma tenemos que agregar un dual de tal forma que obtengamos la tres forma y hay que recordar que este es el campo que atraviesa el material, por lo tanto al aplicar el dual obtendríamos

$$\star(i_\gamma F) = \star(E_\gamma) = \star(E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz), \quad (4.53)$$

para cada termino

$$\star dx = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} dt \wedge dy \wedge dz \quad (4.54)$$

$$\star dy = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} dt \wedge dx \wedge dz \quad (4.55)$$

$$\star dz = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} dt \wedge dx \wedge dy \quad (4.56)$$

luego

$$\star(i_\gamma F) = \left(E_1 \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} (dt \wedge dy \wedge dz) + E_2 \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} (dt \wedge dx \wedge dz) + E_3 \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} (dt \wedge dx \wedge dy) \right), \quad (4.57)$$

simplificando

$$\star(i_\gamma F) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} (E_1 (dt \wedge dy \wedge dz) + E_2 (dt \wedge dx \wedge dz) + E_3 (dt \wedge dx \wedge dy)), \quad (4.58)$$

con lo cual tenemos una 3-forma, así que aplicando la contracción del observador nuevamente

$$i_\gamma \star(i_\gamma F) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} (E_1 dy \wedge dz - E_2 dx \wedge dz + E_3 dx \wedge dy), \quad (4.59)$$

igualando 4.44 y 4.59 tenemos nuestra **ley de Ohm en formas diferenciales**

$$i_\gamma(j_{ind}) = \sigma i_\gamma \star(i_\gamma F) \quad (4.60)$$

aquí la conductividad σ es el factor hallado en el estado estacionario, ya que el analisis en este punto es para el observador y el conductor no se mueven, tal y como lo discutimos en el capítulo 2. Podemos corroborar que en efecto este resultado es la ley de Ohm, ya que aplicando la contracción del observador tenemos

$$j_{ind} = \sigma i_\gamma \star E_\gamma, \quad (4.61)$$

luego expandiendo, aplicando el dual y sustituyendo 4.52 del lado derecho tenemos

$$(J_1 dy \wedge dz + J_2 dx \wedge dz + J_3 dx \wedge dy) = \sigma \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} (E_1 dy \wedge dz - E_2 dx \wedge dz + E_3 dx \wedge dy), \quad (4.62)$$

despejando para la forma de corriente

$$J_1 dy \wedge dz + J_2 dx \wedge dz + J_3 dx \wedge dy = \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon\mu}} (E_1 dy \wedge dz + E_2 dx \wedge dz + E_3 dx \wedge dy), \quad (4.63)$$

Para pasar de esta expresión a la forma vectorial basta con elegir sólo una dirección espacial en coordenadas locales. Ya que estamos trabajando con el problema planteado en el capítulo 2, elegimos la dirección x y recuperamos la ecuación 2.8:

$$J_{x,ind} = \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon\mu}} E_x, \quad (4.64)$$

o

$$J_{x,ind} = \sigma E_x, \quad (4.65)$$

En conductores, la velocidad de propagación depende de la conductividad, ya que esta modifica la velocidad efectiva de la onda a través de la atenuación y la dispersión. En un buen conductor, la velocidad de propagación de una onda electromagnética se ve influenciada significativamente por la conductividad. Dado que estamos considerando un conductor homogéneo e isotrópico, podemos considerar al factor $\sqrt{\epsilon\mu}$ como un valor constante, por lo tanto, podemos incluir este valor constante en la conductividad σ , ya que es un valor que depende únicamente de las propiedades físicas del medio conductor. Entonces podemos reescribir 4.65 en forma vectorial como:

$$\vec{J}_{ind} = \sigma \vec{E}. \quad (4.66)$$

Este análisis nos permite ver que en efecto la corriente medida depende explícitamente del observador. Esto ya lo habíamos anticipado desde la propia definición de densidad de corriente 4.28, y cuando hablamos del enfoque relativista del observador en el capítulo 3. Con lo cual podemos anticipar que diferentes observadores medirán diferentes corrientes cuando cambia su estado de movimiento, ya sea el del observador, el del medio, o ambos. Esto se puede ilustrar mejor, si pensamos en un observador que se mueve a la misma velocidad 2.6 que las cargas libres a través de un conductor sometido a un campo eléctrico. En este caso no mediría ninguna corriente, solo observaría a las cargas estáticas generando un campo eléctrico, ya que desde su perspectiva estas están inmóviles.

5. Conclusiones y perspectivas a futuro

Este trabajo ha logrado profundizar en la comprensión de la ley de Ohm, aportando una nueva perspectiva que va más allá de su formulación convencional. Tradicionalmente, la ley de Ohm describe la relación lineal entre la corriente eléctrica, la diferencia de potencial y la resistencia en un medio conductor. Sin embargo, al analizar esta ley desde un marco relativista, surgen complejidades adicionales que modifican nuestra visión de su simplicidad original. A medida que un conductor se desplaza a altas velocidades, el movimiento de los portadores de carga se ven afectados por los efectos relativistas, influyendo en la conductividad del material. Los resultados obtenidos permiten concluir que, en ciertos contextos, la conductividad aumenta respecto a su valor en reposo, alcanzando un límite máximo impuesto por las restricciones relativistas, que prohíben que cualquier objeto con masa adquiera la velocidad de la luz. Aunque este análisis se limita a movimientos con velocidad constante en el espacio-tiempo plano, abre la puerta a futuras investigaciones que incorporen dinámicas más complejas y otros factores relativistas, necesarios para una descripción completa en condiciones extremas.

Mediante un análisis cuidadoso, hemos logrado redefinir la ley de Ohm mediante una transformación relativista en la conductividad, tomando en cuenta las simetrías que emergen en las ecuaciones de Maxwell. Adicionalmente hemos usado un enfoque geométrico, el cual nos permite interpretar las ecuaciones de Maxwell y la ley de Ohm como expresiones en términos de formas diferenciales. Uno de los logros del formalismo geométrico es que permite una descripción de las ecuaciones en términos completamente generales, sin depender del sistema de coordenadas específico. La incorporación del enfoque geométrico no solo enriqueció nuestra visión teórica, sino que también permite el desarrollo de una teoría más general. Este nuevo paradigma no solo se limita a las aplicaciones cotidianas de la conductividad, sino que también abre las puertas para investigar sistemas que se mueven a gran velocidad o que están sometidos a intensos campos electromagnéticos. La ley de Ohm en formas diferenciales representa, por lo tanto, un avance crucial para teorías que abarcan desde la electrodinámica clásica hasta situaciones más complejas en física moderna, como en el estudio de plasmas y la teoría de la gravedad cuántica.

Este enfoque nos permite describir la densidad de corriente inducida como una forma diferencial de grado uno, mientras que los campos electromagnéticos se tratan como una 2-forma. Las contracciones entre estas formas y el operador de Hodge permiten que las ecuaciones mantengan su invariancia bajo transformaciones de Lorentz, lo que garantiza que los resultados sean consistentes en cualquier sistema de referencia inercial. Este formalismo encapsula de manera compacta la relación entre el campo electromagnético y la corriente eléctrica, sin la necesidad de recurrir a expresiones más complicadas que se utilizan en la formulación clásica. El siguiente paso en la investigación de este modelo, es incorporar diferentes tipos de movimiento mediante transformaciones en la métrica. En este trabajo no se alcanzó a cubrir esta parte en el modelo geométrico, sin embargo, consideramos que el avance es suficiente para tener un acercamiento a este nuevo paradigma.

Los pasos a seguir en investigaciones futuras, consisten en emplear las herramientas geomé-

tricas para llegar a una forma de la ley de Ohm para conductores en movimiento. Una de las expansiones más prometedoras es investigar los efectos de la métrica del material en la conductividad. La conductividad al igual que ocurre con los cálculos tradicionales, involucra suposiciones físicas sobre el medio conductor, que se pueden traducir en mapeos geométricos que involucran formas diferenciales y contracciones entre campos vectoriales se vuelven más complejos cuando se consideran sistemas dinámicos. Es decir, que toda la información de un material conductor puede ser caracterizado por medio de la métrica, con lo cual, los avances propuestos en este trabajo representan un acercamiento importante para el futuro. En este trabajo hemos demostrado que mediante el uso del formalismo adecuado, las complicaciones que se presentan en un análisis de la conductividad en contextos relativistas, pueden gestionarse eficientemente.

El uso del operador de Hodge, que permite transformar formas p -dimensionales en formas $(n - p)$ -dimensionales en una variedad n -dimensional, es una herramienta clave en este contexto. En σ , podemos ver que las corrientes no covariantes pueden deducirse de forma directa aplicando las reglas geométricas adecuadas a las ecuaciones de campo, lo que sugiere que en el contexto geométrico, este elemento se transformaría de una forma diferente ante diferentes tipos de movimiento, donde los campos involucrados, también se observarían de manera diferente, para diferentes observadores. Esto es especialmente útil cuando tratamos con geometrías más complejas o cuando el sistema en cuestión tiene simetrías que pueden explotarse para simplificar los cálculos. En este contexto, nos gustaría explorar cómo diferentes tipos de movimiento, como la aceleración no constante o la rotación, pueden influir en la conductividad eléctrica. Al someter al conductor a movimientos complejos, se generan transformaciones geométricas que impactan las ecuaciones de corriente inducida. Por ejemplo, utilizando el operador dual de Hodge, podemos mapear cómo estas transformaciones afectan la geometría del sistema y, por ende, las propiedades electromagnéticas del conductor.

Otra posible línea de investigación es la introducción de variaciones en la temperatura dentro del modelo. Al considerar la temperatura, podemos vincular el comportamiento electromagnético con los principios de la termodinámica, lo que permitiría una mayor comprensión de la interacción entre la conducción eléctrica y los fenómenos termodinámicos. La dependencia de la conductividad con la temperatura es bien conocida en sistemas no relativistas, pero su extensión a un marco relativista podría ofrecer nuevas perspectivas tanto en teoría como en aplicaciones tecnológicas.

En resumen, este trabajo ha sentado las bases para un análisis más profundo de la ley de Ohm en contextos relativistas y geométricos, con el potencial de revolucionar nuestra comprensión de las interacciones electromagnéticas en condiciones extremas. A medida que avanzamos, estas ideas podrían no solo mejorar nuestras teorías físicas, sino también inspirar innovaciones tecnológicas basadas en principios físicos de vanguardia.

6. Referencias

- [1] Wolfgang K. H. Panofsky and Melba Phillips. *Classical Electricity and Magnetism*. Addison-Wesley Publishing Company, 1962.
- [2] Paul Lorrain and Francois Lorrain. *Magneto-Fluid Dynamics*. Springer, 2006.
- [3] Friedrich W. Hehl and Yuri N. Obukhov. *Foundations of Classical Electrodynamics*. Birkhäuser, 2003.
- [4] Theodore Frankel. *Gravitational Curvature An Introduction to Einstein's Theory*. W. H. Freeman and Company, 1979.
- [5] Theodore Frankel. *The geometry of physics*. Cambridge University Press, 2017.
- [6] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*, volume 2 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, Oxford, 4 edition, 1971.
- [7] A. Kandus and C. G. Tsagas. Generalized ohm's law for relativistic plasmas. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 385:883–892, 2008.
- [8] Drude Paul. Zur elektronentheorie der metalle. *Annalen der Physik*, 306(3):566–603, 1900.
- [9] Drude Paul. Zur elektronentheorie der metalle; von p. drude ii. teil. galvanomagnetische und thermomagnetische effecte. *Annalen der Physik*, 308(11):369–402, 1900.
- [10] Andrew D. Lewis. Is it worth learning differential geometric methods for modeling and control of mechanical systems? *Robotica*, 25:765–777, 2007.
- [11] U. Leonhardt & T. Philbin. *Geometry and light: the science of invisibility*. Courier Corporation, 2010.
- [12] A. Stenvall, T. Tarhasaari, F. Grilli, P. Raunonen, M. Vojenciak, and M. Pellikka. Manifolds in electromagnetism and superconductor modelling: Using their properties to model critical current of twisted conductors in self-field with 2-d model. *Cryogenics*, 53:135–141, 2013.
- [13] Daniel Flores-Alfonso, Marco Maceda, and C. S. Lopez-Monsalvo. Contact geometry in superconductors and new massive gravity. *Physics Letters B*, 815(136143), 2021.
- [14] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [15] Dennis Lehmkuhl. Why einstein did not believe that general relativity geometrizes gravity. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 46:316–326, 2014.
- [16] Richard P. Feynman. *Lectures on Physics*, volume Vol. 1. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1963.
- [17] Julius Asams Stratton. *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill Book Company, 1941.

-
- [18] Paul W. Gross and P. Robert Kotiuga. *Electromagnetic theory and computation a topological approach*. Cambridge University Press, 2003.
- [19] C. S. López-Monsalvo. *Relativity Notes*. Unpublished (Private communication), 2024.
- [20] Sean M. Carroll. *Lecture Notes on General Relativity*. 1997.
- [21] Bernard F. Schutz. *Geometrical methods of mathematical physics*. Cambridge University press, 1980.
- [22] Éricourgoulhon. *Special relativity in general frames*. Springer-Verlag, 2013.
- [23] C. S. Lopez-Monsalvo, D. Garcia-Pelaez, and A. Rubio-Ponce. The geometry of induced electromagnetic fields in moving media. *Annals of Physics*, 420(168270), 2020.
- [24] F. de Felice and C. J. s. Clarke. *Relativity on Curved Manifolds*. Cambridge university press, 1990.

A. Introducción a los Conceptos de Geometría Diferencial

A continuación vamos a expandir los conceptos discutidos en el capítulo anterior a más dimensiones, mediante la descripción geométrica de curvas y superficies; y más generalmente, variedades, amplificando el uso de estas herramientas y conceptos. Adicionalmente seleccionaremos el set que nos ayudará en la formulación del modelo geométrico de la Ley de Ohm. Aquí una breve introducción a algunos conceptos fundamentales:

- Variedades:** Las variedades diferenciables son estructuras que permiten la generalización de los conceptos de curvas y superficies a dimensiones superiores. Cada variedad es localmente homeomorfa a un espacio euclidiano, facilitando la extensión del cálculo a contextos más abstractos y complejos. Un ejemplo discutido anteriormente es el espacio-tiempo en relatividad general, que puede ser modelado como una variedad de cuatro dimensiones donde la métrica define la estructura causal y la curvatura inducida por la materia a través de la gravedad. Otro ejemplo es el espacio de Minkowski, cuya métrica es Lorentziana y donde no tenemos efectos derivados de la gravedad.

Formalmente, una variedad diferenciable n -dimensional M de clase C^k se define utilizando un atlas, donde M es un espacio de Hausdorff. Un espacio topológico es de Hausdorff si para cualquier par de puntos distintos $x, y \in M$, existen entornos abiertos U_x y U_y tales que $U_x \cap U_y = \emptyset$. Esta propiedad garantiza que los puntos pueden ser "separados" por entornos abiertos, lo que es crucial para definir una estructura diferenciable coherente. Para ilustrar esto veamos la figura A.1:

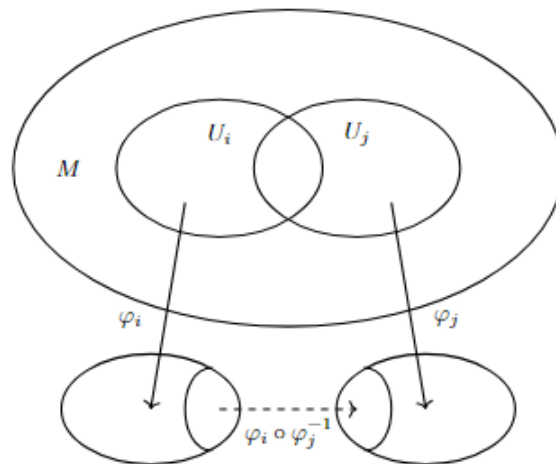


Figura A.1: Variedad Diferenciable.

M es llamada una variedad diferenciable de n dimensiones si tiene la siguiente estructura:

- Existe un recubrimiento abierto de M tal que $M = \bigcup U_i$, donde cada U_i es un conjunto abierto en M .

2. Para cada conjunto abierto U_i hay un mapa continuo e inyectivo $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ donde $\varphi(U_i)$ es un conjunto abierto en \mathbb{R}^n .
3. Para todo par de índices i y j tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, la intersección $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ es un conjunto abierto en \mathbb{R}^n , y las funciones de transición entre cartas

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \quad (\text{A.1})$$

son diferenciables de clase C^k .

Cuando se habla de funciones de clase C^k , se refiere al grado de diferenciableidad de las funciones. Específicamente:

- C^k denota el conjunto de funciones que son k veces continuamente diferenciables. Esto significa que las funciones tienen derivadas continuas hasta el orden k .
- Por ejemplo, una función de clase C^1 es una función cuya primera derivada es continua. Una función de clase C^2 tiene tanto la primera como la segunda derivada continuas.
- En general, una función de clase C^k tiene derivadas continuas de todos los órdenes desde 0 hasta k .

El concepto de clase C^k es importante en el contexto de las variedades diferenciables porque garantiza que las transiciones entre las diferentes cartas del atlas son suficientemente suaves. Esta suavidad es necesaria para aplicar técnicas del cálculo diferencial en el análisis de las propiedades geométricas y topológicas de la variedad.

Estas funciones de transición garantizan la compatibilidad de las diferentes cartas en el atlas, asegurando que la estructura diferenciable de M sea consistente a través de toda la variedad. En otras palabras, una variedad diferenciable n -dimensional M de clase C^k es un espacio topológico que localmente se parece a \mathbb{R}^n y está dotado de un atlas cuyas funciones de transición son C^k -diferenciables.

La condición de que M sea un espacio de Hausdorff asegura que podamos distinguir entre puntos diferentes de la variedad, permitiendo una adecuada definición de continuidad y diferenciableidad. Esto es esencial para la aplicación de conceptos del cálculo diferencial en el contexto de la variedad, facilitando el análisis y estudio de sus propiedades geométricas y topológicas [5, 20, 21, 24].

- **Espacios Vectoriales:** En geometría diferencial, un espacio vectorial puede ser representado como un *espacio tangente* en un punto de una variedad diferenciable M . Dicho espacio tangente, denotado como $T_p M$, consiste en todos los vectores tangentes en el punto p de la variedad M .

Un vector tangente en p puede ser entendido como la derivada direccional o como la clase de equivalencia de curvas diferenciables que pasan por p , bajo la relación de tener la misma derivada en p . Formalmente, un vector tangente X_p en p es un operador diferencial que actúa sobre funciones diferenciables $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, definido por:

$$X_p f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t)), \quad (\text{A.2})$$

donde $\gamma : (a, b) \rightarrow M$, con $a, b \in \mathbb{R}$, es una curva diferenciable en M tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = X_p$. En coordenadas locales, el espacio tangente en p se puede representar como

$$X = \sum_{i=1}^n X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (\text{A.3})$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (\text{A.4})$$

forma una base para $T_p M$ y los X^i son funciones suaves de las coordenadas locales. La colección de todos los espacios tangentes a una variedad se llama el fibrado tangente y se denota por $T(M)$:

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p M, \quad (\text{A.5})$$

Es decir $T(M)$ es la unión de todos los espacios tangentes T_p en cada punto p de la variedad [18, 20].

- **Espacios Duales:** El espacio dual del espacio tangente en p , conocido como el espacio cotangente, se denota como $T_p^* M$ y consiste en todos los funcionales lineales sobre $T_p M$. Un elemento de $T_p^* M$ es un vector cotangente o una 1-forma diferencial en p , que mapea vectores tangentes a números reales de manera lineal. Formalmente, se expresa como

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i(p) dx^i, \quad (\text{A.6})$$

donde

$$dx^i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (\text{A.7})$$

es la base para $T_p^* M$. La acción de una 1-forma ω sobre un vector tangente X en p se denota por $\omega(X)$ y es un número real:

$$\begin{aligned} \omega(X) &= \omega_i dx^i \left(X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \omega_i X^j dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \omega_i X^j \delta_j^i \\ &= \omega_i X^i \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Esta propiedad, se puede visualizar como la forma de *medir* a los vectores tangentes mediante valores escalares. El espacio cotangente en cada punto se puede contraer para formar el fibrado cotangente de la variedad M :

$$T^*(M) = \bigcup_{p \in M} T_p^* M. \quad (\text{A.9})$$

Finalmente el resultado A.8 nos dice que podemos pensar en estos vectores y covectores como mapeos lineales mediante la definición:

$$X(\omega) \equiv \omega(X) = \omega_i X^i. \quad (\text{A.10})$$

El producto tensorial, denotado por \otimes , para dos vectores se define como:

$$T = U \otimes W, \quad (\text{A.17})$$

Esta es otra forma de escribir la ecuación A.14. Los productos tensoriales no conmutan, esto es: $U \otimes W \neq W \otimes U$. Expandiendo los vectores U y W en la base vectorial $\frac{\partial}{\partial x^i}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} T &= U^i W^j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= T^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

lo que muestra cómo este tensor se expande en términos de sus componentes T^{ij} en la base $\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$ inducida por las coordenadas x^i . De manera genral, para tensores T de tipo (k, l) y S de tipo (m, n) :

$$\begin{aligned} T \otimes S(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k+m)}, X^{(1)}, \dots, X^{(l+n)}) &= T(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, X^{(1)}, \dots, X^{(l)}) \\ &\quad \times S(\omega^{(k+1)}, \dots, \omega^{(m)}, X^{(l+1)}, \dots, X^{(n)}). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Una base para el espacio de tensores de tipo (k, l) se construye tomando productos tensoriales de vectores base y vectores duales base:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_k}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_l}. \quad (\text{A.20})$$

En un espacio-tiempo de cuatro dimensiones como el espacio de Minkowsky, habrá 4^{k+l} tensores base.

La transformación de los componentes de un tensor bajo una transformación de Lorentz se realiza utilizando las matrices de Lorentz para los vectores base y los vectores duales. Esto se expresa mediante la siguiente fórmula general para un tensor T con k índices contravariantes y l índices covariantes:

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = \Lambda^{\mu'_1}_{\mu_1} \dots \Lambda^{\mu'_k}_{\mu_k} \Lambda_{\nu'_1}^{\nu_1} \dots \Lambda_{\nu'_l}^{\nu_l} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}. \quad (\text{A.21})$$

Los índices superiores transforman como vectores, mientras que los índices inferiores lo hacen como vectores duales. No es necesario recordar cómo organizar las matrices de transformación; simplemente se asegura que los índices coincidan en ambos lados de la ecuación. Por ejemplo, para un tensor

$$R = R^i{}_{jkl} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l, \quad (\text{A.22})$$

con un índice contravariante y tres índices covariantes, la transformación es:

$$R^i{}_{j'k'l'} = \Lambda^{i'}{}_i \Lambda_{j'}{}^j \Lambda_{k'}{}^k \Lambda_{l'}{}^l R^i{}_{jkl}. \quad (\text{A.23})$$

Aunque esta introducción a los tensores ha sido breve, la noción de tensores no requiere un gran esfuerzo para dominarse; es cuestión de mantener los índices en orden, y las reglas

para manipularlos son naturales. Definir tensores como colecciones de números que se transforman según reglas establecidas es útil operacionalmente, pero puede oscurecer su significado más profundo como entidades geométricas independientes de cualquier sistema de coordenadas elegido [11, 20].

- **Dual de Hodge:** El operador dual de Hodge, denotado por \star , es utilizado para asociar a cada forma diferencial una forma complementaria dentro de una variedad con una métrica dada. Este operador es una herramienta crucial en la transición entre las descripciones de campos eléctricos y magnéticos a sus contrapartes duales en teorías electromagnéticas y en la formulación de las ecuaciones de Maxwell en el lenguaje de formas diferenciales. En una variedad orientada n -dimensional M con una métrica g , podemos usar el tensor totalmente antisimétrico $\epsilon_{\mu_1, \dots, \mu_n}$ para definir una aplicación que toma una p -forma $\omega \in \Lambda^p(M)$ y la convierte en una $(n-p)$ -forma, denotada $\star\omega \in \Lambda^{n-p}(M)$. Esto se define por:

$$(\star\omega)_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} = \frac{1}{p!} \sqrt{|g|} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{n-p} \nu_1 \dots \nu_p} \omega^{\nu_1 \dots \nu_p}. \quad (\text{A.24})$$

Para una k -forma diferencial α en M , el dual de Hodge $\star\alpha$ es una $(n-k)$ -forma diferencial definida de tal manera que para cualquier $(n-k)$ -forma diferencial β ,

$$\alpha \wedge \star\beta = g(\alpha, \beta) \text{ vol}, \quad (\text{A.25})$$

donde \wedge denota el producto exterior, $g(\alpha, \beta)$ es el producto interno inducido por la métrica g , y vol es la forma de volumen asociada a g .

El operador \star tiene propiedades importantes como la involutividad, es decir, aplicarlo dos veces devuelve (hasta un signo) la forma original:

$$\star(\star\alpha) = (-1)^{k(n-k)} \alpha. \quad (\text{A.26})$$

En el contexto del electromagnetismo, el dual de Hodge se usa para expresar las ecuaciones de Maxwell de manera compacta. Por ejemplo, si F es la 2-forma del tensor de campo electromagnético, entonces las ecuaciones de Maxwell pueden escribirse en términos de F y su dual de Hodge $\star F$. [21].

- **Producto Wedge \wedge :** Este es un operador binario fundamental en geometría diferencial, utilizado para combinar formas diferenciales. El producto wedge de dos p y q formas genera una nueva forma $(p+q)$ -dimensional. Es clave en la construcción de formas de volumen, en la definición de orientación en variedades, y es fundamental para escribir expresiones compactas de leyes físicas, como veremos en la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell [21].
- **Derivada Exterior y Teorema de Stokes:** La derivada exterior es una operación que generaliza la noción de diferenciación a formas diferenciales de orden superior, y está intrínsecamente ligada al Teorema de Stokes. Este teorema es una generalización del teorema fundamental del cálculo que relaciona la integral de una forma diferencial sobre una variedad con la integral de su derivada exterior sobre el interior de la variedad, clave para entender las formas integrales de las leyes físicas como las de Maxwell.

$$\oint_{\partial\Omega_n} f = \int_{\Omega_n} df, \quad (\text{A.27})$$

donde

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu \quad (\text{A.28})$$

es la derivada exterior. Este mapeo lineal se puede expresar en términos de coordenadas locales x^1, \dots, x^n , como:

$$d \left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) = \sum d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad (\text{A.29})$$

donde ω es una k -forma. Dado dos coordenadas locales (u, x^1, \dots, x^n) y (v, y^1, \dots, y^n) , la transformación es dada por:

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \frac{D(x^{i_1}, \dots, x^{i_k})}{D(y^{j_1}, \dots, y^{j_k})} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k}, \quad (\text{A.30})$$

donde $\frac{D(\dots)}{D(\dots)}$ denota el Jacobiano. Además, escribimos el conjunto de todas las secciones como:

$$\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k T^* M). \quad (\text{A.31})$$

La expresión A.31 se refiere a la relación entre el conjunto de k -formas diferenciales en una variedad M y las secciones del haz fibrado de k -formas diferenciales. $\Omega^k(M)$ denota el espacio de todas las k -formas diferenciales en M , mientras que $\Gamma(\Lambda^k T^* M)$ representa el conjunto de todas las secciones del haz de k -formas diferenciales. Aquí, $\Lambda^k T^* M$ es el haz de k -formas diferenciales y Γ es el operador que toma un haz y devuelve el conjunto de sus secciones. Un elemento de $\Omega^k(M)$ es conocido como una k -forma diferencial [11, 20, 21].

- **Pull-back:** Sea $f : M \rightarrow N$ un mapa entre variedades suaves M y N . Esto induce un homomorfismo tal que:

$$f^* : \Omega^o(N) \rightarrow \Omega^o(M), \quad (\text{A.32})$$

donde $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ es el espacio de formas diferenciales en M . El pull-back de formas diferenciales asociado a f puede ser definido en coordenadas locales como:

$$(f^*\omega)(x_1, \dots, x_k) = \omega(f_*(x_1), \dots, f_*(x_k)), \quad (\text{A.33})$$

Note que las siguientes propiedades se cumplen:

- $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ es un mapa lineal.
- $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$.
- Si $g : N \rightarrow L$ es un mapa entre dos variedades N y L , entonces $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
- Conmuta con la derivada exterior: $df^* = f^*d$.

Este mapeo es fundamental cuando estamos trabajando con 2 variedades diferenciales [11, 20, 21].