



Universidad Autónoma Metropolitana  
Unidad Azcapotzalco

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA  
POSGRADO EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL

**ESTUDIO NUMÉRICO DE LAS RIGIDECES  
EFECTIVAS EN ELEMENTOS  
ESTRUCTURALES DE CONCRETO  
REFORZADO**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
**MAESTRO EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL**

**P R E S E N T A:**

**DAYANN EMILIO SILVA LECHUGA**

**DIRECTORES DE TESIS:**

**DR. GELACIO JUÁREZ LUNA**  
**DR. EBER ALBERTO GODÍNEZ DOMÍNGUEZ**

CIUDAD DE MÉXICO, AZCAPOTZALCO

JUNIO DE 2020

# AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi madre Martina Guadalupe Lechuga Martínez por brindarme siempre su apoyo incondicional, cariño, comprensión e impulsarme a realizar cada una de mis metas, y sobre todo por guiarme en el camino de la vida y la educación.

Agradezco a mis hermanos y sobrino con quienes he compartido mi vida: Laura Lizeth, que como hermana mayor se ha preocupado siempre por mi bienestar, a Hugo Jonathan, quien no solo me ha apoyado, sino que además me ha dado lecciones de vida y fortaleza, y a mi sobrino Miguel Angel, por brindarme su cariño y compañía.

Agradezco a mis directores de tesis y miembros de mi jurado: Dr. Gelacio Juárez Luna por su confianza, entusiasmo y paciencia depositada en mí, por sus diversas formas de apoyo personal y académico durante esta etapa de mi vida. Al Dr. Eber Alberto Godínez Domínguez por la orientación, confianza y toda la enseñanza brindada.

Agradezco a los miembros del jurado por el apoyo, tiempo e interés que dedicaron a esta investigación: Dr. Arturo Tena Colunga y al Dr. Dante Tolentino López, por brindarme sus valiosas sugerencias, comentarios, experiencias y conocimientos transmitidos en la revisión de esta tesis.

A la Universidad Autónoma Metropolitana- Azcapotzalco, y en especial al Posgrado en Ingeniería Estructural y su planta académica quienes con entusiasmo me brindaron sus diversos conocimientos y experiencias en mi estancia en esta casa de estudios.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por la beca otorgada durante mis estudios de maestría.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción .....</b>	<b>2</b>
1.1	Planteamiento del problema -----	2
1.2	Antecedentes-----	4
1.3	Justificación del trabajo -----	16
1.4	Objetivos generales -----	17
1.4.1	Objetivo general -----	17
1.5	Objetivos particulares -----	17
1.6	Alcances y limitaciones -----	17
1.7	Organización de tesis -----	18
<b>2</b>	<b>Calibración de modelos de elementos finitos con resultados analíticos y experimentales .....</b>	<b>19</b>
2.1	Metodología-----	19
2.2	Metodología empleada para los ejemplos de aplicación numérica -----	19
2.3	Vigas de concreto simple sujetas a desplazamientos en sus extremos -----	24
2.4	Placa sujeta a tensión -----	29
2.5	Vigas de concreto simple con ranuras-----	31
2.6	Vigas de concreto reforzado-----	38
2.7	Marco de concreto reforzado -----	42
<b>3</b>	<b>Estudio paramétrico de la variación de la rigidez efectiva en vigas de concreto reforzado.....</b>	<b>48</b>
3.1	Elección de los elementos a estudiar -----	48
3.1.1	Descripción de los marcos planos-----	48
3.1.2	Características de las vigas y modelos estudiadas mediante elementos finitos-----	51
3.2	Evaluación de las rigideces efectivas con base en las NTCC-17, (2017) -----	61
3.3	Evaluación de algunas variables en las rigideces efectivas -----	72
3.3.1	Influencia del acero de refuerzo a flexión -----	72
3.3.2	Influencia de la resistencia a compresión del concreto ( $f'_c$ )-----	89
<b>4</b>	<b>Estudio paramétrico de la variación de la rigidez efectiva en vigas simplemente apoyadas de CR .....</b>	<b>102</b>
4.1	Descripción -----	102

4.1.1	Viga 1 -----	103
4.2	Viga 2 -----	111
4.3	Viga 3 -----	119
<b>5</b>	<b>Conclusiones y Recomendaciones.....</b>	<b>129</b>
5.1	Conclusiones-----	129
5.2	Recomendaciones -----	131
5.3	Trabajos futuros -----	132
	<b>Referencias .....</b>	<b>133</b>
<b>6</b>	<b>APÉNDICE A .....</b>	<b>138</b>
<b>7</b>	<b>APÉNDICE B .....</b>	<b>156</b>

# Índice de figuras

Figura 1-1 Modelos experimentales de concreto reforzado (Chan et al. 2000): a) marco rígido y b) marco con muro.....	6
Figura 1-2 Variación de la relación de la rigidez en la condición de fluencia con la relación $b/h$ (tomada de Guerrero y González 2006) .....	9
Figura 1-3 Variación de la relación de la rigidez en la condición de fluencia con la separación de estribos (tomada de Guerrero y González 2006) .....	9
Figura 1-4 Variación de la relación de la rigidez en la condición de fluencia con el espesor del recubrimiento, el área a tensión es constante (tomada de Guerrero y González 2006) .....	10
Figura 1-5 Variación de la relación de la rigidez en la condición de fluencia con la cuantía de refuerzo en tensión (tomada de Guerrero y González 2006) .....	11
Figura 1-6 Variación de la relación de la rigidez en la condición de fluencia con la resistencia a compresión del concreto $f'_c$ normalizado con E250 (tomada de Guerrero y González 2006) ...	11
Figura 1-7 Vigas con diferentes valores del momento de inercia efectivo (adaptada de Kara y Dundar, 2009): a) viga con dos claros con carga uniformemente distribuida y b) viga simplemente apoyada .....	12
Figura 2-1 Modelos de agrietamiento del concreto (tomada de midas FEA, 2006) .....	20
Figura 2-2 Modelos de grietas ortogonales: a) grieta fija y b) grieta giratoria (adaptada de midas FEA, 2006) .....	21
Figura 2-3 Modelos de ablandamiento por deformación en tensión (adaptada de midas FEA, 2006) .....	21
Figura 2-4 Modelos de ablandamiento por deformación en compresión (adaptada de midas FEA, 2006) ..	23
Figura 2-5 Modelo constitutivo del acero: a) superficie de falla de Von Mises y b) endurecimiento por deformación (adaptada de Juárez y Godínez, 2018) .....	23
Figura 2-6 Vigas de concreto simple sujetas a desplazamientos en sus extremos: a) coeficientes de rigidez axial ante un desplazamiento unitario en la coordenada uno, b) coeficientes de rigidez a flexión ante un desplazamiento unitario en la coordenada dos, c) coeficientes de rigidez a flexión ante un giro unitario en la coordenada tres y d) sección transversal .....	24
Figura 2-7 Generación de la malla.....	25
Figura 2-8 Distribución de desplazamientos: a) dirección horizontal, b) dirección vertical y c) dirección horizontal (giro unitario) .....	25
Figura 2-9 Reacciones: a) dirección horizontal b) dirección vertical y c) dirección horizontal (giro unitario).....	26
Figura 2-10 Coeficientes de rigideces ( $h/l < 0.2$ ).....	28
Figura 2-11 Coeficientes de rigideces ( $h/l \geq 0.2$ ).....	29
Figura 2-12 Geometría de la placa .....	29
Figura 2-13 Malla estructurada .....	30
Figura 2-14 Condiciones de apoyo y desplazamiento aplicado en el extremo derecho .....	30

Figura 2-15 Gráfica de la carga contra el desplazamiento .....	31
Figura 2-16 Banda de agrietamiento en la placa bidimensional .....	31
Figura 2-17 Especímenes de concreto simple (tomada de Martínez 2017).....	32
Figura 2-18 Viga sin muesca: a) dimensiones de la viga y b) sección transversal .....	33
Figura 2-19 Discretización de las mallas bidimensionales: a) V0, b) V1, c) V3, d) V4 y e) V5.....	33
Figura 2-20 Discretización de las mallas tridimensionales: a) V0, b) V1, c) V3, d) V4 y e) V5.....	34
Figura 2-21 Distribución de desplazamiento en la dirección vertical y propagación del agrietamiento: a) modelo V0 y b) modelo V4 .....	35
Figura 2-22 Curvas de la carga contra el desplazamiento de modelos numéricos: a) bidimensionales y b) tridimensionales .....	36
Figura 2-23 Curvas de la carga contra el desplazamiento de las vigas, tomadas de Martínez (2017): a) bidimensionales y b) tridimensionales .....	37
Figura 2-24 Viga de concreto reforzado, cotas en cm.....	38
Figura 2-25 Modelado de $\frac{1}{4}$ de la viga estudiada por Foley y Buckhouse (1998): a) concreto y acero de refuerzo y b) mallado en midas FEA .....	39
Figura 2-26 Curva de la carga contra el desplazamiento, modelo experimental de Foley y Buckhouse (1998) contra la numérica en midas FEA.....	40
Figura 2-27 Resultados finales del modelado de un $\frac{1}{4}$ de la viga reportada por Foley y Buckhouse (1998) .....	41
Figura 2-28 Curva de degradación secante efectiva de la viga con la simulación numérica .....	42
Figura 2-29 Marco en estudio: a) geometría, b) condición de apoyos y cargas y c) armados de la sección transversal.....	43
Figura 2-30 Marco en estudio: a) acero de refuerzo, b) condiciones de apoyo, c) acoplamiento entre el concreto y acero y d) mallado en midas FEA .....	44
Figura 2-31 Curva de la carga contra el desplazamiento, comparación entre los resultados experimentales Chan et al. (2000) y analíticos con midas FEA.....	45
Figura 2-32 a) desplazamientos horizontales, b) trayectorias de agrietamiento y c) fuerzas desarrolladas en el acero de refuerzo.....	47
Figura 3-1 a) planta tipo y b) elevación del edificio para el estudio de marcos planos (adaptada de Godínez et al. 2019 y 2020) .....	48
Figura 3-2 Cargas consideradas para el análisis estructural (adaptada de Villafuerte 2020) .....	49
Figura 3-3 Armado de las vigas de un marco de 9 niveles con secciones gruesas, vigas $EI_e=EI_g$ : a) V-1 (1er.Nivel al 4to.nivel), b) V-2 (5o. Nivel al 7o. nivel), c) V-3 (8o. y 9o.Nivel) y d) secciones transversales, (adaptada de Villafuerte, 2020) .....	51
Figura 3-4 Modelo tridimensional de la viga V-1 de concreto reforzado: a) viga completa, b) modelado de $\frac{1}{4}$ de viga, c) mallado en midas FEA y d) mallado del acero de refuerzo.....	52
Figura 3-5 Modelo tridimensional de la viga V-2 de concreto reforzado: a) viga completa, b) modelado de $\frac{1}{4}$ de viga, c) mallado en midas FEA y d) mallado del acero de refuerzo.....	53

Figura 3-6 Modelo tridimensional de la viga V-3 de concreto reforzado: a) viga completa, b) modelado de $\frac{1}{4}$ de viga, c) mallado en midas FEA y d) mallado del acero de refuerzo.....	54
Figura 3-7 Modelo V-1, carga última, curva de la carga contra el desplazamiento .....	55
Figura 3-8 Modelo V-1, inercia gruesa: a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento.....	56
Figura 3-9 Modelo V-2, carga última, curva de la carga contra el desplazamiento .....	57
Figura 3-10 Modelo V-2, inercia gruesa: a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento.....	58
Figura 3-11 Modelo V-3, carga última, curva de la carga contra el desplazamiento.....	58
Figura 3-12 Modelo V-3, inercia gruesa: a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento.....	59
Figura 3-13 Modelos tridimensionales de las vigas de concreto reforzado, modelado un $\frac{1}{4}$ : a) modelo V-1, b) modelo V-2 y c) modelo V-3 .....	62
Figura 3-14 Modelo V-1, curvas de la carga contra el desplazamiento.....	63
Figura 3-15 Modelo V-1, inercia efectiva: a) distribución de desplazamientos, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento.....	64
Figura 3-16 Modelo V-2, curvas de la carga contra el desplazamiento.....	65
Figura 3-17 Modelo V-2, inercia efectiva: a) distribución de desplazamientos, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento.....	66
Figura 3-18 Modelo V-3, curvas de la carga contra el desplazamiento.....	66
Figura 3-19 Modelo V-3, inercia efectiva: a) distribución de desplazamientos, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento.....	67
Figura 3-20 Comparación de curvas de la carga contra el desplazamiento y degradación de rigidez efectiva: a) V-1, b) V-2 y c) V-3.....	71
Figura 3-21 Cuantías de refuerzo a flexión para la viga 1 con detallado no dúctil (Q de 2): a) $0.25\rho_{bal}$ y $\rho/\rho' = 1, 1.5$ y $2$ , b) $0.45\rho_{bal}$ y $\rho/\rho' = 1, 1.5$ y $2$ , c) $0.65\rho_{bal}$ y $\rho/\rho' = 1, 1.5$ y $2$ y d) $0.90\rho_{bal}$ y $\rho/\rho' = 1, 1.5$ y $2$ .....	73
Figura 3-22 Cuantías de refuerzo a flexión para la viga 2 con detallado no dúctil (Q de 2): a) $0.25\rho_{bal}$ y $\rho/\rho' = 1, 1.5$ y $2$ , b) $0.45\rho_{bal}$ y $\rho/\rho' = 1, 1.5$ y $2$ , c) $0.65\rho_{bal}$ y $\rho/\rho' = 1, 1.5$ y $2$ y d) $0.90\rho_{bal}$ y $\rho/\rho' = 1, 1.5$ y $2$ .....	74
Figura 3-23 Cuantías de refuerzo a flexión para la viga 3 con detallado no dúctil (Q de 2): a) $0.25\rho_{bal}$ y $\rho/\rho' = 1, 1.5$ y $2$ , b) $0.45\rho_{bal}$ y $\rho/\rho' = 1, 1.5$ y $2$ , c) $0.65\rho_{bal}$ y $\rho/\rho' = 1, 1.5$ y $2$ y d) $0.90\rho_{bal}$ y $\rho/\rho' = 1, 1.5$ y $2$ .....	75
Figura 3-24 Modelo V-1 para $0.25\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para $\rho/\rho' = 1, 1.5$ y $2$ .....	77
Figura 3-25 Modelo V-1 para $0.45\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para $\rho/\rho' = 1, 1.5$ y $2$ .....	77
Figura 3-26 Modelo V-1 para $0.65\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para $\rho/\rho' = 1, 1.5$ y $2$ .....	78

Figura 3-27 Modelo V-1 para $0.90\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para $\rho/\rho'=1, 1.5$ y $2$ .....	78
Figura 3-28 Modelo V-1 para $0.25\rho_{bal}, 0.45\rho_{bal}, 0.65\rho_{bal}$ y $0.90\rho_{bal}$ para $\rho/\rho'=1$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante.....	79
Figura 3-29 Modelo V-1 para $0.25\rho_{bal}, 0.45\rho_{bal}, 0.65\rho_{bal}$ y $0.90\rho_{bal}$ para $\rho/\rho'=1.5$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante.....	79
Figura 3-30 Modelo V-1 para $0.25\rho_{bal}, 0.45\rho_{bal}, 0.65\rho_{bal}$ y $0.90\rho_{bal}$ para $\rho/\rho'=2$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante.....	80
Figura 3-31 Modelo V-2 para $0.25\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para $\rho/\rho'=1, 1.5$ y $2$ .....	81
Figura 3-32 Modelo V-2 para $0.45\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para $\rho/\rho'=1, 1.5$ y $2$ .....	81
Figura 3-33 Modelo V-2 para $0.65\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para $\rho/\rho'=1, 1.5$ y $2$ .....	82
Figura 3-34 Modelo V-2 para $0.90\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento, b) curvas de degradación de rigidez secante para $\rho/\rho'=1, 1.5$ y $2$ .....	82
Figura 3-35 Modelo V-2 para $0.25\rho_{bal}, 0.45\rho_{bal}, 0.65\rho_{bal}$ y $0.90\rho_{bal}$ para $\rho/\rho'=1$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante.....	83
Figura 3-36 Modelo V-2 para $0.25\rho_{bal}, 0.45\rho_{bal}, 0.65\rho_{bal}$ y $0.90\rho_{bal}$ para $\rho/\rho'=1.5$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante.....	83
Figura 3-37 Modelo V-2 para $0.25\rho_{bal}, 0.45\rho_{bal}, 0.65\rho_{bal}$ y $0.90\rho_{bal}$ para $\rho/\rho'=2$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante.....	84
Figura 3-38 Modelo V-3 para $0.25\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para $\rho/\rho'=1, 1.5$ y $2$ .....	85
Figura 3-39 Modelo V-3 para $0.45\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para $\rho/\rho'=1, 1.5$ y $2$ .....	85
Figura 3-40 Modelo V-3 para $0.65\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para $\rho/\rho'=1, 1.5$ y $2$ .....	86
Figura 3-41 Modelo V-3 para $0.90\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para $\rho/\rho'=1, 1.5$ y $2$ .....	86
Figura 3-42 Modelo V-3 para $0.25\rho_{bal}, 0.45\rho_{bal}, 0.65\rho_{bal}$ y $0.90\rho_{bal}$ para $\rho/\rho'=1$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante.....	87
Figura 3-43 Modelo V-3 para $0.25\rho_{bal}, 0.45\rho_{bal}, 0.65\rho_{bal}$ y $0.90\rho_{bal}$ para $\rho/\rho'=1.5$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante.....	87
Figura 3-44 Modelo V-3 para $0.25\rho_{bal}, 0.45\rho_{bal}, 0.65\rho_{bal}$ y $0.90\rho_{bal}$ para $\rho/\rho'=2$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante.....	88
Figura 3-45 Armado de las vigas de un marco de nueve niveles con secciones gruesas, vigas $EI_e=EI_g$ : a) V-1 (1er.Nivel al 4to.nivel), b) V-2 (5o. Nivel al 7o. nivel), c) V-3 (8o. y 9o. nivel) y d) secciones transversales (adaptada de Villafuerte, 2020).....	89

Figura 3-46 Modelo V-1, esfuerzo a la compresión $f'_c=250$ kgf/cm <sup>2</sup> : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	90
Figura 3-47 Modelo V-1, esfuerzo a la compresión $f'_c=300$ kgf/cm <sup>2</sup> : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	90
Figura 3-48 Modelo V-1, esfuerzo a la compresión $f'_c=350$ kgf/cm <sup>2</sup> : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	91
Figura 3-49 Modelo V-1, esfuerzo a la compresión $f'_c=400$ kgf/cm <sup>2</sup> : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	91
Figura 3-50 Modelo V-1, esfuerzo a la compresión $f'_c=450$ kgf/cm <sup>2</sup> : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	92
Figura 3-51 Modelo V-1, esfuerzo a la compresión $f'_c=500$ kgf/cm <sup>2</sup> : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	92
Figura 3-52 Modelo V-1: a) curvas de la carga contra el desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante.....	93
Figura 3-53 Modelo V-2, esfuerzo a la compresión $f'_c=250$ kgf/cm <sup>2</sup> : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	93
Figura 3-54 Modelo V-2, esfuerzo a la compresión $f'_c=300$ kgf/cm <sup>2</sup> : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	94
Figura 3-55 Modelo V-2, esfuerzo a la compresión $f'_c=350$ kgf/cm <sup>2</sup> : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	94
Figura 3-56 Modelo V-2, esfuerzo a la compresión $f'_c=400$ kgf/cm <sup>2</sup> : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	95
Figura 3-57 Modelo V-2, esfuerzo a la compresión $f'_c=450$ kgf/cm <sup>2</sup> : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	95
Figura 3-58 Modelo V-2, esfuerzo a la compresión $f'_c=500$ kgf/cm <sup>2</sup> : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	96
Figura 3-59 Modelo V-2: a) curvas de la carga contra el desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante.....	96
Figura 3-60 Modelo V-3, esfuerzo a la compresión $f'_c=250$ kgf/cm <sup>2</sup> : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	97
Figura 3-61 Modelo V-3, esfuerzo a la compresión $f'_c=300$ kgf/cm <sup>2</sup> : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	97
Figura 3-62 Modelo V-3, esfuerzo a la compresión $f'_c=350$ kgf/cm <sup>2</sup> : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	98
Figura 3-63 Modelo V-3, esfuerzo a la compresión $f'_c=400$ kgf/cm <sup>2</sup> : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	98
Figura 3-64 Modelo V-3, esfuerzo a la compresión $f'_c=450$ kgf/cm <sup>2</sup> : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	99

Figura 3-65 Modelo V-3, esfuerzo a la compresión $f'_c=500$ kgf/cm <sup>2</sup> : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	99
Figura 3-66 Modelo V-3: a) curvas de la carga contra el desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante.....	100
Figura 4-1 Viga de concreto reforzado sometida a una carga puntual al centro del claro .....	102
Figura 4-2 Modelado de $\frac{1}{4}$ de la viga en estudio: a) condiciones de apoyo y b) condición de carga .....	103
Figura 4-3 Cuantías de refuerzo a flexión para la viga 1 con detallado no dúctil (Q de 2) en condición simplemente apoyada: a) $0.25\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1, 1.5$ y $2$ , b) $0.45\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1, 1.5$ y $2$ , c) $0.65\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1, 1.5$ y $2$ y d) $0.90\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1, 1.5$ y $2$ .....	105
Figura 4-4 Modelo V-1 para $0.25\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	105
Figura 4-5 Modelo V-1 para $0.25\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	106
Figura 4-6 Modelo V-1 para $0.25\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	106
Figura 4-7 Modelo V-1 para $0.45\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	107
Figura 4-8 Modelo V-1 para $0.45\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	107
Figura 4-9 Modelo V-1 para $0.45\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	108
Figura 4-10 Modelo V-1 para $0.65\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	108
Figura 4-11 Modelo V-1 para $0.65\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	109
Figura 4-12 Modelo V-1 para $0.65\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	109
Figura 4-13 Modelo V-1 para $0.90\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	110
Figura 4-14 Modelo V-1 para $0.90\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	110
Figura 4-15 Modelo V-1 para $0.90\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	111
Figura 4-16 Cuantías de refuerzo a flexión para la viga 2 con detallado no dúctil (Q de 2) en condición simplemente apoyada: a) $0.25\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1, 1.5$ y $2$ , b) $0.45\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1, 1.5$ y $2$ , c) $0.65\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1, 1.5$ y $2$ y d) $0.90\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1, 1.5$ y $2$ .....	113
Figura 4-17 Modelo V-2 para $0.25\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	113

Figura 4-18 Modelo V-2 para $0.25\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	114
Figura 4-19 Modelo V-2 para $0.25\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	114
Figura 4-20 Modelo V-2 para $0.45\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	115
Figura 4-21 Modelo V-2 para $0.45\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	115
Figura 4-22 Modelo V-2 para $0.45\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	116
Figura 4-23 Modelo V-2 para $0.65\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	116
Figura 4-24 Modelo V-2 para $0.65\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	117
Figura 4-25 Modelo V-2 para $0.65\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	117
Figura 4-26 Modelo V-2 para $0.90\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	118
Figura 4-27 Modelo V-2 para $0.90\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	118
Figura 4-28 Modelo V-2 para $0.90\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	119
Figura 4-29 Cuantías de refuerzo a flexión para la viga 3 con detallado no dúctil (Q de 2) en condición simplemente apoyada: a) $0.25\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'= 1, 1.5$ y $2$ , b) $0.45\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'= 1, 1.5$ y $2$ , c) $0.65\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'= 1, 1.5$ y $2$ y d) $0.90\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'= 1, 1.5$ y $2$ .....	121
Figura 4-30 Modelo V-3 para $0.25\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	121
Figura 4-31 Modelo V-3 para $0.25\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	122
Figura 4-32 Modelo V-3 para $0.25\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	122
Figura 4-33 Modelo V-3 para $0.45\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	123
Figura 4-34 Modelo V-3 para $0.45\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	123
Figura 4-35 Modelo V-3 para $0.45\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	124
Figura 4-36 Modelo V-3 para $0.65\rho_{bal}$ y $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....	124

Figura 4-37 Modelo V-3 para  $0.65\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....125

Figura 4-38 Modelo V-3 para  $0.65\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....125

Figura 4-39 Modelo V-3 para  $0.90\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....126

Figura 4-40 Modelo V-3 para  $0.90\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....126

Figura 4-41 Modelo V-3 para  $0.90\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante .....127

# Índice de tablas

Tabla 1-1 Reglamentos de diseño que toman en cuenta el agrietamiento en vigas y columnas de concreto reforzado, rigideces afectivas a flexión (adaptada de Godínez et al. 2019) .....	5
Tabla 2-1 Recomendaciones para estimar el ancho de la banda de agrietamiento (adaptada de Rots, 1988).....	22
Tabla 2-2 Coeficientes de rigidez .....	27
Tabla 2-3 Tipos de espécimen .....	32
Tabla 2-4 Número de elementos finitos en los modelos bidimensionales y tridimensionales .....	34
Tabla 2-5 Valores de carga máxima resistente y desplazamientos .....	37
Tabla 2-6 Desplazamientos últimos de las pruebas experimentales y la solución numérica .....	40
Tabla 2-7 Cargas y desplazamientos últimos .....	45
Tabla 3-1 Cargas y desplazamientos, considerando inercia gruesa ( $I_g$ ) .....	60
Tabla 3-2 Porcentaje del esfuerzo de fluencia en el acero, considerando la inercia gruesa ( $I_g$ )....	60
Tabla 3-3 Momentos de inercia para cálculo de rigideces (adaptada de las NTCC-17, 2017) .....	61
Tabla 3-4 Altura efectiva de las vigas de concreto reforzado .....	62
Tabla 3-5 Cargas y desplazamientos, considerando la inercia efectiva ( $I_e$ ) .....	68
Tabla 3-6 Porcentaje del esfuerzo de fluencia en el acero, considerando la inercia efectiva ( $I_e$ ) .	68
Tabla 3-7 Cargas, desplazamientos y valores de rigideces efectivas a la primera fluencia del acero, viga 1 .....	80
Tabla 3-8 Cargas, desplazamientos y valores de rigideces efectivas a la primera fluencia del acero, viga 2 .....	84
Tabla 3-9 Cargas, desplazamientos y valores de rigideces efectivas a la primera fluencia del acero, viga 3 .....	88
Tabla 3-10 Cargas, desplazamientos y valores de rigideces efectivas .....	100
Tabla 4-1 Cargas, desplazamientos y valores de rigideces efectivas a la primera fluencia del acero, modelo V-1 .....	111
Tabla 4-2 Cargas, desplazamientos y valores de rigideces efectivas a la primera fluencia del acero, modelo V-2.....	119
Tabla 4-3 Cargas, desplazamientos y valores de rigideces efectivas a la primera fluencia del acero, modelo V-3.....	127

## RESUMEN

En esta investigación se presentan los resultados de un estudio enfocado a evaluar las rigideces efectivas en vigas de concreto reforzado mediante simulaciones numéricas en el plano ( $2D$ ) y tridimensionales ( $3D$ ). En los modelos de viga se varía la rigidez axial, en cortante y giro; además de modificar la rigidez en cortante cambiando la carga axial del elemento. Las propiedades de estas vigas de concreto reforzado se tomaron de los diseños de marcos planos reportados por Godínez *et al.* (2019) y Villafuerte (2020), ubicados en la zona de transición de la Ciudad de México. Se realiza un estudio paramétrico, mediante modelos de elementos finitos, en el que se evalúa la influencia en las rigideces efectivas de las variables siguientes: confinamiento, nivel de carga axial, dimensiones de las secciones, relación de aspecto, propiedades mecánicas del concreto y el acero de refuerzo, en la determinación en los miembros estructurales.

Los modelos numéricos se realizan con técnicas avanzadas y sofisticadas de elementos finitos empleando el programa midas FEA. Se utilizan elementos finitos sólidos de 4 nodos para discretizar el concreto y el acero de refuerzo con elementos unidimensionales de 2 nodos tipo barra (elementos truss, con comportamiento bilineal; mientras que, el endurecimiento por deformación del acero se idealiza con una superficie de Von Mises), cuyos extremos se ensamblan en los nodos de los elementos sólidos de concreto simulando una adherencia perfecta entre el concreto y el acero de refuerzo. Se emplea un modelo constitutivo con superficie de daño diferente en tensión y en compresión para simular el proceso de falla, el modelo considera la densidad de energía de fractura ( $G_f$ ), la cual es posible asignarle el valor, siendo capaz de modelar la aparición de grietas en el elemento; además, una función de ablandamiento por deformación que puede presentarse en los miembros de concreto. La rigidez efectiva se evalúa a partir de las curvas de la carga contra el desplazamiento, las cuales decrecen al ocurrir el agrietamiento en el concreto o la plastificación en el acero. Es importante mencionar que el agrietamiento y la plastificación ocurren en las zonas más esforzadas, las cuales se localizan en los extremos y/o en el centro del claro, por lo que el diseñar con un momento de inercia efectivo, calculado usualmente como una fracción del momento de inercia grueso de la sección transversal, empleando un factor “promedio” en toda la longitud de la viga, no parece una estrategia razonable, pues se omiten muchas variables que intervienen en este complejo fenómeno, por ejemplo, la cuantía de refuerzo longitudinal y resistencia a compresión del concreto. Por último, se realizan recomendaciones para el uso de los factores empleados para determinar la rigidez efectiva de vigas de concreto reforzado para garantizar un mejor comportamiento estructural.

# Capítulo 1

## Introducción

### 3.1 Planteamiento del problema

En el diseño de estructuras de concreto reforzado, el diseñador no sólo debe satisfacer los requerimientos de resistencia, sino también, los requisitos de servicio, y por ende el control de la deformación. Para garantizar el criterio de servicio, es necesario predecir el agrietamiento y deflexiones en las estructuras de concreto reforzado. Para una determinación más precisa de las deflexiones de los elementos estructurales; los elementos agrietados en las estructuras de concreto reforzado deben identificarse y determinar su rigidez efectiva a flexión y cortante después del agrietamiento, dado que es importante. Como se sabe, el efecto del agrietamiento del concreto sobre la rigidez de un miembro estructural en flexión depende en gran medida de la magnitud y el tipo de carga aplicada.

En las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto de la Ciudad de México (NTCC-17, 2017) se propone utilizar rigideces efectivas a flexión promedio de vigas agrietadas, que se determinan con la mitad del momento de inercia de la sección gruesa ( $0.5EI_g$ ), mientras que para las columnas el momento de inercia se calcula como el 70% ( $0.7EI_g$ ) de la sección gruesa del elemento. En el reglamento del Instituto Americano del Concreto (ACI-318-14, 2014) se recomienda emplear una inercia a flexión para vigas del 35% ( $0.35EI_g$ ) de la inercia gruesa y para columnas es del 70% ( $0.7EI_g$ ) de la inercia total. Por otra parte, el Eurocódigo (EC-8, 2010) plantea que las rigideces efectivas a flexión de vigas y columnas se emplee el 50% de la inercia del elemento, en el código de Nueva Zelanda (NZS-06, 2006) se recomienda emplear una rigidez efectiva a flexión para vigas rectangulares del 40% ( $0.4EI_g$ ) del momento de inercia, mientras que para vigas "T" o "L" se propone utilizar un 35% ( $0.35EI_g$ ) de la inercia total del elemento. Para columnas, el factor a emplearse para el cálculo de la inercia efectiva está en función de los niveles de carga axial, por ejemplo: si la carga axial ( $P_u$ ) es mayor que  $0.5A_gf'c$  se recomienda usar el 80% ( $0.8EI_g$ ) del momento de inercia grueso, por otra parte, si la carga la carga axial es igual  $0.2A_gf'c$  se utiliza el 60% ( $0.6EI_g$ ) del momento de inercia y si el nivel de carga axial es  $-0.5A_gf'c$  se utiliza el 40% ( $0.4EI_g$ ) de la inercia del elemento. Por último, el código de la Agencia Federal para el Manejo de Emergencias de los Estados Unidos de América (FEMA-356, 2000) que no es un reglamento de diseño, la rigidez efectiva en vigas se calcula como el 50% de la inercia de la sección gruesa de concreto ( $0.5EI_g$ ), y en columnas varía entre el 50% y el 70% de la inercia total de la sección transversal que está en función de la carga axial (cargas gravitacionales). Cabe hacer mención, que estos códigos de diseño no toman en cuenta variables importantes como la relación de aspecto ( $h/b$ ), la configuración de la sección transversal a excepción del código de Nueva Zelanda, dado que es uno de los pocos códigos de diseño que

diferencia la forma de la sección transversal en vigas y tiene una amplia gama en la variación de carga en columnas, las propiedades del concreto, la separación del refuerzo transversal, el detallado de la sección (dúctil o no dúctil) y las relaciones entre cuantías de acero de refuerzo en tensión y compresión.

Una vertiente de gran importancia, dentro del ámbito del análisis y diseño sísmico de estructuras de concreto reforzado, radica en la adecuada estimación de las rigideces efectivas a flexión de los elementos estructurales. Por ejemplo, el diseño de edificios de altura considerable ubicados en zonas de alta sismicidad, en varias ocasiones, está regido por el control de desplazamientos o distorsiones de entrepiso máximas permisibles estipuladas en un reglamento de diseño, aspecto que es totalmente dependiente del criterio empleado en la determinación de las rigideces efectivas en los elementos estructurales (Tena *et al.* 2008). Por otra parte, otros aspectos de importancia que son afectados por el criterio empleado para definir las rigideces efectivas a flexión de los elementos de concreto son: las propiedades dinámicas de la estructura (periodos de vibración) y, por ende, la estimación de las demandas de fuerza para la cual deberán diseñarse tanto los elementos sismorresistentes como el sistema global, la distribución de fuerzas internas y los efectos de segundo orden.

Es importante notar que, la degradación de rigidez que sufren los elementos estructurales no es únicamente dependiente de las condiciones que induce la carga en el elemento (flexión o flexocompresión), sino también, de su ubicación en planta y elevación. Estudios como el de Tena *et al.* (2008) y Tena *et al.* (2012) muestran que las vigas de entrepisos ubicados en la parte intermedia de edificios de mediana y gran altura sufren mayores niveles de degradación que las vigas de entrepisos ubicados en la parte inferior, la degradación de la rigidez en vigas de los marcos en elevación está asociada principalmente a rotaciones plásticas y agrietamientos importantes. Además, algunos códigos de diseño, por ejemplo NTCC-17 (2017) y otros reglamentos como el ACI-318-14 (2014) son discutibles, debido a que el uso de secciones agrietadas en la elaboración de los modelos de análisis estructural no es adecuado; pues como lo cometan Tena y Correa (2008), al hacerlo no se toma en cuenta que toda estructura nueva o que no haya sido afectada por un sismo importante se encuentra prácticamente intacta y/o sin un nivel de agrietamiento que justifique una reducción de la inercia de sus vigas de hasta un 50% (asociado a un agrietamiento importante y visible), y es precisamente en estas condiciones que debe resistir su primera excitación sísmica. Por lo tanto, la selección de un criterio arbitrario para definir las rigideces efectivas de los elementos estructurales puede conducir a diseños no conservadores; dado que, se podría diseñarse una estructura para niveles de aceleración menores que los que realmente experimentaría durante un evento sísmico importante, así como brindar a la estructura una capacidad de deformación insuficiente para garantizar un comportamiento estructural congruente con la filosofía de diseño (Tena *et al.* 2008 y Tena *et al.* 2012).

### 3.2 Antecedentes

En la práctica profesional en México se consideran diferentes variantes para el modelado de los edificios; por ejemplo, para el caso de vigas algunos diseñadores toman en cuenta que el utilizar el momento de inercia de la sección gruesa de una viga rectangular es equivalente a utilizar el momento de inercia agrietado de una sección T. En otros casos, no se considera lo recomendado en las NTCC-17 (2017) para la consideración del agrietamiento en columnas, y en su lugar se emplean las disposiciones del Instituto Americano del Concreto (ACI-318-14, 2014), en lugar de considerar la inercia gruesa de la sección transversal, ésta se afecta por un factor de 70% ( $0.7EI_g$ ) para el cálculo de la rigidez efectiva (Godínez *et al.* 2016).

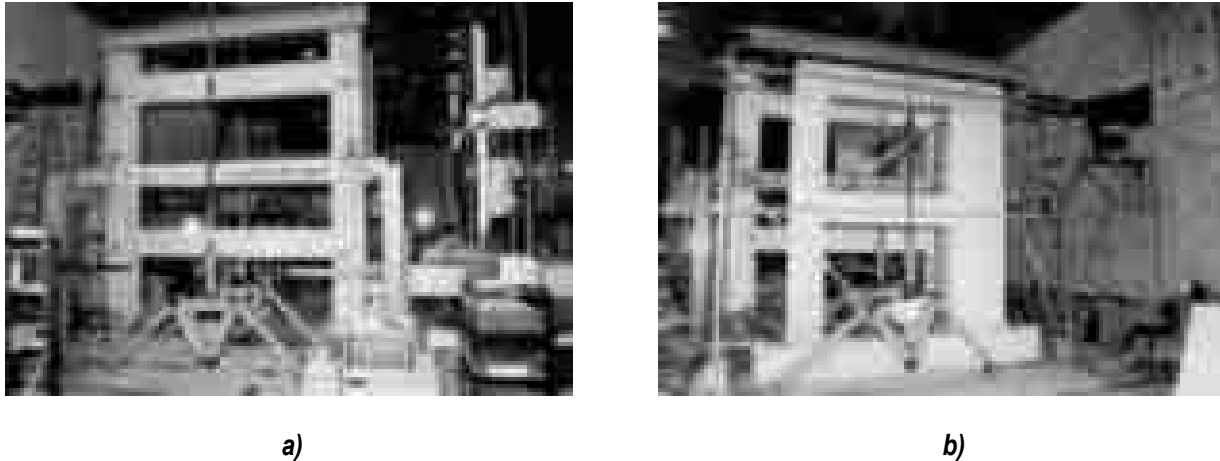
Los elementos de concreto reforzado se agrietan a un nivel de carga relativamente bajo incluso con presencia de acero de refuerzo, debido a la baja resistencia a la tensión del concreto. La propagación del agrietamiento es altamente dependiente de la carga, que consecuentemente, tiene un efecto significativo en la rigidez y en el desplazamiento de las estructuras de concreto. La tensión en el concreto reduce la rigidez a la flexión y cortante de los elementos estructurales, resultando en un aumento en las deflexiones. El agrietamiento es un fenómeno inevitable en los edificios de concreto reforzado, cabe señalar que, en el análisis de las estructuras de concreto reforzado se llevan a cabo, esencialmente, a partir de la teoría del análisis elástico-lineal. Por lo tanto, el análisis de estructuras de concreto reforzado (CR), sin considerar el efecto del agrietamiento, puede no representar el comportamiento real o, en ocasiones, llevar a diseños no conservadores. La rigidez a la flexión efectiva resultante del agrietamiento del concreto depende de algunos parámetros importantes tales como el confinamiento, el nivel de carga axial, las dimensiones de las secciones y las propiedades del material del concreto y del acero de refuerzo.

En códigos actuales para el diseño sísmico de estructuras de concreto reforzado, el agrietamiento en el concreto se considera reduciendo el momento de inercia de las secciones transversales a valores especificados o utilizando algunas fórmulas empíricas. Ejemplos de estos códigos son: las Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto (NTCC-17, 2017), el ACI-318-14 (2014), Eurocódigo, FEMA 356 entre otros, como se muestra en la Tabla 3-1. Estas propuestas no toman en cuenta algunos parámetros importantes que afectan el comportamiento no lineal de los elementos de CR como: el confinamiento, el nivel de carga axial, las dimensiones de las secciones, la relación de aspecto, las propiedades del concreto y las del acero de refuerzo.

**Tabla 3-1 Reglamentos de diseño que toman en cuenta el agrietamiento en vigas y columnas de concreto reforzado, rigideces afectivas a flexión (adaptada de Godínez et al. 2019)**

Reglamentos	Momento de inercia (vigas)	Momento de inercia (columnas)
NTCC-17 (2017)	$0.50EI_g$	$0.70EI_g$
ACI-318-14 (2014)	$0.35EI_g$	$0.70EI_g$
EUROCÓDIGO (2010)	$0.50EI_g$	$0.70EI_g$ (cargas en compresión) $0.50EI_g$ (cargas en tensión)
NZS-06 (2006)	“Rectangulares” $0.40EI_g$ “T” y “L” $0.35EI_g$	$0.80EI_g$ si $P_u > 0.50 A_g f'_c$ $0.60EI_g$ si $P_u = 0.20 A_g f'_c$ $0.40EI_g$ si $P_u = -0.05 A_g f'_c$
FEMA-356 (2000)	$0.50EI_g$	Carga en compresión, ante cargas gravitacionales $\geq 0.50 A_g f'_c$ ; $0.70EI_g$ Carga en compresión, ante cargas gravitacionales $\leq 0.30 A_g f'_c$ ; $0.50EI_g$

La influencia que tienen algunos parámetros en la determinación de las rigideces efectivas de elementos de concreto reforzado es de interés en el análisis estructural, por lo que se han desarrollado estudios analíticos y experimentales desde hace décadas. Por ejemplo, Chan *et al.* (2000) desarrollaron un método analítico para predecir los efectos del agrietamiento con reducción de rigidez efectiva general para determinar la relación entre disminución de rigidez a flexión debido a la carga aplicada a los elementos estructurales de edificios altos de concreto reforzado bajo cargas de servicio. El método propuesto se validó mediante resultados numéricos y pruebas experimentales de gran escala, sub-ensambles estructurales de marco rígido y de marco con muro. Con base en lo antes mencionado, se realizaron dos pruebas experimentales de tamaño completo para investigar el comportamiento y la rigidez característica de estructuras de concreto reforzado bajo cargas de servicio (Figura 3-1). Los autores muestran que dentro de un nivel de carga aproximadamente del 70%, la reducción de la rigidez a flexión es debida al agrietamiento que puede obtenerse a partir de la respuesta estructural, expresada en términos de la carga contra la deformación. Más allá del intervalo del 70% el material tiene un comportamiento no lineal que se convierte en un factor significativo. El método propuesto solo es aplicable en el intervalo de carga de servicio, más allá las discrepancias son significativas, lo cual se atribuye principalmente al hecho de que el concreto y el acero de refuerzo se comportan inelásticos al alcanzar los estados límite últimos.



**Figura 3-1 Modelos experimentales de concreto reforzado (Chan et al. 2000): a) marco rígido y b) marco con muro**

Khuntia y Ghosh (2004) realizaron un estudio paramétrico, donde toman en cuenta un gran número de variables que tienen influencia en la estimación de las rigideces efectivas a flexión de vigas y columnas. En este estudio paramétrico, las rigideces efectivas se calcularon como la relación entre el momento flexionante y la curvatura ( $EI_e = M/\phi$ ). Los resultados indican que, para el caso de columnas, las variables que tienen mayor influencia en la determinación de las rigideces efectivas son: la cuantía de refuerzo longitudinal ( $\rho_g$ ), la relación de excentricidad ( $e/h$ ), la relación de carga axial ( $P_u/P_o$ ), y la resistencia a compresión del concreto ( $f'_c$ ). Los autores muestran que al aumentar la cuantía de refuerzo longitudinal se incrementa la rigidez efectiva y que, al incrementar el valor de la relación de excentricidades, la rigidez efectiva decrece. Ellos propusieron ecuaciones analíticas para determinar las rigideces efectivas a flexión en columnas y vigas de concreto reforzado, aplicables para evaluar las condiciones de servicio y últimas. La ecuación (1.1) se emplea para estimar la rigidez efectiva a flexión de columnas de concreto reforzado ( $P_u/A_g f'_c \geq 0.1$ ); donde  $I_g$  es el momento de inercia grueso de la sección,  $I_e$  momento de inercia efectivo,  $I_{viga}$  momento de inercia efectivo a flexión como viga,  $\rho_g$  es la relación de refuerzo de la sección gruesa (área de acero de la columna gruesa entre el área gruesa de la sección,  $(A_{st}/A_g)$ ,  $P_u$  carga axial factorizada,  $P_o$  carga axial nominal con excentricidad cero,  $e$  es la excentricidad de la carga axial,  $b$  el ancho,  $h$  la altura de la columna y  $E_c$  el módulo de elasticidad del concreto; consecuentemente, si los valores de  $P$  y  $M$  son aproximados a la curva del diagrama de interacción de diseño de la columna se puede utilizar la ecuación (1.2) que representa una relación aproximada y razonable entre las relación de carga axial ( $P_u/P_o$ ) y la relación de la excentricidad ( $e/h$ ) lo que permite sustituir en la ecuación (1.1) y reescribirla en función de excentricidades ec. (1.3) o en relación de carga axial ec. (1.4); no obstante, los autores recomiendan utilizar ampliamente la ec. (1.1) para cargas de servicio.

$$EI_e = E_c I_g (0.80 + 25\rho_g) \left(1 - \frac{e}{h} - 0.5 \frac{P_u}{P_o}\right) \leq E_c I_g \geq E_c I_{viga} \quad (1.1)$$

$$\frac{e}{h} + \frac{P_u}{P_o} = 0.7 \quad (1.2)$$

$$EI_e = E_c I_g (0.80 + 25\rho_g) \left(0.65 - 0.5 \frac{e}{h}\right) \leq E_c I_g \geq E_c I_{viga} \quad (1.3)$$

$$EI_e = E_c I_g (0.80 + 25\rho_g) \left(0.30 + 0.5 \frac{P_u}{P_o}\right) \leq E_c I_g \geq E_c I_{viga} \quad (1.4)$$

Para determinar la rigidez efectiva a flexión en vigas de concreto de reforzado se propone la ecuación (1.5), cumpliendo con que  $(1.2 - 0.2 b/d) \leq 1.0$ ; sin embargo, la ecuación (1.5) se emplea únicamente para concretos con una resistencia normal a la compresión  $f'_c \leq 6000 \text{ psi}$  ( $400 \text{ kg/cm}^2$ ) y para concretos con mayor resistencia a la compresión  $f'_c > 6000 \text{ psi}$ , se recomienda emplear la ecuación (1.6).

$$EI_e = E_c I_g (0.10 + 25\rho_g) \left(1.2 - 0.2 \frac{b}{d}\right) \leq 0.60 E_c I_g \quad (1.5)$$

$$EI_e = E_c I_g (0.10 + 25\rho_g) \left(1.2 - 0.2 \frac{b}{d}\right) (1.15 - 4 \times 10^{-5} f'_c) \leq 0.60 E_c I_g \quad (1.6)$$

Para verificar la validez de las ecuaciones propuestas, compararon sus resultados analíticos con los resultados experimentales, mostrando que sus ecuaciones son capaces de proporcionar suficiente precisión entre los valores analíticos y experimentales. Ellos indican también que permiten obtener valores aproximados en la amplificación de momentos y desplazamientos en análisis elásticos de primer y segundo orden. Además, las ecuaciones son aplicables para cualquier intensidad de carga, por lo que se pueden evaluar condiciones de servicio y últimas.

Elwood y Eberhard (2006) compararon las rigideces efectivas de 120 columnas de concreto reforzado bajo cargas cíclicas de la base de datos del Pacific Earthquake Engineering Research Center (Berry *et al.* 2004), que considera una amplia gama de variables, como la forma de la sección transversal, la resistencia del concreto, la relación de refuerzo longitudinal y la intensidad

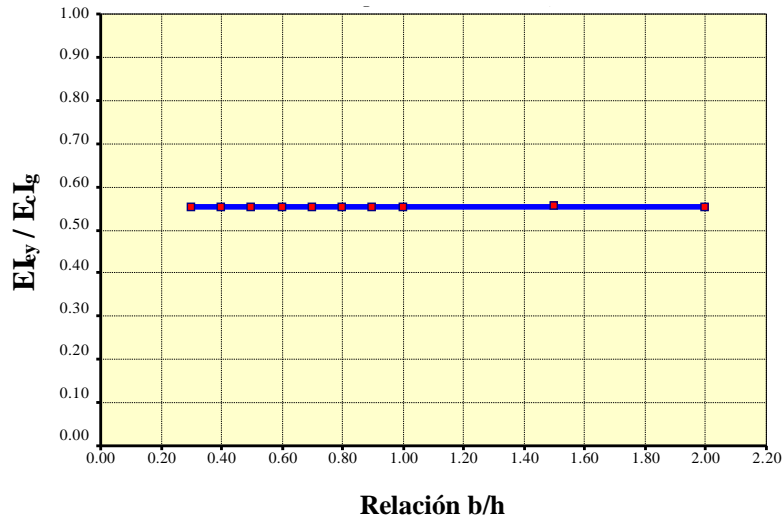
de la carga axial; siguiendo las recomendaciones de la Agencia Federal para el Manejo de Emergencias (FEMA-356, 2000) pautas sísmicas de rehabilitación (ASCE, 2000). Estos autores propusieron recomendaciones para estimar la rigidez efectiva de columnas rectangulares de concreto reforzado con resistencia normal, donde encontraron que las recomendaciones del FEMA-356 (2000) para carga axial superior de  $0.5A_g f'_c$  son consistentes; sin embargo, para columnas con cargas axiales bajas se reduce la rigidez de la columna en casi un 100%. Los autores propusieron ecuaciones para determinar las rigideces efectivas de columnas de concreto reforzado de resistencia normal ec. (1.7).

$$\begin{aligned}
 \frac{EI_{eff}}{EI_g} &= 0.2 & \frac{P}{A_g f'_c} &\leq 0.2 \\
 \frac{EI_{eff}}{EI_g} &= \frac{5}{3} \frac{P}{A_g f'_c} - \frac{4}{30} & 0.2 < \frac{P}{A_g f'_c} &\leq 0.5 \\
 \frac{EI_{eff}}{EI_g} &= 0.7 & 0.5 < \frac{P}{A_g f'_c} &
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Guerrero y González (2006) evaluaron diferentes variables en la relación de rigidez efectiva a flexión ( $EI_{ey}/EI_g$ ) compararon sus resultados con las propuestas de las NTCC-04 (2004). En este caso, ( $EI_{ey}$ ) es la rigidez efectiva a flexión en la condición de fluencia del acero de refuerzo a tensión y ( $EI_g$ ) la rigidez a flexión de la sección analizada considerando el momento de inercia grueso para secciones rectangulares de concreto reforzado en la condición de fluencia del acero de refuerzo a tensión. Los autores demostraron que el parámetro que tiene mayor influencia en la determinación de la relación de rigidez efectiva a flexión es el recubrimiento y la cuantía de acero de refuerzo a tensión, con la cual se genera una variación importante en los valores de rigidez efectiva a flexión ( $EI_{ey}/EI_g$ ) en el intervalo comprendido entre la cuantía mínima y máxima como se recomendaba en las NTCC-04 (2004).

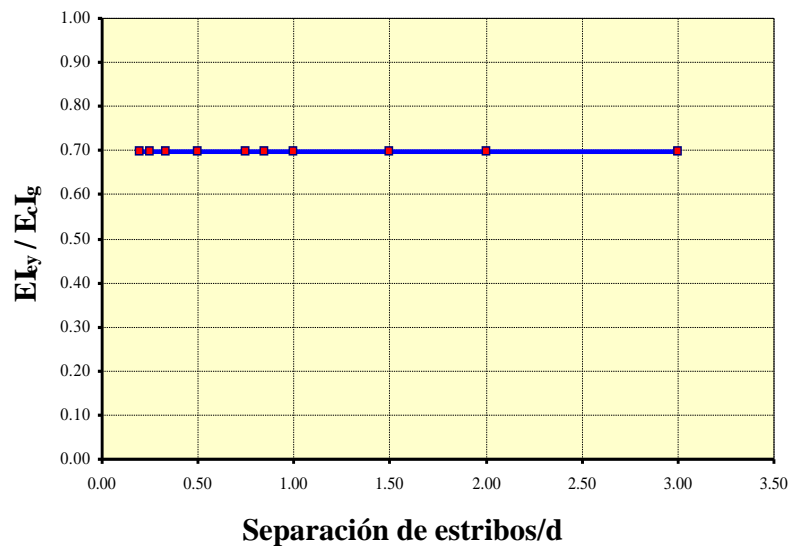
Los parámetros que se tomaron en cuenta en el estudio fueron los siguientes:

a) Relación de aspecto: los resultados obtenidos mostraron que la relación de aspecto ( $b/h$ ) o ( $h/b$ ) no tienen mayor influencia en la relación de la rigidez a flexión ( $EI_{ey}/EI_g$ ) cuando se alcanza la fluencia del acero de tensión. Como se muestra en la Figura 3-2, los resultados obtenidos por estos autores considerando el peralte variable son los mismos que para la base variable.



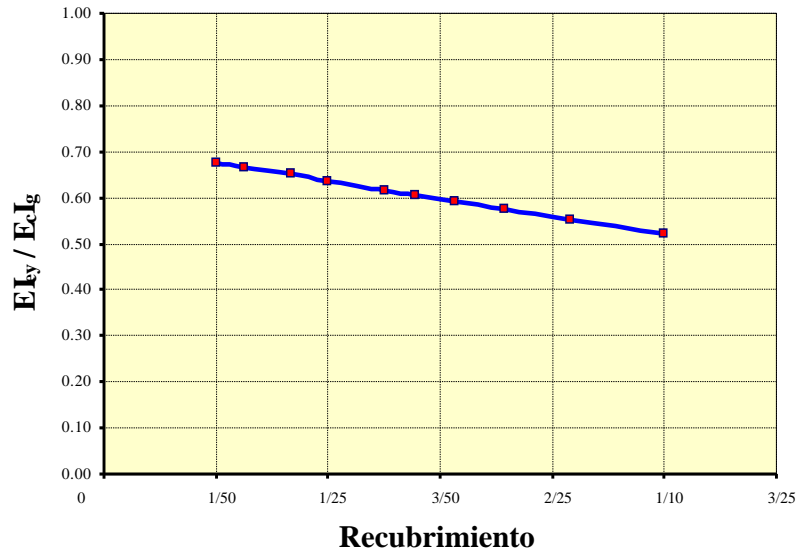
**Figura 3-2 Variación de la relación de la rigidez en la condición de fluencia con la relación b/h (tomada de Guerrero y González 2006)**

b) separación del refuerzo transversal: se observó que la influencia que tiene en las relaciones de rigidez a flexión ( $EI_{ey}/EI_g$ ) en la sección cuando se alcanza la fluencia del acero de tensión, es nulo. En la Figura 3-3 se muestra una línea constante sin variación en la relación de rigidez efectiva a flexión contra la separación de estribos.



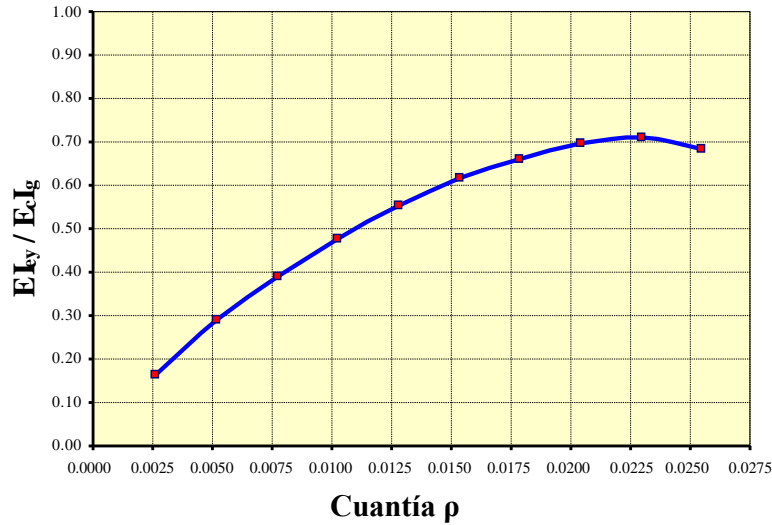
**Figura 3-3 Variación de la relación de la rigidez en la condición de fluencia con la separación de estribos (tomada de Guerrero y González 2006)**

c) recubrimiento: tiene un impacto significativo en la determinación de los valores de las relaciones de rigidez efectiva a flexión cuando se alcanza la fluencia del acero de refuerzo de tensión. La Figura 3-4 muestra una variación lineal de las relaciones de rigidez efectiva contra el recubrimiento del concreto, siendo mayores los valores de relación de rigidez efectiva a flexión ( $EI_{ey}/EI_g$ ) para valores menores del espesor del recubrimiento.



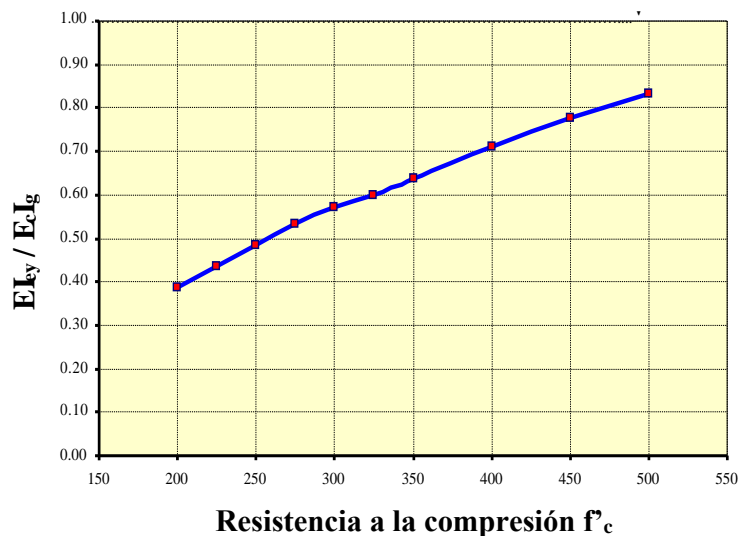
**Figura 3-4 Variación de la relación de la rigidez en la condición de fluencia con el espesor del recubrimiento, el área a tensión es constante (tomada de Guerrero y González 2006)**

d) cuantía de refuerzo de acero en tensión: La Figura 1-5 muestra que dependiendo de la cuantía de acero a tensión empleada se presentan variaciones importantes. A medida que se aumenta la cuantía de acero a tensión aumenta el peralte del eje neutro, por lo que el tamaño de la grieta a flexión y el brazo de palanca del momento resistente disminuyen, con un aumento en el momento resistente de la sección debido a la mayor cuantía de acero a tensión. Los autores demostraron que el considerar un valor arbitrario promedio de la relación de rigidez ( $EI_{ey}/EI_g$ ) no sería lo más adecuado.



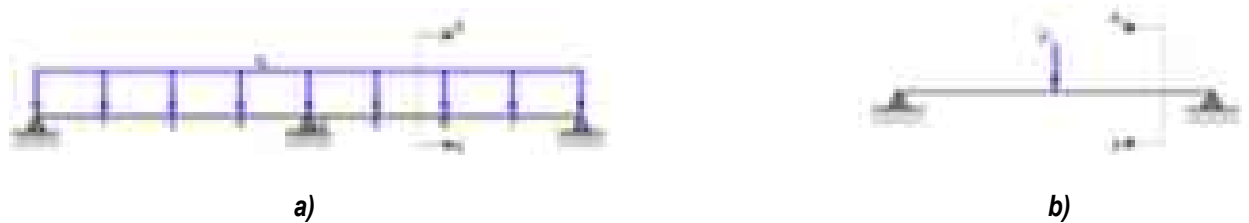
**Figura 3-5 Variación de la relación de la rigidez en la condición de fluencia con la cuantía de refuerzo en tensión (tomada de Guerrero y González 2006)**

e) resistencia a la compresión: se observó que a medida que aumenta la resistencia a la compresión del concreto los valores en la relación de rigidez ( $EI_{ey}/EI_g$ ) son mayores. En la Figura 3-6 la pendiente disminuye a medida que se consideran resistencias mayores en el concreto, los autores muestran que a medida que se toma un concreto con mayor resistencia a la compresión ( $f'_c$ ), se genera un valor ligeramente menor del peralte del eje neutro, lo que implica que la longitud de las grietas a flexión será mayor y el brazo interno del momento resistente tenderá a aumentar, dando como resultado un valor del momento resistente mayor.



**Figura 3-6 Variación de la relación de la rigidez en la condición de fluencia con la resistencia a compresión del concreto  $f'_c$  normalizado con E250 (tomada de Guerrero y González 2006)**

Kara y Dundar (2009) desarrollaron un método analítico para estudiar el efecto de los tipos de carga y la relación entre la rigidez efectiva a flexión mediante el uso de programas computacionales basados en procedimientos iterativos desarrollado para el análisis de marcos de concreto reforzado en elementos agrietados. El programa consideró la variación de la rigidez a flexión de un elemento agrietado mediante el uso del código de diseño ACI-318-08 (2008) y un modelo de rigidez efectiva basada en probabilidades. Las comparaciones de varios modelos para el momento efectivo de la inercia se realizaron con vigas de prueba de concreto reforzado. El modelo de rigidez efectiva basada en la probabilidad predice la efectividad de la rigidez de los elementos con mayor precisión que el ACI-318-08 (2008). Los resultados también mostraron que con las diferentes formas de aplicar la carga se obtienen diferentes valores del momento de inercia efectivo, lo que implica diferentes reducciones en la rigidez a la flexión (Figura 3-7); además, los resultados numéricos indican que la contribución de la deformación a corte en las vigas de concreto reforzado aumentan con cargas crecientes, es importante considerar la variación de la rigidez al corte en las regiones agrietadas de los miembros estructurales para una mejor aproximación en los resultados.



**Figura 3-7 Vigas con diferentes valores del momento de inercia efectivo (adaptada de Kara y Dundar, 2009): a) viga con dos claros con carga uniformemente distribuida y b) viga simplemente apoyada**

Bonet *et al.* (2011) desarrollaron una ecuación para obtener la rigidez efectiva de columnas delgadas de concreto reforzado, ver ecuación (1.8). La expresión desarrollada es válida para cualquier sección transversal sujeta a cargas axiales combinadas o flexión biaxial, ambas de corta duración. El método desarrollado se validó mediante simulaciones numéricas realizadas con elementos finitos que se compararon con 613 pruebas experimentales. Adicionalmente, se comparó con dos códigos de diseño, el ACI-318-08 (2008) y Eurocódigo (2004). Los autores demostraron que la ecuación desarrollada proporciona una mejor aproximación que los códigos de diseño anteriormente mencionados. Finalmente, el método desarrollado es capaz de verificar y diseñar con suficiente precisión columnas esbeltas de concreto reforzado en aplicaciones prácticas del diseño estructural; sin embargo, estas ecuaciones propuestas son más complejas que las propuestas por otros autores o códigos de diseño.

Parámetros

Rigidez efectiva a flexión

$$EI = \alpha \frac{E_c}{1 + \phi_{eff}} I_c + \frac{E_s}{1 + \eta} I_s$$

$$\frac{e}{h}; \frac{l}{h}; \phi_{eff} f'_c \quad e/h < 0.2\alpha = (-0.14 \frac{l}{h} + 2.5 - 0.35\phi_{eff})(e/h - 0.2) + \alpha_p < 0.1 \quad (1.8)$$

$$e/h \geq 0.2\alpha = \alpha_p(1.2 - e/h) \neq 0.1$$

$$\alpha_p = (\frac{f'_c}{200} + 0.12); \eta = 1.9\phi_{eff} e^{(-0.1 \frac{l}{h})}$$

donde ( $EI$ ) es la rigidez a la flexión del elemento en compresión, ( $E_c$ ) es el módulo de elasticidad del concreto, ( $E_s$ ) el módulo de elasticidad del acero de refuerzo, ( $I_c$ ) es el momento de inercia grueso del elemento, ( $I_s$ ) el momento de inercia del acero de refuerzo, ( $e/h$ ) es la relación de excentricidad, ( $l/h$ ) es la relación de esbeltez geométrica, ( $\phi_{eff}$ ) el cociente de fluencia efectivo, ( $f'_c$ ) la resistencia a compresión del concreto, ( $\eta$ ) es la excentricidad relativa de primer orden, ( $\alpha$ ) es el factor de rigidez efectivo.

Rodríguez y Restrepo (2012) determinaron que los valores de momento de inercia de algunos reglamentos de construcción, por ejemplo, las NTCC-04 (2004) y el ACI 318-11 (2011), sobrestiman la rigidez de elementos estructurales en más del 100%, pues especifican el valor de la inercia gruesa ( $I_g$ ) como valor a emplear en el análisis. Estos investigadores proporcionan resultados de su base de datos de 18 columnas de sección rectangular de concreto reforzado representativas de edificios para la evaluación de la capacidad resistente a flexión, obtenida en ensayos ante cargas laterales cíclicas del tipo reversible. Los resultados experimentales mostraron una fuerte correlación entre la rigidez efectiva y la relación de carga axial. Además, para valores de la relación ( $P_u/A_g f'_c < 0.3$ ), típicos en columnas de edificaciones de concreto reforzado, los valores de rigidez efectiva son menores de  $0.4I_g$ . En función de los resultados experimentales, estos autores proponen una ecuación para evaluar el momento de inercia efectivo ( $I_e$ ) de columnas rectangulares de concreto reforzado ec.(1.9). Esta expresión matemática no toma en cuenta la cuantía de refuerzo y la relación de esbeltez de las columnas, factores importantes que intervienen en la rigidez efectiva de estos elementos. Finalmente, los resultados experimentales demostraron que la rigidez efectiva en columnas con baja relación de carga axial puede alcanzar valores del orden del 20% del valor de la rigidez correspondiente a la sección gruesa, y que para valores de ( $P_u/A_g f'_c > 0.5$ ) se tendría rigideces efectivas mayores alrededor del 50% de la rigidez correspondiente a la sección gruesa.

$$I_e = \left(0.16 + \frac{P}{A_g f'_c}\right) I_g \quad (1.9)$$

Tena *et al.* (2012) estudiaron y compararon resultados de diferentes diseños de un edificio regular de 15 pisos con base en marcos de concreto reforzado, diseñados con diferentes factores de comportamiento sísmico ( $Q$ ), utilizando los criterios de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo de 2004 (NTCS-04, 2004) del Reglamento de construcciones del Distrito Federal de México (RCDF-04, 2004). Consideraron dos diseños, uno en el cual, todos sus elementos estructurales no contemplaban agrietamiento, y un segundo modelo que contempla el agrietamiento, principalmente en las vigas, tomando en cuenta el 50% del momento de inercia de la sección gruesa tal y como lo establecen las NTCC-04 (2004). Ellos concluyen que las propuestas de las NTCC-04 (2004) y otros reglamentos como el ACI-318-11 (2011) son cuestionables, debido a que la degradación de la rigidez en vigas de los marcos en elevación y en planta no son uniformes, y que la pérdida de rigidez en un 50% en las vigas está asociada a rotaciones plásticas y agrietamientos importantes.

Caglar *et al.* (2015) desarrollaron una fórmula para determinar la rigidez efectiva a flexión de columnas circulares agrietadas de concreto reforzado. La fórmula se generó mediante el uso de programación genética ( $PG$ ), la cual permite resolver problemas de optimación no lineal basada en un lenguaje simbólico. La expresión analítica propuesta consideró el confinamiento, el nivel de carga axial, las dimensiones de las secciones y las propiedades del material del concreto y del acero de refuerzo para determinar la rigidez a flexión efectiva de las columnas circulares de concreto reforzado. Para comprobar el modelo de  $PG$  se seleccionaron 370 secciones circulares de columna de concreto reforzado con diferentes propiedades geométricas, configuraciones de refuerzo longitudinal y transversal, resistencia a la compresión y sometidas a diferentes cargas axiales; estas columnas fueron diseñadas con el código de diseño y construcción turco y comparadas con el Eurocódigo-10 (2010), estas fórmulas se validaron con un edificio real de seis pisos con simulación numérica con el programa análisis estructural SAP2000, mostrando que, los resultados obtenidos de las formulaciones analíticas son congruentes con los resultados del estudio numérico.

Godínez *et al.* (2018) evaluaron diferentes variables que influyen en la determinación de las rigideces efectivas en secciones de concreto reforzado sujetas a flexión. Dentro de las variables estudiadas se encuentran la forma de las secciones transversales (rectangular,  $L$  Invertida y  $T$ ), la dimensión de la base de las secciones ( $b$ ), la relación de aspecto ( $h/b$ ), la resistencia a compresión del concreto ( $f'_c$ ), la cuantía de fuerza a tensión, la relación entre cuantías de tensión y compresión ( $\rho/\rho'$ ), el detallado de las secciones (dúctil y no dúctil) y, el confinamiento considerando en función

de la separación específica del refuerzo transversal. Los resultados de estudiar: a) sección transversal: mostraron que los factores de rigidez obtenidos para vigas de sección rectangular resultan siempre mayores a los correspondientes a vigas de sección L y T, como lo considera el reglamento de Nueva Zelanda (NZS-06, 2006); además, los autores hacen énfasis en que en las NTCC-17 (2017) no existe distinción entre vigas de diferente forma para definir la rigidez efectiva (pues para cualquier caso se recomienda usar una rigidez efectiva de  $EI_e = 0.5EI_g$ ), como lo hacen otros reglamentos, como por el ejemplo, el FEMA-356 (2000) o Reglamento Neozelandés (NZS-06, 2006). b) relación de aspecto ( $h/b$ ): se observó que, existen variaciones asociadas a la cuantía de refuerzo y resistencia a compresión, para la mayoría de los casos, cuando la relación de aspecto es mayor o igual a dos ( $h/b \geq 2$ ) el valor de la rigidez efectiva crece conforme la relación de aspecto aumenta; también en la mayoría de los casos, cuando ( $h/b < 2$ ) el valor de la relación de rigideces ( $k$ ) decrece. c) resistencia a la compresión del concreto ( $f'_c$ ): tiene un impacto significativo en la determinación de las rigideces efectivas a flexión, para el caso de secciones con detallado no dúctil, se observó un incremento de la rigidez efectiva conforme se incrementa la resistencia a la compresión. d) relación de cuantías: mostró un incremento de la cuantía de refuerzo por tensión, representa un incremento significativo en la relación de rigideces ( $K = I_e/I_g$ ). e) detallado de las secciones (dúctil y no dúctil): observó que para vigas con detallado dúctil indistintamente de la sección transversal al incrementar la resistencia a la compresión del concreto indica un decremento a la rigidez a flexión, esto se debe a que la profundidad de las grietas de flexión crece, dado que, la profundidad del eje neutro decrece para alcanzar el equilibrio de fuerzas; sin embargo, para vigas con detallado no dúctil en que un incremento en la resistencia a compresión se ve reflejado en un incremento importante en la rigidez efectiva. f) confinamiento (separación específica del refuerzo transversal): confirmó que el efecto del confinamiento, expresado en función de diferentes separaciones del refuerzo transversal, es importante en la capacidad de deformación última de las secciones transversales; sin embargo, su efecto en la rigidez efectiva, es despreciable.

Tena (2019) discute y reflexiona sobre el tema de las rigideces efectivas de vigas de concreto reforzado, apoyándose en resultados analíticos y experimentales. Presenta ecuaciones simplificadas para tomar las rigideces efectivas en secciones de concreto reforzado, enfatizando que la rigidez de cualquier elemento estructural se obtiene a partir de integrar todas estas propiedades a lo largo del elemento y en todo su volumen, además de que la rigidez de cualquier elemento estructural depende principalmente de su forma (prismática o de sección variable), de su longitud, condiciones de apoyo y de sus propiedades mecánicas del material. El autor considera desafortunado que en los códigos de diseño y particularmente las NTCC-17 (2017) se siga promoviendo las recomendaciones de la inercia promedio de las vigas del 50% ( $0.5EI_g$ ) debido al agrietamiento asociado a la primera fluencia del acero de refuerzo longitudinal, pues como muestra, de sus ensayos experimentales (Archundia 2004; Archundia *et al.* 2006) las rigideces efectivas asociadas a la primera fluencia del acero son superiores a la recomendación del 50%, por lo que el

autor no cree importante el cálculo de las rigideces efectivas en vigas de concreto reforzado para fines de análisis y diseño sísmico. Por otra parte, el autor menciona que desde el punto de vista del diseño sismorresistente el considerar secciones no agrietadas no conlleva a un diseño seguro o conservador, pues esto dependerá a que parte del espectro de diseño sísmico conduzca al alargamiento del periodo fundamental de vibrar.

Como se observó de lo presentado en esta sección, la rigidez efectiva que debe considerarse con fines de diseño es un tema complejo. Por esto, con la finalidad de tener un mejor entendimiento del fenómeno, en este trabajo se evalúan las rigideces efectivas en vigas de concreto reforzado mediante simulaciones numéricas con elementos finitos.

### 3.3 Justificación del trabajo

En el presente trabajo de investigación se realiza un estudio mediante simulaciones numéricas enfocadas a evaluar las rigideces efectivas en los elementos estructurales (vigas) de concreto reforzado, mediante la elaboración de modelos de elementos finitos, que conduzcan a una mejor determinación de recomendaciones para el uso de valores (constantes) que permitan definir la rigidez efectiva de elementos de concreto ( $CR$ ) en función de la rigidez gruesa de la sección transversal, de fácil uso para los ingenieros de la práctica; con el objetivo de contribuir a la modelación de la rigidez efectiva de los elementos de concreto reforzado, que conforma un edificio y con ello, contribuir a realizar estimaciones más realistas de la respuesta estructural ante eventos sísmicos intensos.

En códigos actuales para el diseño sísmico de estructuras de concreto reforzado ( $CR$ ), la rigidez efectiva a flexión ( $EI_e$ ) se calcula como una fracción del momento de inercia grueso de la sección transversal, mediante lo cual, en teoría, se obtiene una rigidez promedio del elemento. Alternativamente pueden emplearse expresiones analíticas basadas en evidencia analítica/experimental. Los factores de reducción empleados para el cálculo de las rigideces efectivas promedio en los elementos estructurales de un sistema sismorresistente deberían calcularse tomando en cuenta las variables como la relación de aspecto ( $h/b$ ), la configuración de la sección transversal, las propiedades del concreto, el detallado de la sección (dúctil o no dúctil), la cuantía de refuerzo longitudinal en tensión y las relaciones entre cuantías de acero de refuerzo en tensión y compresión, la velocidad de la carga en estructuras de concreto reforzado, que claramente son importantes, pues el considerar valores promedio de las rigideces efectivas, como lo hacen en los códigos de diseño, no parece una estrategia que represente el fenómeno adecuadamente, dado que, podría llevar a diseños no conservadores o inseguros.

Se debe comprender, que el uso de los coeficientes para determinar las rigideces efectivas a flexión que recomiendan los códigos de diseño, son valores promedio que se ocuparían únicamente para la revisión exhaustiva (distorsiones de entrepiso y rotaciones plásticas) de edificios de concreto

reforzado después de un evento sísmico severo; sin embargo, dentro del proceso del diseño sísmico los coeficientes de rigideces a flexión deben ser diferentes en planta y en elevación, puesto que, las vigas de entrepisos ubicados en la parte intermedia de edificios de concreto reforzado (CR) de mediana y gran altura sufren mayores niveles de degradación que las vigas de entrepisos ubicados en la parte superior (Tena *et al.* 2008 y Tena *et al.* 2012).

### **3.4 Objetivos generales**

#### **3.4.1 Objetivo general**

Realizar un estudio paramétrico de la variación de la rigidez efectiva en vigas de concreto reforzado mediante simulaciones numéricas, que incluye la no-linealidad del material.

### **3.5 Objetivos particulares**

- Determinar la variación de la rigidez efectiva evaluando con las recomendaciones de las NTCC-17 (2017).
- Determinar la variación de la rigidez efectiva variando la cuantía de refuerzo a tensión ( $\rho$ ) y la relación entre las cuantías de tensión y compresión ( $\rho/\rho'$ ), en vigas empotradas en ambos extremos y sometidas a una carga monótona uniformemente distribuida.
- Determinar la variación de la rigidez efectiva variando la resistencia a compresión del concreto ( $f'_c$ ).
- Determinar la variación de la rigidez efectiva en vigas simplemente apoyadas y sometidas a una carga vertical monótona al centro del claro.

### **3.6 Alcances y limitaciones**

Los alcances de esta tesis están enfocados en el desarrollo de simulaciones numéricas, para la determinación de rigideces efectivas en vigas con diferentes condiciones de apoyo sometidas a cargas estáticas monótonas crecientes. Se realizan recomendaciones para el uso de las constantes de rigidez efectiva de elementos de concreto para garantizar un mejor comportamiento estructural, estos coeficientes de rigidez efectiva podrán ser considerados como una herramienta de diseño para los ingenieros de la práctica.

### 3.7 Organización de tesis

La organización de esta tesis se dividió en cinco capítulos y dos apéndices, los cuales se describen brevemente a continuación:

En el capítulo 1 se presenta del tema a desarrollar, se describen brevemente los estudios previos realizados sobre el estudio experimental y analítico de las rigideces efectivas. Además, se introducen los motivos que dan lugar al presente trabajo.

En el capítulo 2 se describen y se presentan los resultados obtenidos de los modelos numéricos realizados en el programa midas FEA en su versión 7.0.1 de algunos ejemplos de aplicación; consecuentemente se muestran las calibraciones para el modelado de vigas de concreto reforzado en el plano ( $2D$ ) y tridimensional ( $3D$ ), propuestos en la literatura. Por último, se realiza una comparativa con los resultados obtenidos experimentalmente.

En el capítulo 3 se describe el estudio paramétrico de las vigas de concreto reforzado en condición empotrada, en que se varía el acero a flexión con la finalidad de evaluar su influencia en la rigidez efectiva a flexión ( $EI_e$ ). Las cuantías de refuerzo se definieron en función las recomendaciones de las NTCC-17 (2017) para secciones con detallado no dúctil ( $Q=2$ ).

En el capítulo 4 se describen y se presentan las características de los modelos correspondientes a las vigas de concreto reforzado apoyadas en condición simple y se realiza un estudio paramétrico tomando en cuenta variables importantes para la estimación de las rigideces efectivas a flexión, como el acero de refuerzo a flexión y la resistencia a compresión del concreto.

En el capítulo 5 se presentan las conclusiones del estudio, después de analizar los resultados. También se muestran las recomendaciones y propuestas que pueden dar lugar al desarrollo de investigaciones futuras.

# Capítulo 2

## Calibración de modelos de elementos finitos con resultados analíticos y experimentales

### 4.1 Metodología

Se muestra la metodología y las consideraciones utilizadas en las simulaciones numéricas; se presentan ejemplos de aplicación para simular el proceso de falla de estructuras de concreto sujetas a carga en su evolución al colapso. En el primer ejemplo se modela una placa de concreto sujeta a una fuerza de tensión, la cual se malla con elementos bidimensionales. En el segundo ejemplo, para validar la solución de problemas bidimensionales y tridimensionales, se modelan los especímenes de vigas de concreto simple probados experimentalmente por Martínez (2017). Un tercer ejemplo de una viga de concreto reforzado estudiada experimentalmente por Foley y Buckhouse (1998) sujeta a cargas concentradas que, dada la simetría de la viga en geometría, condiciones de apoyo y carga, únicamente se modela una cuarta parte de la viga. Por último, se modela un marco de concreto reforzado reportado en la literatura por Chan *et al.* (2000) para validar los modelos constitutivos del concreto y del acero.

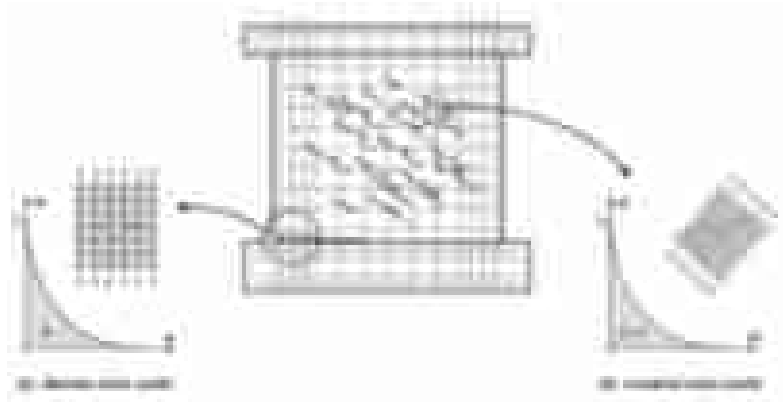
Con los resultados obtenidos en este capítulo, se muestra que, aunque el modelado numérico no sustituye las pruebas experimentales y lo que realmente sucede en las estructuras de concreto de reforzado, es una herramienta importante, mediante la cual es posible obtener información valiosa, como las zonas más demandadas en las estructuras y su posible evolución al colapso. Por otra parte, el modelado numérico proporciona las zonas donde inicia el agrietamiento o la plastificación de los materiales; además permite conocer la evolución del daño, el cual puede ocurrir como agrietamiento, deslizamiento del acero de refuerzo o fracturas, dependiendo del tipo de material.

### 4.2 Metodología empleada para los ejemplos de aplicación numérica

En los ejemplos aquí desarrollados, aquellos que son de concreto en  $2D$  se mallan con elementos sólidos bidimensionales de esfuerzo plano; mientras que, aquellos que son de concreto  $3D$  se mallan con elementos sólidos tridimensionales, se emplean hexaedros de ocho nodos con tres grados de libertad en cada nodo con desplazamiento en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente y el acero de refuerzo se malla con elementos unidimensionales lineales. A los elementos de concreto se les asigna un modelo constitutivo llamado “total strain crack”, el cual tiene la capacidad para simular el agrietamiento en el elemento.

Los modelos de agrietamiento disponibles en el programa midas FEA (Figura 4-1), son dos: agrietamiento discreto y distribuido. El modelo de agrietamiento discreto, que utiliza elementos finitos de interface entre los elementos sólidos para modelar las grietas del concreto; este modelo

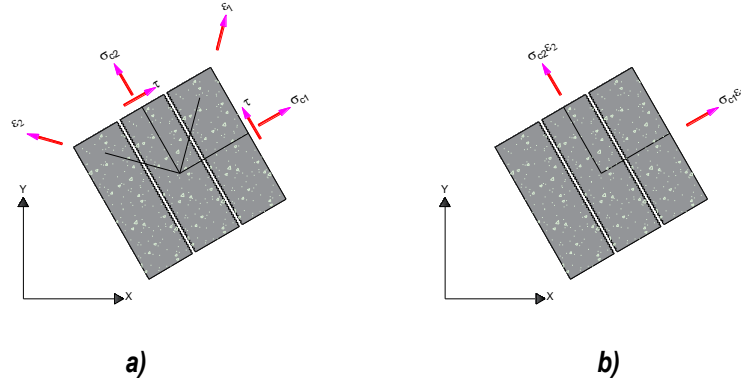
tiene la limitante de ser dependiente de la malla, por lo que se utiliza para modelar juntas; mientras que, el modelo de agrietamiento continuo, asume que las grietas de concreto están dispersas y distribuidas.



**Figura 4-1 Modelos de agrietamiento del concreto (tomada de midas FEA, 2006)**

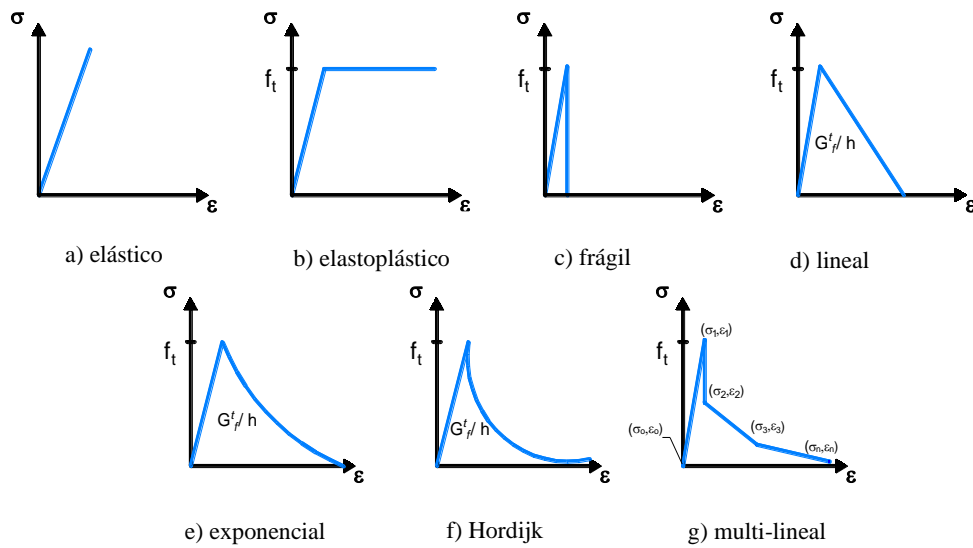
El programa utiliza el modelo de agrietamiento distribuido que tiene dos opciones para considerar la dirección del agrietamiento: grieta fija y giratoria, que dependen de los ejes de la grieta de referencia. El primero asume que los ejes de las grietas permanecen sin cambios una vez que se definen los ejes de la grieta, puesto que se supone que la discontinuidad se desarrolla de forma perpendicular a la dirección del esfuerzo principal máximo, la orientación de la grieta se mantiene constante durante el análisis. Mientras que el modelo de grieta giratoria, supone que las direcciones de las grietas giran continuamente, dependiendo de los cambios en los ejes de los esfuerzos principales la dirección de la grieta puede variar de acuerdo con las direcciones principales de deformación (midas FEA, 2006).

El modelo de grieta giratoria modela de manera más realista las características físicas de las grietas en el elemento, pues la dirección del esfuerzo principal cambia por la propagación de las grietas. Por lo tanto, el modelo de grieta giratoria se utiliza en el modelado de los ejemplos desarrollados; no obstante, en la literatura Rots (1988) se recomienda ampliamente utilizar la grieta giratoria para análisis no lineales de estructuras de concreto reforzado.



**Figura 4-2 Modelos de grietas ortogonales: a) grieta fija y b) grieta giratoria (adaptada de midas FEA, 2006)**

El ablandamiento por deformación en el concreto es un fenómeno que se presenta, después de alcanzar su valor máximo de carga, posteriormente presenta un comportamiento no lineal, que se presenta físicamente como una disminución en la magnitud del esfuerzo acompañado de un incremento en las deformaciones. En estas curvas de ablandamiento por deformación, la resistencia a tensión del concreto y la energía de fractura son las mismas, independientemente del tipo de función de ablandamiento que se utilice. En midas FEA se tienen funciones de ablandamiento por deformación en tensión del modelo constitutivo de concreto que se muestran en la Figura 4-3. En los modelos desarrollados en este trabajo se utiliza la función lineal.

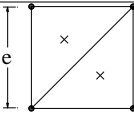
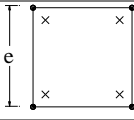
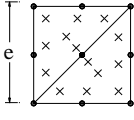
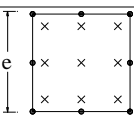


**Figura 4-3 Modelos de ablandamiento por deformación en tensión (adaptada de midas FEA, 2006)**

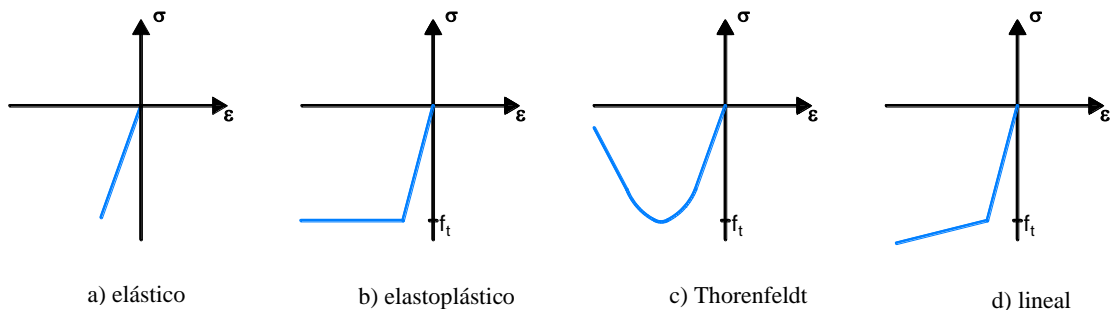
Los parámetros de entrada para las funciones de ablandamiento por deformación son: esfuerzo último en tensión ( $\sigma_{ut}$ ), esfuerzo último en compresión ( $\sigma_{uc}$ ), densidad de energía de fractura ( $G_f$ ) y ancho de banda de agrietamiento. Este último se define como  $h=e\sqrt{2}$  (Rots, 1988), como se muestra

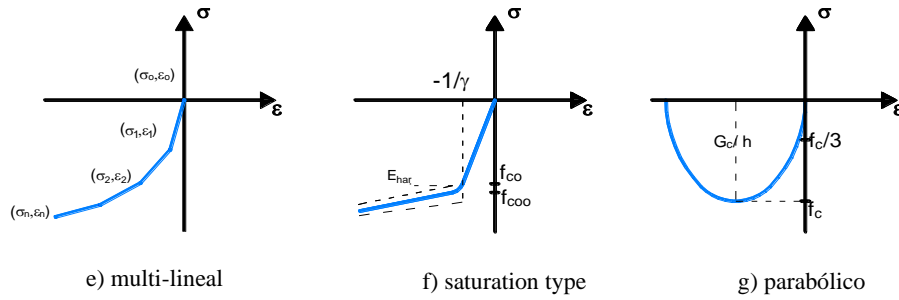
en la Tabla 4-1; donde ( $e$ ) es el tamaño del elemento de la malla. Nótese que el elemento depende de los puntos de integración de Gauss y que esta recomendación fue encontrada a prueba y error por Rots (1988).

**Tabla 4-1 Recomendaciones para estimar el ancho de la banda de agrietamiento (adaptada de Rots, 1988)**

Tipo de elemento e integración	Banda de agrietamiento efectivo $h$ para la propagación de fracturas en zig-zag a través de la malla (encontrado por prueba y error para el problema actual)
	$e$
	$e\sqrt{2}$
	$\frac{1}{2}e\sqrt{2}$
	$e$

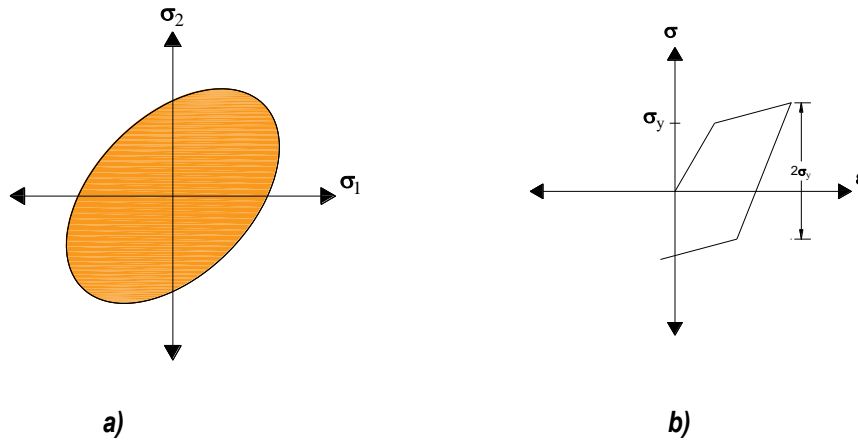
Las funciones de ablandamiento por deformación en compresión, que se tienen disponibles permiten utilizar diferentes funciones. En los ejemplos de aplicación de este trabajo se emplea la función Thorenfeldt (Figura 4-4c), dado que es la que más se ajusta al comportamiento experimental del concreto en compresión.





**Figura 4-4 Modelos de ablandamiento por deformación en compresión (adaptada de midas FEA, 2006)**

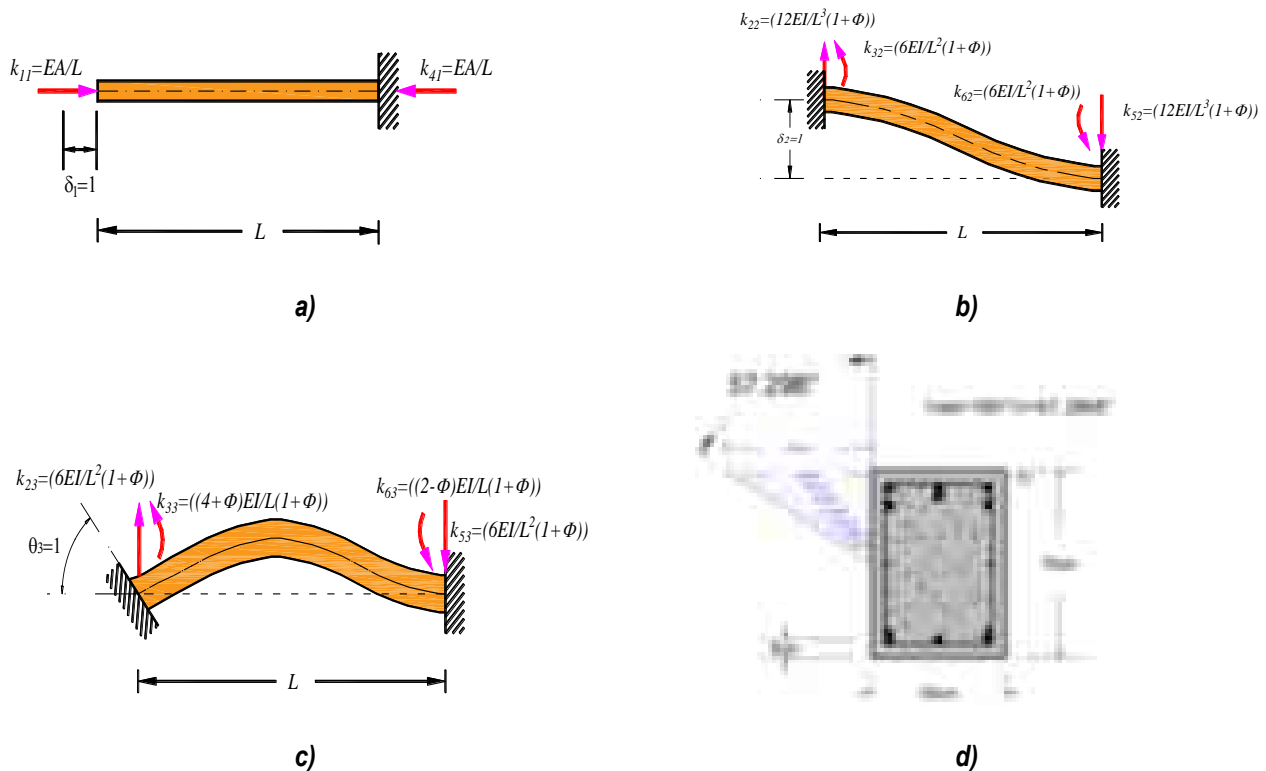
El acero de refuerzo se malla con elementos unidimensionales lineales tipo barra (truss), conectados con los nodos del sólido del concreto. Por lo tanto, existen nodos compartidos entre la malla del acero de refuerzo y la malla del concreto. Se utilizó un modelo de plasticidad con superficie de fluencia de Von Mises, en el cual se supone el mismo umbral en tensión y compresión, como se muestra en la Figura 4-5a; el endurecimiento se idealizó como una función bilineal mostrada en la Figura 4-5b. Finalmente, se considera adherencia perfecta entre ambos materiales (acero y concreto).



**Figura 4-5 Modelo constitutivo del acero: a) superficie de falla de Von Mises y b) endurecimiento por deformación (adaptada de Juárez y Godínez, 2018)**

### 4.3 Vigas de concreto simple sujetas a desplazamientos en sus extremos

En este ejemplo se modela una viga de concreto simple en voladizo y una viga empotrada en sus extremos que son sometidas a desplazamientos unitarios. En los modelos se determinan los coeficientes de rigidez axial debido a un desplazamiento unitario en la dirección horizontal ( $\delta_1=1\text{m}$ ), los coeficientes de rigidez a flexión debido a un desplazamiento unitario vertical ( $\delta_2=1\text{m}$ ) y los coeficientes de rigidez a flexión debido a un giro unitario ( $\theta_3=1\text{radian}=57.296^\circ$ ), cabe mencionar que para simular el giro unitario en la viga de concreto simple, se impone una distribución de desplazamientos lineales a lo largo de la sección transversal (Figura 4-6d), mediante elementos finitos (solución numérica), los cuales se comparan con las ecuaciones analíticas reportadas en la literatura. La viga está empotrada en el extremo derecho y sujeta a la acción de un desplazamiento unitario ( $\delta_1=1\text{m}$ ) en el extremo izquierdo, como se muestra en la Figura 4-6a. La viga tiene una sección transversal de  $0.50 \times 0.70\text{m}$  y una longitud de  $7\text{m}$ . Las propiedades mecánicas son las siguientes: esfuerzo a compresión del concreto de  $f'_c=250\text{ kgf/cm}^2$ , relación de Poisson  $\nu=0.2$ , módulo de elasticidad de  $E_c=2,213,594.4\text{ tonf/m}^2$  y un módulo de rigidez al corte de  $G=922,330.9\text{ tonf/m}^2$  (el modelo considera la deformación por cortante).



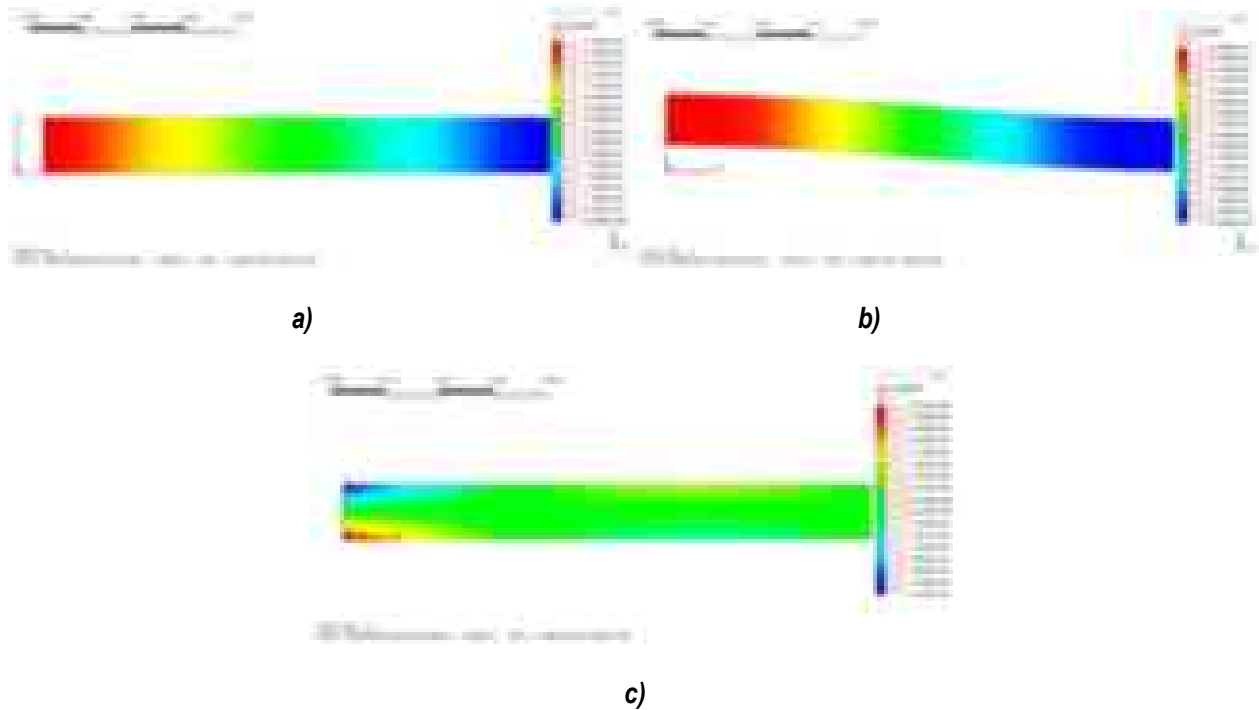
**Figura 4-6 Vigas de concreto simple sujetas a desplazamientos en sus extremos: a) coeficientes de rigidez axial ante un desplazamiento unitario en la coordenada uno, b) coeficientes de rigidez a flexión ante un desplazamiento unitario en la coordenada dos, c) coeficientes de rigidez a flexión ante un giro unitario en la coordenada tres y d) sección transversal**

En la etapa del proceso del mallado, consiste en elaborar la geometría en el programa AutoCAD, generando un archivo DXF, del cual se importa al programa GiD 11.1.8d, donde se genera la malla. Se generaron 2,304 elementos cuadriláteros con dimensiones de 4.8x4.3cm, los cuales tienen cuatro puntos de integración de Gauss. La malla que se utilizó para los modelos numéricos sujetos a desplazamientos en sus extremos y giro se muestra en la Figura 4-7.



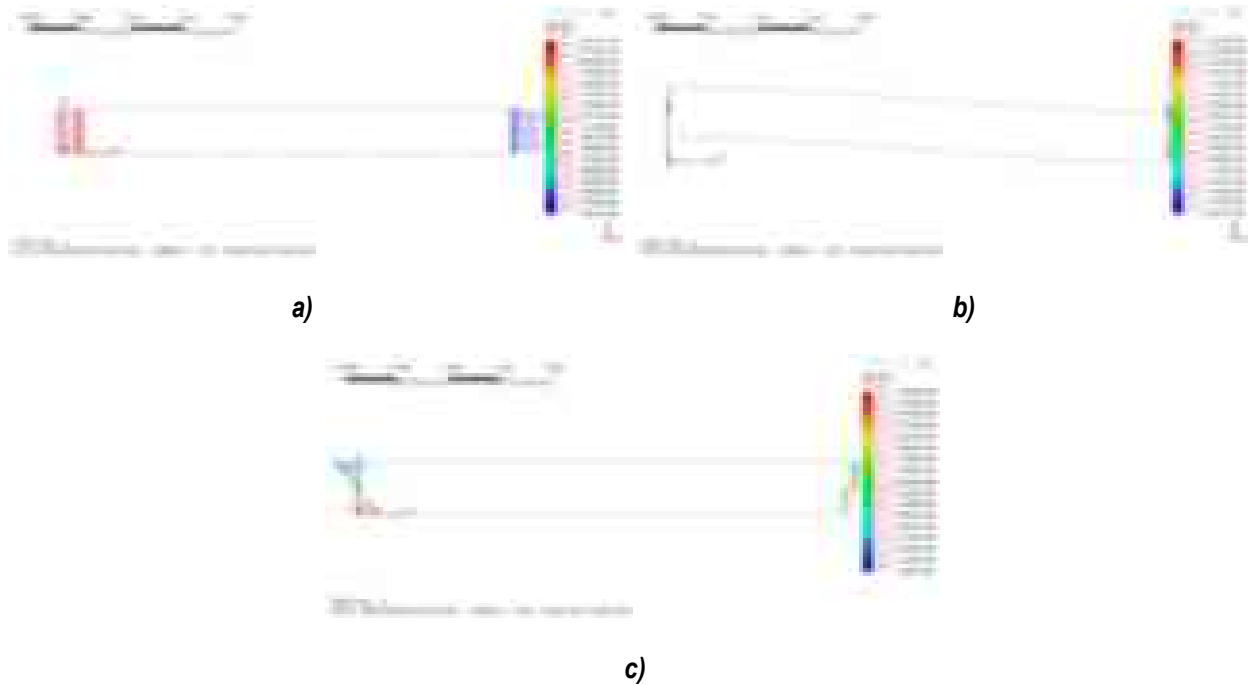
**Figura 4-7 Generación de la malla**

La distribución de desplazamientos en el eje longitudinal del elemento se muestra en la Figura 4-8, donde se observa que el mayor desplazamiento ocurre en la parte izquierda de la viga, donde se aplicó el desplazamiento unitario. El desplazamiento se reduce gradualmente hasta un desplazamiento cero. Es importante mencionar que con los desplazamientos se puede conocer la evolución del daño, pues en las zonas donde este ocurre generalmente se presentan grandes desplazamientos.



**Figura 4-8 Distribución de desplazamientos: a) dirección horizontal, b) dirección vertical y c) dirección horizontal (giro unitario)**

En la Figura 4-9 se muestran las reacciones en los extremos de la viga de concreto simple, los cuales coinciden con la rigidez axial por tratarse de un desplazamiento unitario. Estos valores se proporcionan en la Tabla 4-2, donde se muestran que los valores numéricos se aproximan a las soluciones analíticas reportadas en la literatura.



**Figura 4-9 Reacciones: a) dirección horizontal b) dirección vertical y c) dirección horizontal (giro unitario)**

En la Tabla 4-2 se muestran los valores de los coeficientes de rigidez obtenidos con las ecuaciones analíticas y la solución numérica, al aplicar el desplazamiento en la dirección horizontal y vertical los coeficientes de rigidez axial ( $K_{11}$ ) y los coeficientes de rigidez a flexión ( $K_{22}$  y  $K_{32}$ ) son valores parecidos con la solución analítica y numérica. Sin embargo, se observa que existe una discrepancia de 1.55 veces mayor fuerza entre los valores numéricos y analíticos en los coeficientes de rigidez a flexión ( $K_{23}$ ,  $K_{33}$  y  $K_{63}$ ) debido al giro unitario en la sección transversal; puesto que esta diferencia se le atribuye a la teoría de Timoshenko, dado que introduce los efectos de primer orden por cortante ya que se consideran las deformaciones transversales por cortante.

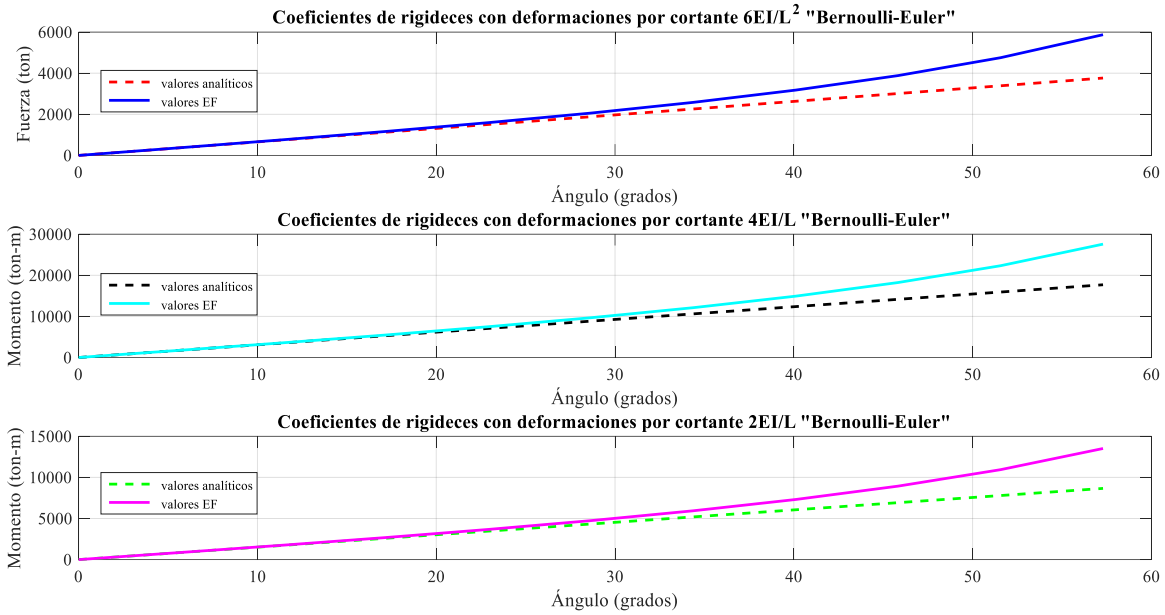
Tabla 4-2 Coeficientes de rigidez

Coeficientes de rigidez	$K_{\text{analíticos}}$	$K_{\text{EF}}$ (midas FEA)	$K_{\text{EF}}/K_{\text{analíticos}}$
$k_{11} = \frac{EA}{L}$	110,679.7 ton	110,679.8 ton	1.00
$k_{22} = \frac{12EI}{L^3(1+\Phi)}$	1,705.8 ton	1,705.2 ton	0.99
$k_{32} = \frac{6EI}{L^2(1+\Phi)}$	3,765.4 ton-m	3,766.5 ton-m	1.00
$k_{23} = \frac{6EI}{L^2(1+\Phi)}$	3,765.4 ton	5,873.8 ton	1.55
$k_{33} = \frac{(4+\Phi)EI}{L(1+\Phi)}$	17,698.2 ton-m	27,596.8 ton-m	1.55
$k_{63} = \frac{(2-\Phi)EI}{L(1+\Phi)}$	8,659.3 ton-m	13,519.6 ton-m	1.56

#### 4.3.1.1.1 Diferencias entre considerar una viga de Bernoulli-Euler y Timoshenko

Para confirmar si existe una reducción de fuerzas lineales en la viga delgada del ejemplo anterior sección 4.3, se verifica que la relación peralte entre la longitud del claro sea menor que 0.2, la viga de concreto simple cumple con que es una viga delgada (Bernoulli-Euler,  $H/L=0.1$ ). En la Figura 4-10 se muestran los coeficientes de rigidez ( $k_{23}=6EI/L^2(1+\Phi)$ ,  $k_{33}=(4+\Phi)EI/L(1+\Phi)$ , y  $k_{63}=(2-\Phi)EI/L(1+\Phi)$ ), después de imponer gradualmente giros que varían desde 0.1 hasta 1 radian con incrementos de 0.1, en la sección transversal del elemento, se observa que la reducción de fuerzas no es lineal, tal que los resultados de las reacciones no son la mitad y que a partir de 23° grados aproximadamente en la sección transversal del elemento la diferencia entre los valores analíticos y numéricos es mayor.

También se puede argumentar que al aplicar el giro de 1rad=57.30° en la sección transversal de la viga se necesita 1.55 veces mayor fuerza (ver Tabla 4-2); sin embargo, al aplicar 0.5rad=28.64° en la sección transversal se requiere solo de 0.55 mayor fuerza para hacer rotar la sección; por lo cual, se esperaría que se necesitara 0.785 mayor fuerza y no menos de la esperada, todo esto parece confirmar que la reducción de fuerzas no es lineal como lo muestra la Figura 4-10 los resultados obtenidos con las ecuaciones analíticas reportadas en la literatura tienden a presentar un comportamiento lineal; mientras que, los valores con la simulación numérica realizados mediante elementos finitos tienen un comportamiento parabólico debido a las deformaciones por cortante.



**Figura 4-10 Coeficientes de rigideces ( $h/l < 0.2$ )**

Sin embargo, para confirmar si existe una reducción menor de fuerzas lineales en una viga de Timoshenko, se consideren los efectos de cortante de primer orden, que conlleva la teoría de vigas gruesas. Se emplea el mismo ejemplo teórico de la sección 4.3, solo que ahora se reduce la longitud del claro de la viga a la mitad ( $L/2$ ). Para la solución de este problema, se verifica que la relación peralte entre la longitud del claro sea mayor o igual que 0.2, la viga cumple estrictamente con una viga gruesa ( $H/L=0.2$ ).

En la Figura 4-11 se muestran los coeficientes de rigideces, después de imponer gradualmente pequeños giros en la sección transversal del elemento. Se puede inferir que la reducción de fuerzas sigue siendo no lineal y siguen existiendo diferencias entre los valores analíticos y numéricos. También se observa que, a partir de  $29^\circ$  grados en la sección transversal de la viga, la diferencia empieza a aumentar considerablemente entre los valores teóricos y numéricos.

Por último, se puede concluir que al aplicar el giro de  $1\text{rad}=57.30^\circ$  en la sección transversal de la viga se necesita 1.56 veces mayor fuerza; no obstante, al aplicar  $0.5\text{rad}=28.64^\circ$  en la sección transversal se requiere solo de 0.54-0.55 más fuerza para hacer rotar la sección; por lo que las diferencias siguen persistiendo, pero esta vez son pequeñas, dado que se consideran los efectos por cortante de primer orden. La Figura 4-11 muestra los resultados obtenidos con las ecuaciones analíticas y los valores obtenidos mediante elementos finitos.

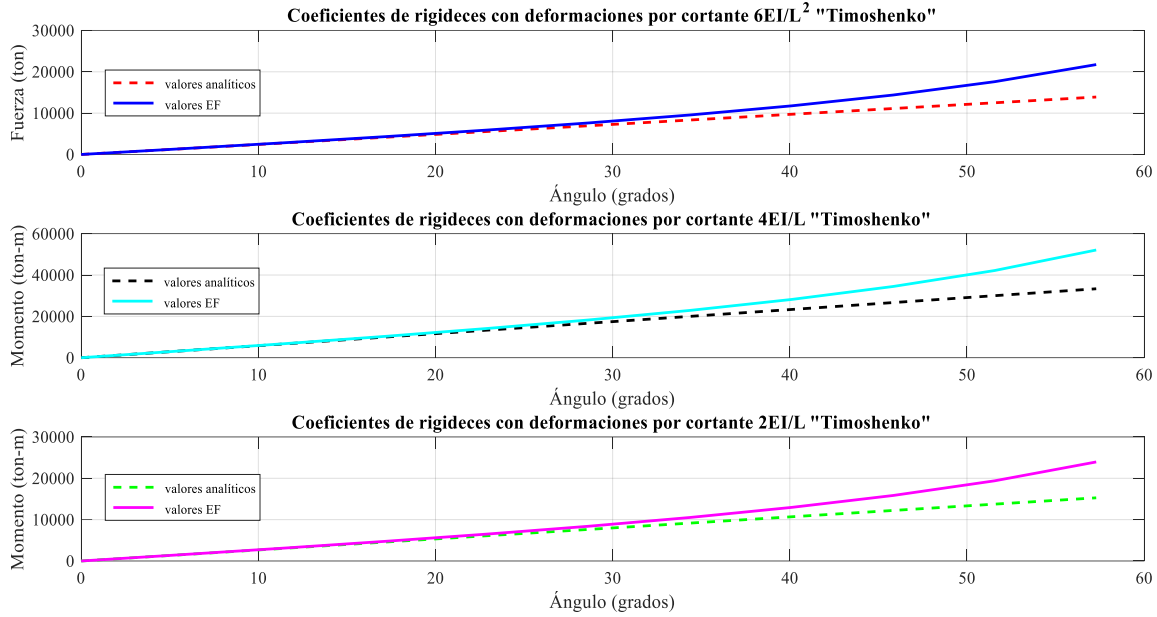


Figura 4-11 Coeficientes de rigideces ( $h/l \geq 0.2$ )

#### 4.4 Placa sujeta a tensión

Este ejemplo se tomó de Juárez (2006), quien a su vez lo adaptó de Oliver y Huespe (2004), el cual consiste de una placa restringida en su extremo izquierdo y sometida a carga de tracción en su extremo contrario hasta llegar a la falla. La placa tiene una longitud  $L=2\text{m}$ , altura  $h=1\text{m}$ , un espesor uniforme de  $t=1\text{m}$ , consecuentemente ésta tiene un área  $a=1\text{m}^2$  (Figura 4-12). El material de la placa tiene las propiedades mecánicas siguientes: relación de Poisson  $\nu=0.4$ , módulo de elasticidad  $E_c=1,000\text{ MPa}$ , esfuerzo de compresión último  $\sigma_{uc}=10\text{ MPa}$ , esfuerzo de falla a tensión de  $\sigma_{ut}=1\text{ MPa}$  y densidad de energía de fractura  $G_f=0.005\text{ MN/m}$ . La malla estructurada que se generó para modelar la placa consiste de 780 elementos sólidos bidimensionales, con un tamaño de  $0.5 \times 0.5\text{cm}$ , como se muestra en la Figura 4-13.

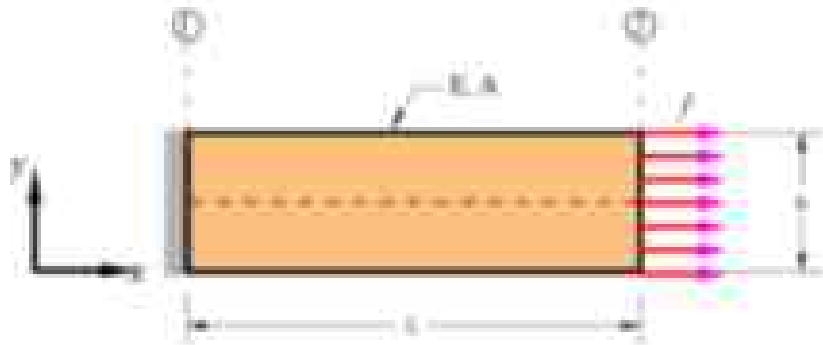
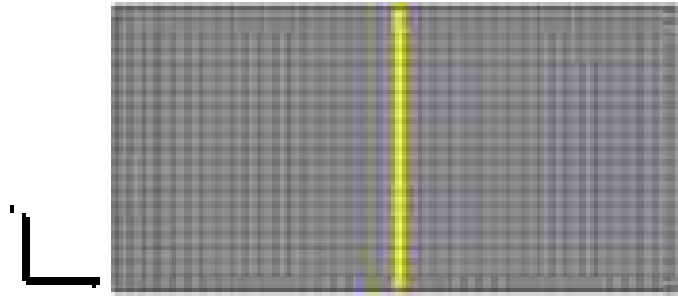
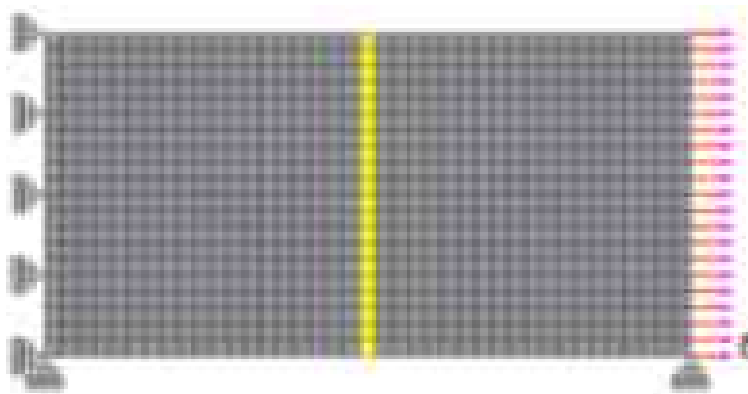


Figura 4-12 Geometría de la placa

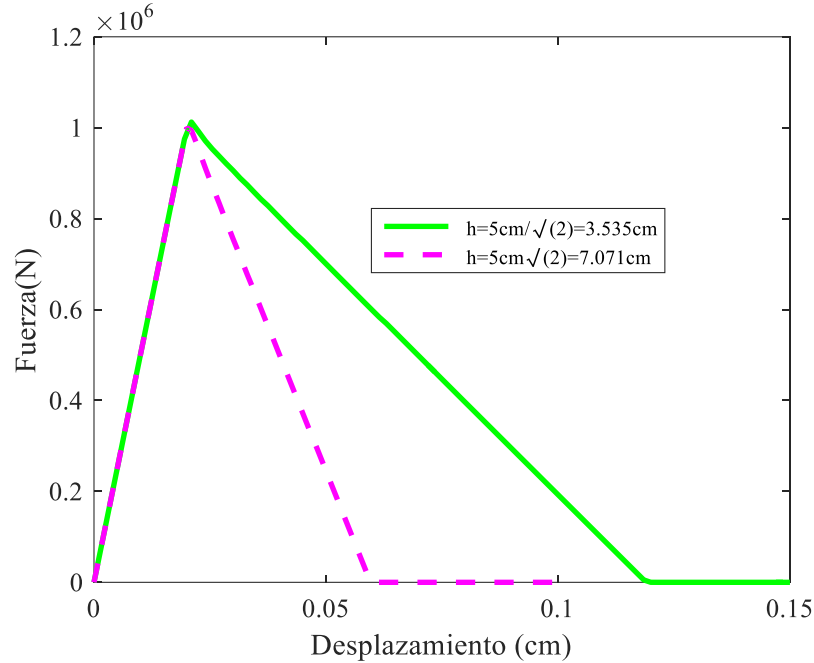


**Figura 4-13 Malla estructurada**

Los apoyos se colocan en todos los nodos del extremo izquierdo de la placa, restringiendo el movimiento en la dirección horizontal y el nodo de la parte inferior derecha en dirección vertical para no generar inestabilidad en la estructura. Se realizó un análisis con la recomendación de Rots (1988) del ancho de banda de agrietamiento ( $H=b\sqrt{2}$ ), imponiendo gradualmente un desplazamiento en la dirección horizontal de  $\delta=1\text{cm}$  (Figura 4-14), con el que se obtuvo la curva de la carga contra el desplazamiento en color magenta mostrada en la Figura 4-15, donde se observa que la carga máxima que alcanza es de  $1\text{MN}$  a un desplazamiento de  $0.2\text{cm}$  y que el elemento se descarga a un desplazamiento de  $0.6\text{cm}$ . Este resultado, no es consistente con la densidad de energía del material, pues al integrar el área bajo la curva y dividirla entre el área de la sección se tiene una densidad de energía de fractura de  $0.002\text{ MN/m}$ , menor a  $G_f=0.005\text{ MN/m}$ . Por lo anterior, se determinó a prueba y error, análogo a la recomendación de Rots (1988), un ancho de banda de agrietamiento diferente  $H=b/\sqrt{2}$ . Posteriormente, se realizó otro análisis con un desplazamiento a  $\delta=1.5\text{m}$ , con el que se obtuvo la curva de la carga contra el desplazamiento en color verde mostrado en la Figura 4-15, la cual es congruente con la densidad de energía de fractura del material, pues el área bajo la curva, corresponde a la energía externa inducida por la carga, que es igual a la energía de fractura  $G_f$  del material.



**Figura 4-14 Condiciones de apoyo y desplazamiento aplicado en el extremo derecho**



**Figura 4-15 Gráfica de la carga contra el desplazamiento**

El agrietamiento en la sección se presenta cuando alcanza su valor máximo de carga (1MN), como se muestra en la Figura 4-16, donde la propagación de daño ocurre únicamente en la franja central como era de esperarse, debido a que, se asignó el comportamiento no lineal en esta zona.



**Figura 4-16 Banda de agrietamiento en la placa bidimensional**

#### 4.5 Vigas de concreto simple con ranuras

Este ejemplo se tomó de Martínez (2017), quien realizó dos tipos de pruebas de laboratorio, las primeras consistieron en la medición de aceleraciones ambientales por medio de sensores

(acelerómetros modelo *PCB393B31*) para registrar las señales o vibraciones generadas. Para la segunda etapa se realizaron pruebas a flexión colocando carga a los tercios de la viga y, los cuales se modelaron numéricamente.

#### 4.5.1.1 Elaboración de especímenes

Martínez (2017) elaboró cinco vigas de concreto simple, variando el daño en cada una de ellas. Se realizó un corte transversal (muesca) en cuatro de estas vigas para representar el agrietamiento. Mientras que la última viga se considera que no tiene ningún tipo de daño. Para la elaboración de estos especímenes se utilizaron moldes de acero inoxidable de 60x15x15 cm, en la Figura 4-17 se muestra los especímenes de concreto simple.

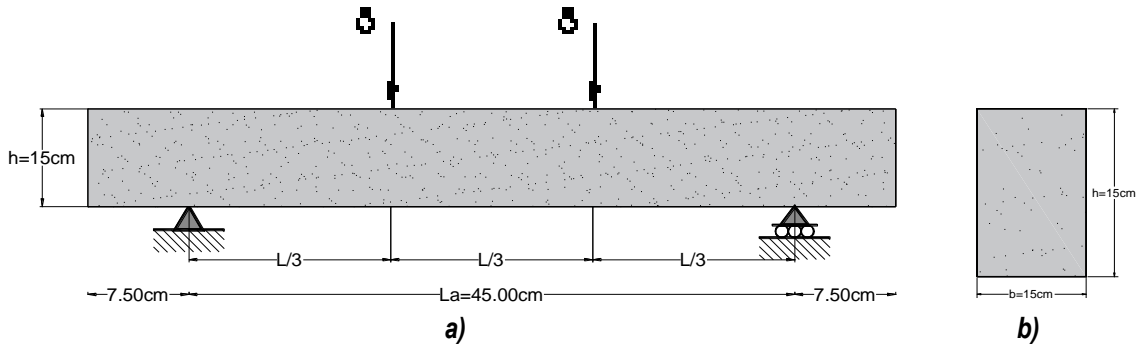


**Figura 4-17 Especímenes de concreto simple (tomada de Martínez 2017)**

La altura de la muesca se varió para cada elemento-viga, en la Tabla 4-3 se muestran la denominación de cada espécimen y el tamaño de la muesca. Las dimensiones de las vigas en cada simulación son las mismas a las propuestas en el experimento: longitud entre apoyos  $L_a=45$  cm, altura  $h=15$  cm y espesor  $b=15$  cm (Figura 4-18).

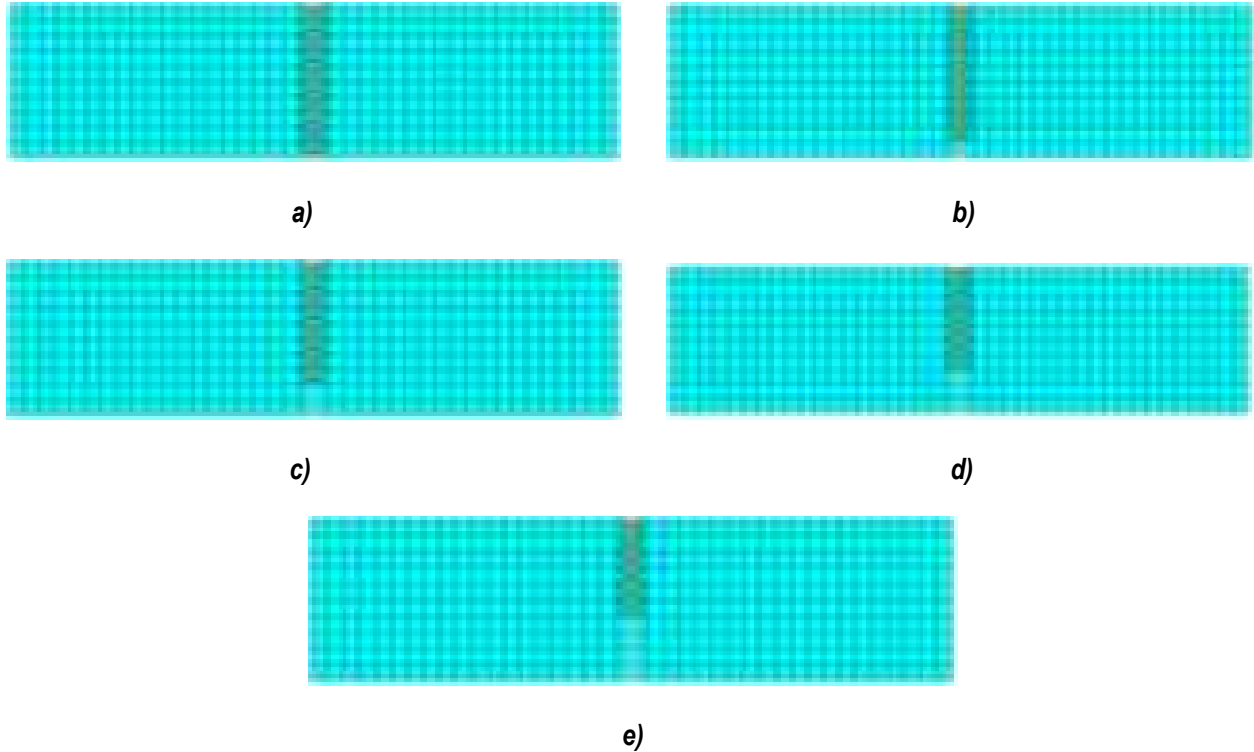
**Tabla 4-3 Tipos de espécimen**

Especímen	Denominación de muesca	Altura de la muesca (cm)
V0	$r=0h$	0
V1	$r=0.1h$	1.5
V2	$r=0.2h$	3.0
V3	$r=0.3h$	4.5
V4	$r=0.4h$	6.0



**Figura 4-18 Viga sin muesca: a) dimensiones de la viga y b) sección transversal**

Las propiedades mecánicas del material del concreto utilizadas para la solución numérica son: relación de Poisson  $\nu=0.2$ , esfuerzo máximo a compresión  $\sigma_{uc}=321.2 \text{ kgf/cm}^2$ , esfuerzo máximo a tensión  $\sigma_{ut}=32.1 \text{ kgf/cm}^2$ , módulo elástico  $E_c=250,909.0 \text{ kgf/cm}^2$  y una densidad de energía de fractura  $G_f=0.1019 \text{ kgf/cm}$ . Las mallas de elementos finitos se muestran en la Figura 4-19, las cuales tienen elementos cuadriláteros con cuatro puntos de integración; note que en la zona donde se espera concentración de esfuerzos se utilizaron elementos más pequeños. El número de elementos finitos utilizados para cada modelo se proporciona en la Tabla 4-4.

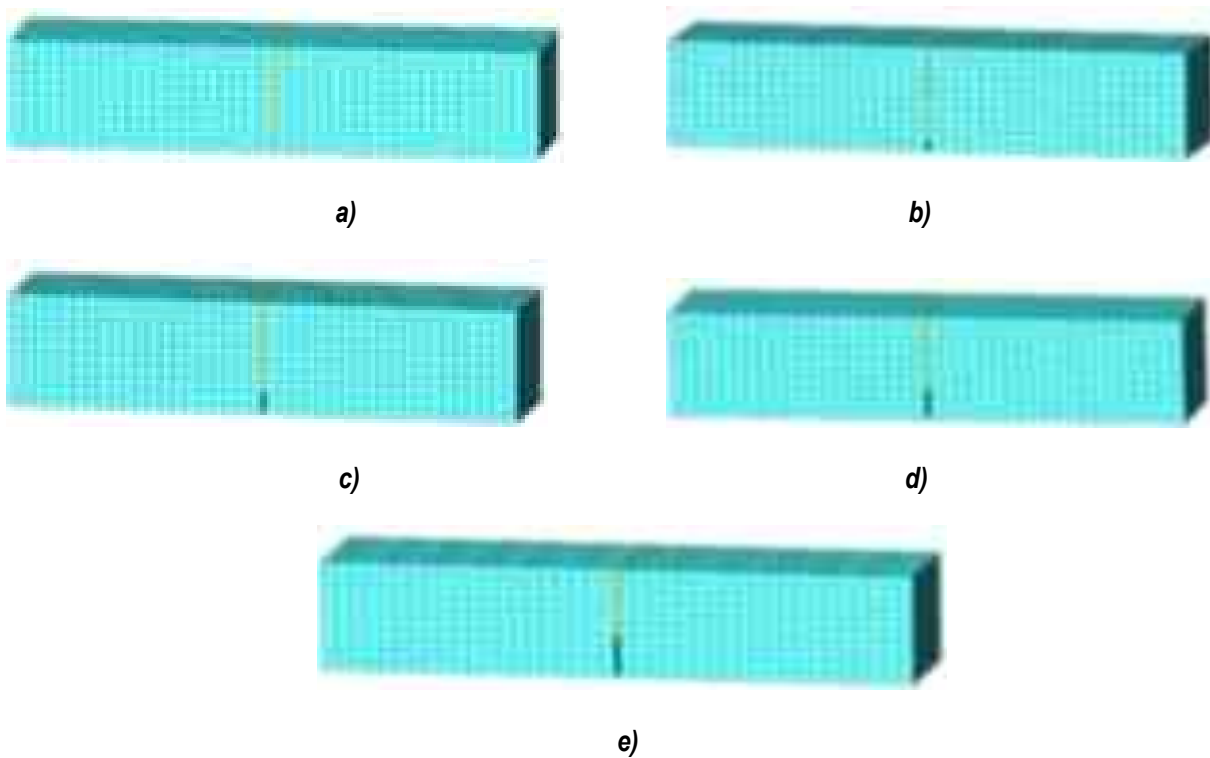


**Figura 4-19 Discretización de las mallas bidimensionales: a) V0, b) V1, c) V3, d) V4 y e) V5**

**Tabla 4-4 Número de elementos finitos en los modelos bidimensionales y tridimensionales**

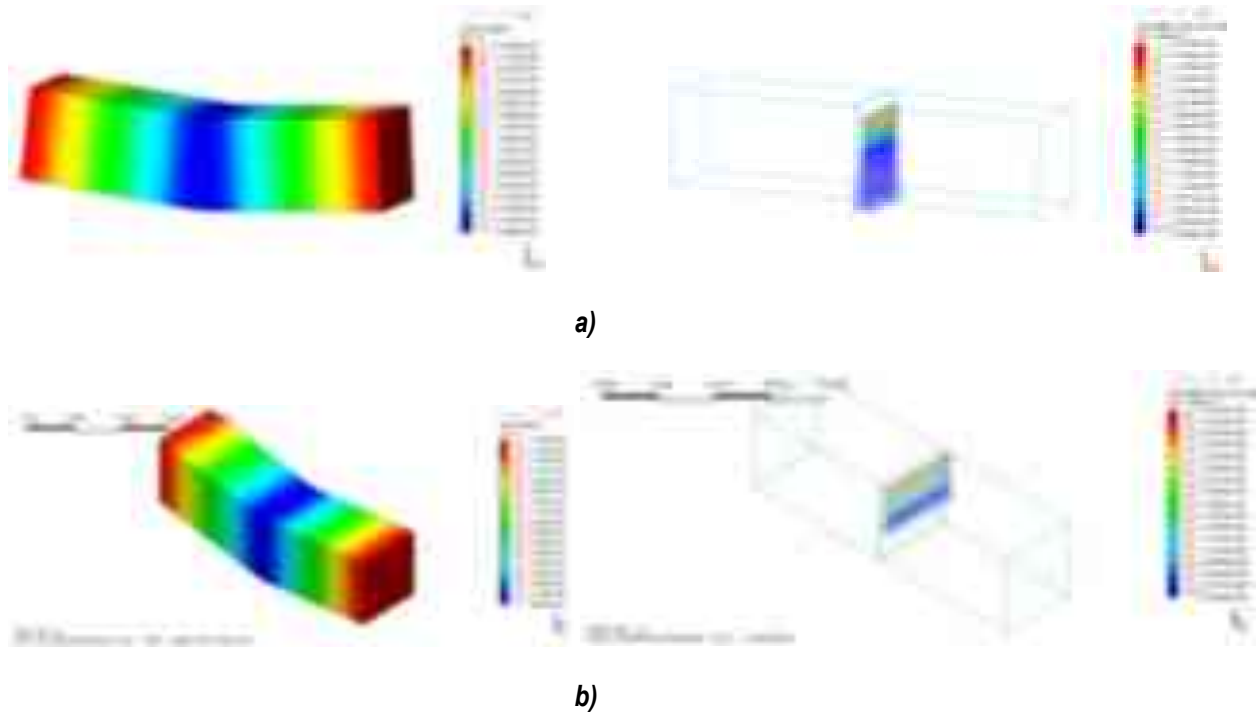
Espécimen	Número de elementos bidimensionales (2D)	Número de elementos tridimensionales (3D)
V0	490	4,100
V1	481	4,090
V2	472	4,080
V3	463	4,070
V4	454	4,060

En cuanto a la aplicación de la carga, como se señaló en la Figura 4-18 los desplazamientos se colocaron gradualmente en la dirección vertical a los tercios del claro de la viga (entre apoyos) como lo indica la prueba a flexión. El mismo método de mallado y aplicación de carga se utilizó para los demás modelos bidimensionales (2D) y sólidos (3D). En la Figura 4-20 se muestra el mallado utilizado para la viga tridimensionales, se asignan propiedades no lineales al centro del claro de la viga como se mencionó en la sección 4.2. Las vigas tridimensionales cuentan con las mismas propiedades mecánicas descritas anteriormente; finalmente se calibran los resultados bidimensionales y tridimensionales para verificar que ambos análisis (2D y 3D) alcancen los mismos valores de carga máxima.



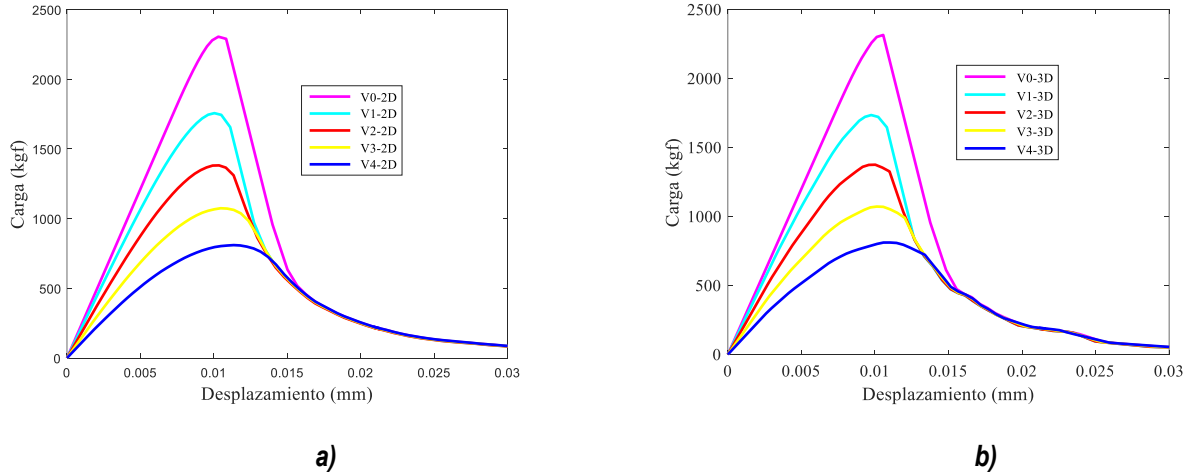
**Figura 4-20 Discretización de las mallas tridimensionales: a) V0, b) V1, c) V3, d) V4 y e) V5**

En la Figura 4-21 se muestra la distribución de desplazamientos en la dirección vertical y la propagación del agrietamiento de los modelos tridimensionales V0 y V4, cabe hacer mención que el mayor desplazamiento se presenta al centro de la viga y se reduce gradualmente hacia los extremos hasta un desplazamiento menor.



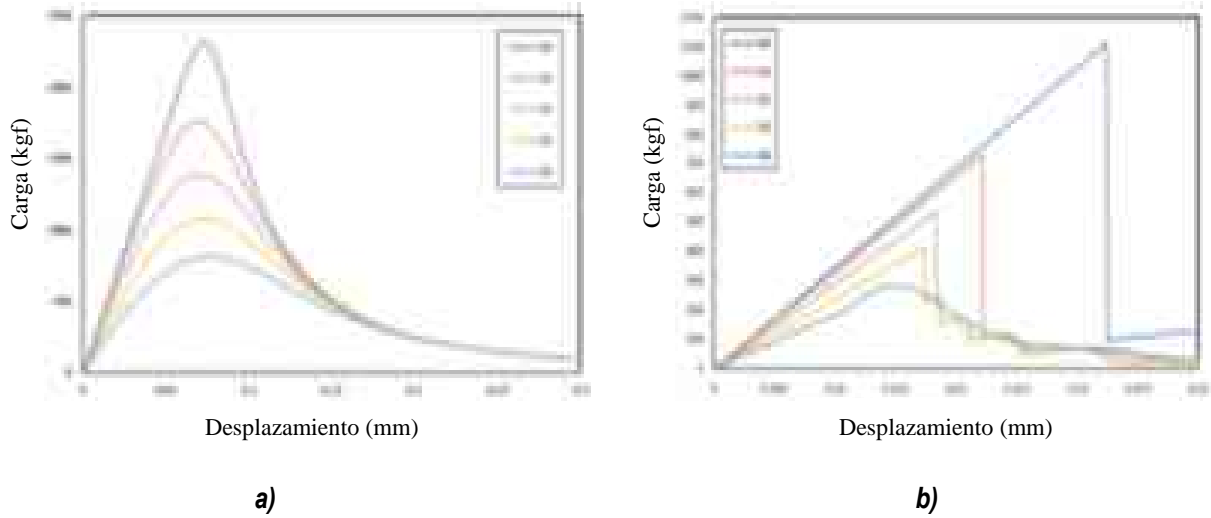
**Figura 4-21 Distribución de desplazamiento en la dirección vertical y propagación del agrietamiento: a) modelo V0 y b) modelo V4**

Las curvas de la carga contra el desplazamiento obtenidas con elementos bidimensionales (2D) y tridimensionales (3D) se muestran en la Figura 4-22. Se observa que ambas curvas son semejantes, como era de esperar, esto se debe a que el programa midas FEA permite asignar la densidad de energía de fractura ( $G_f$ ) y se puede elegir el ablandamiento por deformación, tanto en tensión como en compresión; sin embargo, se presentan las cargas máximas resistentes a desplazamientos similares, conforme aumenta el daño (altura de la muesca), la rigidez del elemento disminuye; dado que, se presenta una menor pendiente.



**Figura 4-22 Curvas de la carga contra el desplazamiento de modelos numéricos: a) bidimensionales y b) tridimensionales**

En la Figura 4-23 se muestran las curvas de la carga contra el desplazamiento obtenidas con las vigas bidimensionales y tridimensionales por Martínez (2017). En cuanto a los modelos tridimensionales, cabe señalar que utilizó el programa ANSYS12.0 para las simulaciones numéricas tridimensionales (3D). En la Figura 4-23a se muestra la curva de carga contra el desplazamiento, donde reporta que conforme aumenta el daño, la rigidez del elemento disminuye con una menor pendiente. Es claro que cuando el elemento alcanza su carga máxima resistente, no exhibe mayor deformación, sino que, no presenta ablandamiento por deformación y, por ende, presenta una falla frágil (Figura 4-23b). Además, se observa que las cargas máximas resistentes se alcanzan a diferentes desplazamientos, a mayor altura de muesca, menor es el desplazamiento; aunado a lo anterior, los resultados tridimensionales no se asemejan a los reportados en la Tabla 4-5, dado que el programa ANSYS no permite modificar la densidad de energía de fractura ( $G_f$ ) y tampoco las funciones de ablandamiento por deformación.



**Figura 4-23** Curvas de la carga contra el desplazamiento de las vigas, tomadas de Martínez (2017): a) bidimensionales y b) tridimensionales

En la Tabla 4-5 se muestran las cargas máximas obtenidas con el programa midas FEA y las reportadas por Martínez (2017) en ANSYS. Se observa que los valores con la simulación numérica en midas FEA los modelos bidimensionales y tridimensionales alcanzan casi los mismos valores en carga y desplazamiento. Además, se puede atribuir que la carga máxima es inversamente proporcional a la altura de la muesca cuando la grieta es mayor la carga máxima disminuye; sin embargo, la viga con la muesca más pequeña necesita más energía para agrietar toda la sección transversal. La Tabla 4-5 muestra los valores de las cargas máximas de cada modelo reportados por Martínez (2017), así como sus respectivos desplazamientos al centro del claro de la viga. Es evidente observar que las cargas máximas de los modelos bidimensionales de Martínez (2017) son similares a los obtenidos con el programa midas FEA; sin embargo, para los modelos tridimensionales los valores de carga máxima son diferente puesto que, en el programa de elementos finitos-ANSYS no permite modificar los parámetros de la densidad de energía de fractura y tampoco la función del ablandamiento por deformación.

**Tabla 4-5** Valores de carga máxima resistente y desplazamientos

Valores de las cargas máximas obtenidos de la solución numérica (EF)			
Vigas bidimensionales (2D)		Vigas tridimensionales (3D)	
Carga máx. (kgf)	Desplazamiento (mm)	Carga máx. (kgf)	Desplazamiento (mm)
2,305.43	0.010305	2,315.51	0.010564
1,756.75	0.010035	1,735.25	0.009746
1,381.97	0.010351	1,375.47	0.010024

1,074.46	0.010461	1,071.95	0.010125
810.06	0.011350	811.43	0.011020
Valores de las cargas máximas reportados por Martínez (2017)			
Vigas bidimensionales (2D)		Vigas tridimensionales (3D)	
Carga máx. (kgf)	Desplazamiento (mm)	Carga máx. (kgf)	Desplazamiento (mm)
2,309.40	0.073	1,108.10	0.032
1,757.70	0.071	730.60	0.022
1,386.10	0.069	529.60	0.018
1,076.20	0.071	411.90	0.017
810.50	0.075	281.70	0.015

#### 4.6 Vigas de concreto reforzado

Se presenta una viga de concreto reforzado simplemente apoyada y sometida a cargas puntuales, probada experimentalmente por Foley y Buckhouse (1998). La viga de concreto reforzado tiene una longitud de 472.44 cm y una sección transversal de 25.4 x 45.7 cm, la viga está reforzada longitudinalmente con tres barras de acero número #5 en la parte inferior únicamente y reforzada con estribos en forma de U del #3 espaciados respectivamente como se muestra en la Figura 4-24.

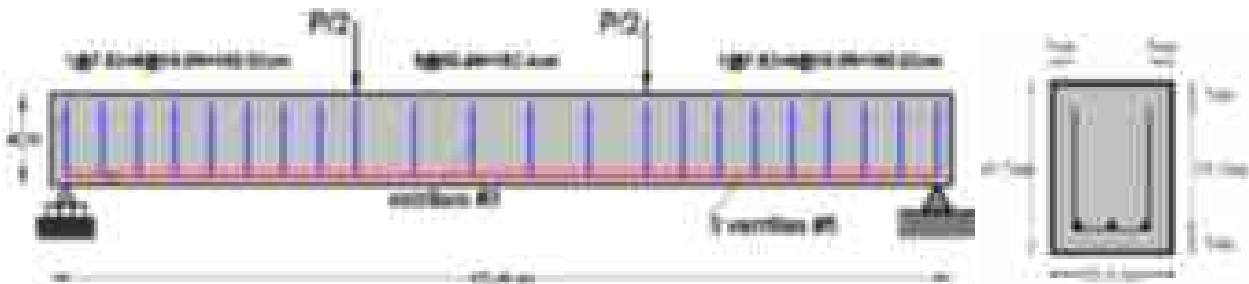
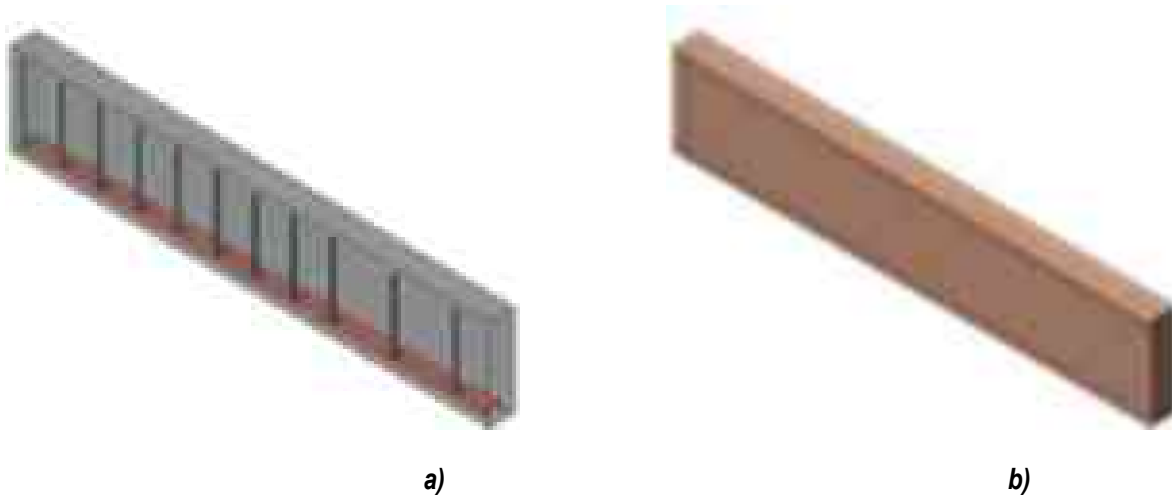


Figura 4-24 Viga de concreto reforzado, cotas en cm

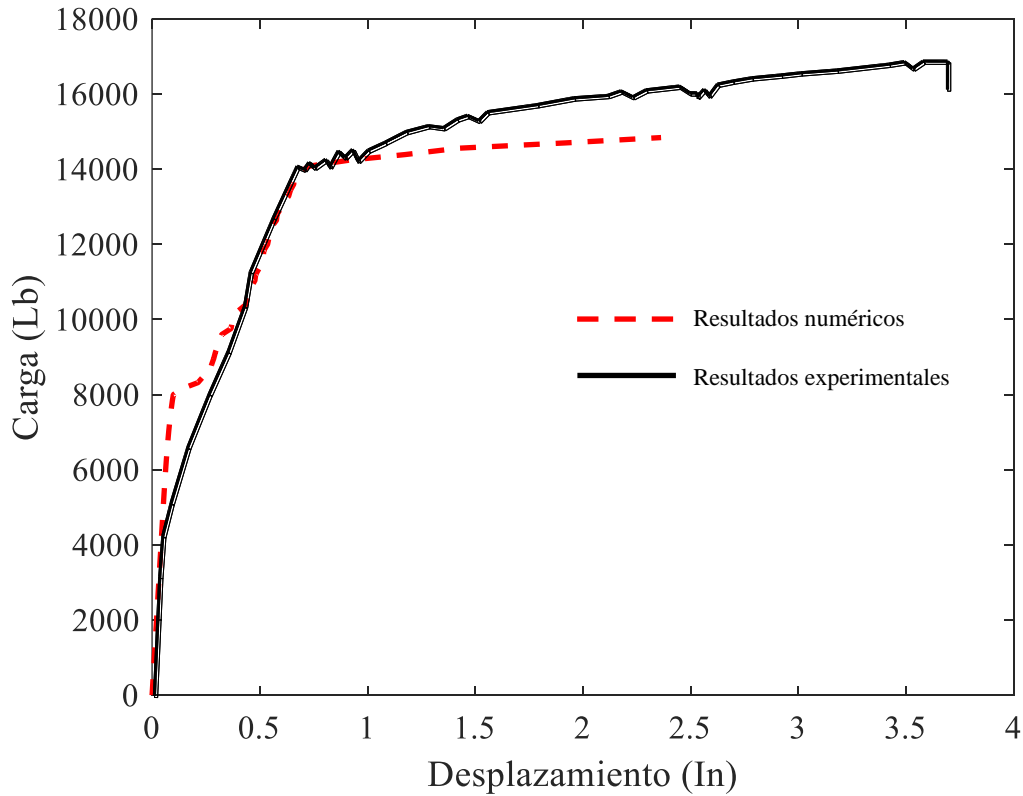
Las propiedades mecánicas del concreto consideradas para la viga son: módulo de elasticidad  $E_c= 277,647.52 \text{ kgf/cm}^2$ , relación de Poisson  $\nu= 0.3$ , esfuerzo máximo a tensión  $\sigma_{ut}= 36.56 \text{ kgf/cm}^2$ , esfuerzo máximo a compresión  $\sigma_{uc}= 337.42 \text{ kg/cm}^2$  y para el acero de refuerzo:  $E_a= 2,039,432.4 \text{ kgf/cm}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu= 0.3$ , esfuerzo de fluencia  $f_y= 3,263.09 \text{ kgf/cm}^2$ , un módulo de endurecimiento por deformación  $H=203.94 \text{ kgf/cm}^2$ , la deformación a la que inicia el endurecimiento por deformación es de 2.2%. Se realizaron mallas estructuradas en el programa midas FEA con elementos hexaedros de ocho nodos con ocho puntos de integración de Gauss. Las barras de acero se mallaron con elementos unidimensionales a los que se les asignó un comportamiento bilineal, cuyos extremos se ensamblan en los nodos de los elementos sólidos de

concreto. Dada la simetría de la viga en geometría, condiciones de apoyo y carga únicamente se modela y se malla un cuarto de la viga, como se muestra en la Figura 4-25.



**Figura 4-25 Modelado de  $\frac{1}{4}$  de la viga estudiada por Foley y Buckhouse (1998): a) concreto y acero de refuerzo y b) mallado en midas FEA**

Para la obtención de la respuesta estructural, se inducen desplazamientos aplicados gradualmente (Tabla 4-6) en los puntos de aplicación de las cargas. En la Figura 4-26 se muestran las curvas carga contra desplazamiento al centro del claro de la viga obtenidos con el programa midas FEA y los reportados por Foley y Buckhouse (1998) donde se observa que los valores de carga de máxima con la simulación numérica son congruentes con los valores de la prueba experimental, pues la diferencia entre la carga promedio de falla experimental y la obtenida con la simulación numérica es del 9% (Tabla 4-6), la diferencia que existe entre las curvas es debido a que el modelo no toma en cuenta la variación de la velocidad en el proceso de la carga ni los efectos de deslizamiento en el acero de refuerzo.



**Figura 4-26 Curva de la carga contra el desplazamiento, modelo experimental de Foley y Buckhouse (1998) contra la numérica en midas FEA**

**Tabla 4-6 Desplazamientos últimos de las pruebas experimentales y la solución numérica**

Espécimen	Carga promedio de falla experimental (lbs)	Desplazamiento promedio experimental (in)	Carga de falla solución numérica midas FEA (lbs)	Desplazamiento solución numérica midas FEA (in)
C1	16,310.00	3.65	14,841.87	2.36

En la Figura 4-27 se muestran los desplazamientos verticales, las trayectorias de agrietamiento, los esfuerzos desarrollados en el acero y la plastificación en el acero de refuerzo de la viga de concreto reforzado ante el desplazamiento último que presentó la viga en la simulación numérica. Se observa que las trayectorias de agrietamiento inician en el centro del claro y se propagan hacia los extremos, las mayorías de las grietas se encuentran totalmente abiertas a la carga (centro del claro) mientras que también existen grietas parcialmente abiertas a la carga de los desplazamientos impuestos. Por otra parte, la plastificación en el acero de refuerzo se presenta en lecho inferior (Figura 4-27d), debido a que es la zona más esforzada. Finalmente, en la Figura 4-28 se muestra la curva de

degradación de rigidez de la viga, que se obtuvo a través de la curva carga contra desplazamiento, se observa que la curva presenta un comportamiento de degradación lineal, a partir de un desplazamiento de 0.0941 in, el primer agrietamiento importante en la viga ocurre a una carga de 7,839.98 lb y la primera fluencia del acero se presenta a un desplazamiento de 0.6574 in con una carga de 13,599.97 lb; con base en, la curva de la carga contra el desplazamientos se obtiene un valor de rigidez efectiva a flexión de  $I_e/I_g \approx 0.25$  en condición de la primera fluencia del acero de refuerzo.

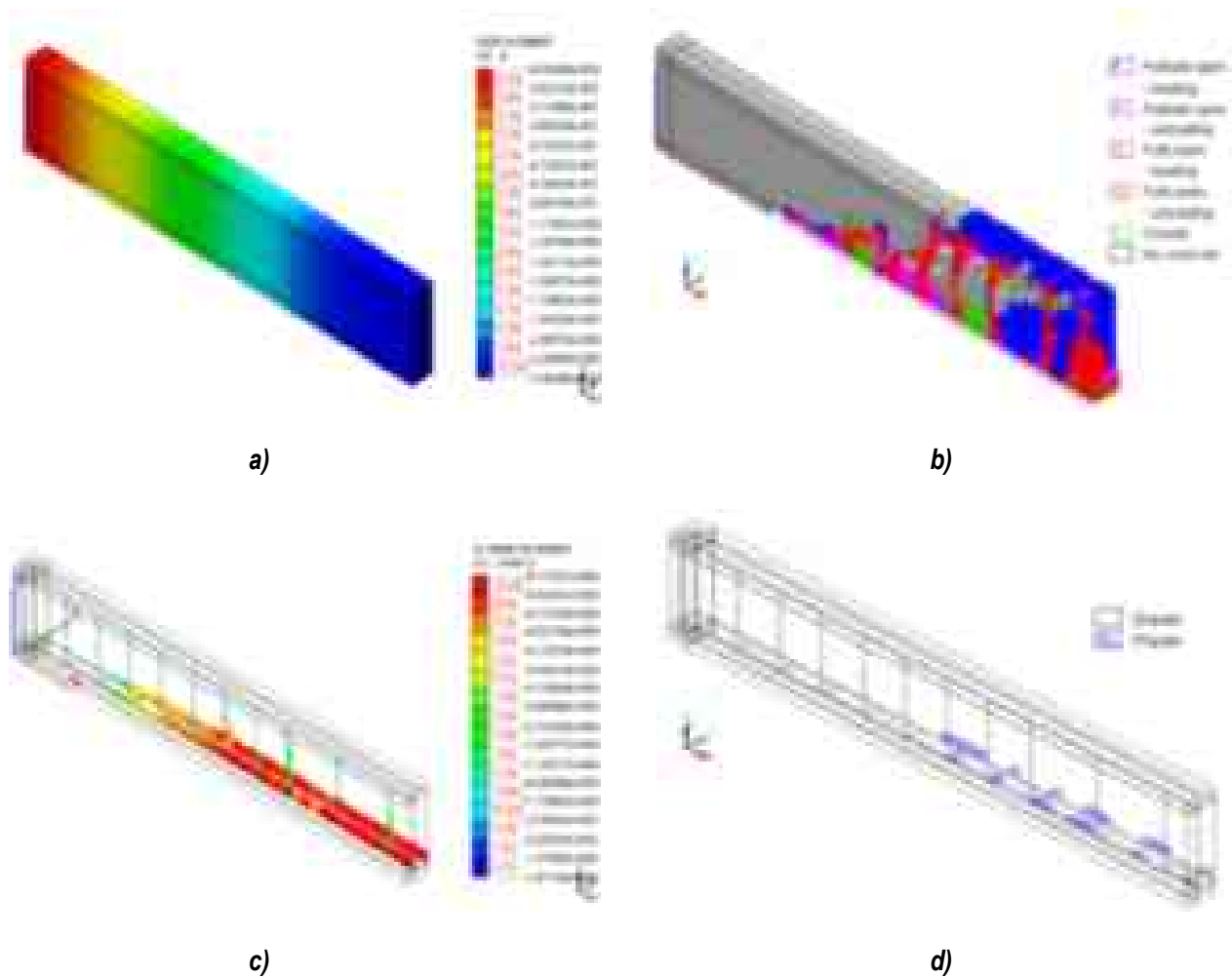
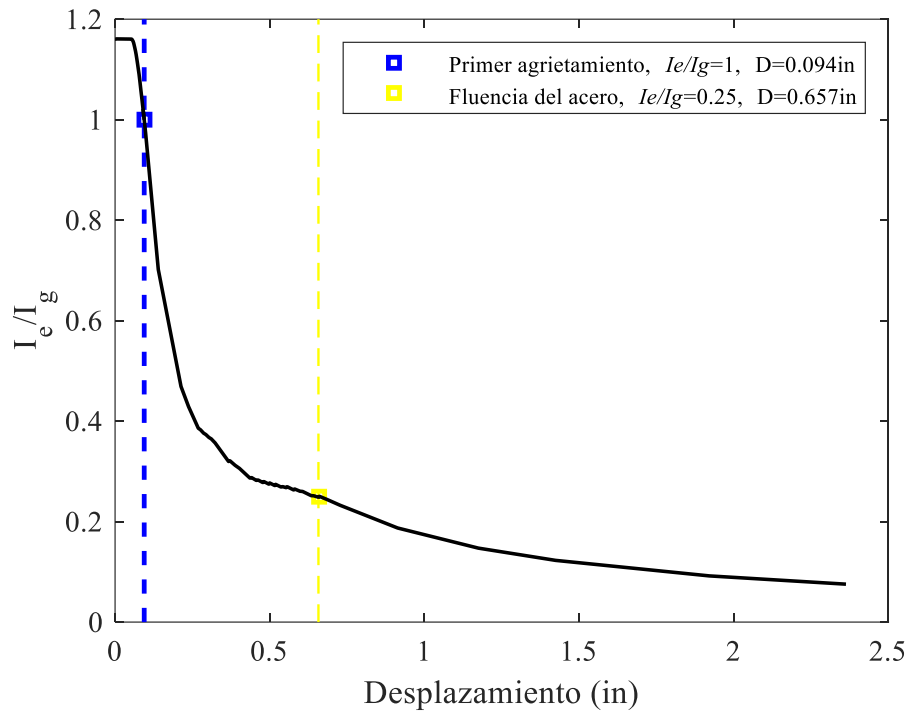


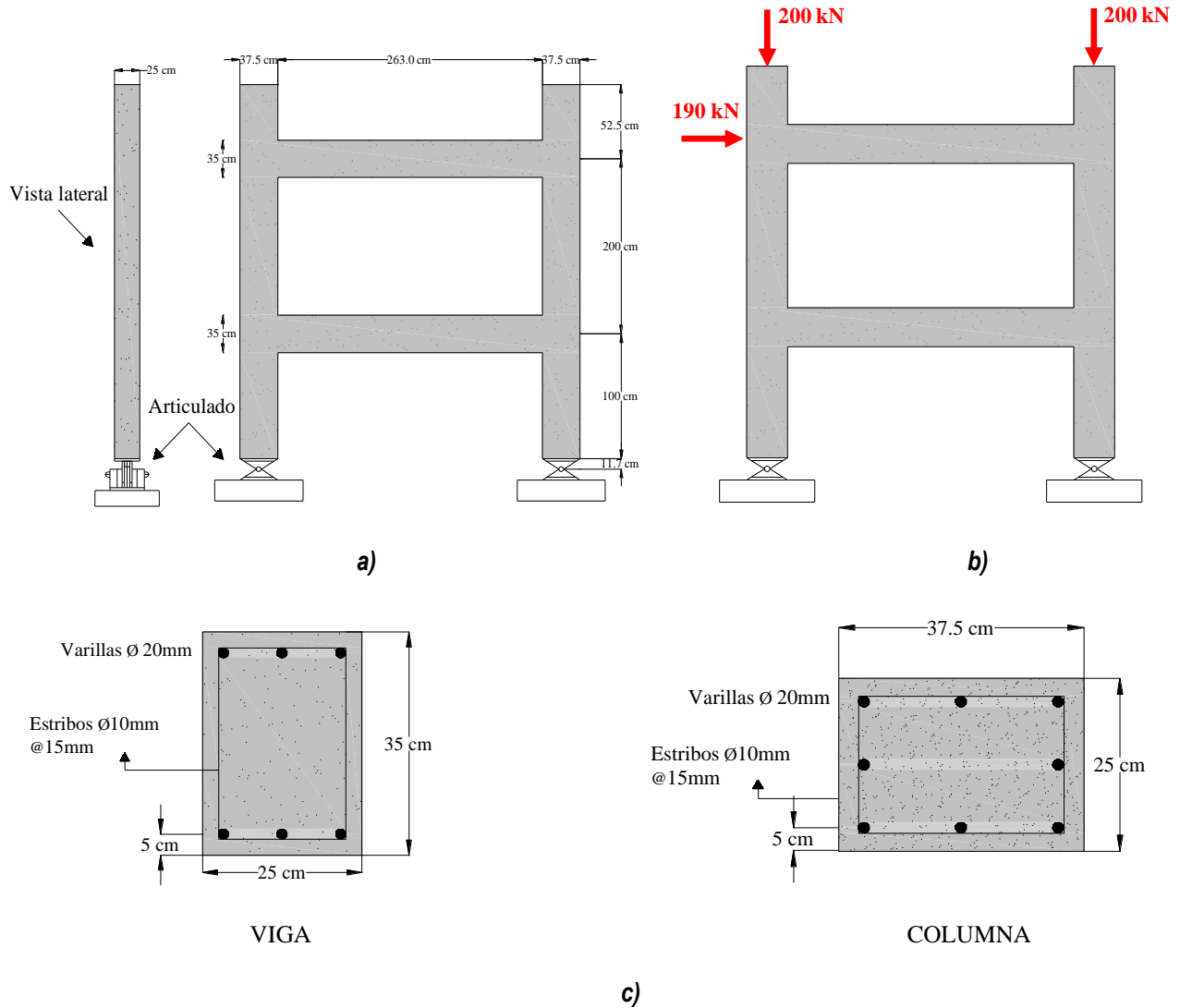
Figura 4-27 Resultados finales del modelado de un  $\frac{1}{4}$  de la viga reportada por Foley y Buckhouse (1998)



**Figura 4-28** Curva de degradación secante efectiva de la viga con la simulación numérica

#### 4.7 Marco de concreto reforzado

Se presenta un marco de concreto reforzado probado experimentalmente por Chan *et al.* (2000) sometido a ensayos de carga lateral incremental. El marco tiene una altura de 364.2 cm incluida la altura del pasador de acero que forma parte de la base rígida y una distancia de 338 cm de claro (Figura 4-29a), el marco es sometido a carga axial de 200 kN en cada columna y a una carga lateral de 200 kN (Figura 4-29b). Las columnas del marco tienen una sección transversal de 25x37.5 cm reforzadas con tres barras longitudinales del número 6 ( $\phi=3/4''=19mm$ ) en el lecho superior e inferior, así como dos barras longitudinales del número 6 colocadas en el centro de la columna y estribos del número 3 ( $\phi=3/8''=9.5mm$ ) espaciado a cada 15 cm; las vigas tienen una sección transversal de 25x35 cm reforzadas con tres barras longitudinales del número 6 ( $\phi=3/4''=19mm$ ) en lecho superior e inferior, con estribos igual al de las columnas como se muestra en la Figura 4-29c. Las propiedades mecánicas del concreto consideradas en el marco son: módulo de elasticidad  $E_c=160,095.45$  kgf/cm<sup>2</sup>, relación de Poisson  $\nu=0.2$ , esfuerzo máximo a tensión  $\sigma_{ut}=27.4558$  kgf/cm<sup>2</sup>, esfuerzo máximo a compresión  $\sigma_{uc}=274.558$  kgf/cm<sup>2</sup> y para el acero de refuerzo:  $E_a=2,039,432.40$  kgf/cm<sup>2</sup>, esfuerzo de fluencia  $f_y=3,263.09$  kgf/cm<sup>2</sup>, relación de Poisson  $\nu_a=0.3$ , esfuerzo máximo a compresión  $\sigma_{uc}=5,302.50$  kgf/cm<sup>2</sup> y un módulo de endurecimiento por deformación  $H=29,277.0$  kgf/cm<sup>2</sup> y la deformación a la que inicia el endurecimiento por deformación es de 2.2%.



**Figura 4-29 Marco en estudio: a) geometría, b) condición de apoyos y cargas y c) armados de la sección transversal**

En la Figura 4-30 se muestra el acero de refuerzo del marco realizado en AutoCAD, condiciones de apoyo, acoplamiento entre el concreto y el acero y el mallado tridimensional (3D) formada de elementos hexaedro de ocho nodos con ocho puntos de integración de Gauss con el programa midas FEA, por simetría del marco en geometría, cargas y en condiciones de apoyo se modela la mitad del marco para reducir el costo computacional, el acero de refuerzo se modelo con elementos tipo barra (elementos unidimensionales con comportamiento del material bilineal) y se supone adherencia perfecta entre el concreto y el acero.

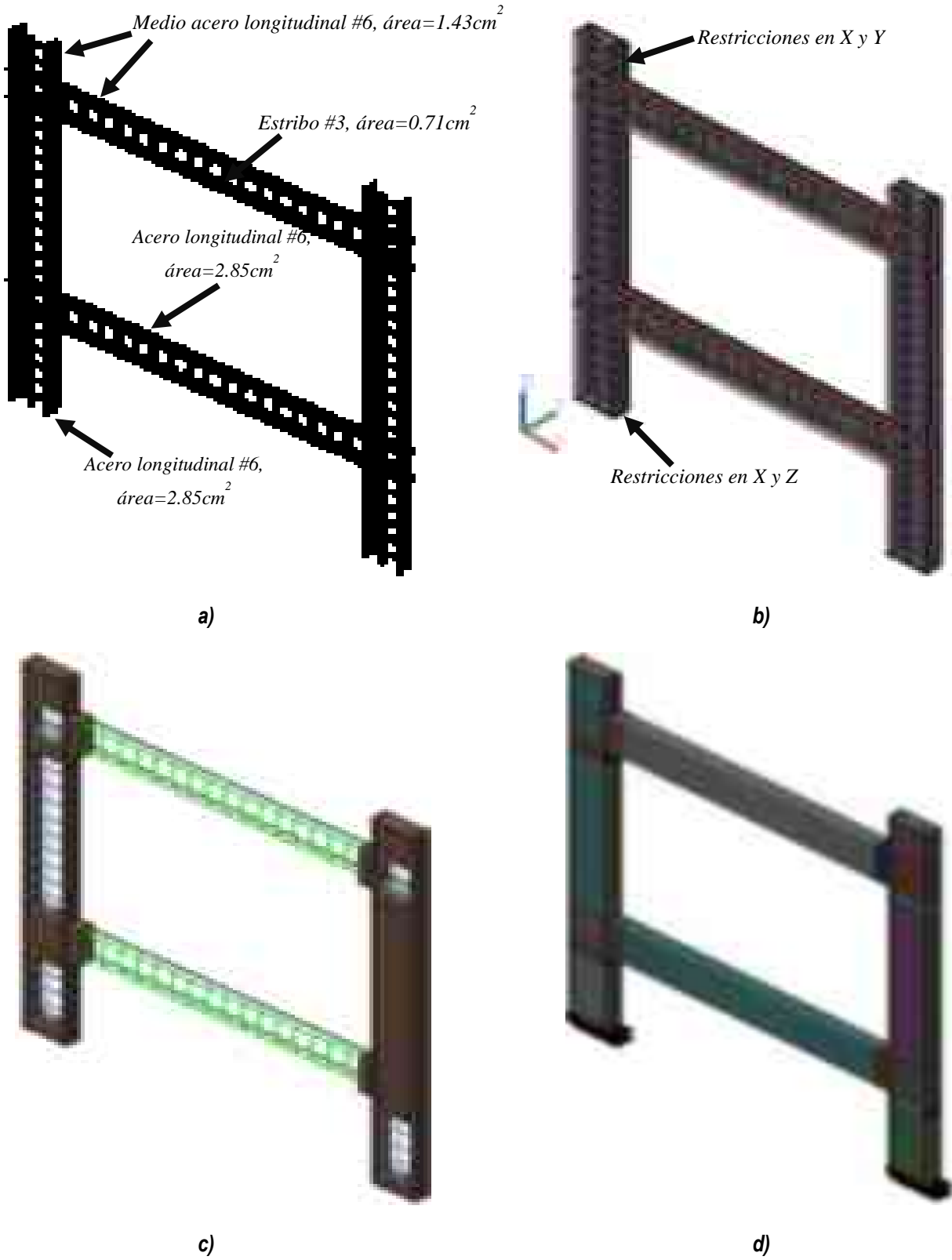
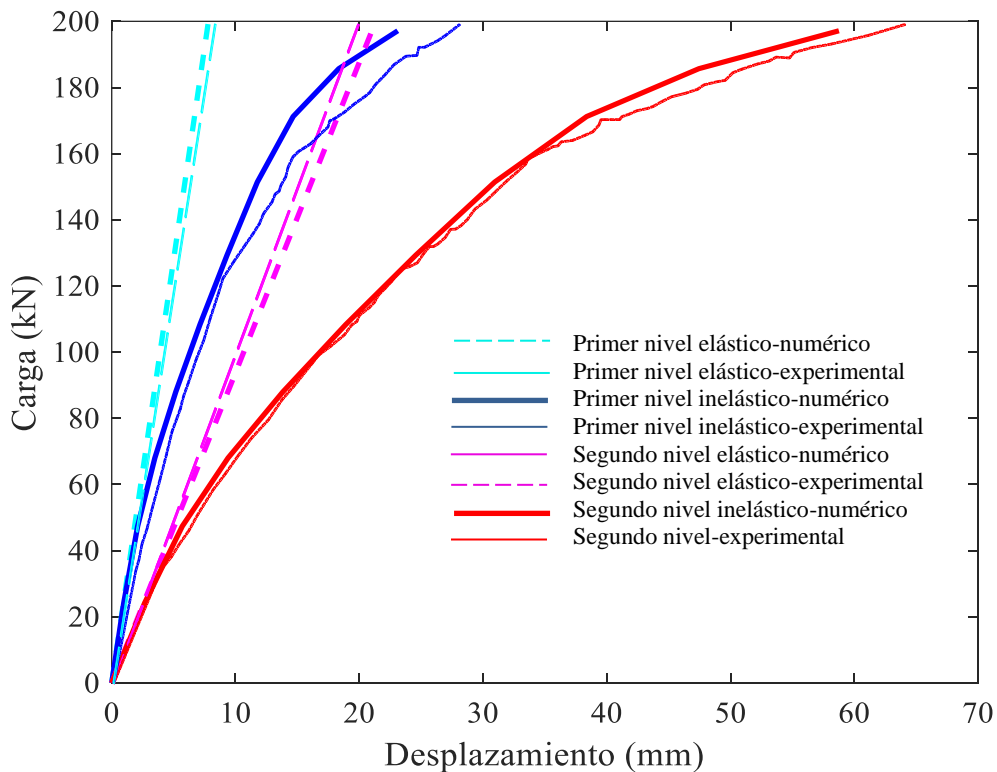


Figura 4-30 Marco en estudio: a) acero de refuerzo, b) condiciones de apoyo, c) acoplamiento entre el concreto y acero y d) mallado en midas FEA

Para la obtención de la respuesta estructural, se inducen fuerzas aplicadas gradualmente (Figura 4-29b) en las columnas y lateralmente en el marco. En la Figura 4-31 se muestran los resultados obtenidos con el programa midas FEA y los reportados por Chan *et al.* (2000); en general, se puede decir que los resultados numéricos obtenidos son consistentes con los experimentales (Tabla 4-7); aunque existe poca diferencia, se debe a que no se modelo la pérdida de adherencia entre el concreto y el acero cuando la carga lateral excede la fluencia; sin embargo, se logra reproducir con buena precisión el comportamiento del marco. Es importante mencionar que la convergencia de los análisis numéricos de elementos de concreto reforzado es compleja en comparación a los ejemplos anteriores de concreto simple, debido al comportamiento constitutivo de los materiales.



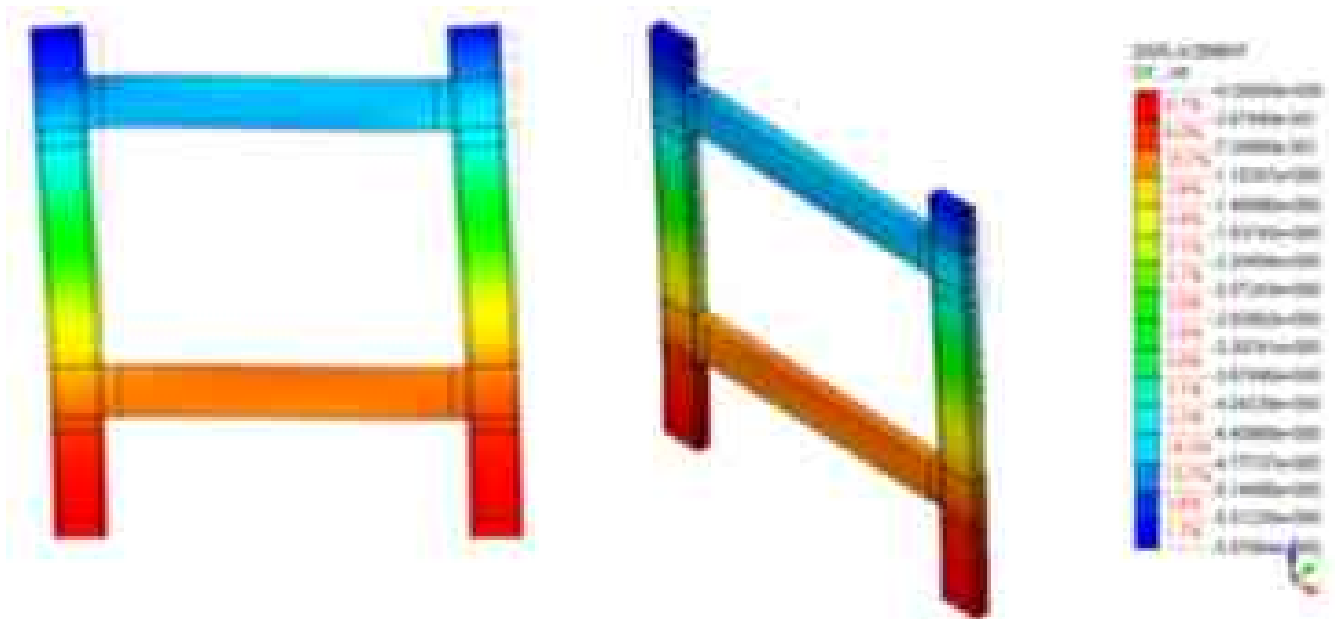
**Figura 4-31** Curva de la carga contra el desplazamiento, comparación entre los resultados experimentales Chan *et al.* (2000) y analíticos con midas FEA

**Tabla 4-7** Cargas y desplazamientos últimos

Nivel	Prueba experimental Chan <i>et al.</i> (2000)		Solución numérica midas FEA	
	Fuerza (kN)	Desplazamiento (mm)	Fuerza (kN)	Desplazamiento (mm)
1-Elástico	195	7.00	200.00	8.28

1-Inelástico	195	26.00	197.15	23.11
2-Elástico	195	20.00	200.00	22.59
2-Inelástico	195	63.00	197.15	58.76

Por último, la Figura 4-32 se muestra los desplazamientos horizontales en el eje longitudinal del marco, donde se observa que el desplazamiento mayor está en la parte superior debido a las cargas laterales impuestas. La configuración deformada, las fuerzas desarrolladas en el acero de refuerzo ocurren en las esquinas, que son las zonas más esforzadas, alcanzando el esfuerzo de fluencia, y las trayectorias de agrietamiento del marco en el último incremento de carga; no obstante, se observar que el marco presenta grietas que se encuentran parcialmente abiertas a la carga (lateral y axial en columnas) impuesta y una parte con grietas totalmente abiertas a la descarga. El modelado numérico no sustituye de ninguna manera las pruebas experimentales, por ejemplo en la literatura Tena (2019) menciona que se hacen demasiadas simplificaciones a los modelos numéricos de elementos finitos para poder representar en una primera aproximación lo que en realidad sucede en las pruebas experimentales; sin embargo, estos modelos numéricos proporciona información y detalles valiosos como son las zonas más esforzadas, así como donde iniciara el agrietamientos y plastificación en el elemento estructural.



a)

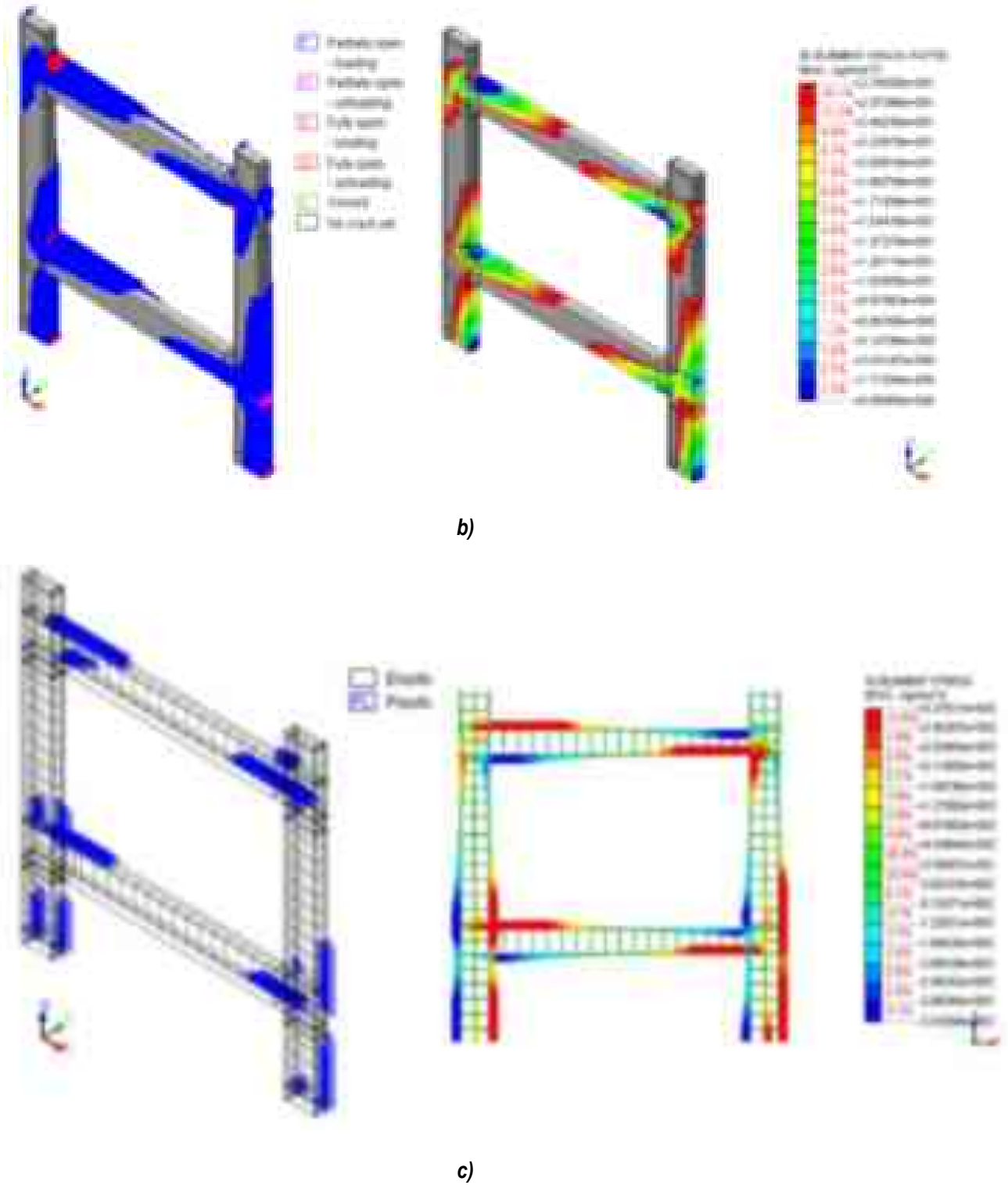


Figura 4-32 a) desplazamientos horizontales, b) trayectorias de agrietamiento y c) fuerzas desarrolladas en el acero de refuerzo

# Capítulo 3

## Estudio paramétrico de la variación de la rigidez efectiva en vigas de concreto reforzado

### 5.1 Elección de los elementos a estudiar

#### 5.1.1 Descripción de los marcos planos

Las vigas estudiadas en esta sección forman parte de los marcos planos diseñados y reportados por Godínez *et al.* (2019 y 2020) y Villafuerte (2020). Los marcos de referencia forman parte de edificios regulares en planta y elevación que cuentan con 3, 6, 9, 12 y 15 niveles para uso de oficinas, los cuales se ubicaron para su diseño en la zona de transición de la Ciudad de México. La planta considerada por los autores conto con 4 crujiás de 7 m en ambas direcciones y altura típica de entrepiso de 3.50 m, como se muestra en la Figura 5-1. El sistema de pisos se consideró a base de losas de concreto reforzado de 10 cm de espesor. En todos los casos se consideró un factor de comportamiento sísmico  $Q=2$ , edificios de baja ductilidad (Godínez *et al.* 2020).

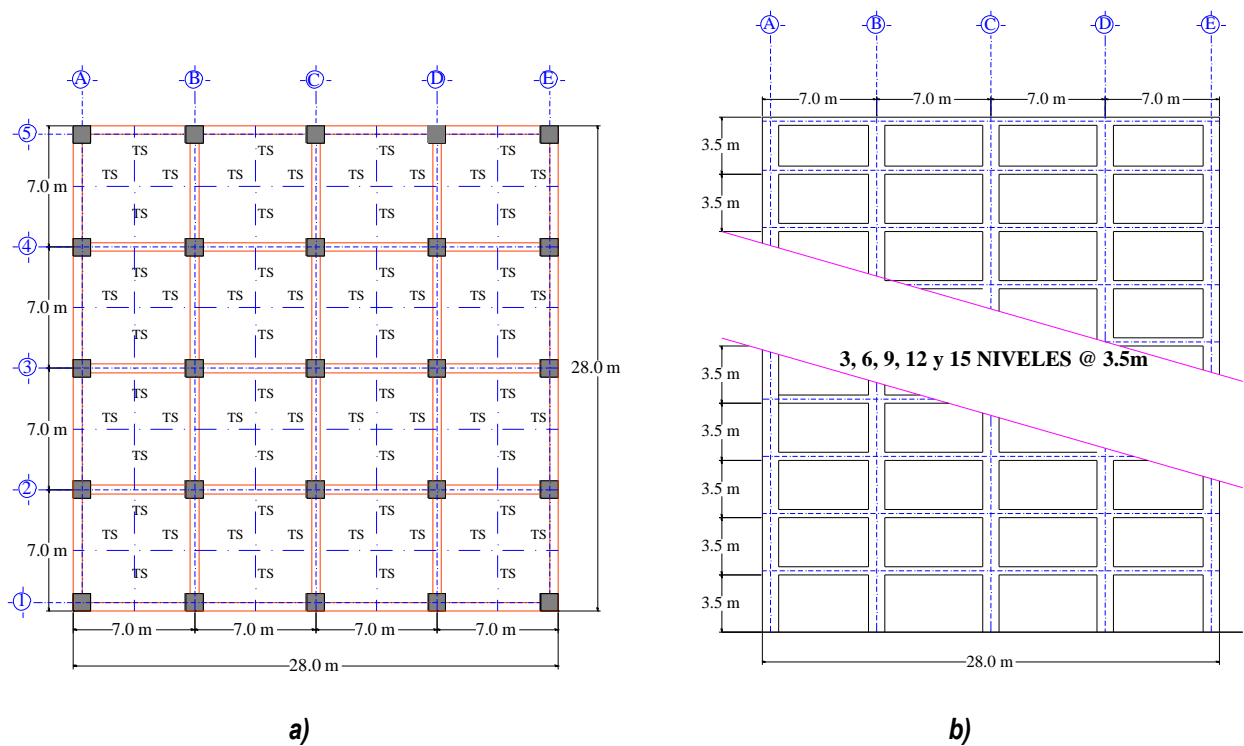


Figura 5-1 a) planta tipo y b) elevación del edificio para el estudio de marcos planos (adaptada de Godínez *et al.* 2019 y 2020)

En la Figura 5-2 se muestra el análisis de cargas nominales empleadas para el diseño de los marcos planos, donde se consideraron los requisitos que se indican en las Normas Técnicas Complementarias sobre Criterios y Acciones para el Diseño Estructural de las Edificaciones del RCDF versión 2004 (NTCCA-04, 2004). En el diseño de cada modelo se consideraron las cargas verticales de servicio como las combinaciones críticas últimas de diseño por cargas verticales y combinaciones de carga laterales por sismo establecidas en RCDF-04 (Godínez *et al.* 2019 y 2020). La Figura 5-2 muestra la carga típica distribuida a lo largo del claro en los entrepisos y la azotea, así como las cargas puntuales de las vigas perpendiculares que se apoyan en las columnas.

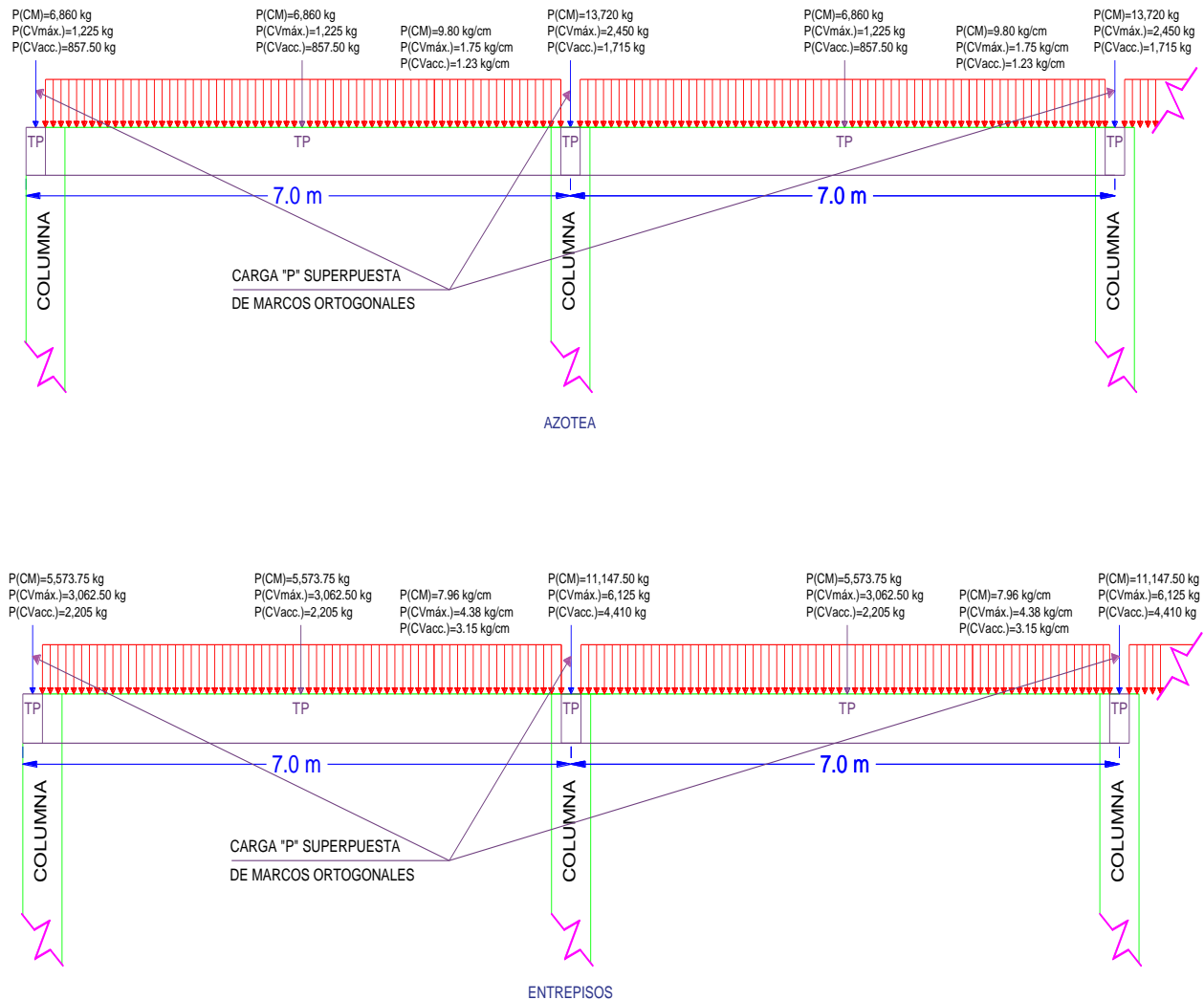
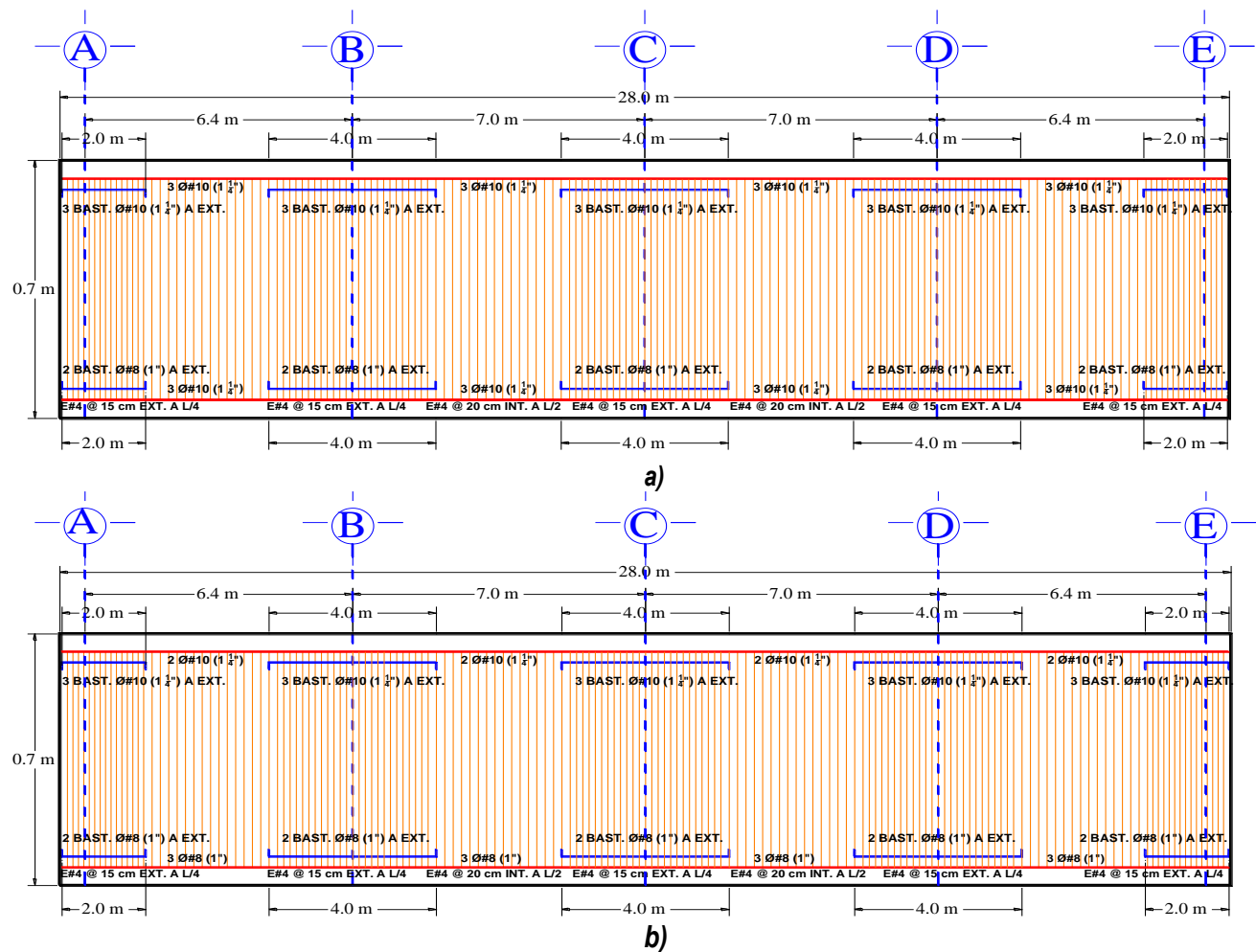
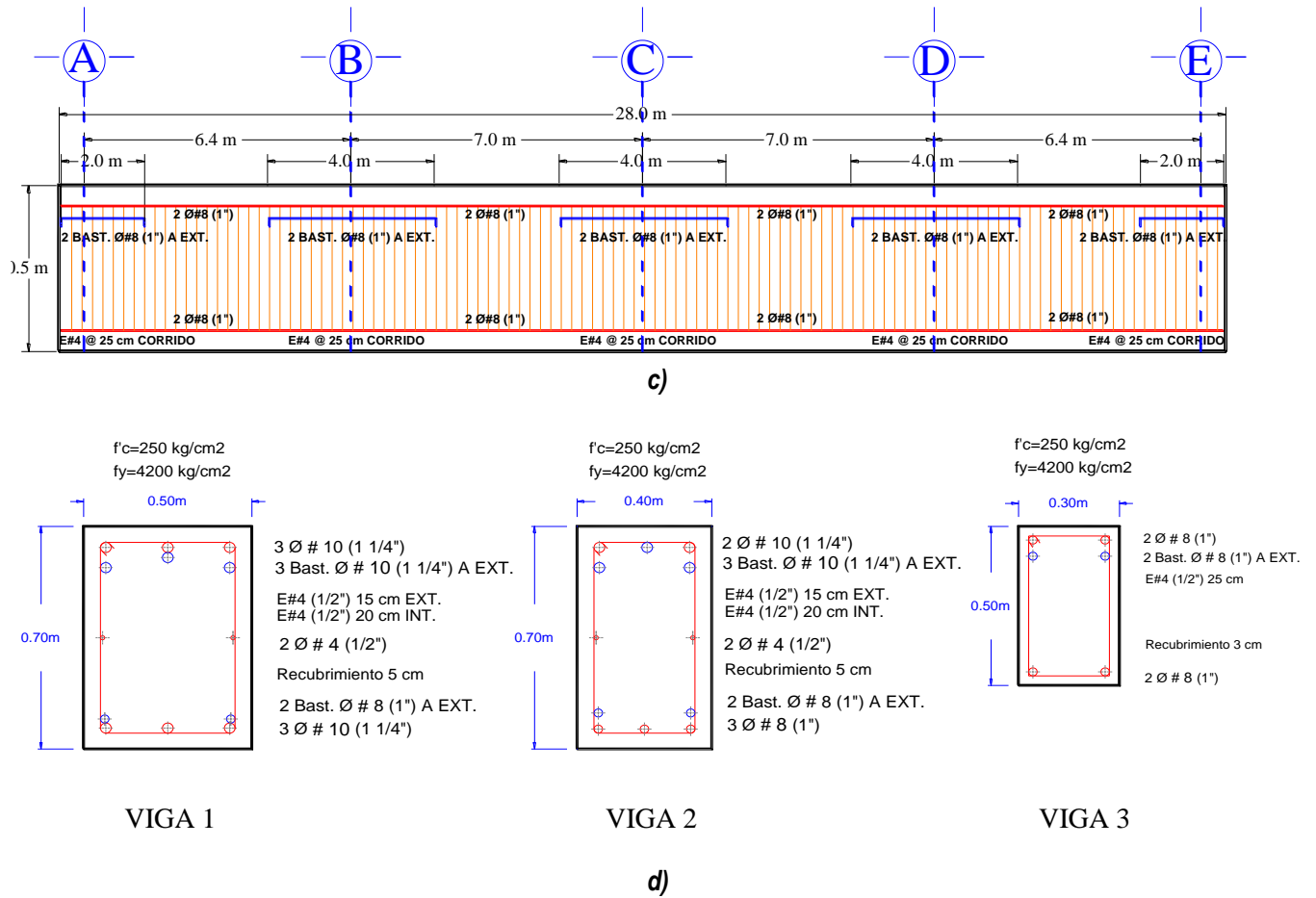


Figura 5-2 Cargas consideradas para el análisis estructural (adaptada de Villafuerte 2020)

Los elementos estructurales de los marcos planos se dimensionaron para cumplir con los estados límite de servicio y prevención de colapso, considerando las distorsiones de entrepiso límite de 0.004 y 0.015 para marcos no dúctiles de concreto reforzado ( $Q=2$ ), respectivamente. En la medida de lo posible, los autores intentaron realizar la variación de las dimensiones de columnas y vigas, sobre todo en los marcos de 9, 12 y 15 niveles, tal y como se realiza en la práctica profesional. Se realizó un análisis modal espectral como se indica en el RCDF-04 (2004) en el Apéndice A de las NTCDS-04 (2004). Se consideraron los efectos  $P-\Delta$  en las combinaciones de cargas gravitacionales y sísmicas, no se incluye el aporte en rigidez de las losas, así como la interacción suelo-estructura. Como lo comentan Godínez *et al.* (2020) para el modelado de las uniones viga-columna, se considera una rigidez del 50% de la que tendrían si fueran infinitamente rígidos a flexión, como se recomienda en la literatura especializada. La Figura 5-3 muestra las secciones transversales y el armado de las vigas del marco de nueve niveles considerando secciones gruesas para el cálculo de la rigidez ( $EI_g$ ) reportados por Villafuerte (2020). En el estudio de referencia se consideran diseño basados en diferentes hipótesis para el cálculo de las rigideces efectivas de los elementos estructurales con fines de análisis y diseño.





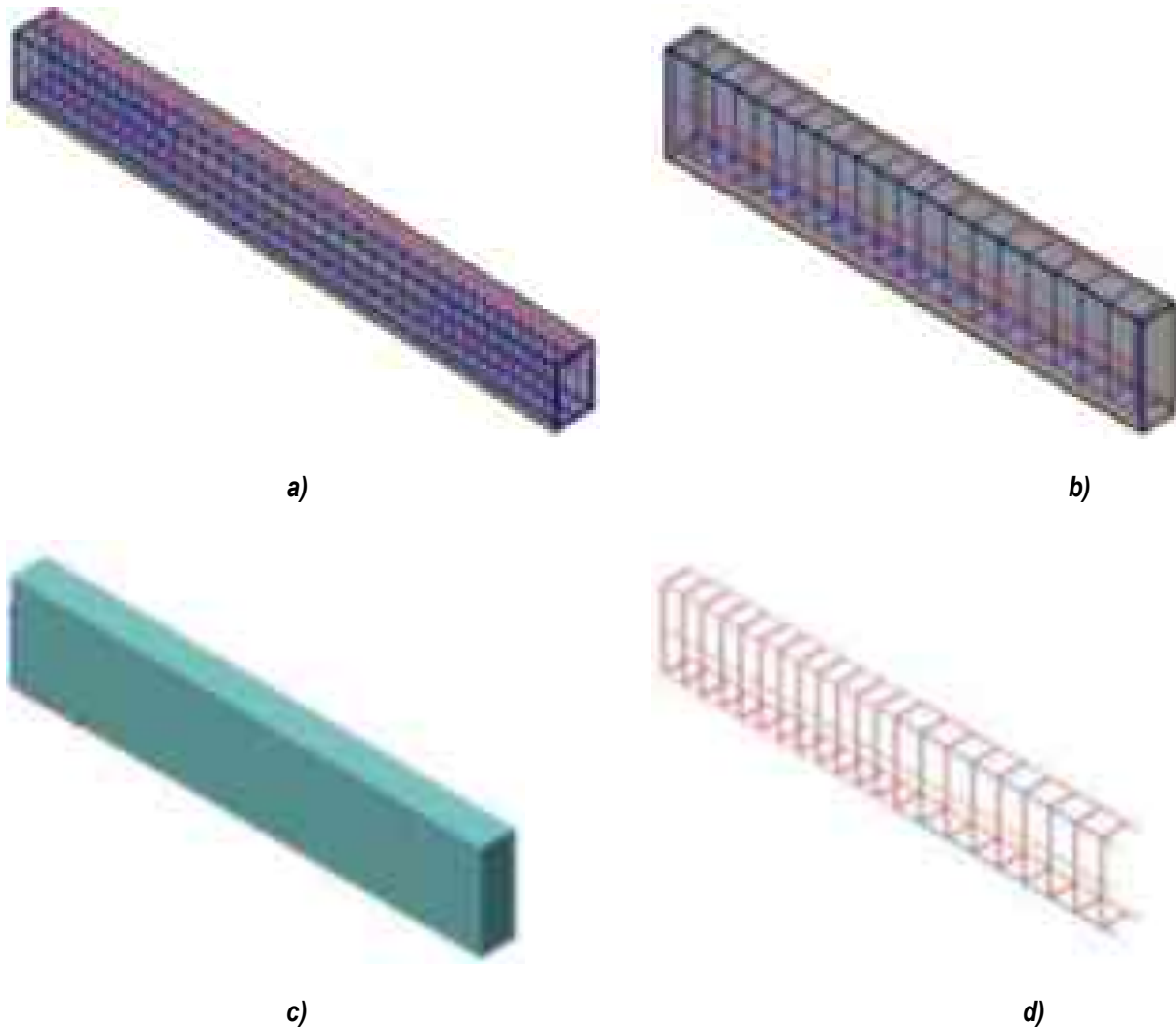
**Figura 5-3 Armado de las vigas de un marco de 9 niveles con secciones gruesas, vigas  $EI_e=EI_g$ : a) V-1 (1er.Nivel al 4to.nivel), b) V-2 (5o. Nivel al 7o. nivel), c) V-3 (8o. y 9o.Nivel) y d) secciones transversales, (adaptada de Villafuerte, 2020)**

### 5.1.2 Características de las vigas y modelos estudiadas mediante elementos finitos

Con base en los diseños obtenidos por Godínez *et al.* (2020) y Villafuerte (2020) se evalúan las rigideces efectivas empleando modelos de elementos finitos. El modelo numérico de la viga está empotrada y sometida a lo largo del claro a cargas verticales monótonas uniformemente distribuidas en la que considera carga muerta y carga viva máxima, así como cargas puntuales. La primer viga tiene una longitud de 700 cm, sección transversal de 50 x 70 cm y un recubrimiento de 5 cm, está reforzada longitudinalmente con tres barras del número 10 ( $\phi=1\ 1/4''=31.8\ mm$ ) en el lecho superior e inferior, dos barras del número 4 ( $\phi=1/2''=12.7\ mm$ ) al centro de la sección transversal, tres bastones del número 10 ( $\phi=1\ 1/4''=31.8\ mm$ ) en el lecho superior y dos en el lecho inferior y reforzada con estribos del número 4 a cada 15 cm exterior y a cada 20 cm interior (Figura 5-4b). Las propiedades mecánicas de las vigas de concreto reforzado consideradas son, para el concreto: módulo de elasticidad  $E_c=221,359.436\ kgf/cm^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu=0.2$ , para determinar el esfuerzo a tensión se empleó el criterio de Priestley *et al.* (1996)  $\sigma_t=0.5\sqrt{f'_c}$  MPa, con

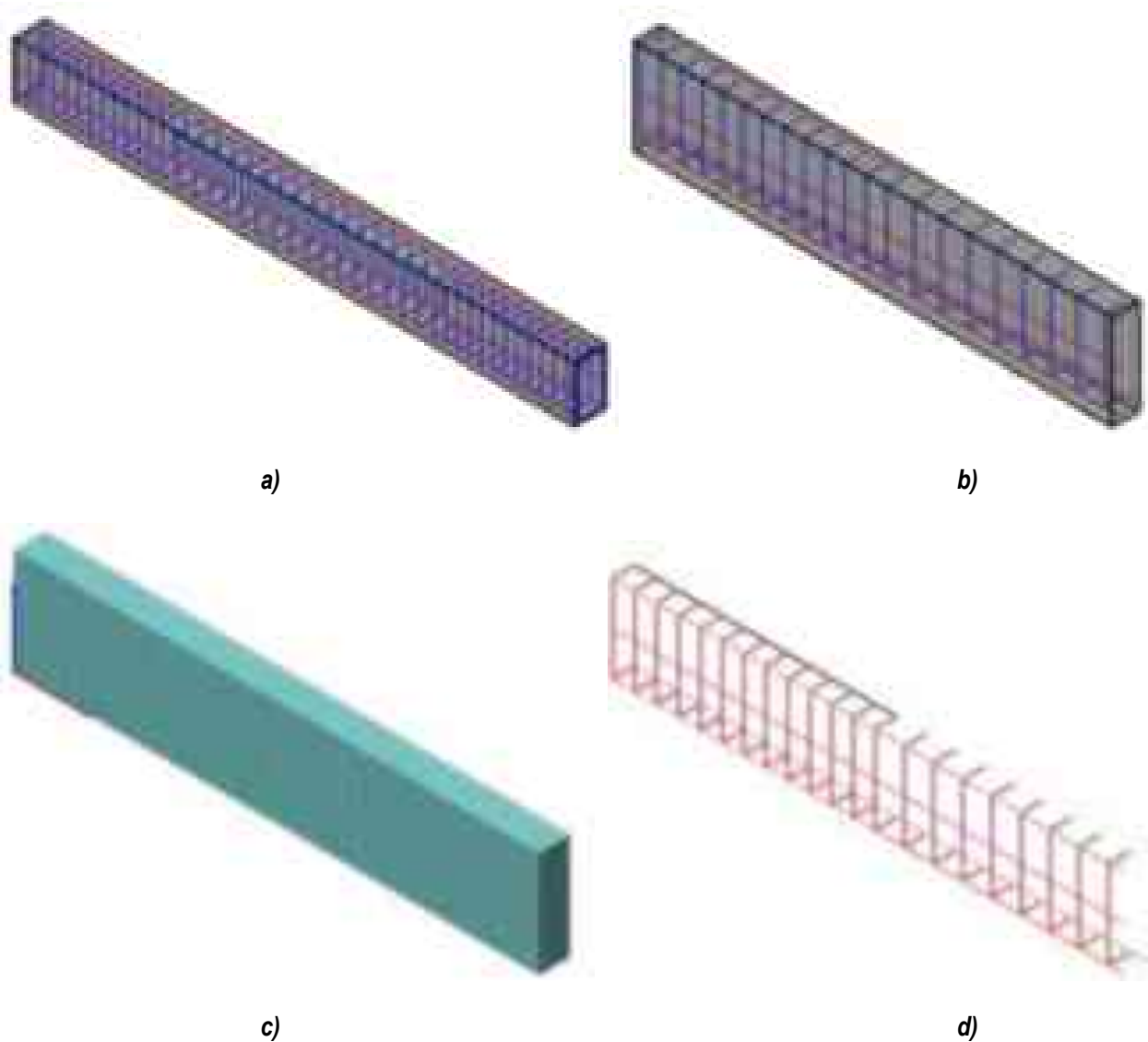
un valor de  $\sigma_{ut}=25.245 \text{ kgf/cm}^2$ , esfuerzo máximo a compresión  $\sigma_{uc}=252.45 \text{ kgf/cm}^2$  y para el acero de refuerzo son: módulo de elasticidad  $E_a=2,039,432.40 \text{ kgf/cm}^2$ , esfuerzo de fluencia  $f_y=4,218.42 \text{ kgf/cm}^2$ , módulo de endurecimiento por deformación  $H=203.94 \text{ kgf/cm}^2$ , deformación a la que inicia el endurecimiento por deformación de 2.2% y relación de Poisson  $\nu_a=0.3$ .

Se realizaron mallas estructuradas en el programa midas FEA con elementos hexaedro de ocho nodos con ocho puntos de integración de Gauss. Las barras de acero se mallaron con elementos unidimensionales con comportamiento bilineal, cuyos extremos se ensamblan en los nodos de los elementos sólidos de concreto y se supone adherencia perfecta entre el acero y el concreto. Dada la simetría de la viga en geometría, condiciones de apoyo y carga, únicamente se modeló un cuarto de la viga, como se muestra en la Figura 5-4, reduciendo el costo computacional.



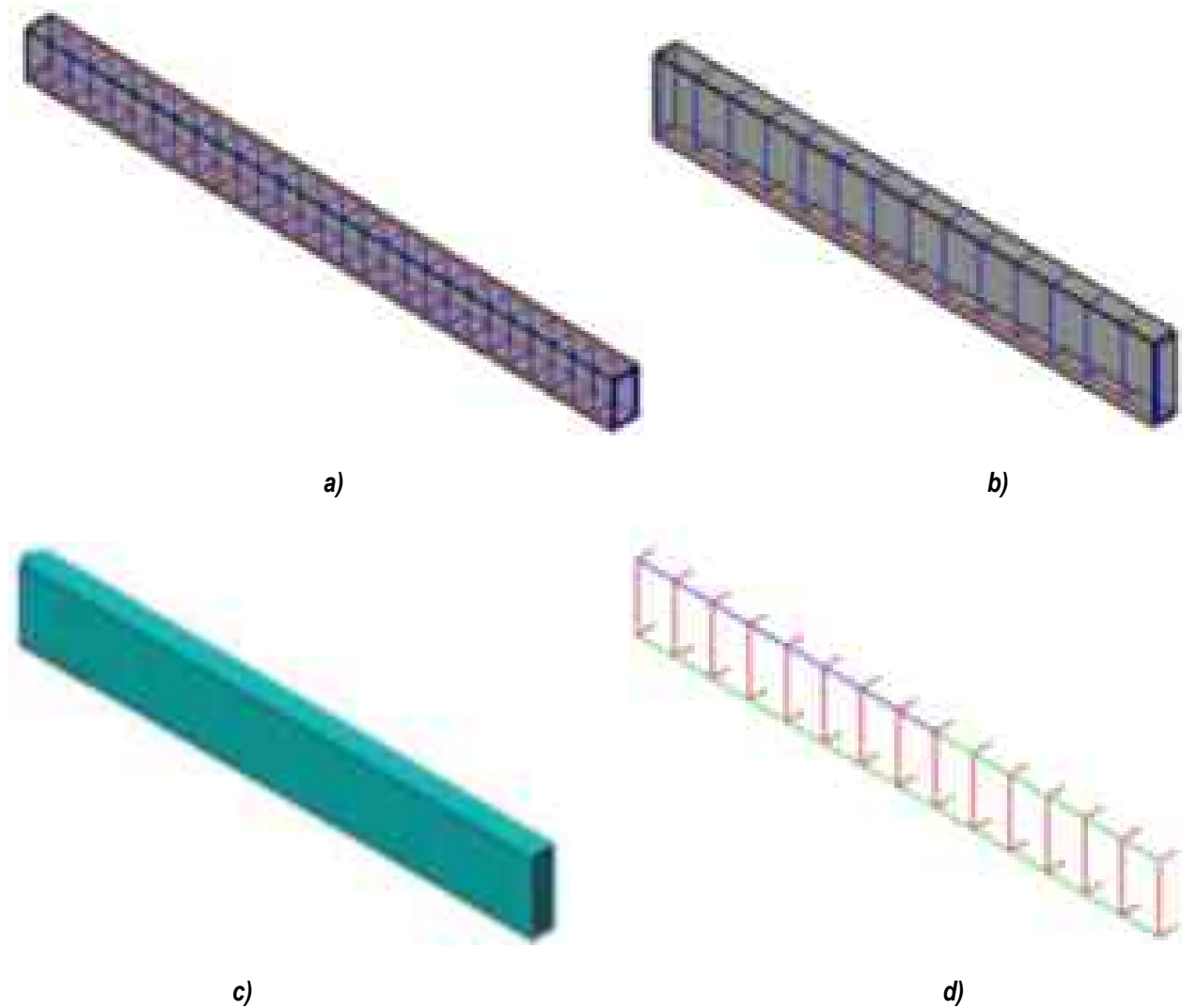
**Figura 5-4 Modelo tridimensional de la viga V-1 de concreto reforzado: a) viga completa, b) modelado de  $\frac{1}{4}$  de viga, c) mallado en midas FEA y d) mallado del acero de refuerzo**

La segunda viga tiene una sección transversal de 40 x 70 cm y un recubrimiento de 5 cm, la cual está reforzada longitudinalmente con dos barras del número 10 ( $\phi=1\ 1/4''=31.8\ mm$ ) en el lecho superior y por tres barras del número 8 ( $\phi=1''=25.4\ mm$ ) en el lecho inferior, dos barras del número 4 ( $\phi=1/2''=12.7\ mm$ ) al centro de la sección transversal, tres bastones del número 10 ( $\phi=1\ 1/4''=31.8\ mm$ ) en el lecho superior y dos bastones del número 8 ( $\phi=1''=25.4\ mm$ ) en el lecho inferior y reforzada con estribos del número 4 a cada 15 cm exterior y a cada 20 cm interior (Figura 5-5).



**Figura 5-5 Modelo tridimensional de la viga V-2 de concreto reforzado: a) viga completa, b) modelado de 1/4 de viga, c) mallado en midas FEA y d) mallado del acero de refuerzo**

La tercera viga tiene una sección transversal de 30 x 50 cm y un recubrimiento de 3 cm, la cual está reforzada longitudinalmente con dos barras del número 8 ( $\phi=1''=25.4\text{ mm}$ ) en el lecho superior e inferior, dos bastones del número 8 ( $\phi=1''=25.4\text{ mm}$ ) en el lecho superior y reforzada con estribos del número 4 a cada 25 cm (Figura 5-6).



**Figura 5-6 Modelo tridimensional de la viga V-3 de concreto reforzado: a) viga completa, b) modelado de  $\frac{1}{4}$  de viga, c) mallado en midas FEA y d) mallado del acero de refuerzo**

Para el análisis de elementos finitos de las vigas de concreto reforzado se tomaron en cuenta algunas consideraciones importantes. Se empleó un área equivalente entre el acero longitudinal y el bastón, respetando la longitud en la que existe el bastón, pues se tienen tramos en que solamente se asignó el acero longitudinal. Las barras de acero longitudinal y del bastón se dibujaron con líneas

y se le asignaron las propiedades correspondientes a cada elemento. En las Figuras 3-7, 3-9 y 3-11 se muestra la curva de la carga contra el desplazamiento para cada uno de los modelos. Se observa que la carga nominal, carga factorizada NTCC-17 (2017) y de inicio de agrietamiento se encuentran 0.7% por arriba del valor de empotramiento perfecto teórico calculado, por lo que se puede interpretar que las cargas se mantienen en el intervalo elástico, esto se debe a que la viga fue diseñada en geometría y armado para soportar las cargas de servicio impuestas; por otra parte, la viga no sufre agrietamiento ante cargas de servicio nominales ni factorizadas, pero si en la carga de inicio de agrietamiento. Como era de esperarse (Tabla 5-1) el daño se inicia en el extremo izquierdo de la viga y se propaga al centro del claro. Los desplazamientos verticales, esfuerzos desarrollados en el acero, plasticidad en el acero longitudinal y las trayectorias de agrietamientos se muestran en las Figuras 3-8, 3-10 y 3-12 en condición de la primera fluencia del acero. Es importante mencionar que la carga última corresponde a aquella en el que los análisis dejaron de converger, lo cual no quiere decir que la estructura haya colapsado, simplemente que ya no se tuvo equilibrio en la solución del sistema de ecuaciones.

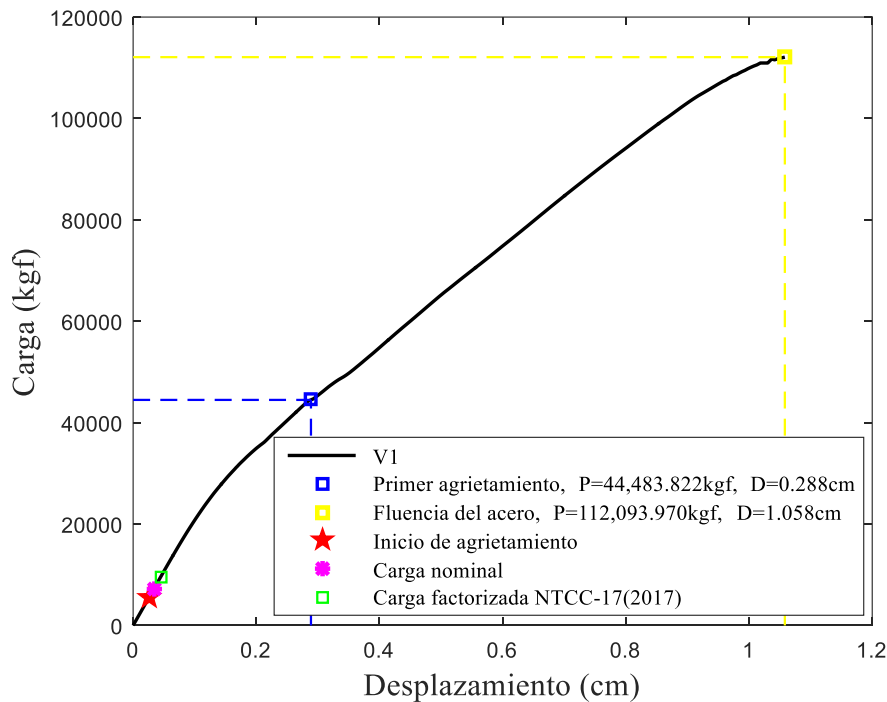


Figura 5-7 Modelo V-1, carga última, curva de la carga contra el desplazamiento

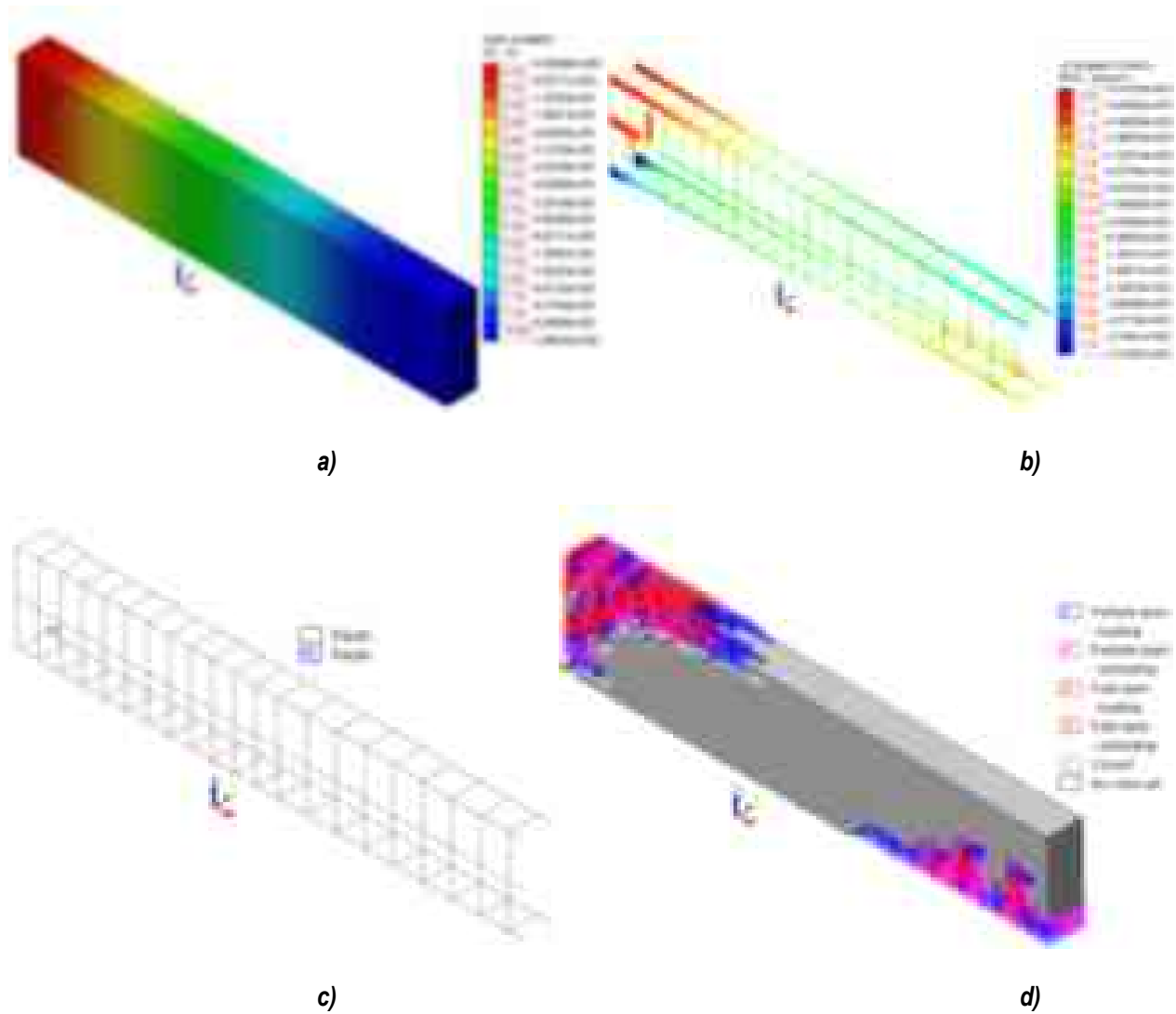


Figura 5-8 Modelo V-1, inercia gruesa: a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento

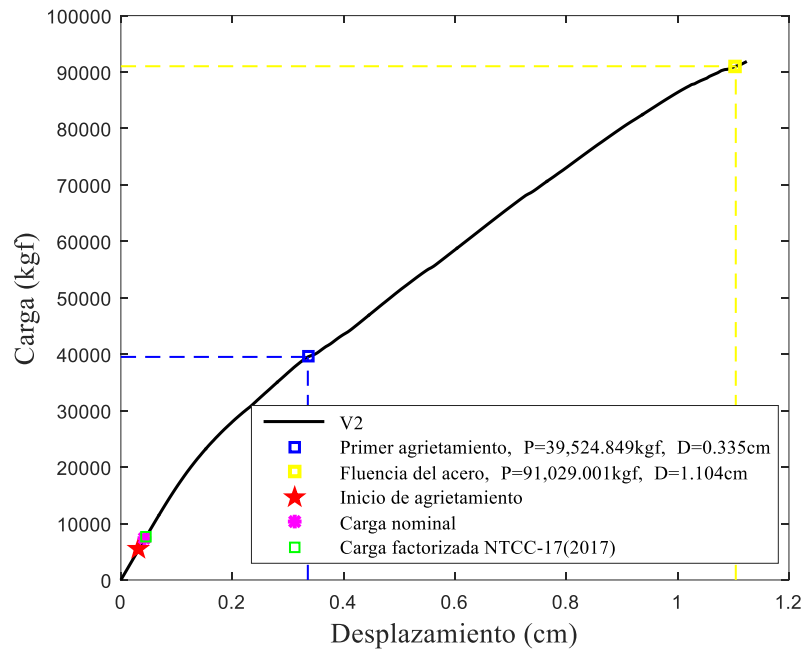
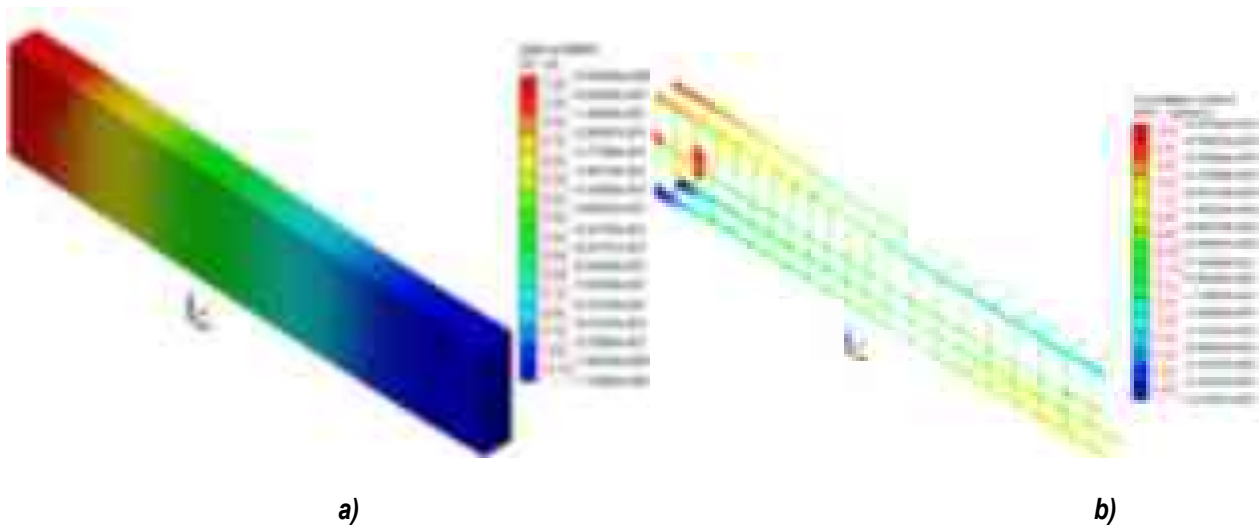


Figura 5-9 Modelo V-2, carga última, curva de la carga contra el desplazamiento



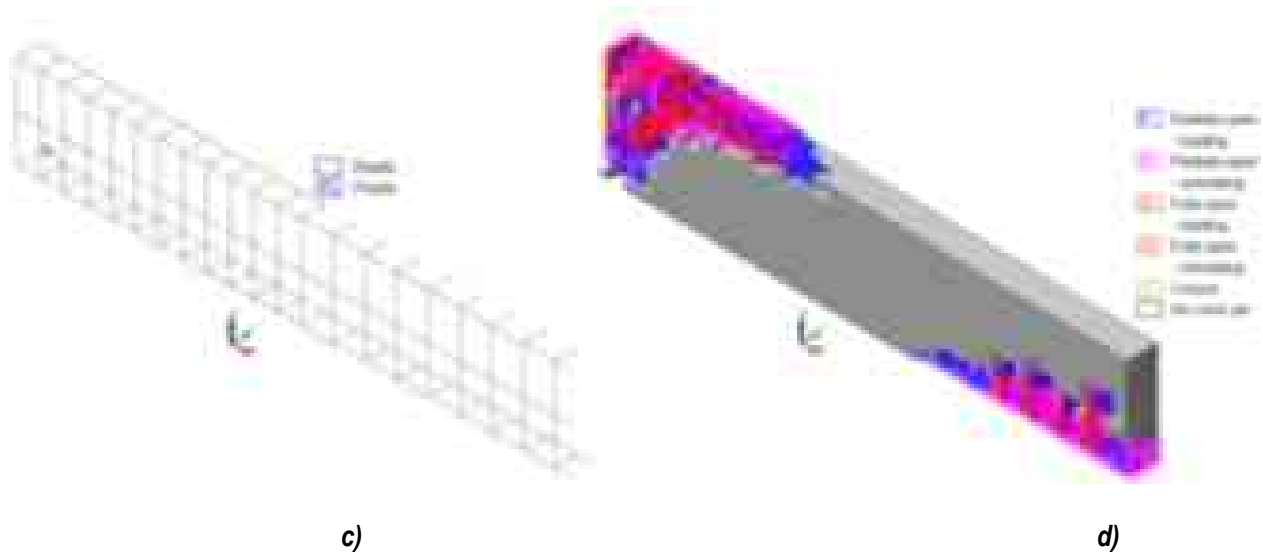


Figura 5-10 Modelo V-2, inercia gruesa: a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento

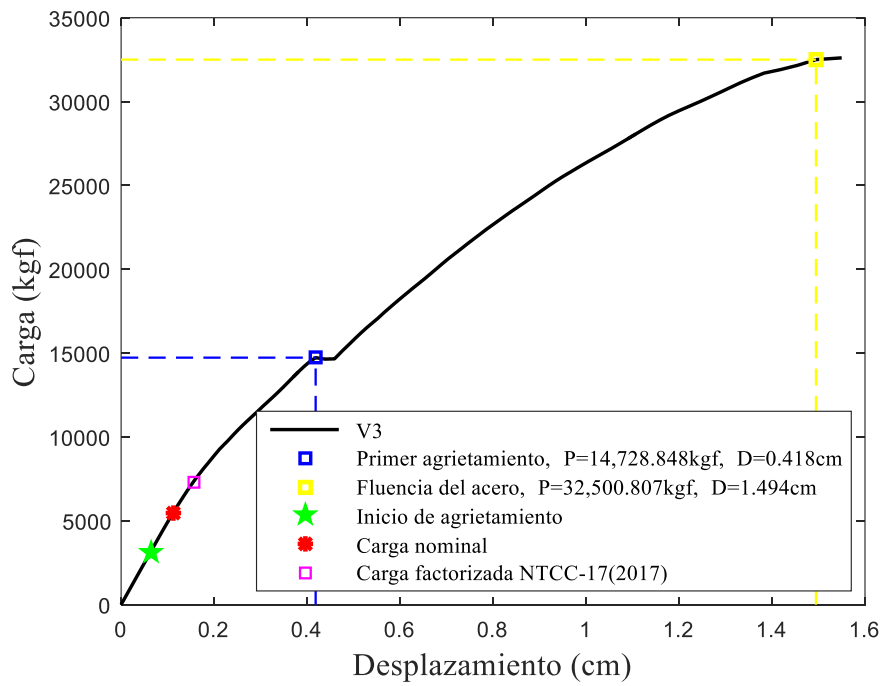
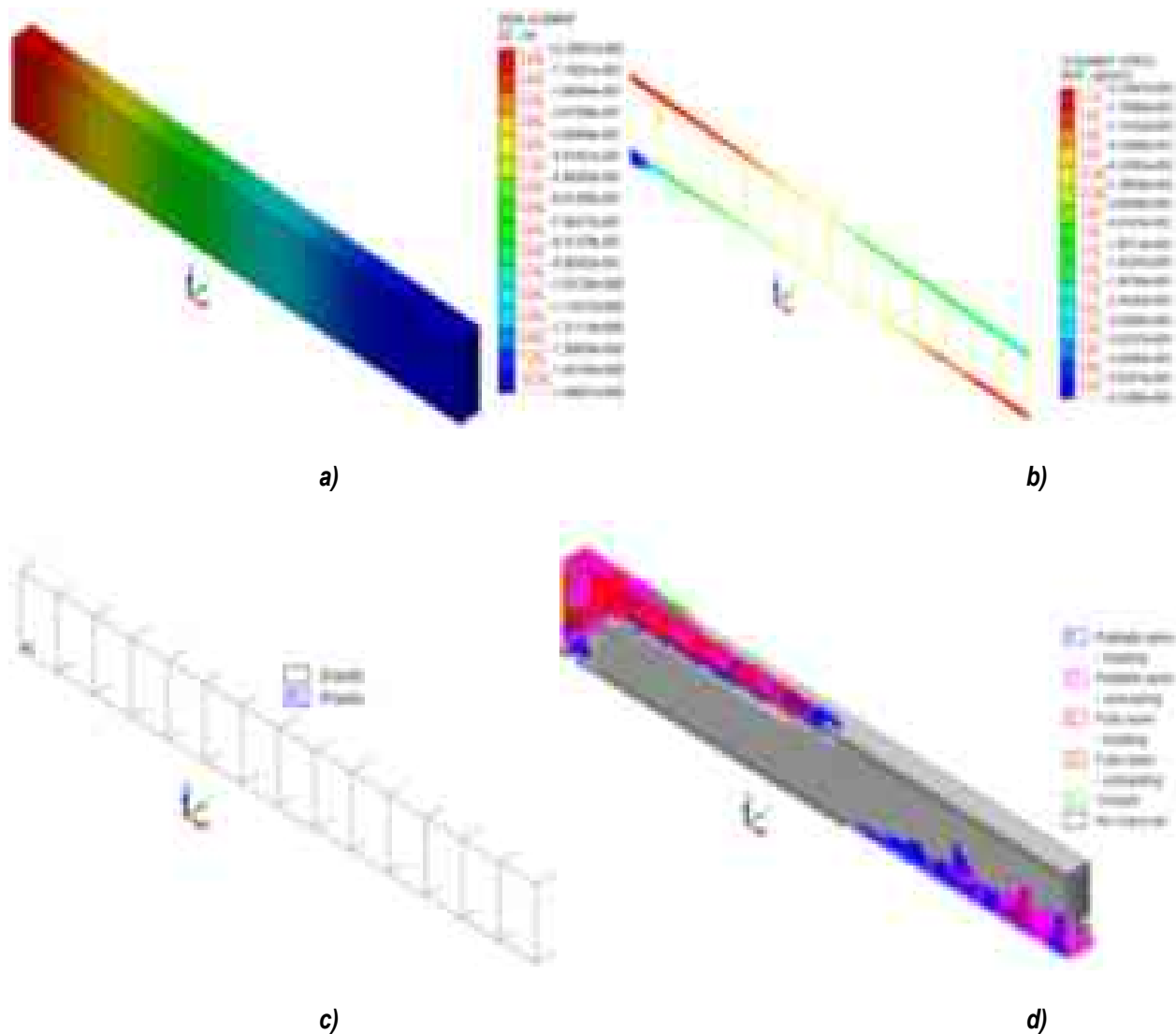


Figura 5-11 Modelo V-3, carga última, curva de la carga contra el desplazamiento



**Figura 5-12 Modelo V-3, inercia gruesa: a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento**

En la Tabla 5-1 se muestran las magnitudes de la carga uniforme impuesta en las vigas, así como las fuerzas y desplazamientos últimos que se obtuvieron mediante las simulaciones numéricas (EF). Como era de esperar, las fuerzas de empotramiento perfecto teóricos tienden a aproximarse a los valores obtenidos con el programa, pues los materiales de la viga se mantienen elásticos en todos los pasos de carga, es claro observar también que se obtienen diferentes valores de carga máxima y desplazamiento, dado que se aumenta la carga uniformemente distribuida, es importante destacar que las fuerzas puntuales que producen las vigas perpendiculares que se apoyan sobre los extremos no tienen ningún efecto significativo en los resultados.

**Tabla 5-1 Cargas y desplazamientos, considerando inercia gruesa ( $I_g$ )**

	Carga distribuida (kgf/cm)	Fuerzas de empotramiento perfecto teóricas(kgf)	Carga máxima (kgf)	Desplazamiento (mm)
<b>Modelo V-1</b>				
Cargas nominales	15.48	5,420.62	5,459.06	0.2561
Factores de carga NTCC-17(2017)	20.76	7,267.31	7,318.85	0.3434
Inicio del agrietamiento	27.07	9,475.37	9,542.39	0.4477
<b>Modelo V-2</b>				
Cargas nominales	15.48	5,420.62	5,459.06	0.3250
Factores de carga NTCC-17(2017)	20.76	7,267.31	7,318.85	0.4357
Inicio del agrietamiento	22.05	7,720.66	7,775.42	0.4629
<b>Modelo V-3</b>				
Cargas nominales	15.48	5,420.62	5,459.06	1.1172
Factores de carga NTCC-17(2017)	20.76	7,267.31	7,318.84	1.5498
Inicio del agrietamiento	8.92	3,125.0	3,152.39	0.6381

En la Tabla 5-2 se muestra el porcentaje del esfuerzo de fluencia que alcanza el acero ante la carga última, carga nominal, factores de carga NTCC-17 (2017) e inicio de agrietamiento, se observa que el porcentaje del esfuerzo en el acero en los modelos no sobre pasa el 61% del esfuerzo de fluencia ( $f_y=4,218.42$  kgf/cm<sup>2</sup>), por lo que el acero de refuerzo solo se plastifica para el caso de carga última.

**Tabla 5-2 Porcentaje del esfuerzo de fluencia en el acero, considerando la inercia gruesa ( $I_g$ )**

	Esfuerzo en el acero de refuerzo (kgf/cm <sup>2</sup> )	Porcentaje de esfuerzo de fluencia ( $\sigma_y$ , kgf/cm <sup>2</sup> )
<b>Modelo V-1</b>		
Carga última	4,218.42	100
Carga nominal	75.75	1.80
Factores de carga NTCC- 17(2017)	101.55	2.42
Inicio del agrietamiento	132.46	3.15
<b>Modelo V-2</b>		
Carga última	4,218.42	100
Carga nominal	97.66	2.33
Factores de carga NTCC- 17(2017)	130.94	3.12
Inicio del agrietamiento	139.13	3.31
<b>Modelo V-3</b>		
Carga última	4,218.42	100

Carga nominal	296.15	7.05
Factores de carga NTCC-17(2017)	465.77	11.09
Inicio del agrietamiento	149.16	3.55

## 5.2 Evaluación de las rigideces efectivas con base en las NTCC-17, (2017)

En las NTCC-17 (2017) se toma en cuenta el agrietamiento en el concreto reduciendo el momento de inercia de las secciones transversales a valores que se muestran en la Tabla 5-3, como se comentó anteriormente, estos valores no toman en cuenta parámetros importantes que afectan el comportamiento inelástico de los elementos de concreto reforzado como: el confinamiento, nivel de carga axial, las dimensiones de las secciones, la relación de aspecto, las cuantías de refuerzo longitudinal, las propiedades del concreto y las del acero de refuerzo.

**Tabla 5-3 Momentos de inercia para cálculo de rigideces (adaptada de las NTCC-17, 2017)**

Elemento	Momento de inercia
Vigas y muros agrietados <sup>1</sup>	$0.5I_g$
Columnas agrietadas	$0.7I_g$
Columnas y muros no agrietados	$I_g$

<sup>1</sup>En vigas T se deberán incluir los anchos de patín especificados en el inciso 5.1.1.2.

Para evaluar las rigideces efectivas (momentos de inercia efectivos) a flexión de las vigas se empleó el criterio de las NTCC-17 (2017), en la cual se considera multiplicar al momento de inercia grueso de la sección transversal por 0.5 ( $I_e=0.5I_g$ ). Para determinar la altura o el peralte efectivo se utilizó la ec. (2.1) que surge de igualar el momento de inercia grueso con el momento de inercia efectivo. La altura efectiva de las vigas se muestra en la Tabla 5-4 y en la Figura 5-13. Las propiedades mecánicas de las vigas de concreto reforzado consideradas son: módulo de elasticidad  $E_c=221,359.436 \text{ kgf/cm}^2$ , se utilizó el 10% del módulo de elasticidad con la finalidad de reducir la rigidez de la viga, y de esta forma comparar las curvas de la carga contra el desplazamiento con la inercia gruesa y la efectiva de la viga, las propiedades del acero de refuerzo, armado de las secciones, condiciones de apoyo y carga permanecieron sin ningún cambio.

$$\begin{aligned}
 I_{\text{grueso}} &= I_{\text{efectivo}} \\
 \frac{bh_1^3}{12} &= \frac{0.5bh^3}{12} \\
 h_1 &= \sqrt[3]{0.5h^3} \\
 h_1 &= 0.7937h
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Tabla 5-4 Altura efectiva de las vigas de concreto reforzado

Modelo	Altura total (cm)	Altura efectiva (cm)	Altura dañada (cm)
V-1	70.00	55.50	14.50
V-2	70.00	55.50	14.50
V-3	50.00	40.00	10.00

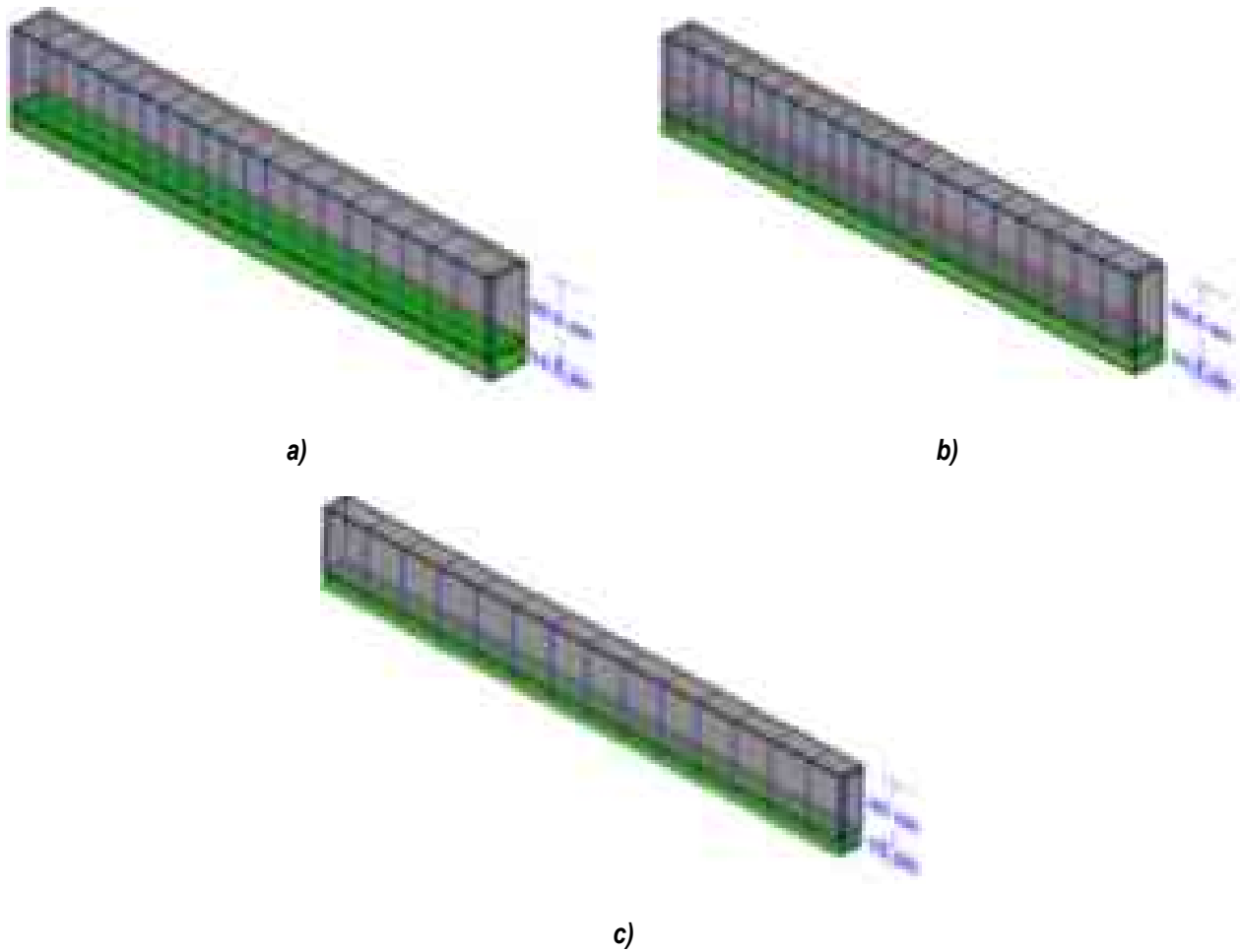


Figura 5-13 Modelos tridimensionales de las vigas de concreto reforzado, modelado un 1/4: a) modelo V-1, b) modelo V-2 y c) modelo V-3

En las Figuras 3-14, 3-16 y 3-18 se muestra la comparación entre curvas de la carga contra el desplazamiento considerando la inercia gruesa y la inercia efectiva para los tres modelos (V-1-, V-2 y V-3). Se observa que el considerar una inercia efectiva como lo recomienda las NTCC-17 (2017) la viga presenta una reducción de rigidez considerable y, por ende, valores menores de carga. Por otra parte, las cargas a la que está sometida la viga, carga última, carga nominal, carga factorizada y de inicio de agrietamiento permanecen en el intervalo elástico con los mismos valores de fuerza; sin embargo, los desplazamientos obtenidos con las simulaciones numéricas son mayores puesto que la viga tiene menor rigidez a flexión y empieza a decrecer al ocurrir el agrietamiento en el concreto o la plastificación del acero lo que hace más susceptible a las vigas a experimentar mayores desplazamientos; caso totalmente contrario cuando se considera la inercia gruesa. Por lo tanto, el diseñar con una inercia efectiva calculada a partir de la inercia gruesa mediante un factor que intenta capturar la rigidez promedio en con un factor en toda la longitud de la viga, no parece una estrategia razonable, pues se omiten muchas variables que intervienen en este complejo fenómeno (por ejemplo, cuantía de refuerzo longitudinal y resistencia a compresión del concreto). En las Figura 3-15, 3-17, y 3-19 se muestran los desplazamientos verticales, esfuerzos desarrolladas en el acero, plasticidad en el acero longitudinal y las trayectorias de agrietamiento en condición de la primera fluencia del acero considerando la inercia efectiva para los tres modelos V-1, V-2 y V-3 respectivamente, con una altura y/o peralte de daño como lo recomiendan las NTCC-17 (2017).

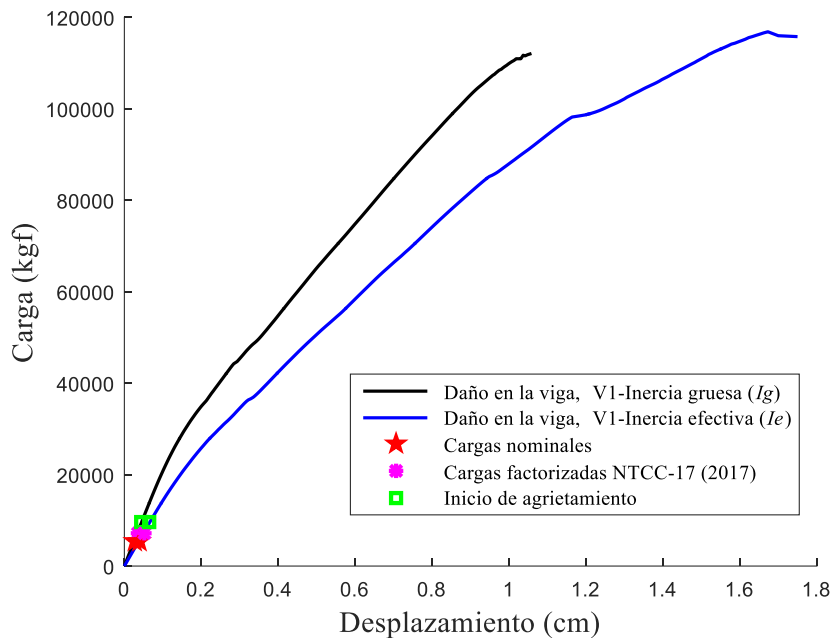


Figura 5-14 Modelo V-1, curvas de la carga contra el desplazamiento

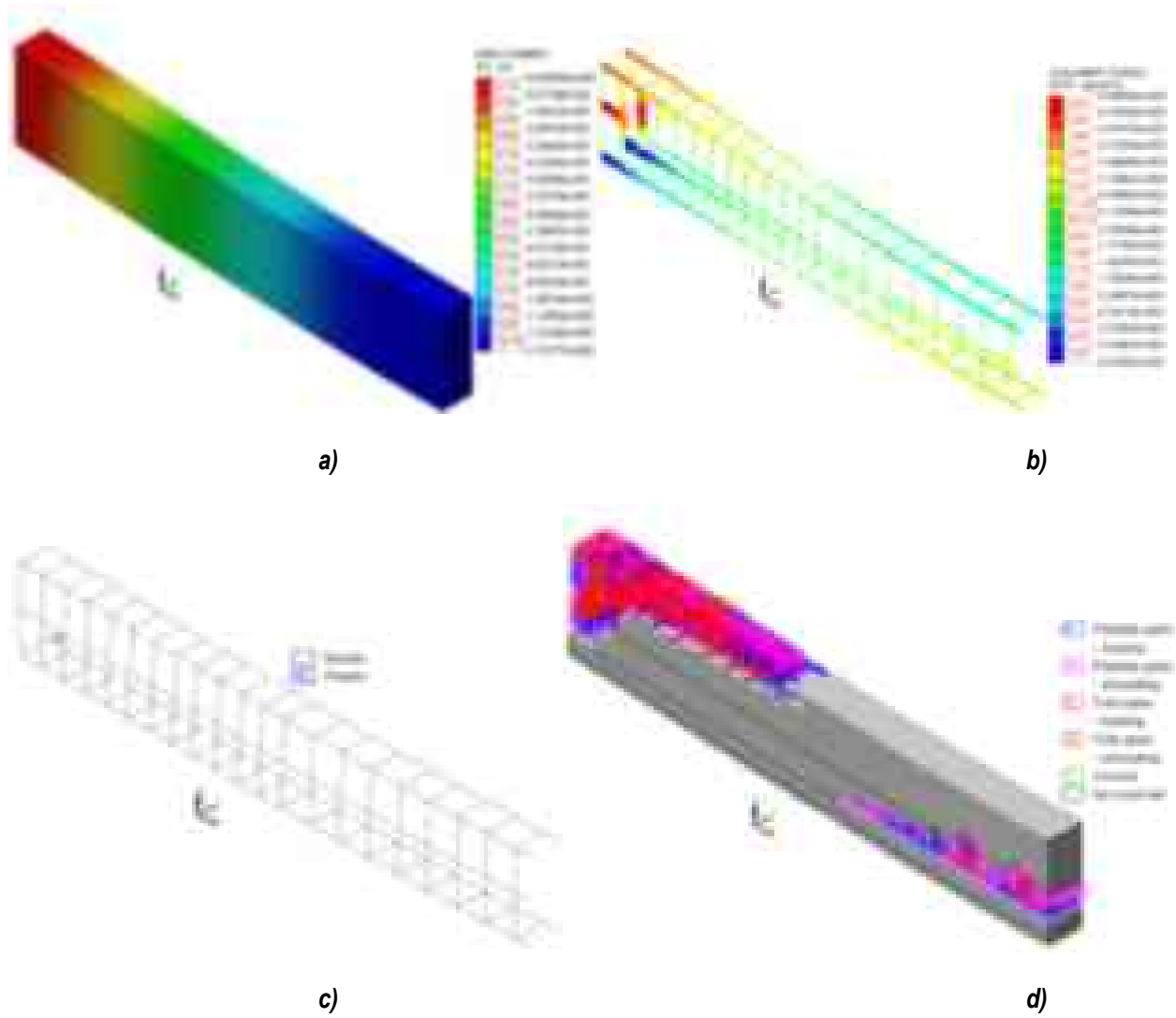


Figura 5-15 Modelo V-1, inercia efectiva: a) distribución de desplazamientos, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento

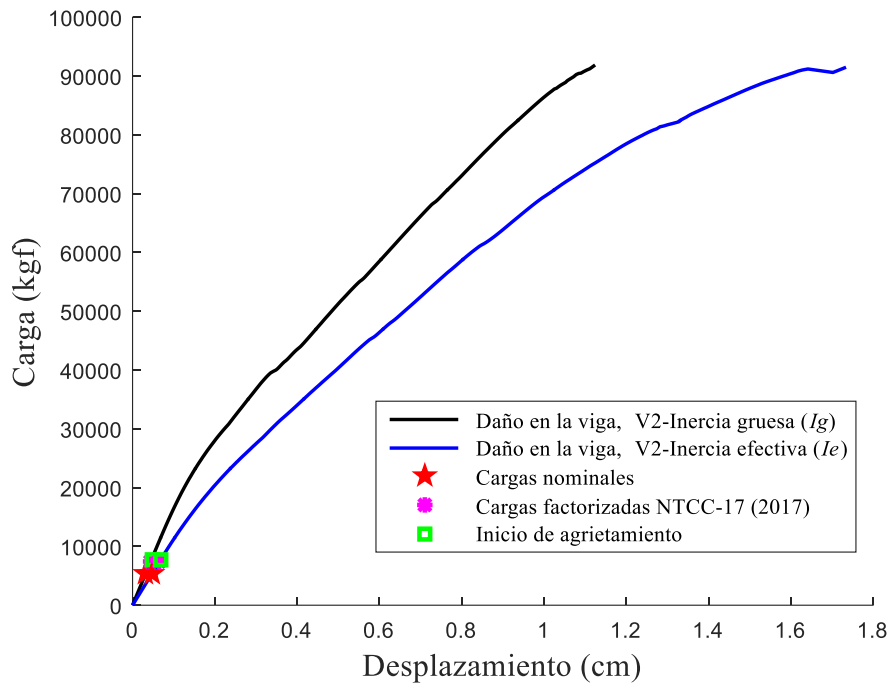
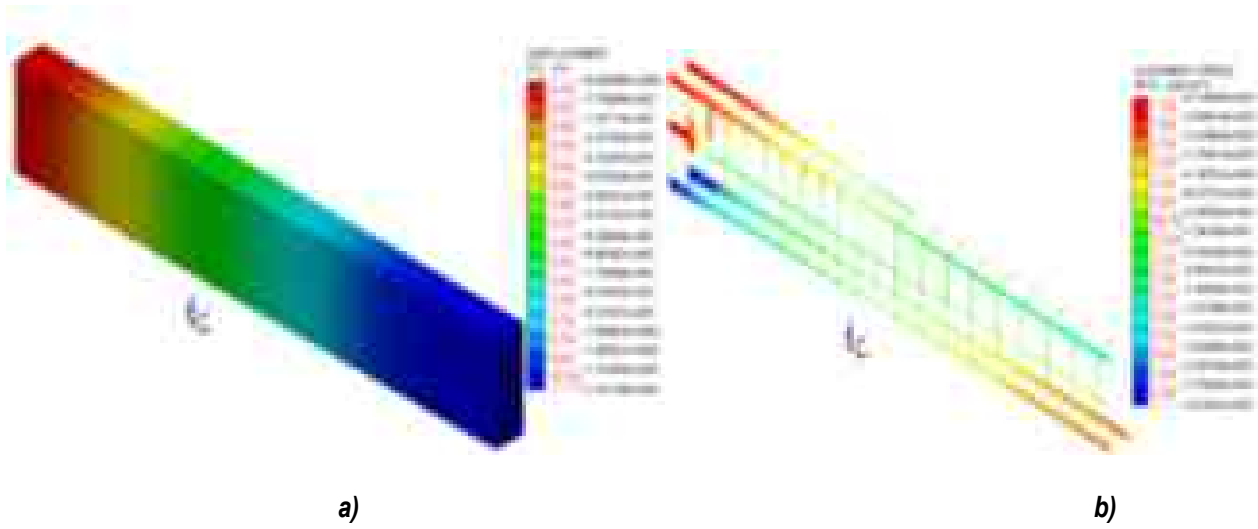


Figura 5-16 Modelo V-2, curvas de la carga contra el desplazamiento



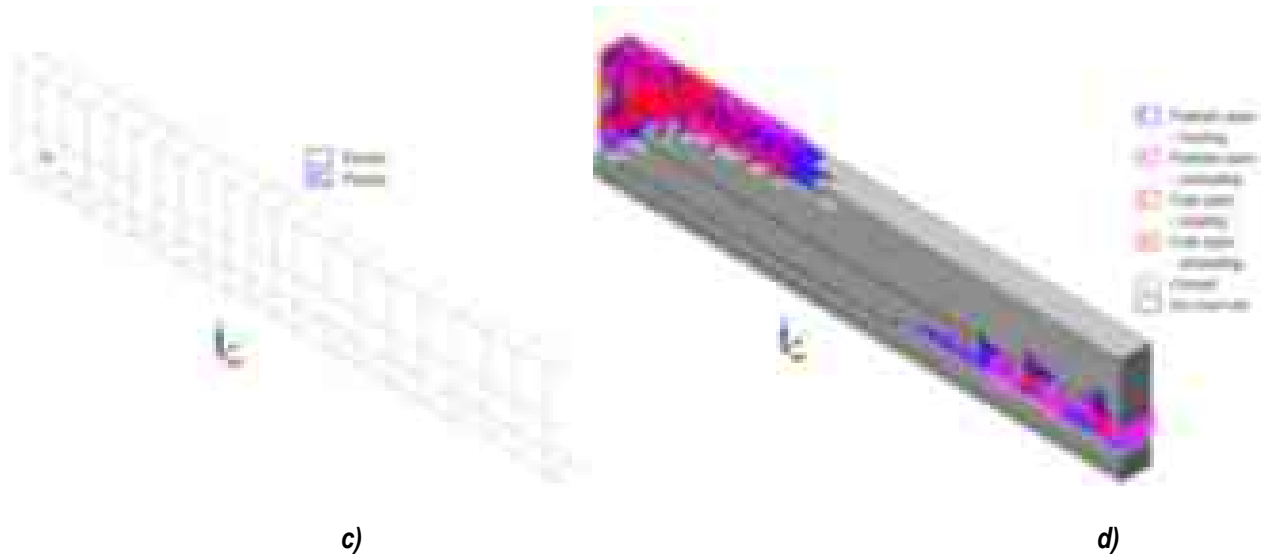


Figura 5-17 Modelo V-2, inercia efectiva: a) distribución de desplazamientos, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento

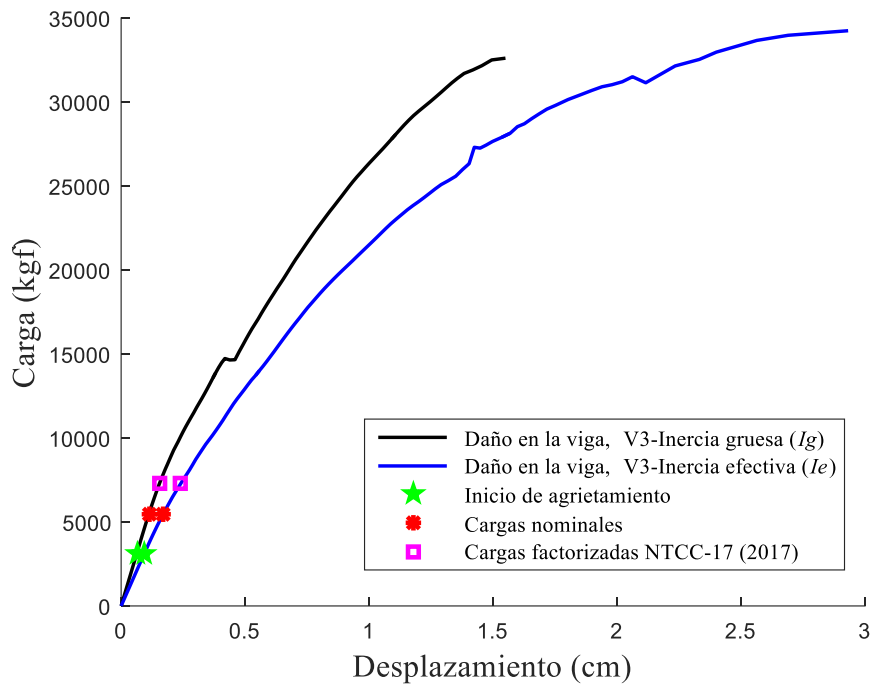
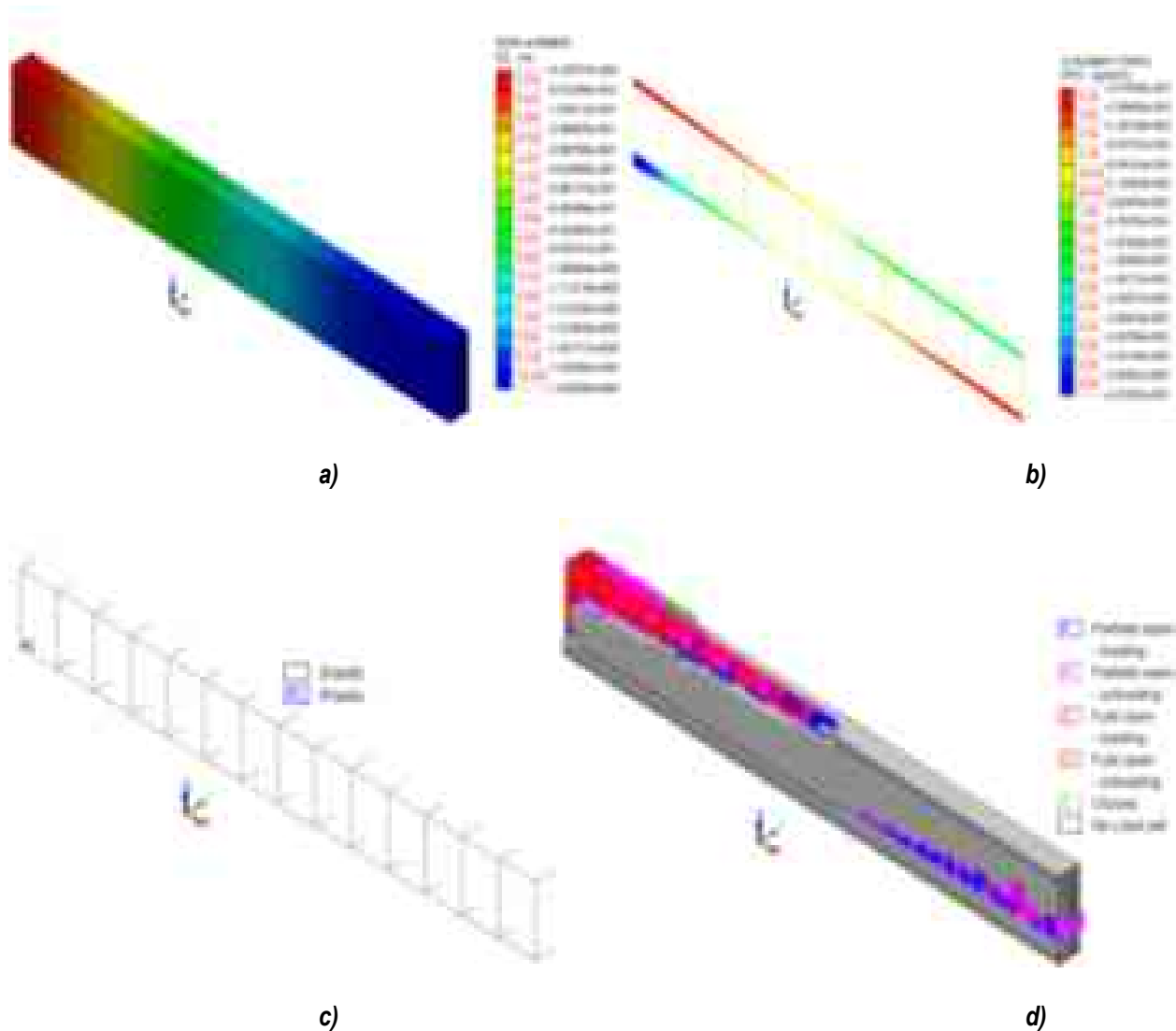


Figura 5-18 Modelo V-3, curvas de la carga contra el desplazamiento



**Figura 5-19 Modelo V-3, inercia efectiva: a) distribución de desplazamientos, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento**

En la Tabla 5-5 se muestran las cargas distribuidas, las fuerzas de empotramiento perfecto teórico, cargas máxima y desplazamientos de los modelos considerando la inercia efectiva ( $I_e$ ), cabe mencionar que se impusieron las mismas cargas a los modelos para poder hacer una comparación entre desplazamientos y esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo. En la Tabla 5-6 se muestra el esfuerzo en el acero de refuerzo desarrollado en los modelos, se observa que el esfuerzo en el acero no sobre pasa el esfuerzo de fluencia ( $f_y=4,218.42 \text{ kgf/cm}^2$ ) para los modelos de carga nominal, carga factorizada e inicio de agrietamiento, por lo que el acero de refuerzo únicamente se plastifica para el caso de carga última. Sin embargo, el agrietamiento se presenta de manera

simétrica en toda la viga y en las zonas más esforzadas, las cuales se localizan en los extremos y/o en el centro del claro.

**Tabla 5-5 Cargas y desplazamientos, considerando la inercia efectiva ( $I_e$ )**

	Carga distribuida (kgf/cm)	Fuerzas de empotramiento perfecto teóricas(kgf)	Carga máxima (kgf)	Desplazamiento (mm)
<b>Modelo V-1</b>				
Cargas nominales	15.48	5,420.62	5,459.06	0.3776
Factores de carga NTCC-17(2017)	20.76	7,267.31	7,318.85	0.5062
Inicio del agrietamiento	27.07	9,475.37	9,542.39	0.6610
<b>Modelo V-2</b>				
Cargas nominales	15.48	5,420.62	5,459.06	0.4825
Factores de carga NTCC-17(2017)	20.76	7,267.31	7,318.85	0.6477
Inicio del agrietamiento	22.05	7,720.66	7,775.42	0.6885
<b>Modelo V-3</b>				
Cargas nominales	15.48	5,420.62	5,459.06	1.6898
Factores de carga NTCC-17(2017)	20.76	7,267.31	7,318.84	2.3842
Inicio del agrietamiento	8.92	3,125.0	3,152.39	0.9462

En la Tabla 5-6 se muestran los valores de esfuerzo que se desarrollan en el acero longitudinal de cada viga ante diferentes condiciones de carga, se observa que el esfuerzo desarrollado en el acero de refuerzo es mayor que en las vigas que no consideran daño (secciones gruesas), es evidente que este incremento es debido a que el elemento tiene menor rigidez para soportar las cargas y; por lo tanto, el acero de refuerzo tiene que soportar mayor esfuerzo.

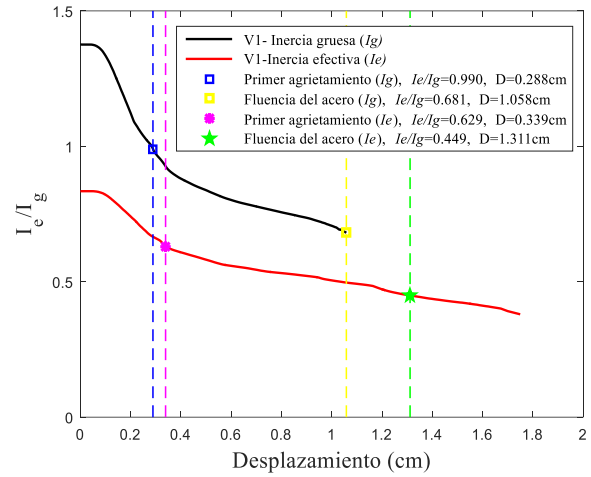
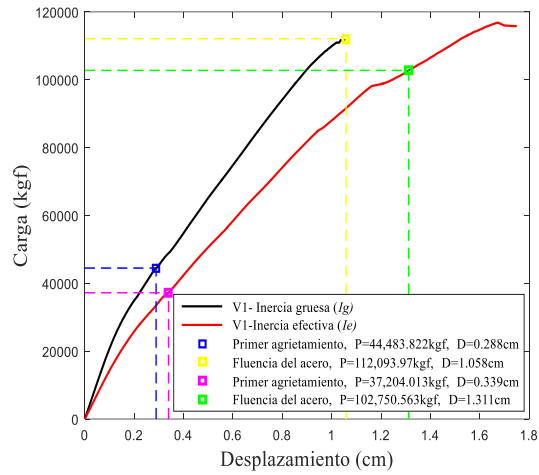
**Tabla 5-6 Porcentaje del esfuerzo de fluencia en el acero, considerando la inercia efectiva ( $I_e$ )**

	Esfuerzo en el acero de refuerzo (kgf/cm <sup>2</sup> )	Porcentaje de esfuerzo de fluencia ( $\sigma_y$ , kgf/cm <sup>2</sup> )
<b>Modelo V-1</b>		
Carga última	4,218.42	100
Carga nominal	94.05	2.24
Factores de carga NTCC- 17(2017)	126.09	3.00
Inicio del agrietamiento	168.45	4.01
<b>Modelo V-2</b>		
Carga última	4,218.42	100

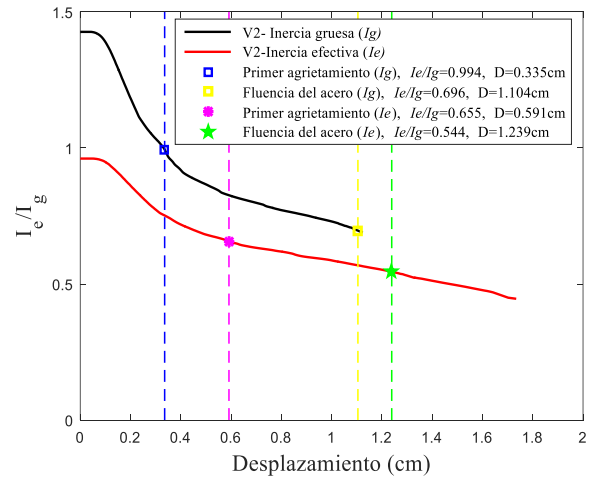
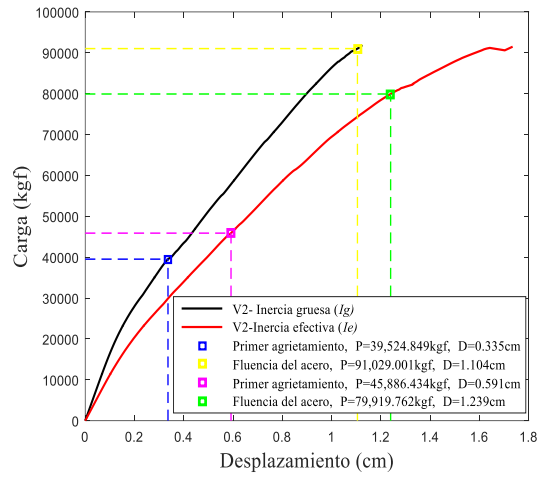
Carga nominal	121.63	2.90
Factores de carga NTCC-17(2017)	165.52	3.94
Inicio del agrietamiento	178.11	4.24
<b>Modelo V-3</b>		
Carga última	4,218.42	100
Carga nominal	407.63	9.71
Factores de carga NTCC-17(2017)	637.03	15.17
Inicio del agrietamiento	188.15	4.48

En la Figura 5-20 se muestra la comparación de las curvas de la carga contra el desplazamiento con inercia gruesa e inercia efectiva donde se indican las cargas y desplazamientos del primer agrietamiento y la primera fluencia del acero de refuerzo de las tres vigas en estudio. Las curvas de degradación de rigideces secante que se presentan son las rigideces secantes normalizadas con la rigidez elástica inicial obtenida numéricamente con elementos finitos, para el estado de carga al primer agrietamiento, fluencia del acero y carga última. Las curvas de degradación de rigideces secante con inercia gruesa e inercia efectiva se muestran de lado derecho para los tres modelos, donde se observa que la rigidez efectiva a flexión en condición de la primera fluencia del acero es de  $I_e/I_g \approx 0.681$ ,  $I_e/I_g \approx 0.696$  y  $I_e/I_g \approx 0.608$  respectivamente, mientras que el considerar las recomendaciones de las NTCC-17 (2017) se tienen valores  $I_e/I_g \approx 0.449$ ,  $I_e/I_g \approx 0.544$  y  $I_e/I_g \approx 0.494$  valores aproximados a los que recomienda el código de diseño; no obstante, se observó que el evaluar las rigideces efectivas en los elementos de concreto reforzado con el criterio de las NTCC-17 (2017) los desplazamientos obtenidos con las simulaciones numéricas son mayores, puesto que la vigas presentan mayor convergencia.

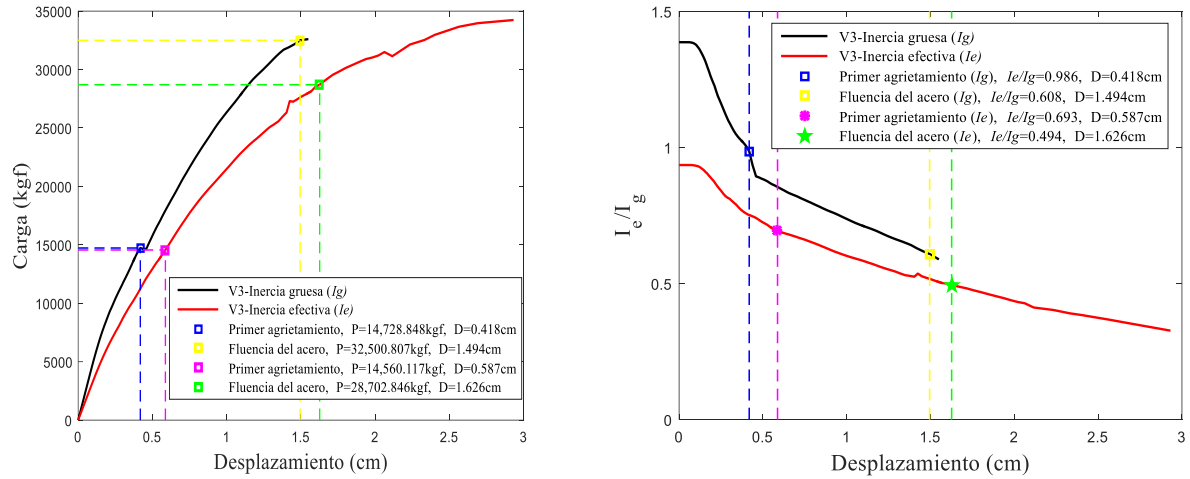
Finalmente, se observó que los valores de rigideces (momentos de inercia) efectivas a flexión ( $I_e/I_g$ ) obtenidas con elementos finitos son pequeños comparados con los que se determinarían experimentalmente, pues en el modelado numérico se hicieron bastantes simplificaciones. Por ejemplo, se modelo un cuarto de la viga considerando que el agrietamiento es simétrico y uniforme a lo largo del elemento lo que en una prueba experimental no puede suceder, se supuso adherencia perfecta entre el concreto y el acero de refuerzo.



a)



b)



c)

Figura 5-20 Comparación de curvas de la carga contra el desplazamiento y degradación de rigidez efectiva: a) V-1, b) V-2 y c) V-3

### 5.3 Evaluación de algunas variables en las rigideces efectivas

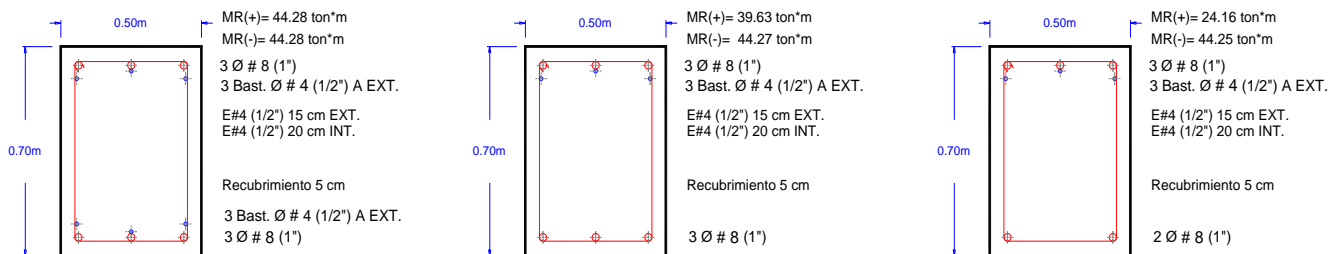
En esta sección se evalúa la influencia de dos variables que, con base en la revisión de la literatura, pueden ser significativas en la estimación de las rigideces efectivas a flexión de vigas de concreto reforzado. Primeramente, se evalúa la influencia de la cuantía de refuerzo longitudinal en tensión ( $\rho$ ) y, posteriormente, se evalúa el efecto de la resistencia a compresión del concreto ( $f'_c$ ). Además, se evalúa la relación entre las cuantías de refuerzo longitudinal en tensión y compresión ( $\rho/\rho'$ ).

#### 5.3.1 Influencia del acero de refuerzo a flexión

Las cuantías de refuerzo se definieron en función del detallado empleado para vigas de baja ductilidad ( $Q=2$ ). Se consideraron cuatro cuantías de refuerzo longitudinal en función de la cuantía balanceada ec. (3.1), calculada conforme a lo recomendado en las NTCC-17 (2017).

$$\rho_{bal} = 0.9 \left[ \left( \frac{6,000\beta_1}{6,000 + f_y} \right) \left( \frac{f'_c}{f_y} \right) \right] \quad (3.1)$$

Las cuantías consideradas son:  $0.25\rho_{bal}$ ,  $0.45\rho_{bal}$ ,  $0.65\rho_{bal}$  y  $0.90\rho_{bal}$ , así como una relación entre las cuantías de refuerzo longitudinal en tensión y compresión  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y  $2$ . Se consideraron distribuciones de acero de refuerzo realistas, procurando que los armados planteados se aproximaran a las cuantías de refuerzo teóricas. De la Figura 3-21 a la 3-23 se muestran los armados empleados de las vigas en estudio. Las secciones transversales mostradas corresponden a zonas extremas de vigas que forman parte de un sistema estructural sujeto a demandas sísmicas. Por esto, en todos los casos, el acero de refuerzo en tensión está ubicado en el lecho superior y el acero de refuerzo en compresión en el lecho inferior. Las condiciones de apoyo y carga consideradas son las mismas que las consideradas en la sección anterior.



a)

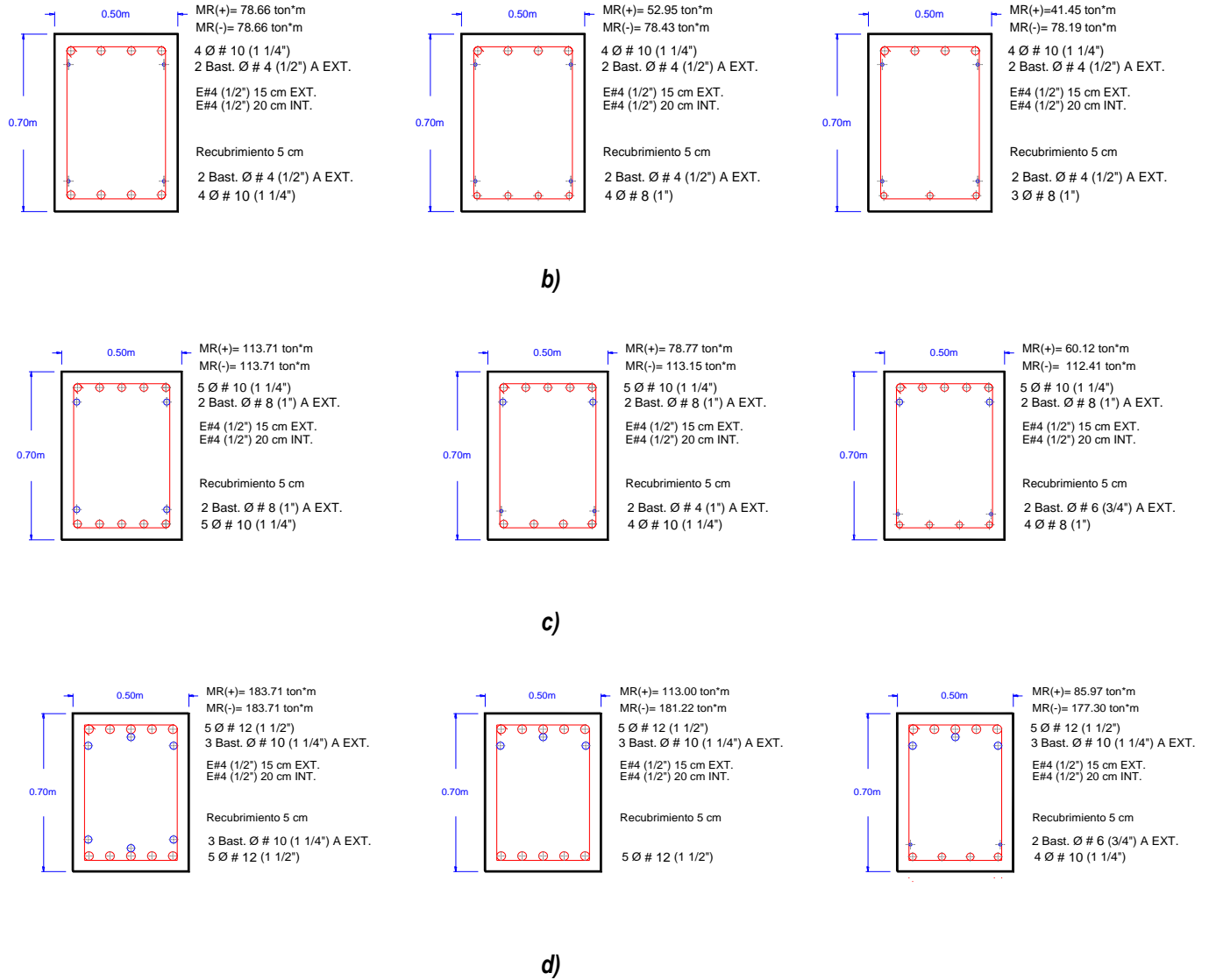
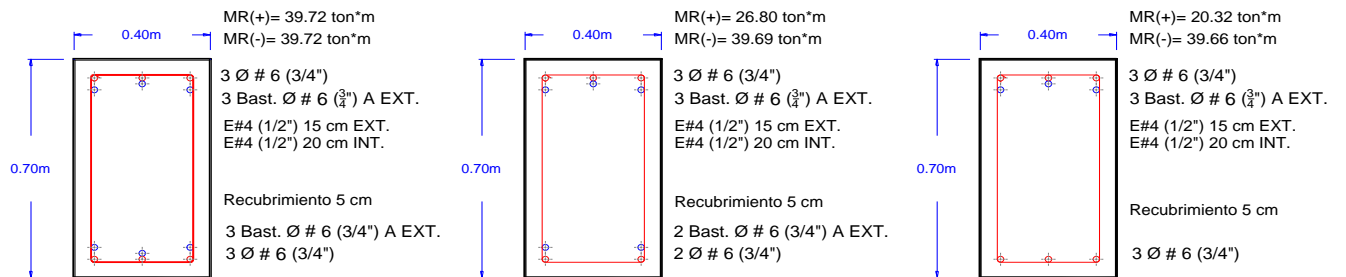


Figura 5-21 Cuantías de refuerzo a flexión para la viga 1 con detallado no dúctil (Q de 2): a)  $0.25\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1, 1.5$  y 2, b)  $0.45\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1, 1.5$  y 2, c)  $0.65\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1, 1.5$  y 2 y d)  $0.90\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1, 1.5$  y 2



a)

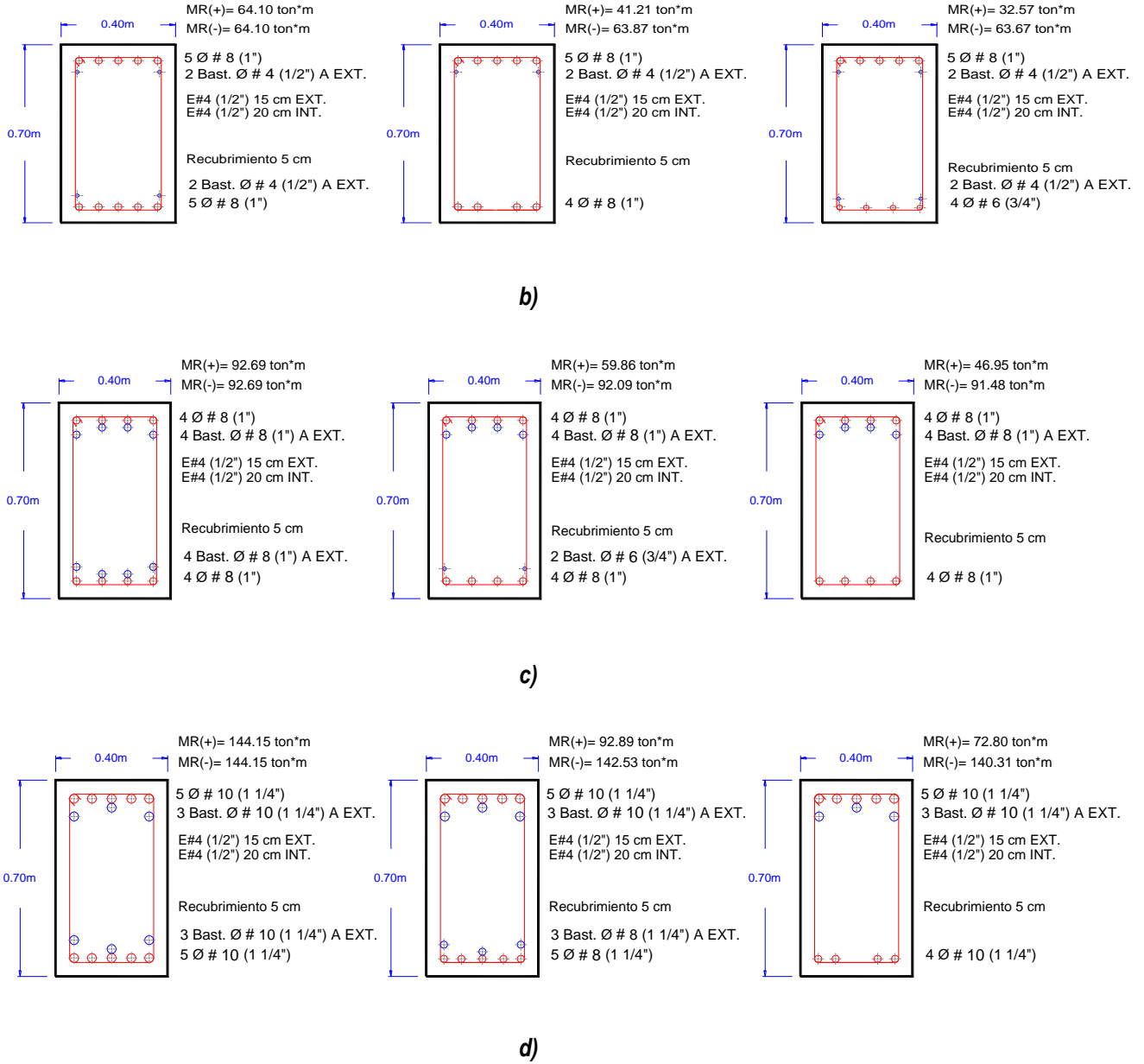


Figura 5-22 Cuantías de refuerzo a flexión para la viga 2 con detallado no dúctil (Q de 2): a)  $0.25\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y 2, b)  $0.45\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y 2, c)  $0.65\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y 2 y d)  $0.90\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y 2

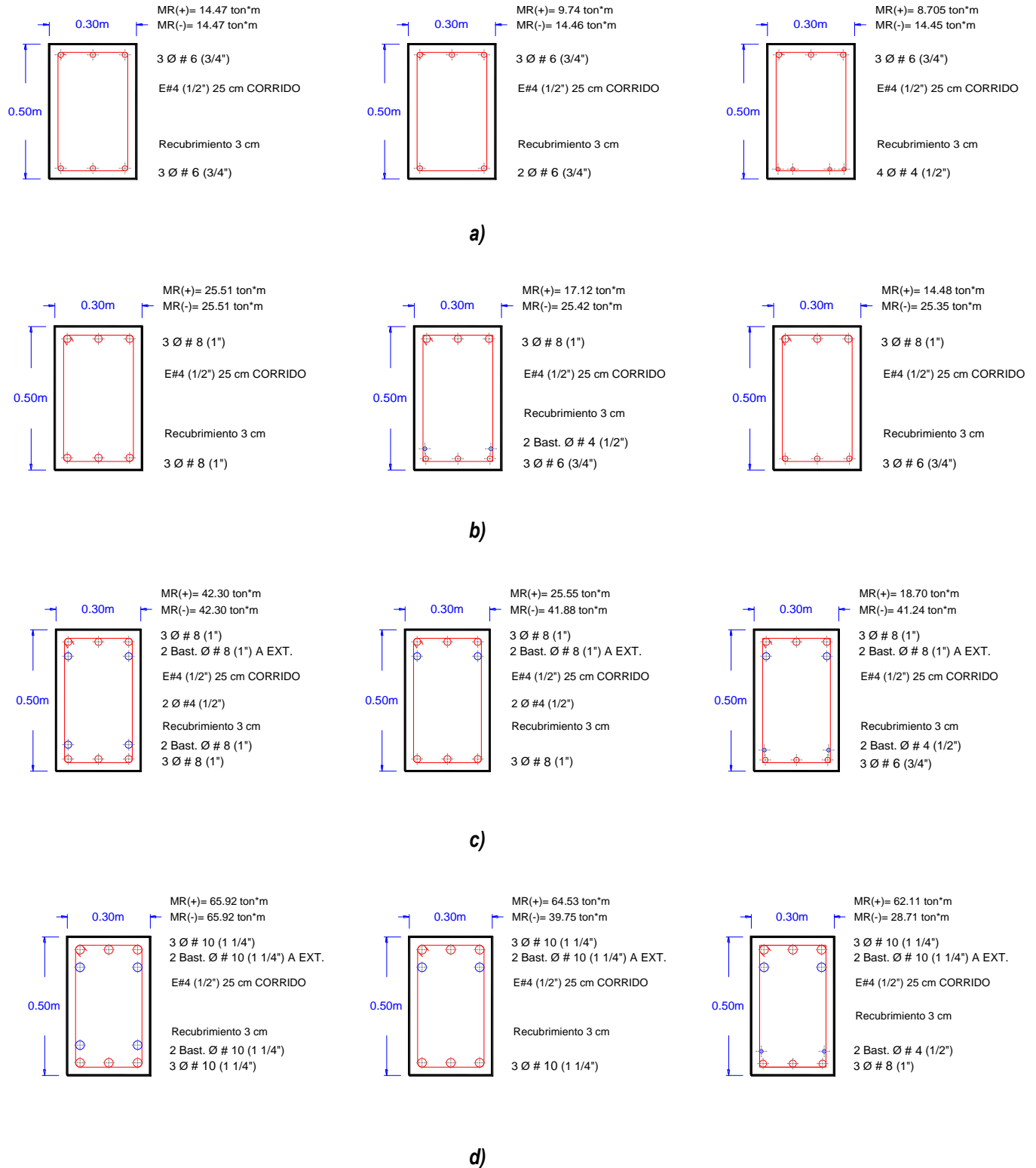


Figura 5-23 Cuantías de refuerzo a flexión para la viga 3 con detallado no dúctil (Q de 2): a)  $0.25\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y  $2$ , b)  $0.45\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y  $2$ , c)  $0.65\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y  $2$  y d)  $0.90\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y  $2$

Las curvas que se muestran de la Figura 5-24 a la Figura 5-44 son de la carga contra el desplazamiento y de la degradación de rigidez secante efectiva de los modelos V1, V2 y V3. Las vigas están empotradas y sometidas a lo largo del claro a cargas verticales monótonas uniformemente distribuidas. En las curvas se muestran los resultados asociados a las tres relaciones de refuerzo en tensión y compresión ( $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y  $2$ ) para  $0.25, 0.45, 0.65$  y  $0.90\rho_{bal}$ , respectivamente. Se observó que no existe una gran diferencia en desplazamientos y cargas para las relaciones  $\rho/\rho'$  consideradas. Además, la primera fluencia del acero para las tres curvas se presenta a valores similares; sin embargo, en las curvas de degradación de rigidez secante, donde se comparan las cuantías consideradas de  $0.25\rho_{bal}, 0.45\rho_{bal}, 0.65\rho_{bal}$  y  $0.90\rho_{bal}$ , así como la relación entre las cuantías de refuerzo longitudinal en tensión y compresión  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y  $2$ , se observa que entre mayor es el acero de refuerzo a flexión de las vigas, presentan mayores valores de rigidez efectiva a flexión ( $I_e/I_g$ ).

En las tablas 3-7, 3-8 y 3-9 se muestran los desplazamientos, cargas y valores de rigideces efectivas a flexión de los tres modelos al primer agrietamiento y a la primera fluencia del acero, con estos resultados se muestra que los valores de rigideces efectivas a flexión en condición de la primera fluencia variando la cuantía de acero de refuerzo para la primera, segunda y tercer viga de concreto reforzado están entre  $I_e/I_g \approx 0.457-0.536$ ,  $I_e/I_g \approx 0.444-0.556$  y  $I_e/I_g \approx 0.395-0.490$ , es evidente que en la curvas mientras aumenta el acero de refuerzo los valores de rigideces efectivas crecen, es importante hacer mención que estos valores de rigideces efectivas obtenidas con el método de los elementos finitos es en toda la longitud de la viga y no en una rebanada infinitesimal, como lo hacen algunos autores en la literatura, por ejemplo Khuntia y Gosh (2004a), que los valores de rigideces serían diferentes a los de este estudio paramétrico.

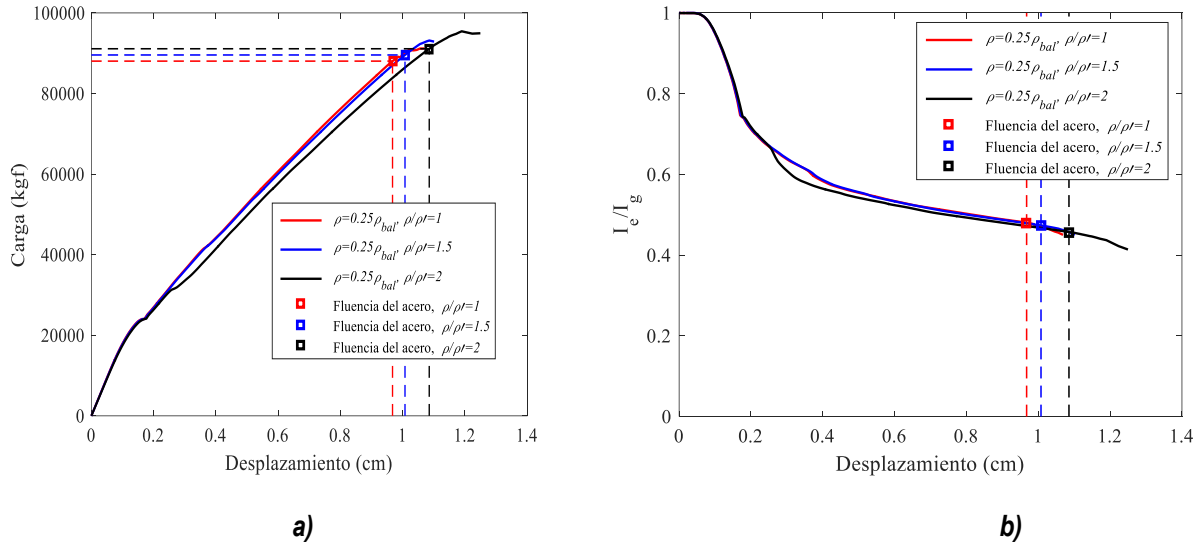


Figura 5-24 Modelo V-1 para  $0.25\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para  $\rho/\rho'=1, 1.5$  y  $2$

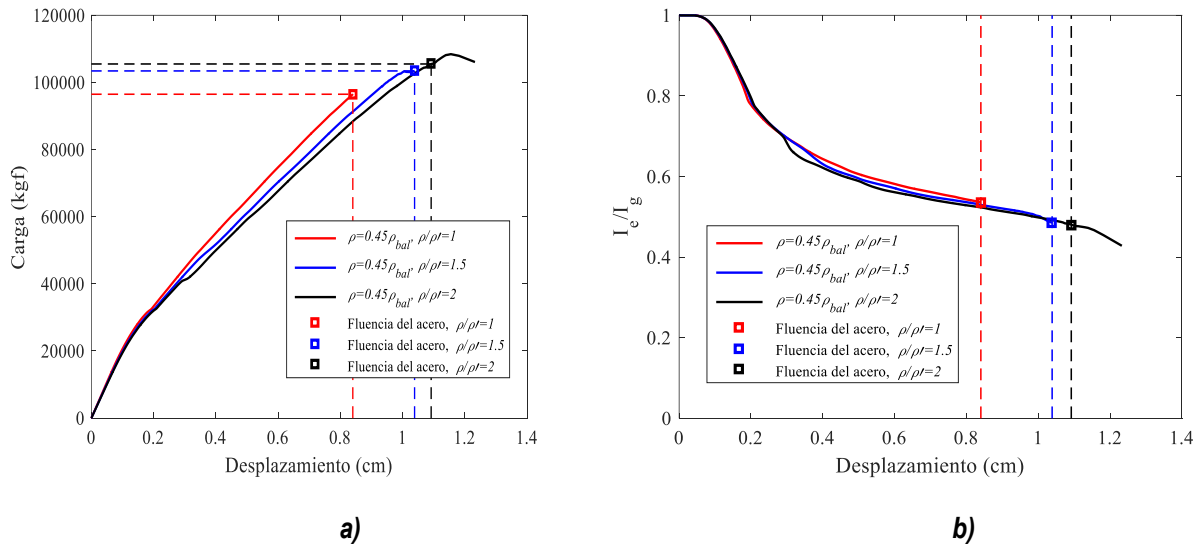


Figura 5-25 Modelo V-1 para  $0.45\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para  $\rho/\rho'=1, 1.5$  y  $2$

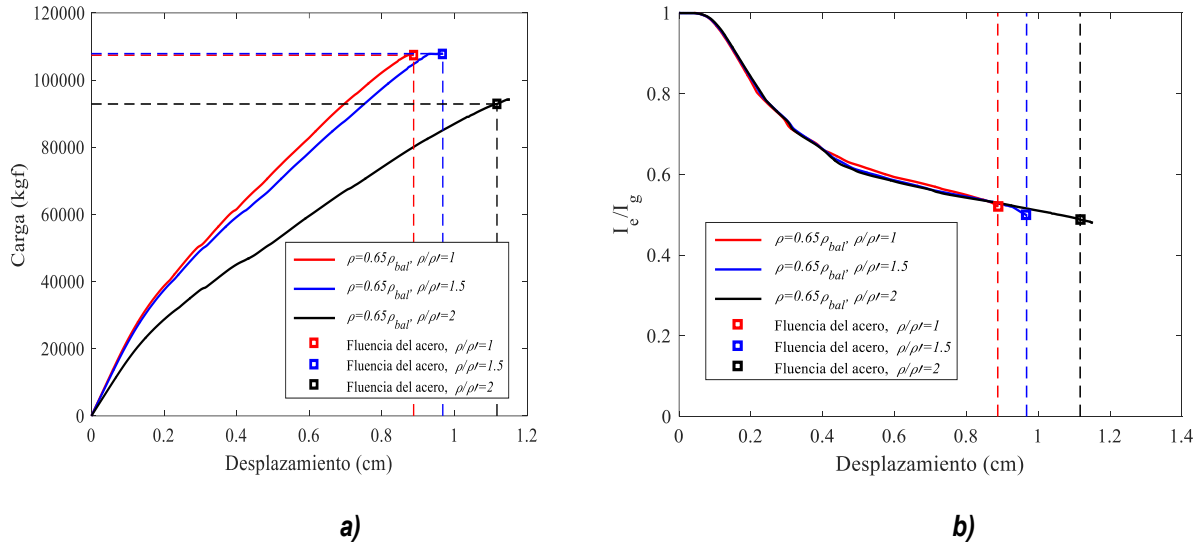


Figura 5-26 Modelo V-1 para  $0.65\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para  $\rho/\rho_t=1, 1.5$  y  $2$

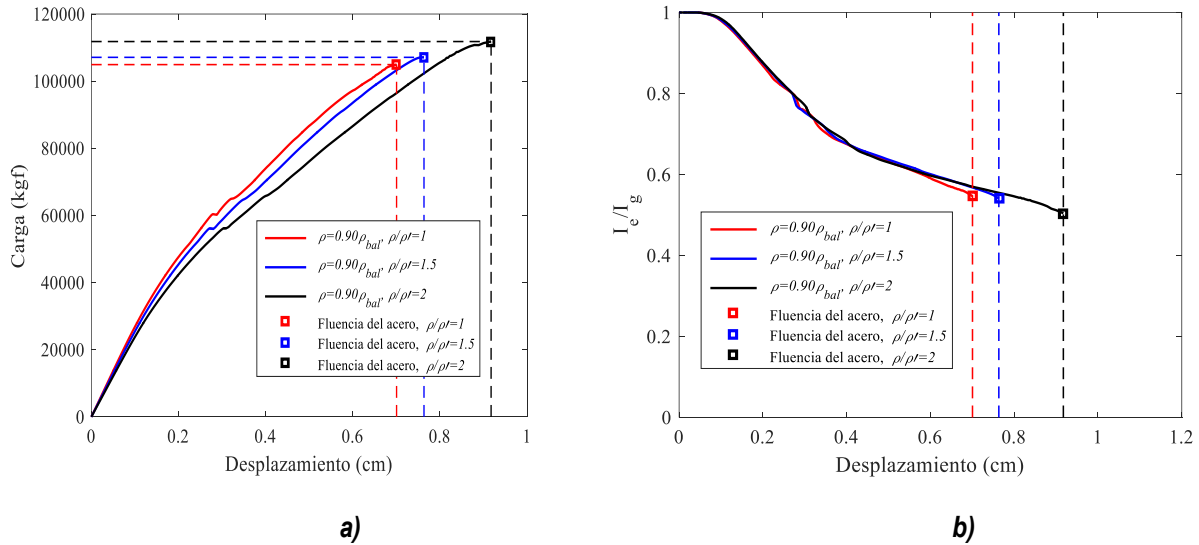


Figura 5-27 Modelo V-1 para  $0.90\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para  $\rho/\rho_t=1, 1.5$  y  $2$

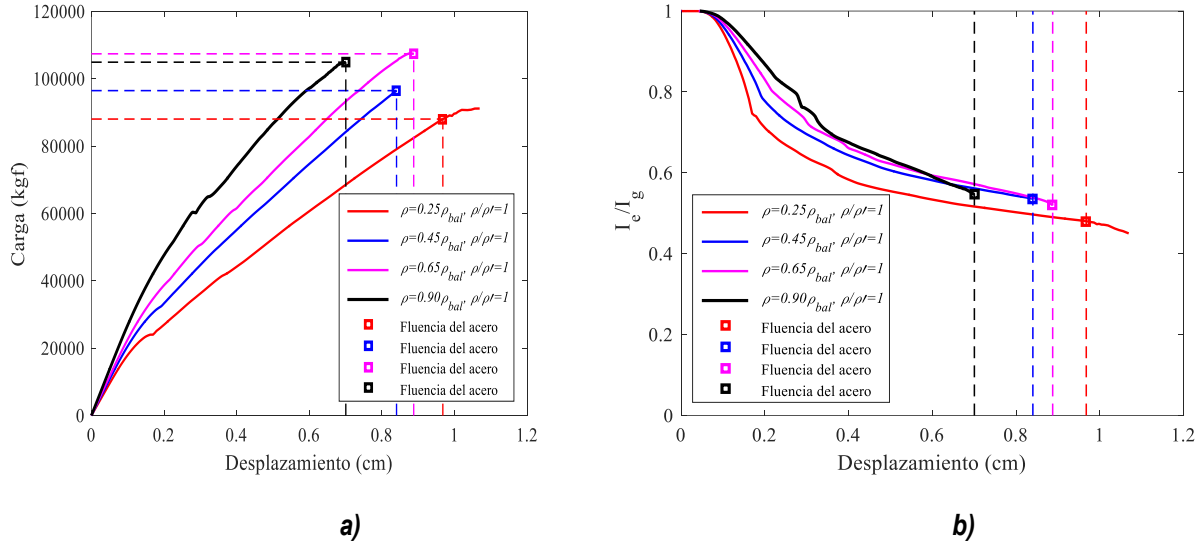


Figura 5-28 Modelo V-1 para  $0.25\rho_{bal}$ ,  $0.45\rho_{bal}$ ,  $0.65\rho_{bal}$  y  $0.90\rho_{bal}$  para  $p/\rho'=1$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante

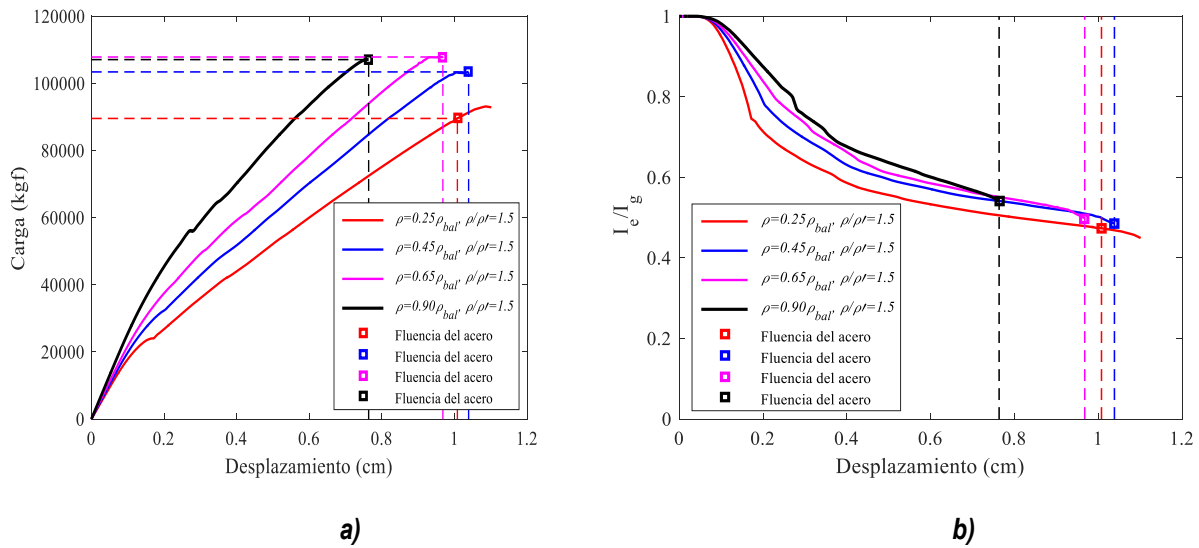


Figura 5-29 Modelo V-1 para  $0.25\rho_{bal}$ ,  $0.45\rho_{bal}$ ,  $0.65\rho_{bal}$  y  $0.90\rho_{bal}$  para  $p/\rho'=1.5$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante

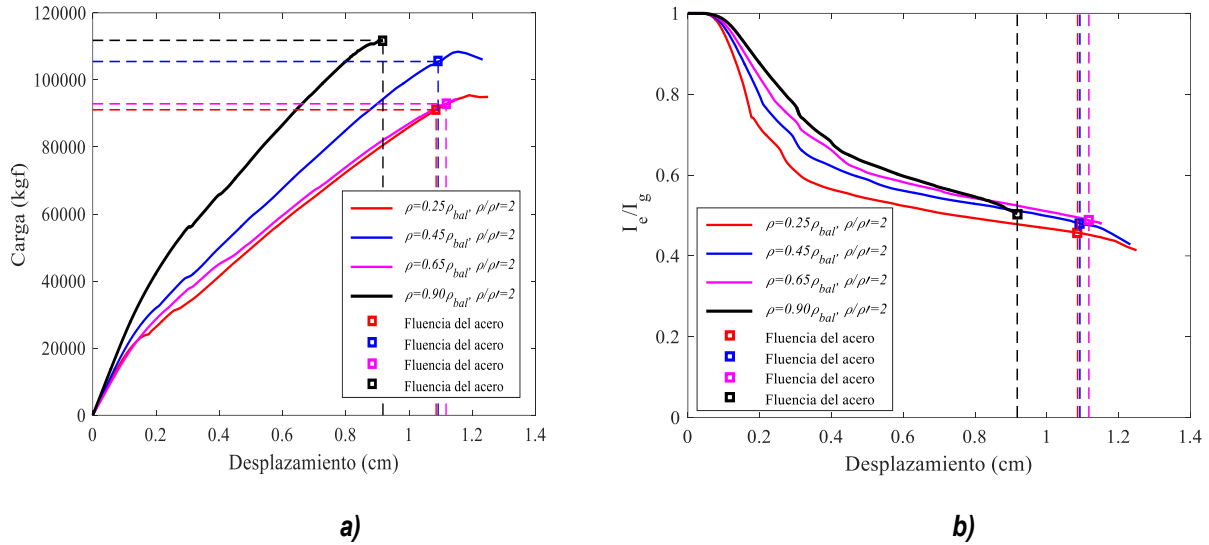


Figura 5-30 Modelo V-1 para  $0.25\rho_{bal}$ ,  $0.45\rho_{bal}$ ,  $0.65\rho_{bal}$  y  $0.90\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante

Tabla 5-7 Cargas, desplazamientos y valores de rigideces efectivas a la primera fluencia del acero, viga 1

VIGA 1				
		Desplazamiento de fluencia (cm)	Carga de fluencia (kgf)	$I_e/I_g$
<b><math>0.25\rho_{bal}</math></b>	$\rho/\rho' = 1$	0.967	88,038.107	0.480
	$\rho/\rho' = 1.5$	1.007	89,562.780	0.473
	$\rho/\rho' = 2$	1.085	91,104.432	0.457
<b><math>0.45\rho_{bal}</math></b>	$\rho/\rho' = 1$	0.840	96,482.583	0.536
	$\rho/\rho' = 1.5$	1.038	103,424.053	0.485
	$\rho/\rho' = 2$	1.091	105,495.586	0.480
<b><math>0.65\rho_{bal}</math></b>	$\rho/\rho' = 1$	0.887	107,413.167	0.520
	$\rho/\rho' = 1.5$	0.967	107,865.110	0.498
	$\rho/\rho' = 2$	1.116	92,875.382	0.487
<b><math>0.90\rho_{bal}</math></b>	$\rho/\rho' = 1$	0.700	104,931.481	0.546
	$\rho/\rho' = 1.5$	0.763	107,096.264	0.540
	$\rho/\rho' = 2$	0.917	111,801.114	0.504

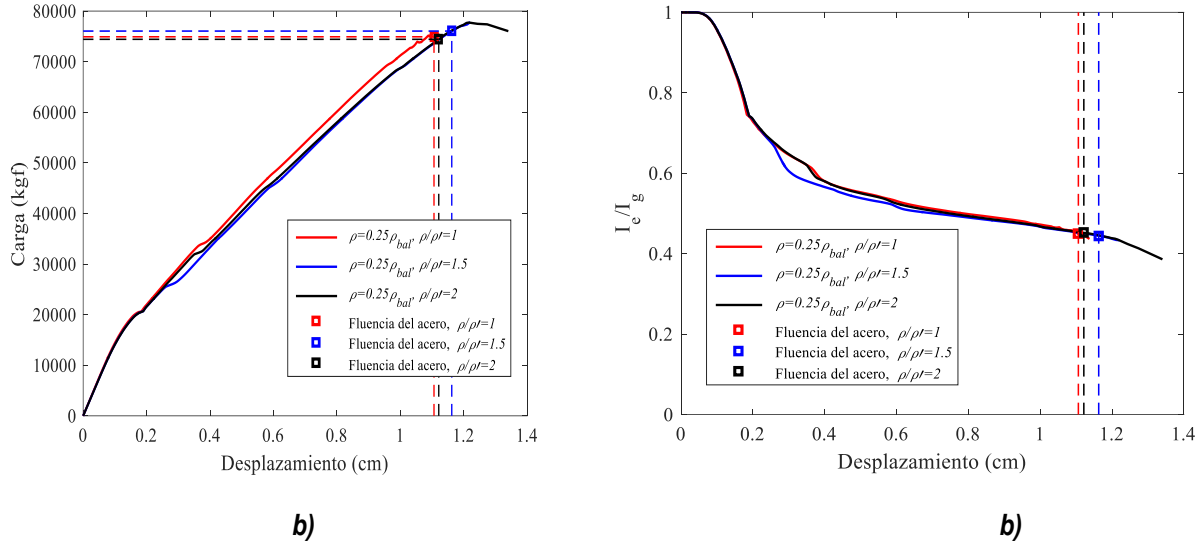


Figura 5-31 Modelo V-2 para  $0.25\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y  $2$

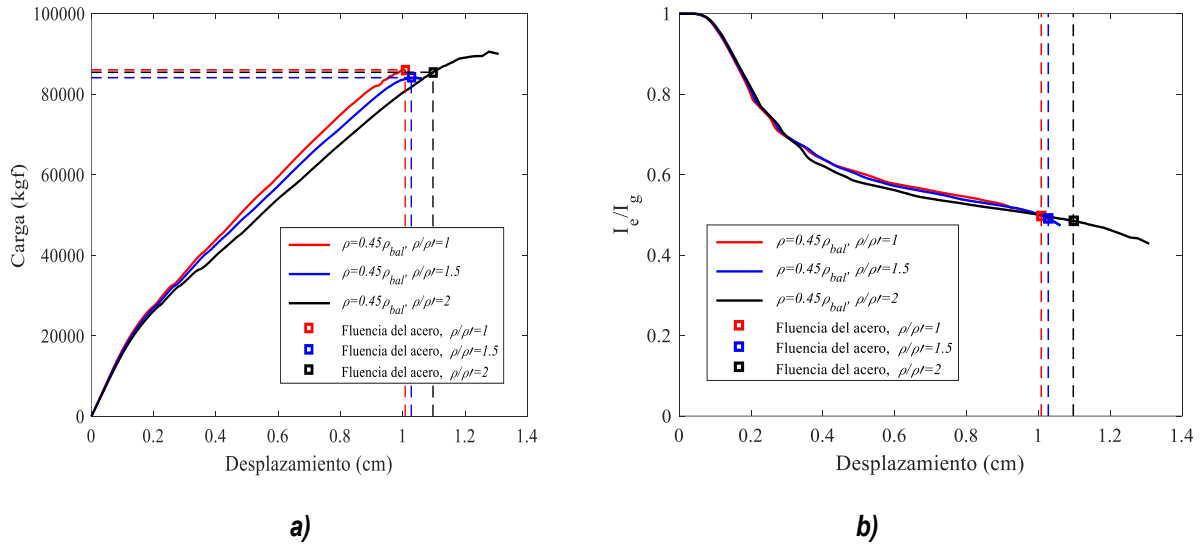


Figura 5-32 Modelo V-2 para  $0.45\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y  $2$

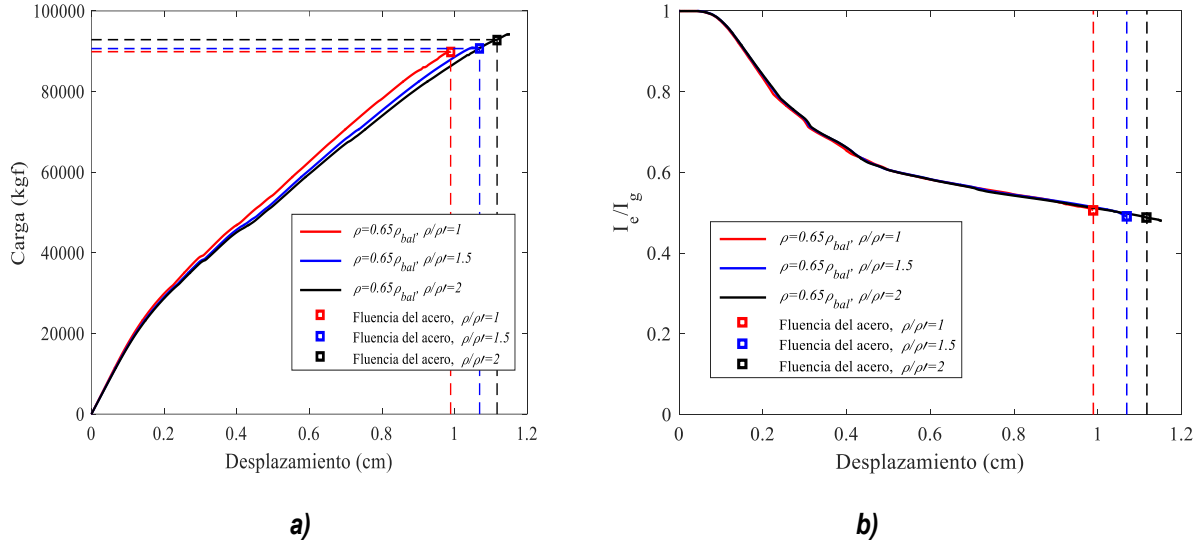


Figura 5-33 Modelo V-2 para  $0.65\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para  $\rho/\rho'=1, 1.5$  y  $2$

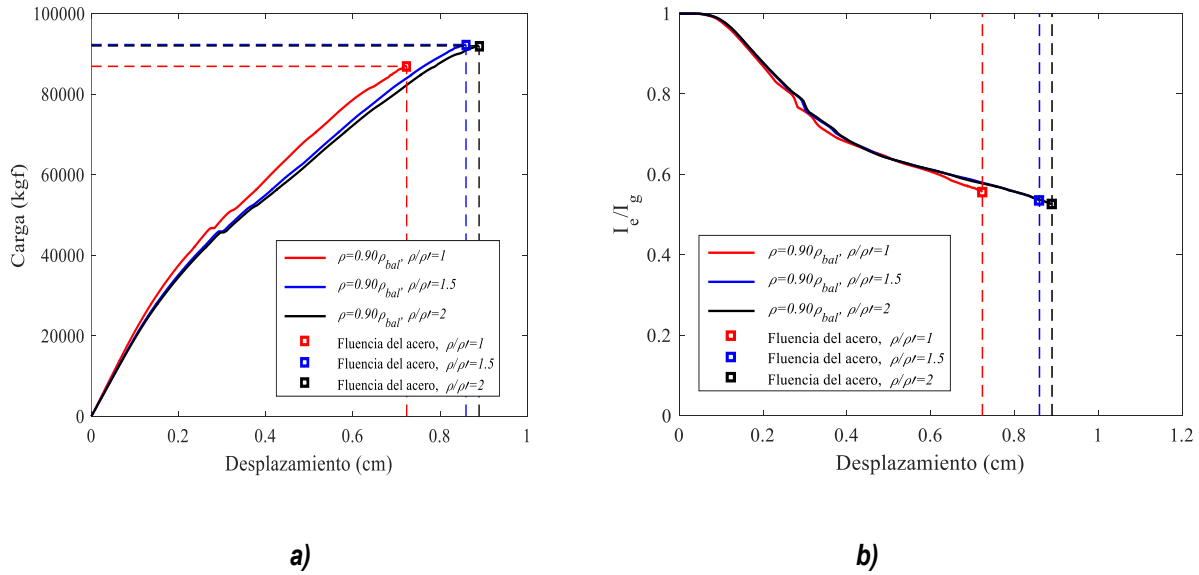


Figura 5-34 Modelo V-2 para  $0.90\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento, b) curvas de degradación de rigidez secante para  $\rho/\rho'=1, 1.5$  y  $2$

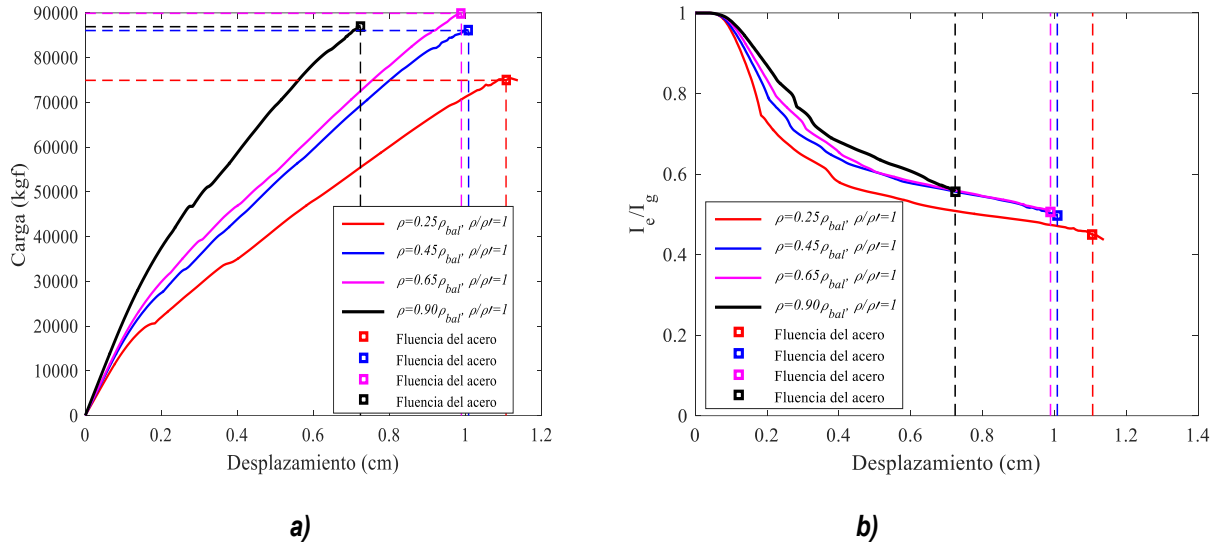


Figura 5-35 Modelo V-2 para  $0.25\rho_{bal}$ ,  $0.45\rho_{bal}$ ,  $0.65\rho_{bal}$  y  $0.90\rho_{bal}$  para  $p/\rho'=1$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante

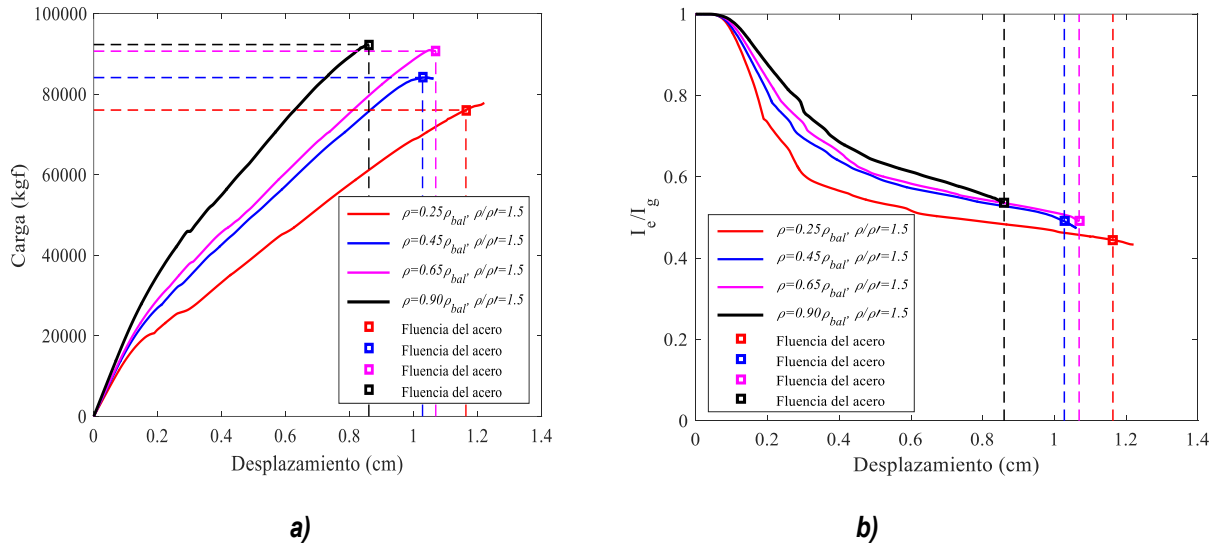


Figura 5-36 Modelo V-2 para  $0.25\rho_{bal}$ ,  $0.45\rho_{bal}$ ,  $0.65\rho_{bal}$  y  $0.90\rho_{bal}$  para  $p/\rho'=1.5$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante

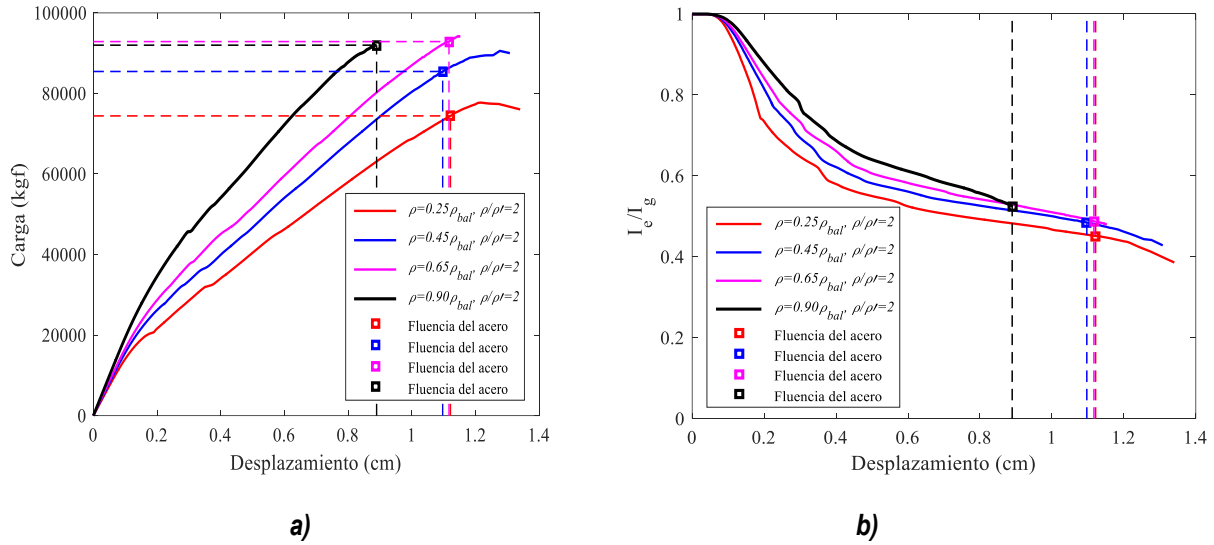


Figura 5-37 Modelo V-2 para  $0.25\rho_{bal}$ ,  $0.45\rho_{bal}$ ,  $0.65\rho_{bal}$  y  $0.90\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante

Tabla 5-8 Cargas, desplazamientos y valores de rigideces efectivas a la primera fluencia del acero, viga 2

VIGA 2				
		Desplazamiento de fluencia (cm)	Carga de fluencia (kgf)	$I_e/I_g$
$0.25\rho_{bal}$	$\rho/\rho'=1$	1.106	74,920.987	0.448
	$\rho/\rho'=1.5$	1.162	76,049.860	0.444
	$\rho/\rho'=2$	1.121	74,423.255	0.451
$0.45\rho_{bal}$	$\rho/\rho'=1$	1.007	86,052.728	0.496
	$\rho/\rho'=1.5$	1.027	84,110.564	0.490
	$\rho/\rho'=2$	1.097	85,450.859	0.484
$0.65\rho_{bal}$	$\rho/\rho'=1$	0.988	89,897.050	0.507
	$\rho/\rho'=1.5$	0.967	107,865.110	0.498
	$\rho/\rho'=2$	1.116	92,875.382	0.4877
$0.90\rho_{bal}$	$\rho/\rho'=1$	0.723	86,909.748	0.556
	$\rho/\rho'=1.5$	0.859	92,307.750	0.535
	$\rho/\rho'=2$	0.889	91,988.642	0.525

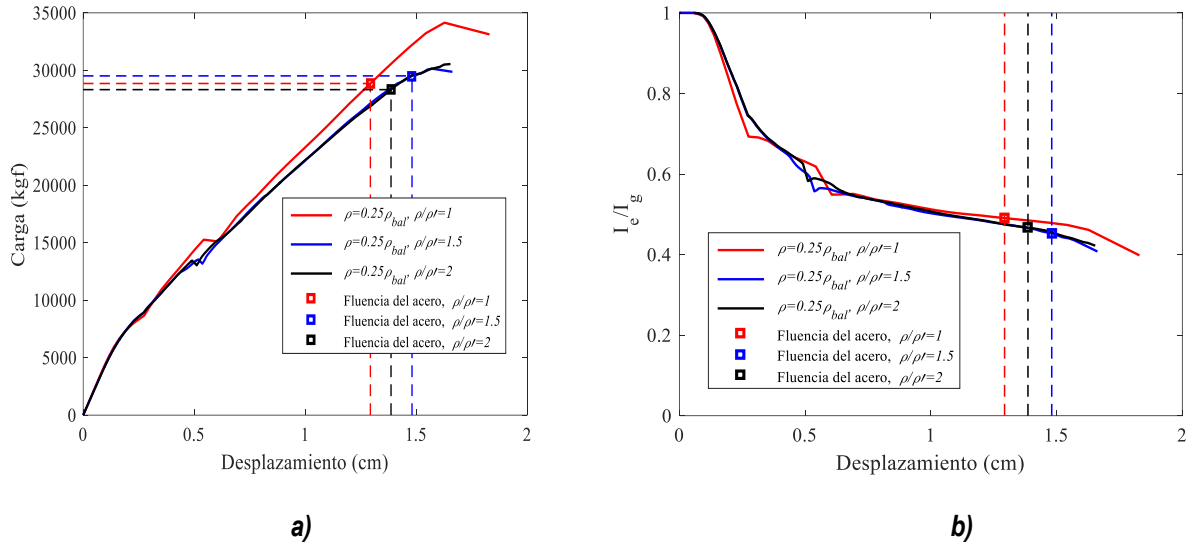


Figura 5-38 Modelo V-3 para  $0.25\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para  $\rho/\rho'=1, 1.5$  y  $2$

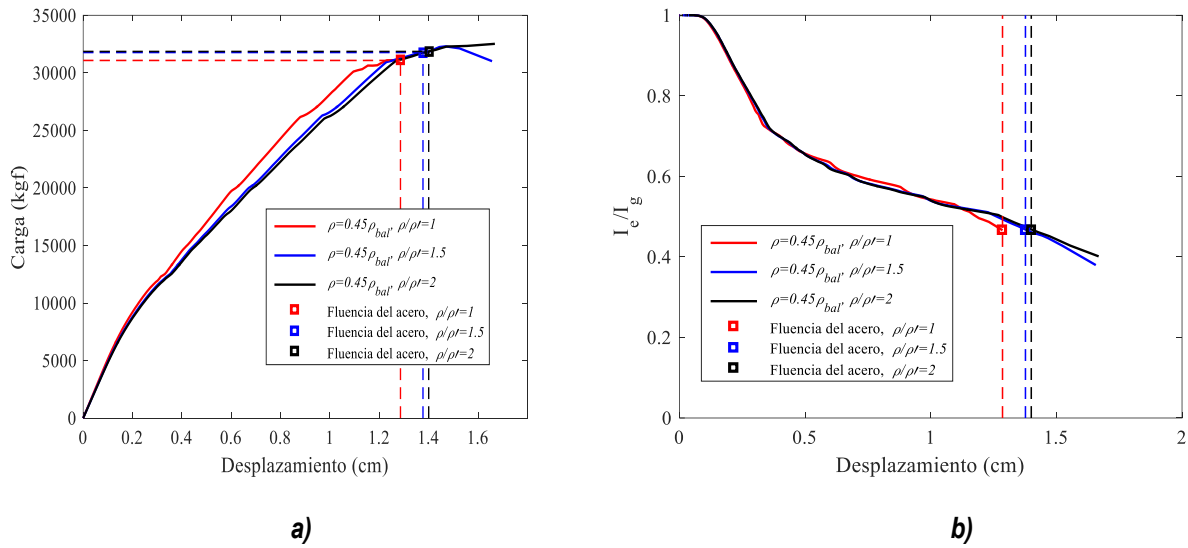


Figura 5-39 Modelo V-3 para  $0.45\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para  $\rho/\rho'=1, 1.5$  y  $2$

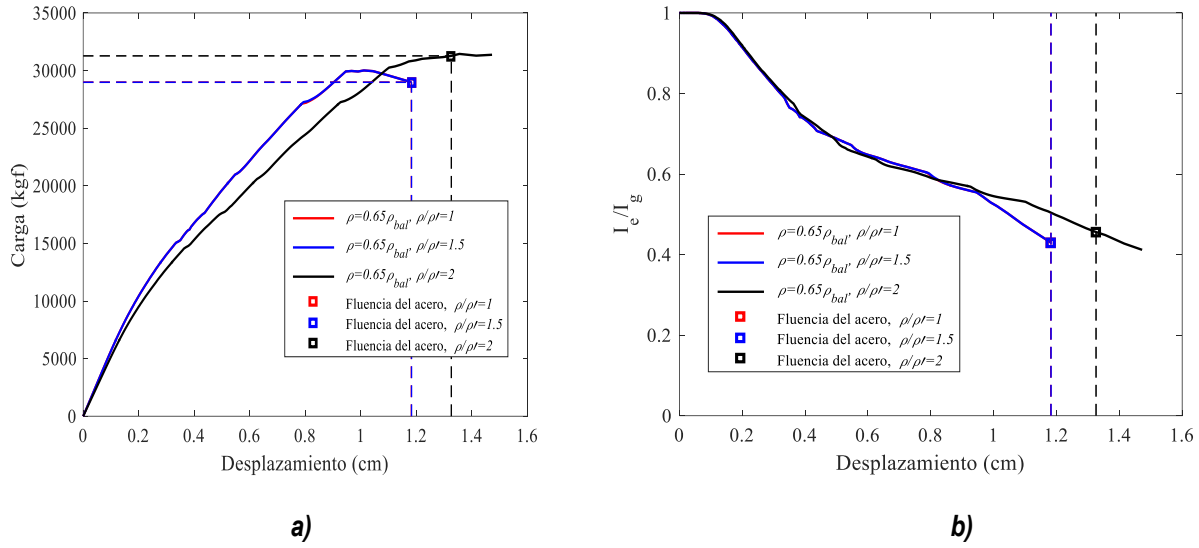


Figura 5-40 Modelo V-3 para  $0.65\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para  $\rho/\rho'=1, 1.5$  y  $2$

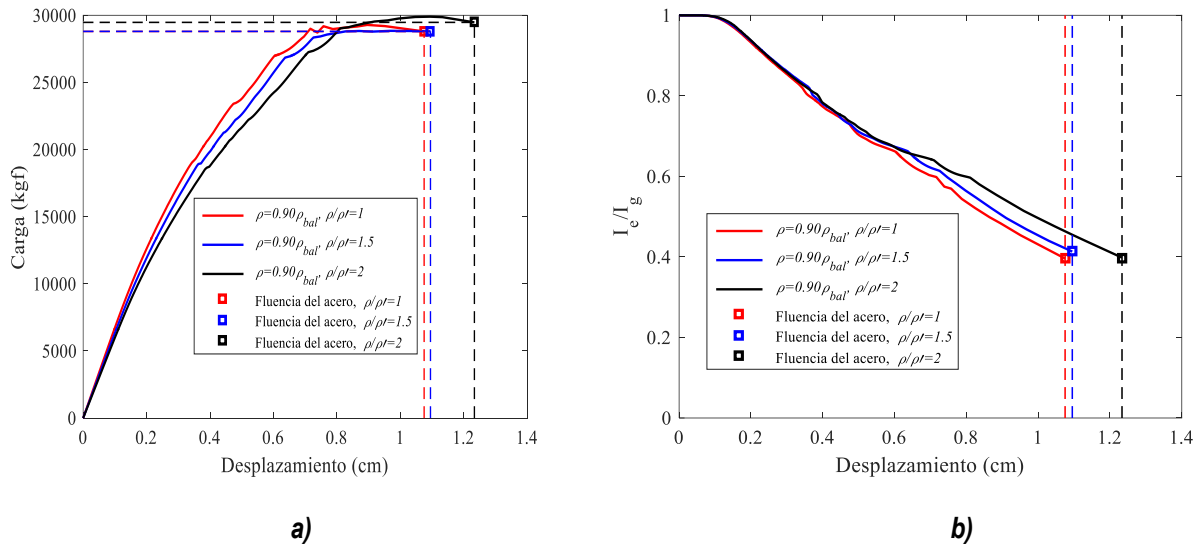


Figura 5-41 Modelo V-3 para  $0.90\rho_{bal}$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante para  $\rho/\rho'=1, 1.5$  y  $2$

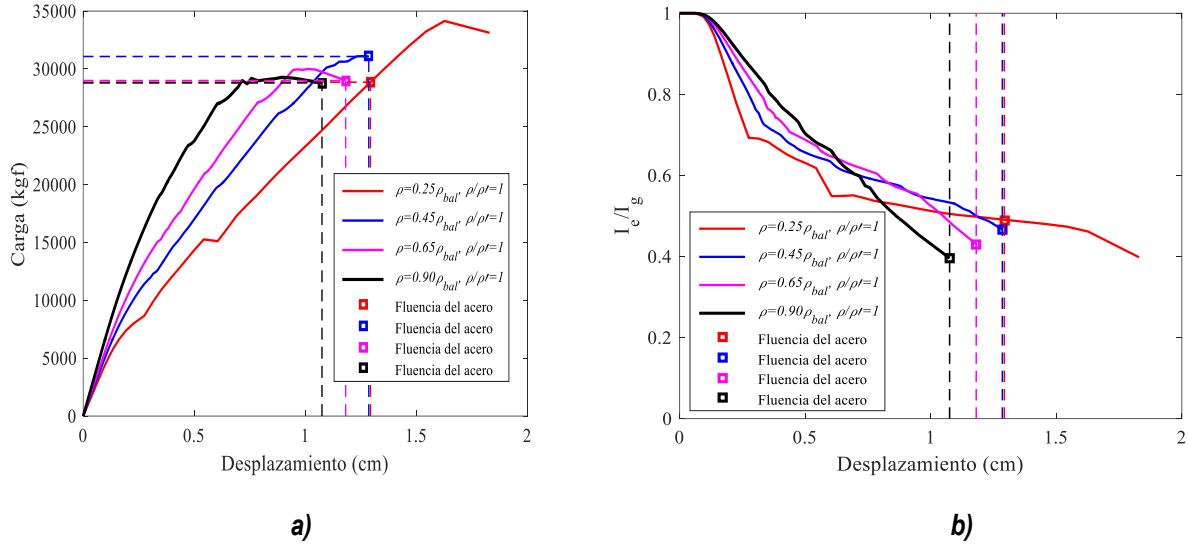


Figura 5-42 Modelo V-3 para  $0.25\rho_{bal}$ ,  $0.45\rho_{bal}$ ,  $0.65\rho_{bal}$  y  $0.90\rho_{bal}$  para  $p/\rho' = 1$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante

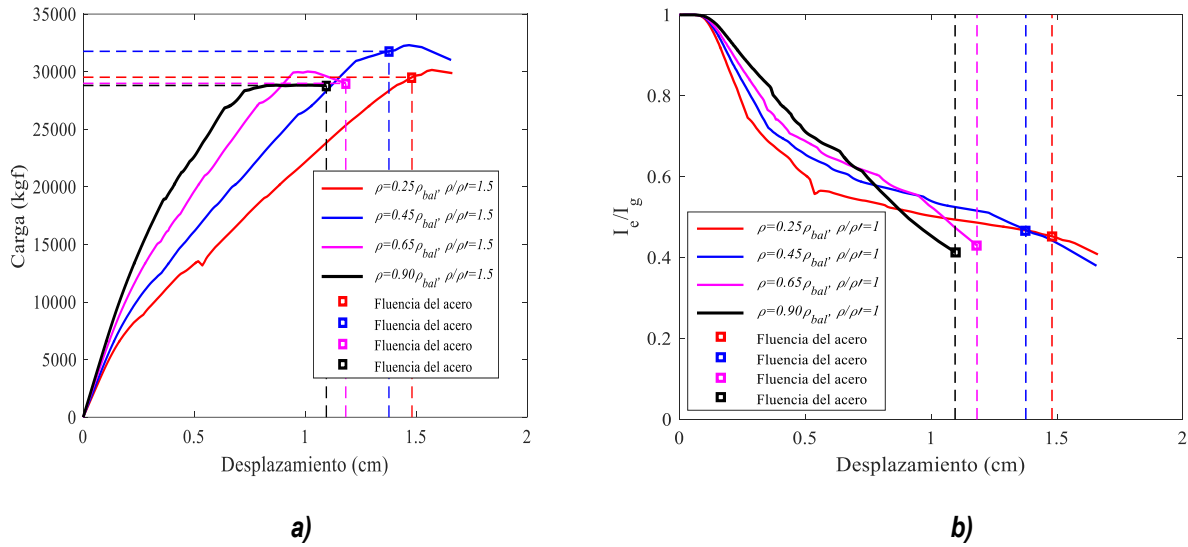


Figura 5-43 Modelo V-3 para  $0.25\rho_{bal}$ ,  $0.45\rho_{bal}$ ,  $0.65\rho_{bal}$  y  $0.90\rho_{bal}$  para  $p/\rho' = 1.5$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante

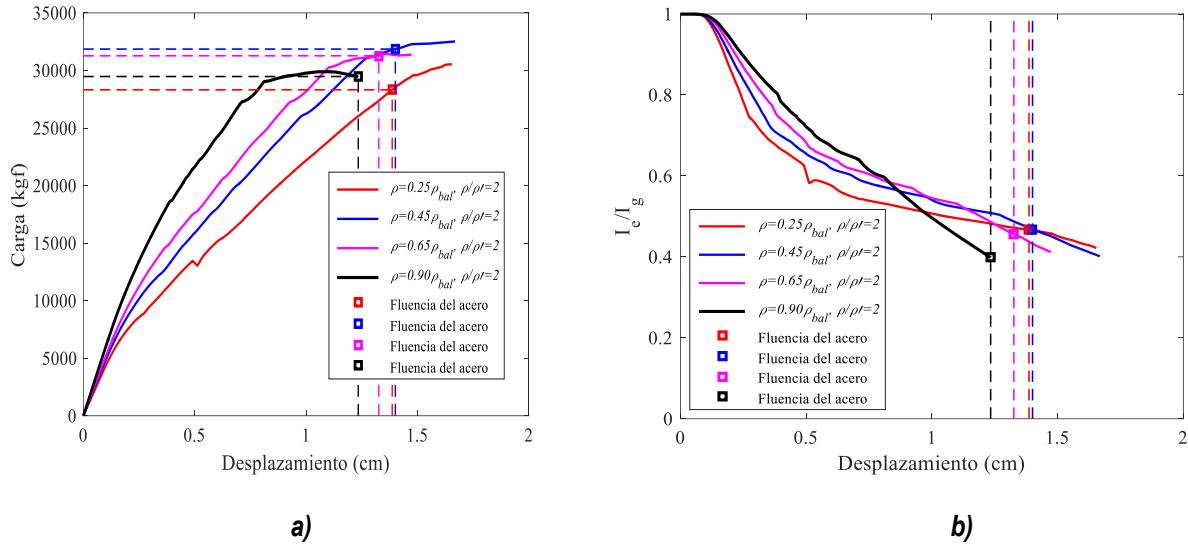


Figura 5-44 Modelo V-3 para  $0.25\rho_{bal}$ ,  $0.45\rho_{bal}$ ,  $0.65\rho_{bal}$  y  $0.90\rho_{bal}$  para  $p/\rho'=2$ : a) curvas de la carga contra desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante

Tabla 5-9 Cargas, desplazamientos y valores de rigideces efectivas a la primera fluencia del acero, viga 3

		VIGA 3		
		Desplazamiento de fluencia (cm)	Carga de fluencia (kgf)	$I_e/I_g$
<b><math>0.25\rho_{bal}</math></b>	$\rho/\rho' = 1$	1.293	28,855.841	0.490
	$\rho/\rho' = 1.5$	1.480	29,516.217	0.452
	$\rho/\rho' = 2$	1.386	28,319.687	0.466
<b><math>0.45\rho_{bal}</math></b>	$\rho/\rho' = 1$	1.285	31,077.464	0.466
	$\rho/\rho' = 1.5$	1.376	31,765.674	0.467
	$\rho/\rho' = 2$	1.400	31,857.462	0.468
<b><math>0.65\rho_{bal}</math></b>	$\rho/\rho' = 1$	1.181	28,996.963	0.429
	$\rho/\rho' = 1.5$	1.182	28,984.484	0.429
	$\rho/\rho' = 2$	1.325	31,274.278	0.455
<b><math>0.90\rho_{bal}</math></b>	$\rho/\rho' = 1$	1.075	28,795.116	0.395
	$\rho/\rho' = 1.5$	1.095	28,801.648	0.413
	$\rho/\rho' = 2$	1.233	29,473.493	0.398

### 5.3.2 Influencia de la resistencia a compresión del concreto ( $f'_c$ )

En esta sección se evalúa la influencia de  $f'_c$  en la determinación de rigideces efectivas a flexión en las vigas de concreto reforzado consideradas. Se consideraron seis resistencias a la compresión del concreto,  $f'_c = 250, 300, 350, 400, 450$  y  $500$  kgf/cm<sup>2</sup>. Para la viga 1 se considera una relación entre cuantías en tensión y compresión de  $\rho/\rho' = 1.4$ , para la viga 2  $\rho/\rho' = 1.6$  y para la viga 3  $\rho/\rho' = 2$ . La Figura 5-45 muestra las dimensiones y el armado correspondiente de las vigas en estudio.

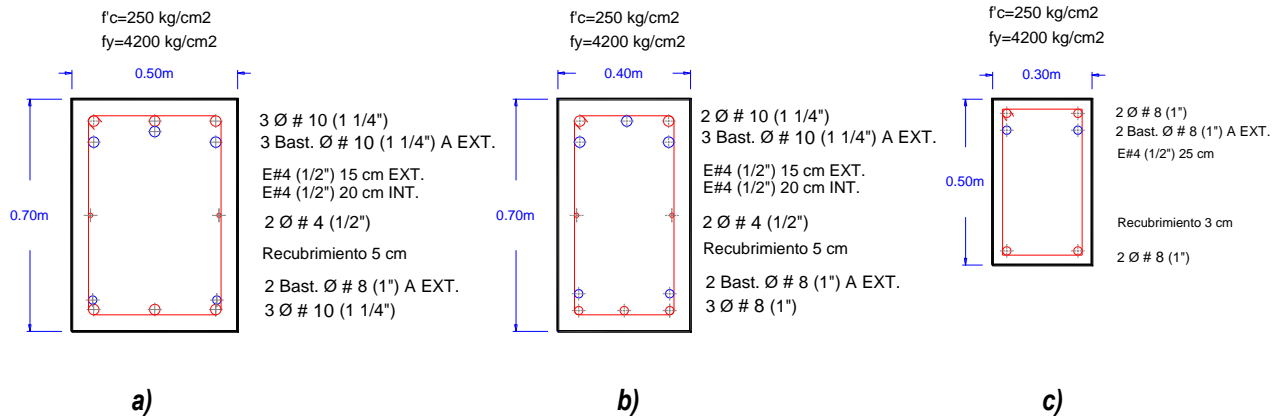


Figura 5-45 Armado de las vigas de un marco de nueve niveles con secciones gruesas, vigas  $EI_e = EI_g$ ,: a) V-1 (1er. Nivel al 4to. nivel), b) V-2 (5o. Nivel al 7o. nivel), c) V-3 (8o. y 9o. nivel) y d) secciones transversales (adaptada de Villafuerte, 2020)

De la Figura 5-46 a la 3-66 se muestran las curvas de la carga contra el desplazamiento y las curvas de degradación de rigidez variando el valor del esfuerzo a la compresión ( $f'_c$ ) de los modelos V-1, V-2 y V-3. En las curvas se indica el primer agrietamiento y la primera fluencia del acero de refuerzo de los modelos en estudio. Se observa que los valores de las rigideces efectivas a flexión en condición de la primera fluencia del acero para los tres modelos (V-1, V-2 y V-3) se tienen valores de  $I_e/I_g \approx 0.681-0.737$ ,  $I_e/I_g \approx 0.696-0.733$  y  $I_e/I_g \approx 0.608-0.745$  respectivamente. De los resultados obtenidos se puede concluir que, en general, para cuantías mayores a la mínima, existe un incremento de la rigidez efectiva a flexión conforme se incrementa la resistencia a compresión del concreto.

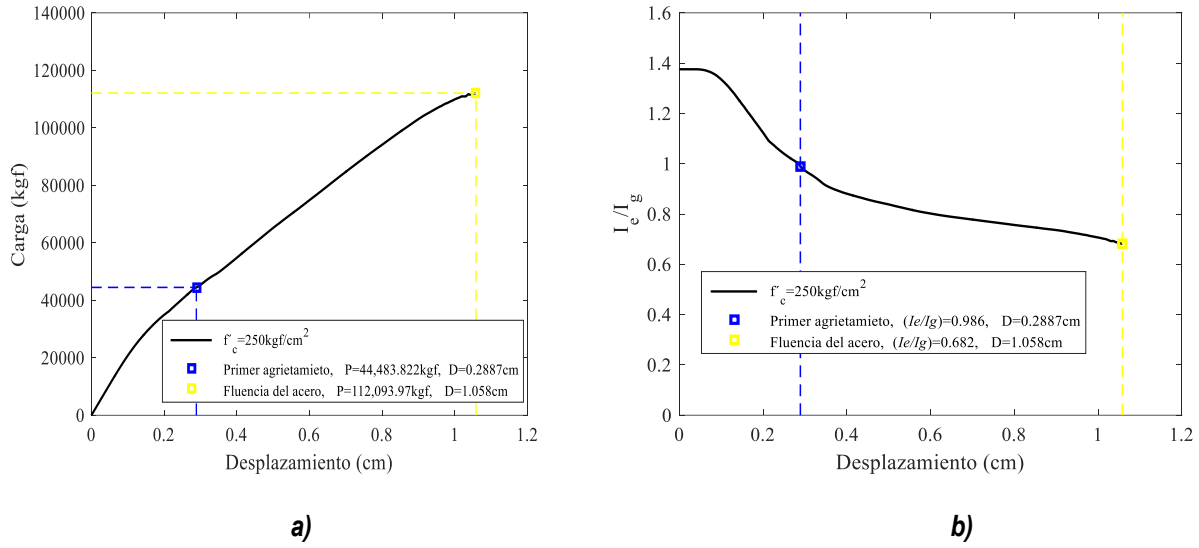


Figura 5-46 Modelo V-1, esfuerzo a la compresión  $f'_c=250 \text{ kgf/cm}^2$ : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

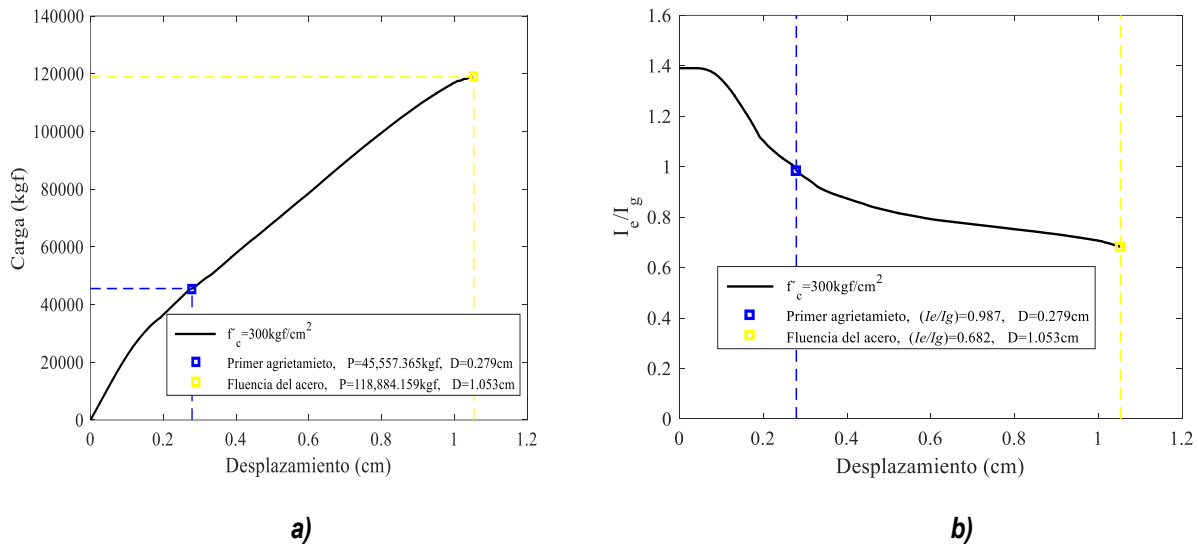


Figura 5-47 Modelo V-1, esfuerzo a la compresión  $f'_c=300 \text{ kgf/cm}^2$ : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

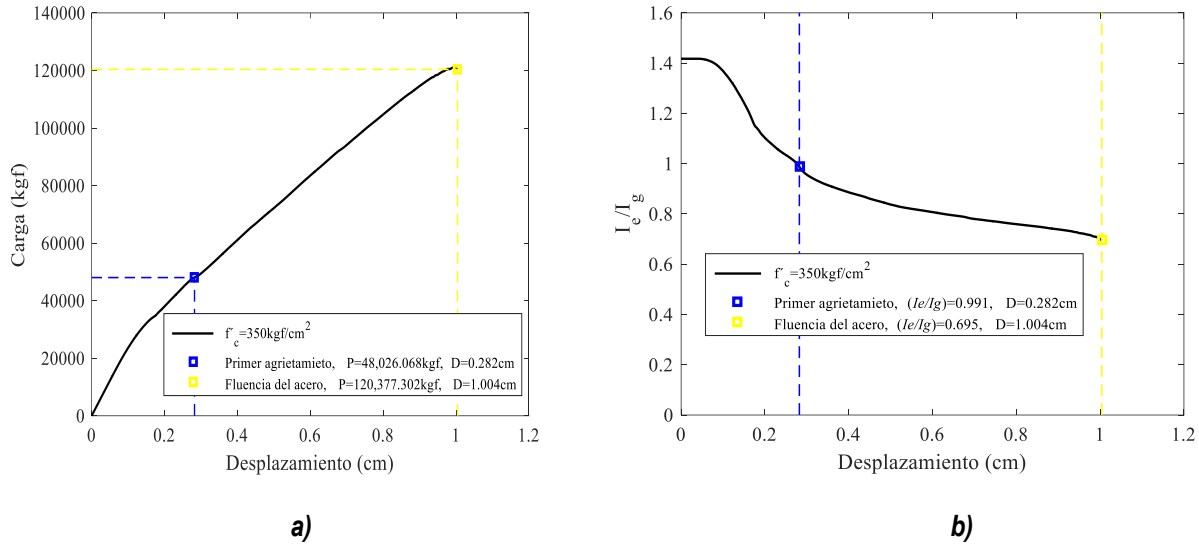


Figura 5-48 Modelo V-1, esfuerzo a la compresión  $f'_c = 350 \text{ kgf/cm}^2$ : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

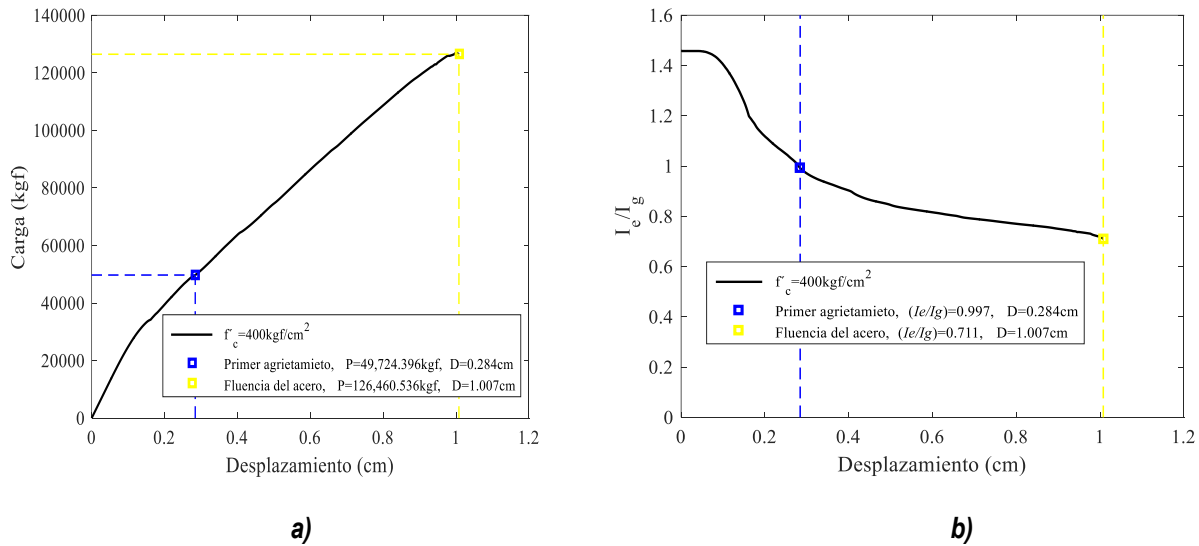
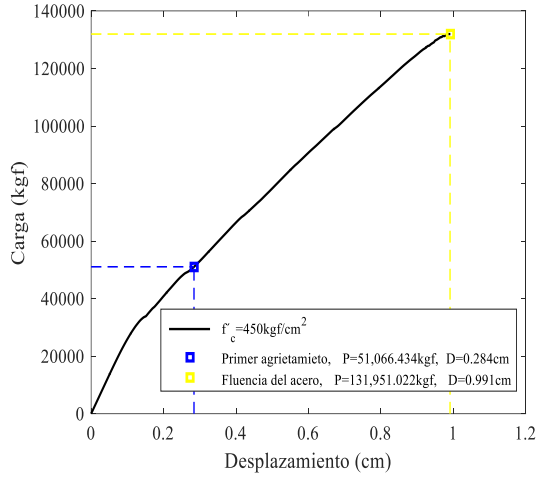
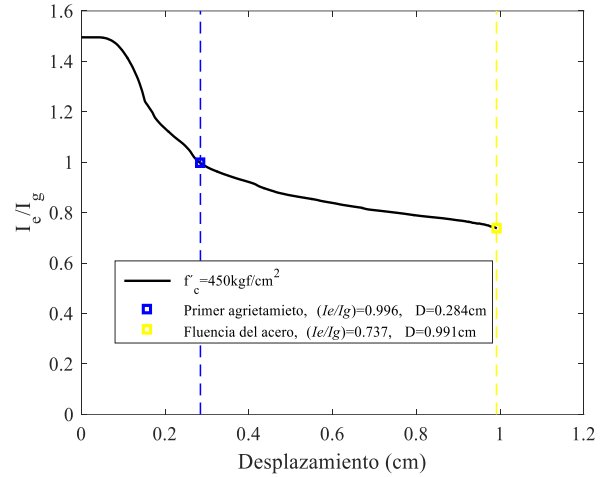


Figura 5-49 Modelo V-1, esfuerzo a la compresión  $f'_c = 400 \text{ kgf/cm}^2$ : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

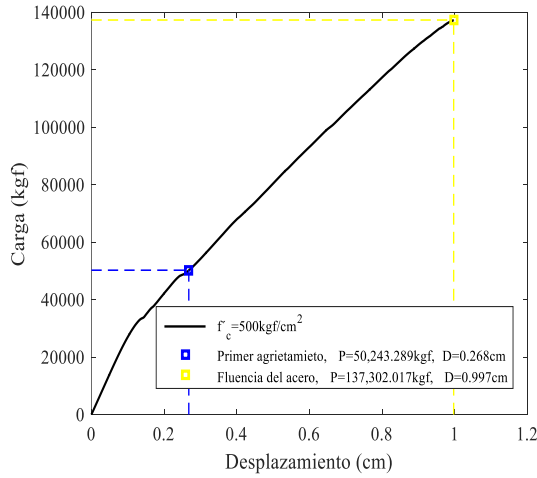


a)

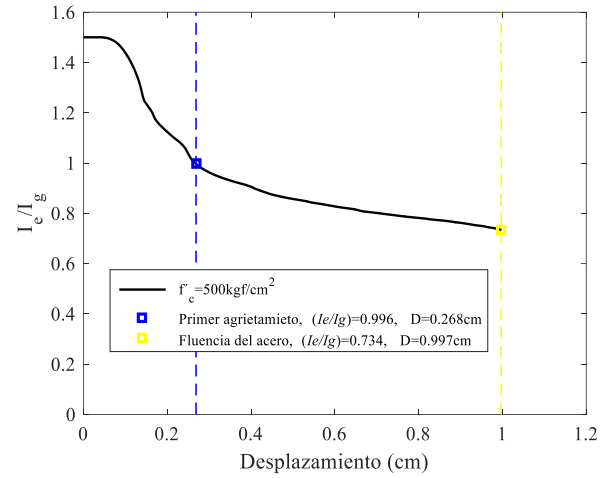


b)

Figura 5-50 Modelo V-1, esfuerzo a la compresión  $f'_c = 450 \text{ kgf/cm}^2$ : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante



a)



b)

Figura 5-51 Modelo V-1, esfuerzo a la compresión  $f'_c = 500 \text{ kgf/cm}^2$ : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

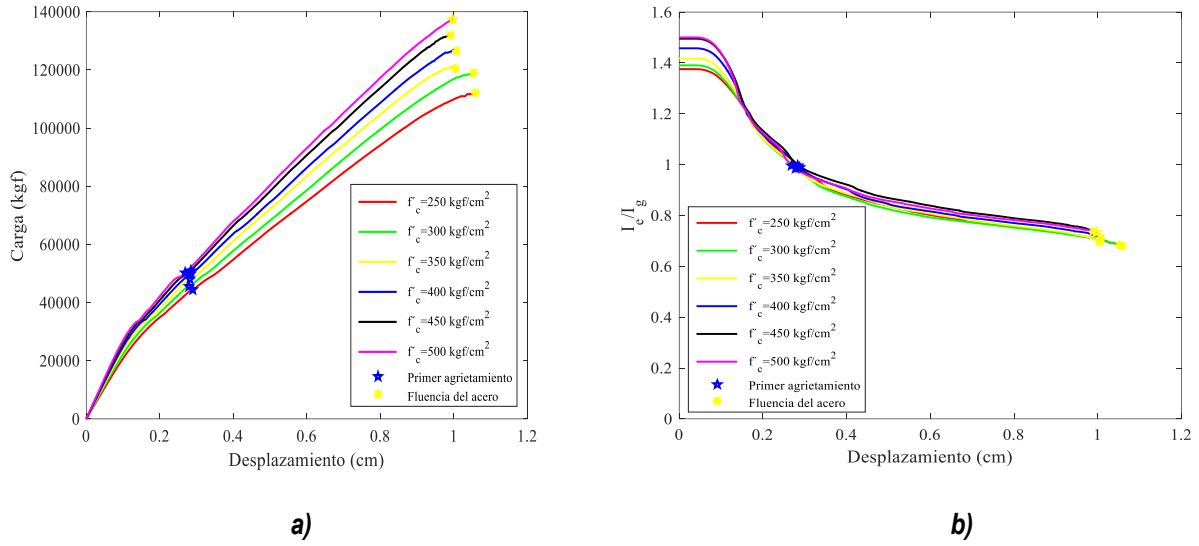


Figura 5-52 Modelo V-1: a) curvas de la carga contra el desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante

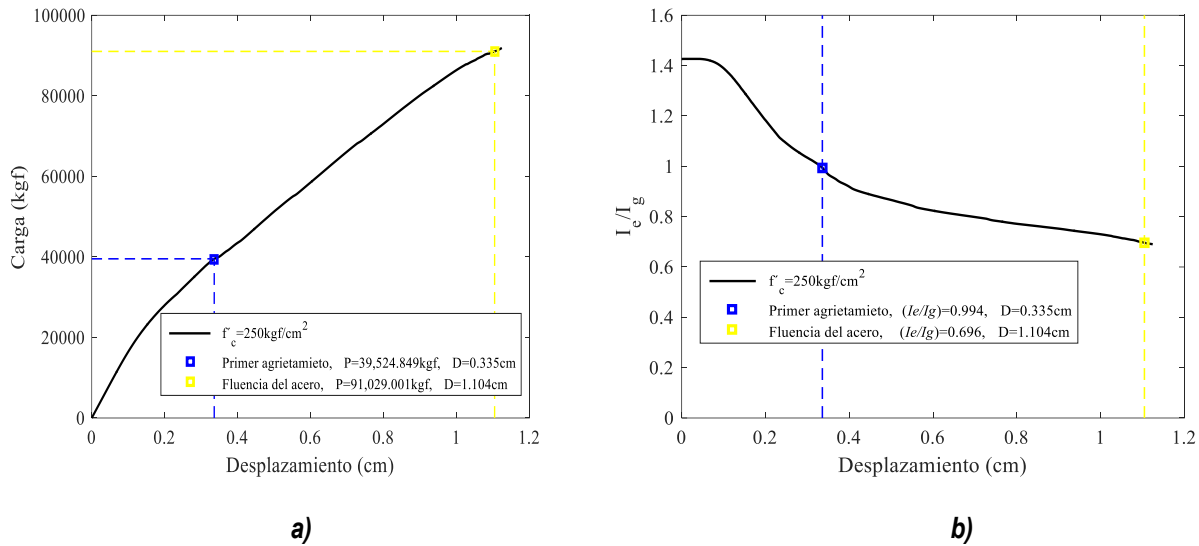
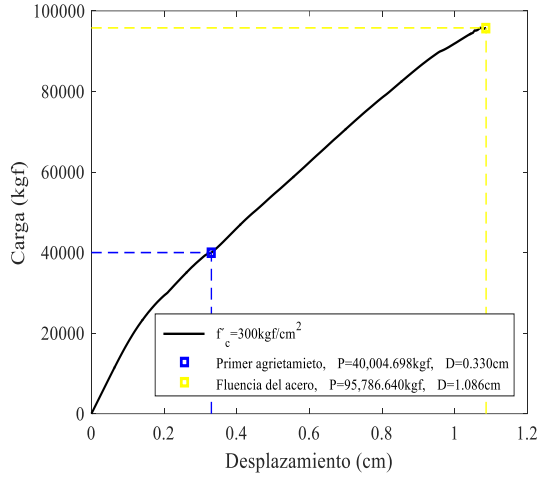
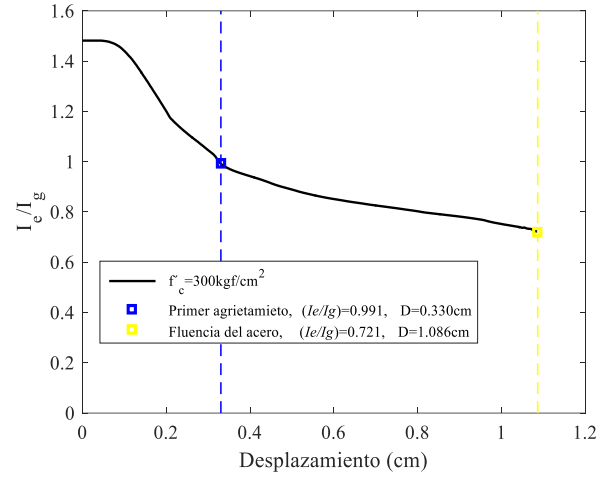


Figura 5-53 Modelo V-2, esfuerzo a la compresión  $f'_c=250$  kgf/cm<sup>2</sup>: a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

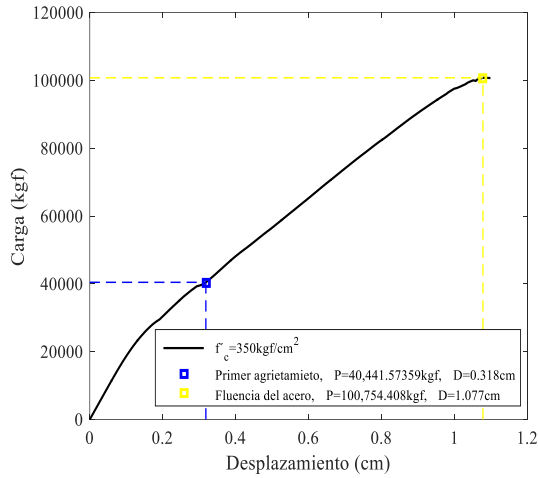


a)

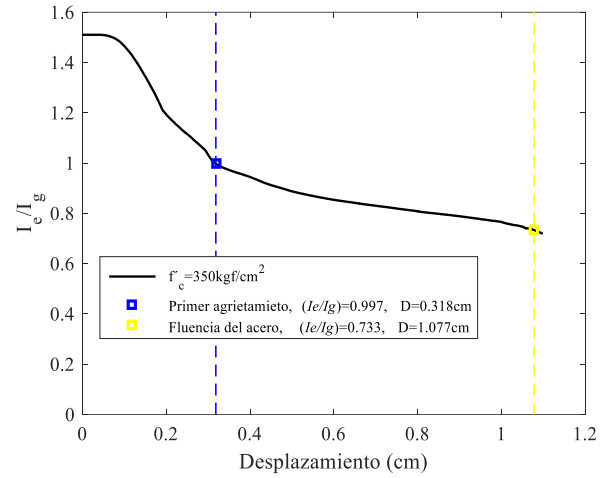


b)

**Figura 5-54 Modelo V-2, esfuerzo a la compresión  $f'_c=300 \text{ kgf/cm}^2$ : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante**



a)



b)

**Figura 5-55 Modelo V-2, esfuerzo a la compresión  $f'_c=350 \text{ kgf/cm}^2$ : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante**

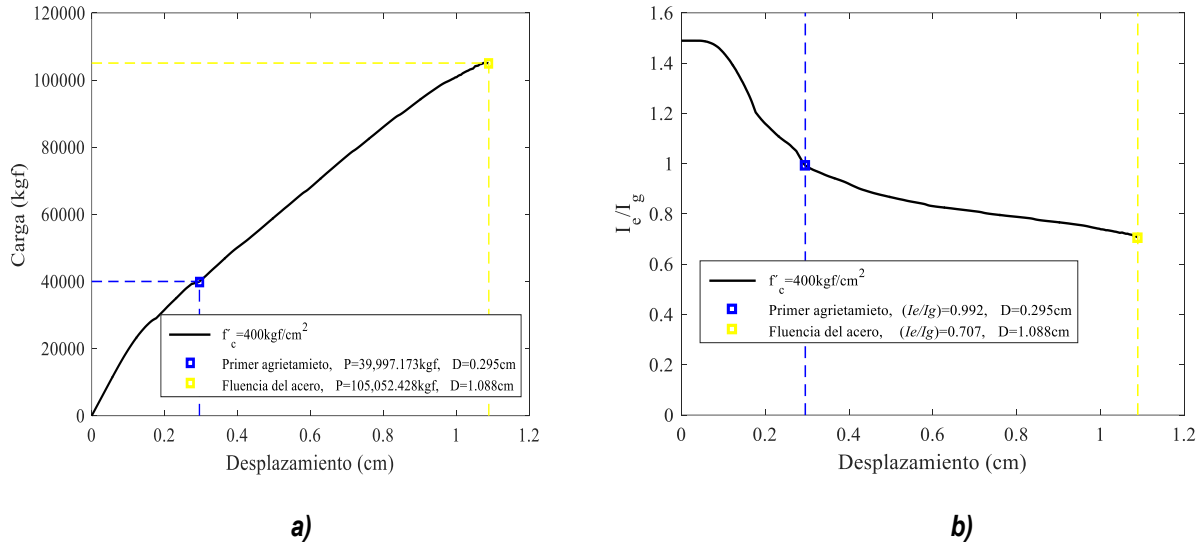


Figura 5-56 Modelo V-2, esfuerzo a la compresión  $f'_c=400 \text{ kgf/cm}^2$ : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

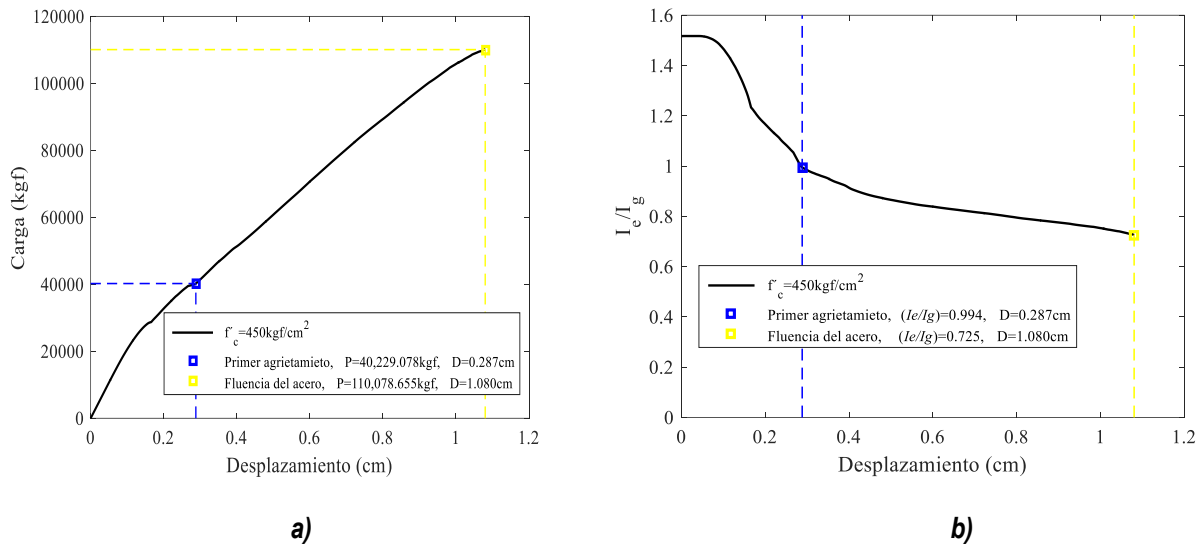


Figura 5-57 Modelo V-2, esfuerzo a la compresión  $f'_c=450 \text{ kgf/cm}^2$ : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

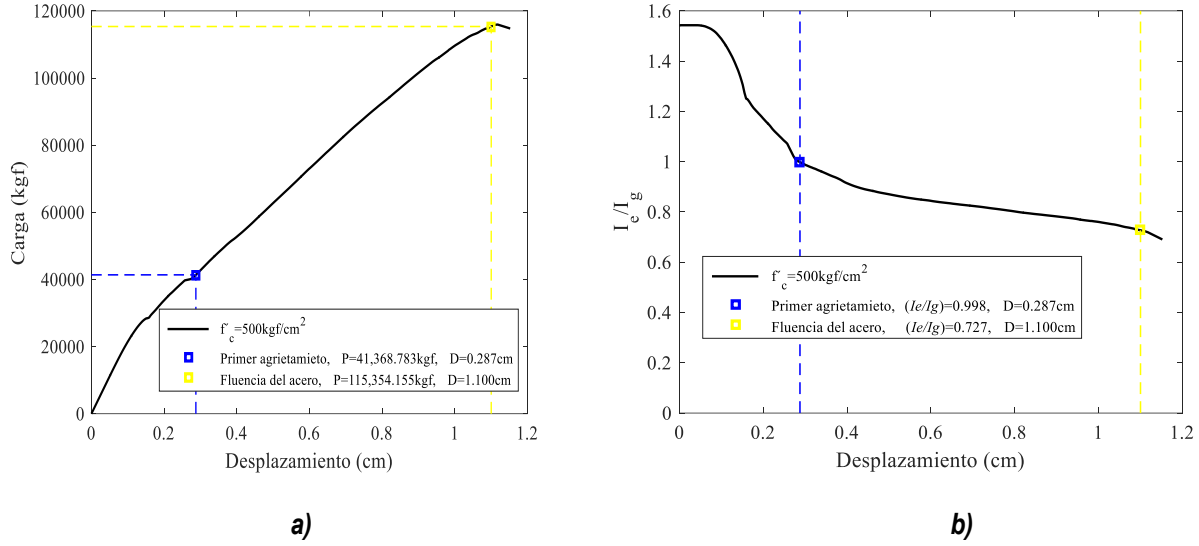


Figura 5-58 Modelo V-2, esfuerzo a la compresión  $f'_c = 500 \text{ kgf/cm}^2$ : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

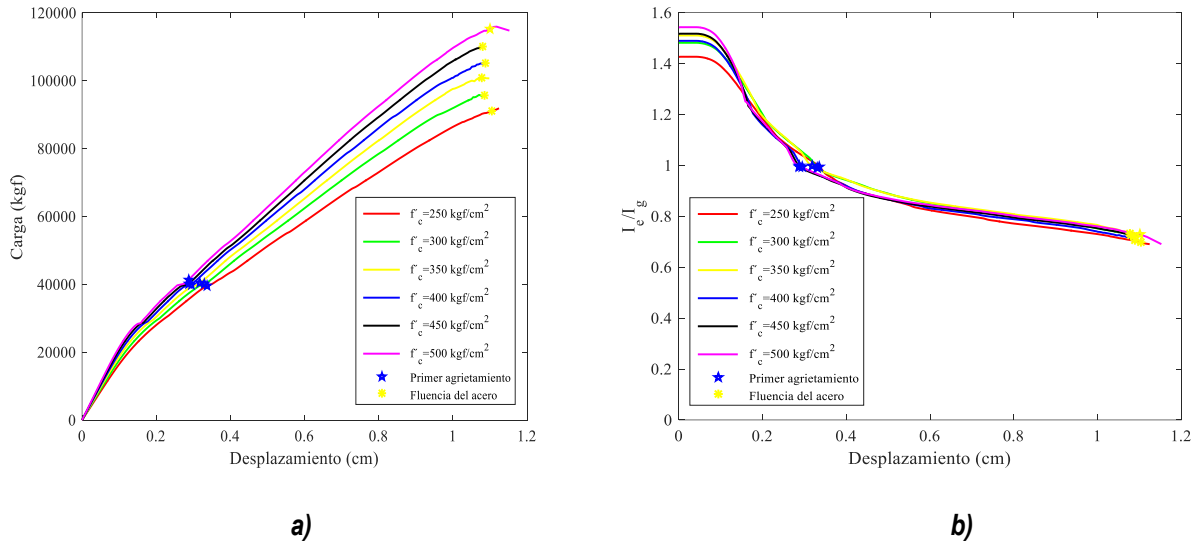
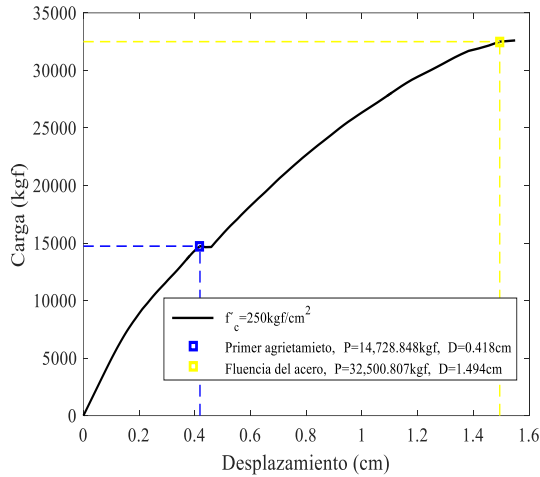
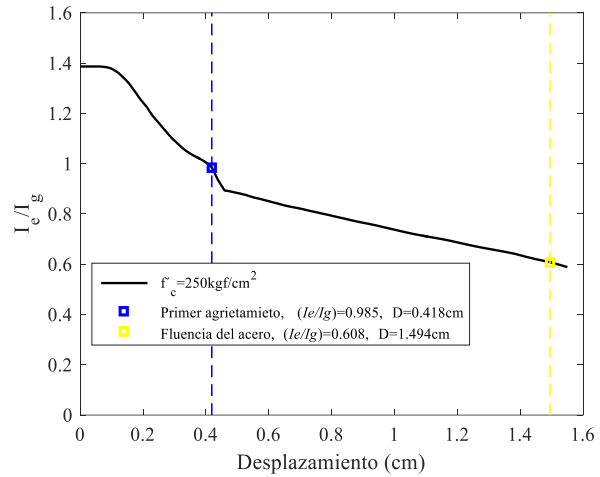


Figura 5-59 Modelo V-2: a) curvas de la carga contra el desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante

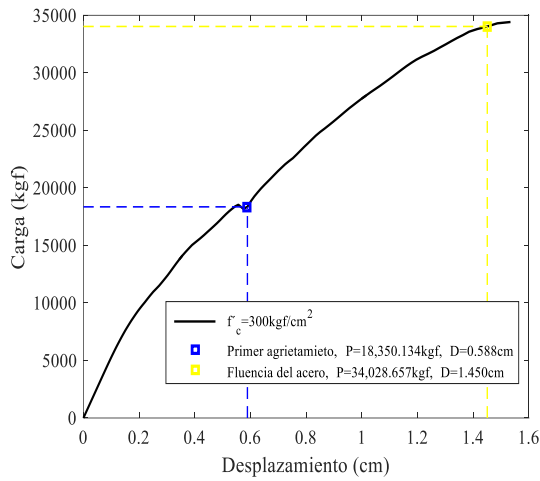


a)

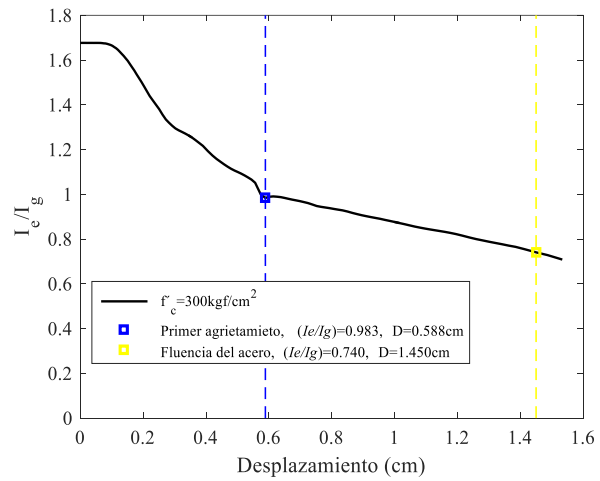


b)

**Figura 5-60 Modelo V-3, esfuerzo a la compresión  $f'_c = 250 \text{ kgf/cm}^2$ : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante**

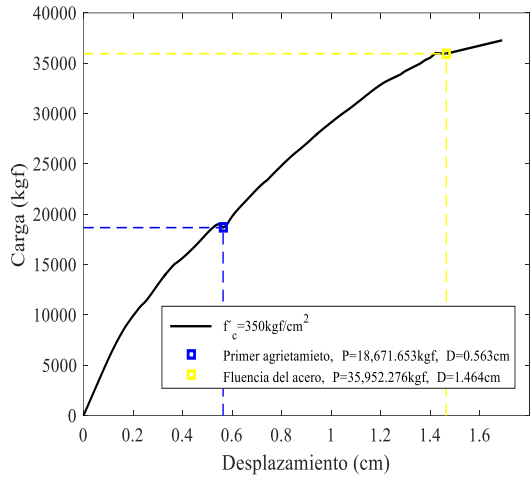


a)

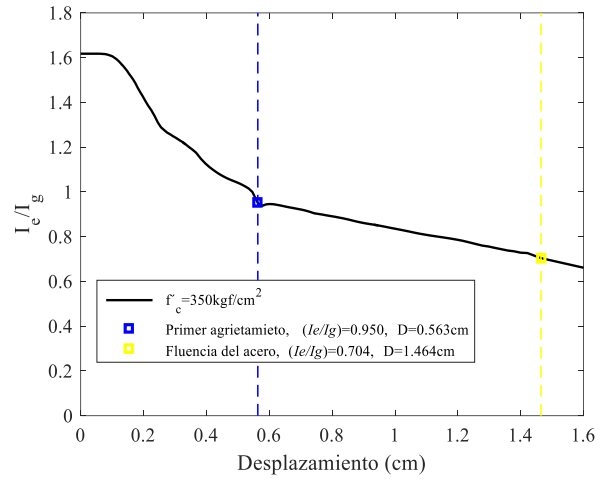


b)

**Figura 5-61 Modelo V-3, esfuerzo a la compresión  $f'_c = 300 \text{ kgf/cm}^2$ : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante**

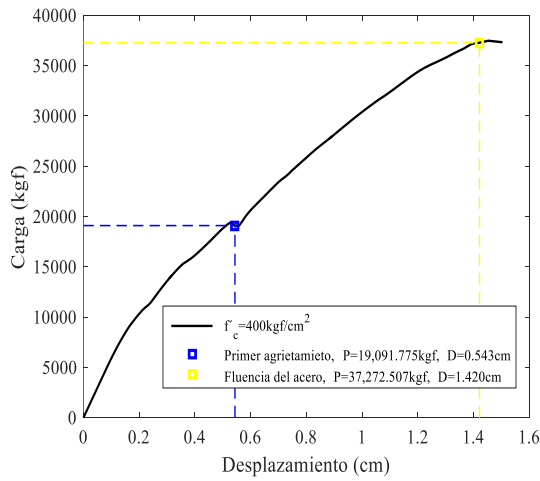


a)

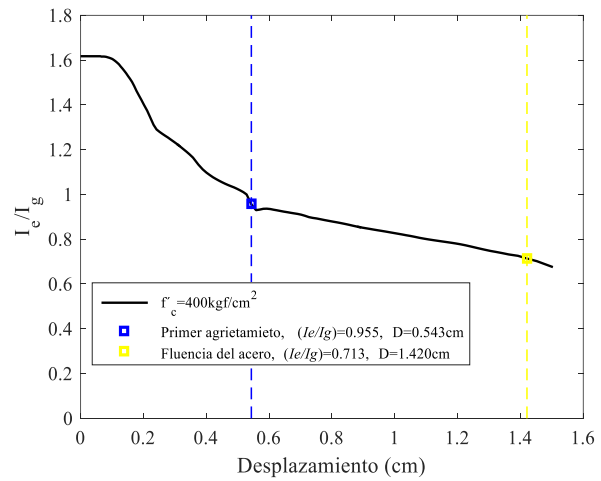


b)

Figura 5-62 Modelo V-3, esfuerzo a la compresión  $f'_c = 350 \text{ kgf/cm}^2$ : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

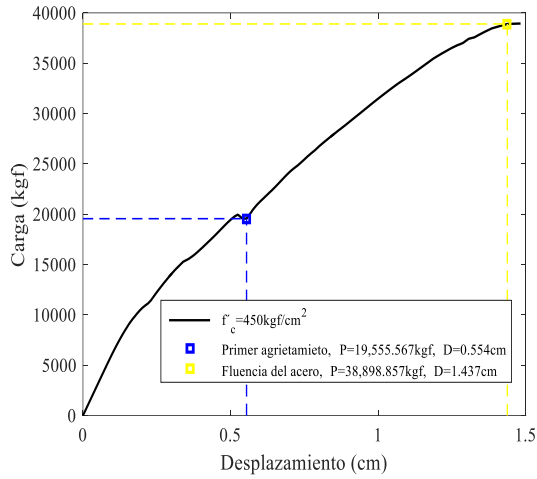


a)

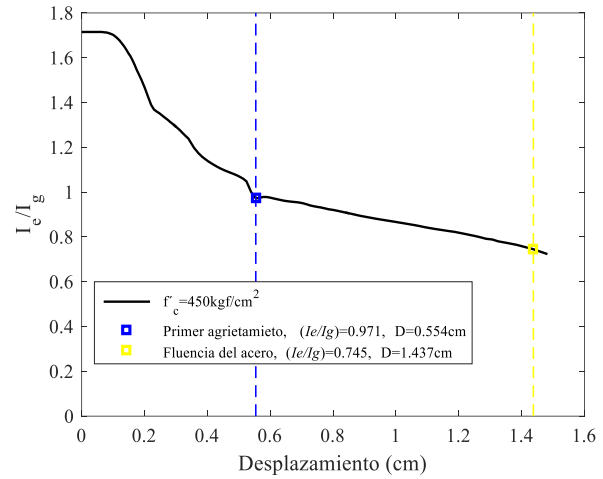


b)

Figura 5-63 Modelo V-3, esfuerzo a la compresión  $f'_c = 400 \text{ kgf/cm}^2$ : a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

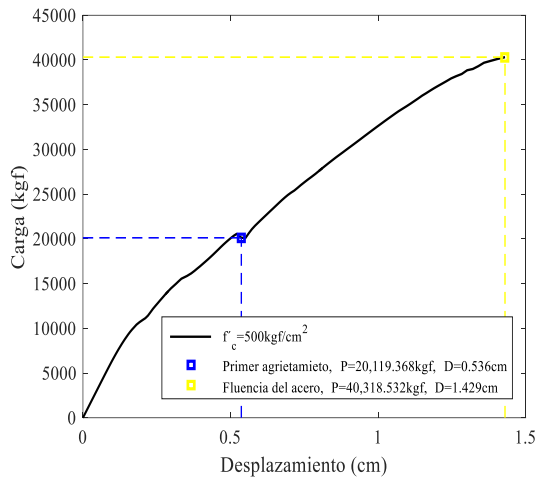


a)

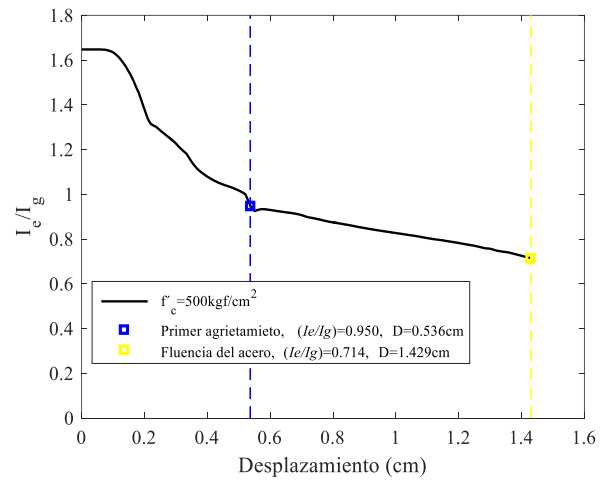


b)

**Figura 5-64 Modelo V-3, esfuerzo a la compresión  $f'_c=450$  kgf/cm<sup>2</sup>: a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante**



a)



b)

**Figura 5-65 Modelo V-3, esfuerzo a la compresión  $f'_c=500$  kgf/cm<sup>2</sup>: a) curva de la carga contra el desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante**

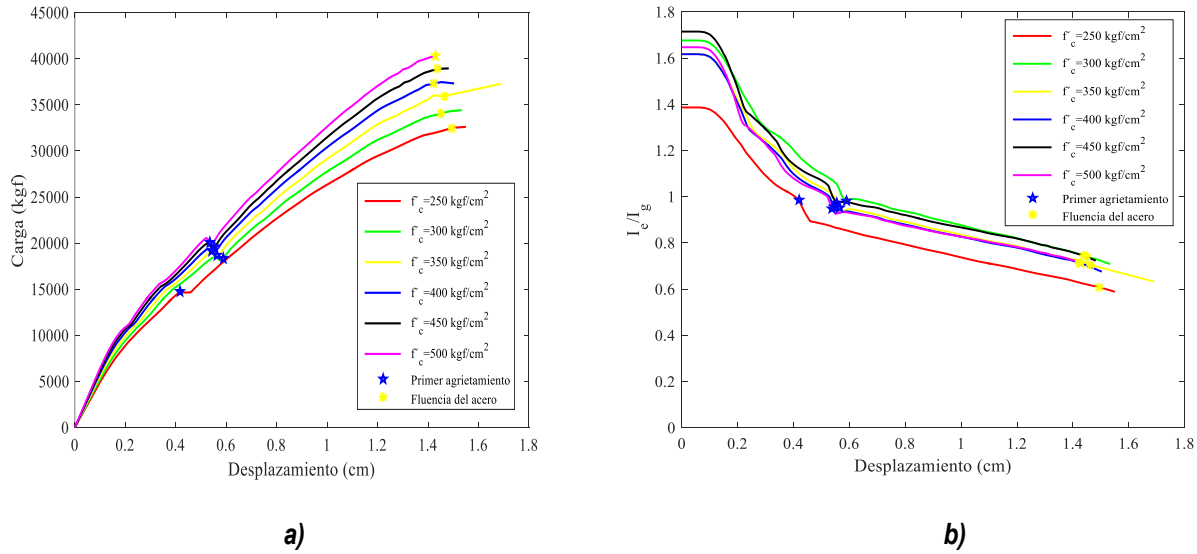


Figura 5-66 Modelo V-3: a) curvas de la carga contra el desplazamiento y b) curvas de degradación de rigidez secante

Finalmente, es evidente que al aumentar el valor del esfuerzo a compresión ( $f'_c$ ) los valores de carga son mayores y los desplazamientos últimos son los mismos. Del estudio realizado, se observó que la convergencia de los análisis numéricos de elementos de concreto reforzado es más compleja en comparación a los análisis de elementos de concreto simple. Esto debido al comportamiento constitutivo de los materiales, pues el concreto empieza ablandar después de alcanzar el esfuerzo último a tensión o compresión, mientras que el acero de refuerzo al alcanzar el esfuerzo de fluencia empieza a endurecer. A medida que se aumenta el esfuerzo a compresión los valores de rigideces a flexión ( $I_e/I_g$ ) en condición de fluencia del acero son mayores, como se muestra en la Tabla 5-10. Con los resultados obtenidos se observa que a medida que se considera un concreto con mayor resistencia a la compresión se genera un valor ligeramente menor del peralte del eje neutro, lo que implica que la longitud de las grietas a flexión será mayor y el brazo interno del momento resistente tiende a aumentar, dando como resultado un valor del momento resistente mayor y, por ende, se presenta un incremento en el valor de la rigidez efectiva.

Tabla 5-10 Cargas, desplazamientos y valores de rigideces efectivas

Esfuerzo a la compresión (kgf/cm <sup>2</sup> )	Desplazamiento de fluencia (cm)	Carga de fluencia (kgf)	$I_e/I_g$
<b>Modelo V-1</b>			
$f'_c = 250$	1.058	112,094.900	0.681

$f'_c= 300$	1.053	118,884.159	0.682
$f'_c= 350$	1.004	120,377.302	0.695
$f'_c= 400$	1.007	126,460.536	0.711
$f'_c= 450$	0.991	131,951.022	0.737
$f'_c= 500$	0.997	137,302.017	0.734
<b>Modelo V-2</b>			
$f'_c= 250$	1.104	91,029.001	0.696
$f'_c= 300$	1.086	95,786.640	0.721
$f'_c= 350$	1.077	100,754.400	0.733
$f'_c= 400$	1.088	105,052.428	0.710
$f'_c= 450$	1.080	110,078.655	0.725
$f'_c= 500$	1.100	115,354.156	0.723
<b>Modelo V-3</b>			
$f'_c= 250$	1.494	32,500.807	0.608
$f'_c= 300$	1.450	34,028.657	0.740
$f'_c= 350$	1.464	35,952.276	0.704
$f'_c= 400$	1.420	37,272.507	0.713
$f'_c= 450$	1.437	38,898.857	0.745
$f'_c= 500$	1.429	40,318.523	0.715

# Capítulo 4

## Estudio paramétrico de la variación de la rigidez efectiva en vigas simplemente apoyadas de CR

### 6.1 Descripción

Para evaluar el efecto de algunas variables de importancia en la determinación de rigideces efectivas en vigas de concreto reforzado se diseñaron vigas simplemente apoyadas conforme a los requisitos de las NTCC-17 (2017). En todos los casos se garantiza que la falla sea por flexión. Las dimensiones de las secciones transversales son las correspondientes a las tres vigas consideradas en la sección anterior (V-1, V-2 y V-3), pues se consideran típicas de edificios de altura intermedia localizados en la zona del lago de la Ciudad de México o de cualquier región del país con sismicidad alta (por ejemplo, Guerrero, Oaxaca y Chiapas).

Con base en los diseños que se muestran en las Figuras 4-3, 4-16 y 4-29 se evalúan las rigideces efectivas en los elementos estructurales en condición simplemente apoyada y sometida a una carga vertical al centro del claro (Figura 6-1), configuración ampliamente usada en estudios experimentales, por ejemplo, Foley Buckhouse (1998), Archundia (2004), Archundia *et al.* (2006), Xiao *et al.* (2012) y Tena (2019), entre otros autores. Para el modelado de los elementos se realizaron mallas estructuradas en el programa midas FEA con elementos hexaedros de ocho nodos con ocho puntos de integración de Gauss. Las barras de acero se mallaron con elementos unidimensionales con comportamiento bilineal, cuyos extremos se ensamblan en los nodos de los elementos sólidos de concreto (como se comentó con detalle en el capítulo 2). Dada la simetría de la viga en geometría, condiciones de apoyo y carga, únicamente se modela y se malla un cuarto de la viga. Para la obtención de la respuesta estructural se inducen cargas aplicadas gradualmente en los puntos de aplicación de la carga.

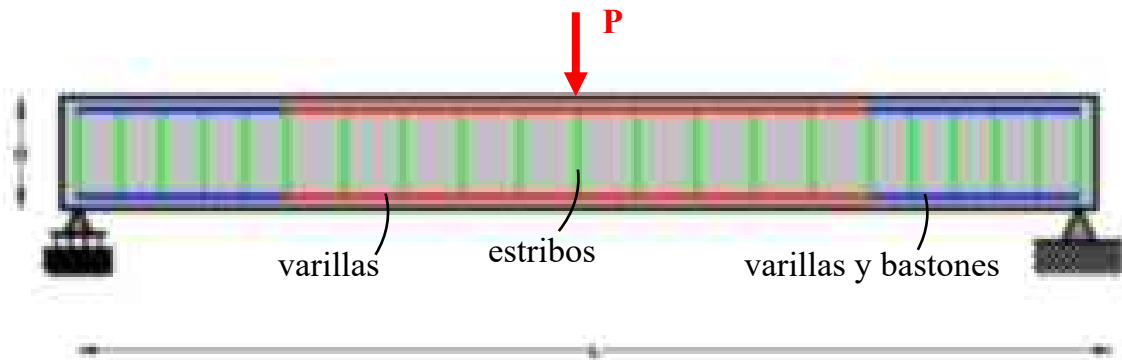
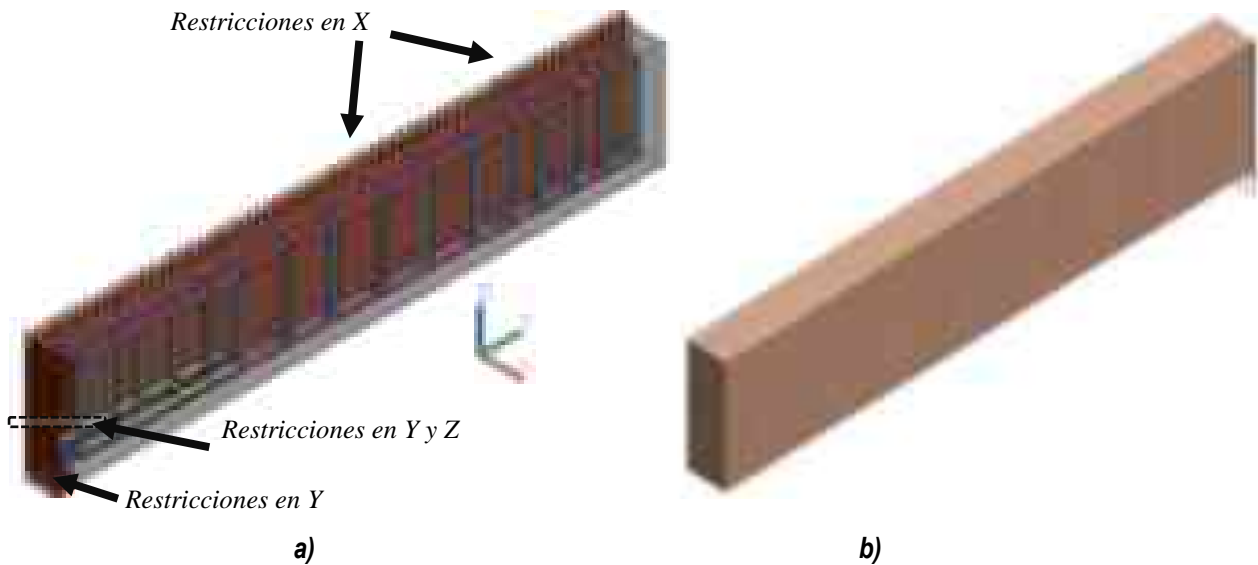


Figura 6-1 Viga de concreto reforzado sometida a una carga puntual al centro del claro

Para los análisis no lineales de las vigas de concreto reforzado en condición simple, la carga total aplicada a los modelos de elementos finitos se divide en una serie de incrementos de carga, al finalizar la solución de cada incremento de carga la matriz de rigidez del elemento estructural se ajusta para los cambios no lineales en la rigidez estructural antes del siguiente incremento de carga. El programa midas FEA en su versión 7.0.1 utiliza iteraciones de equilibrio Newton-Raphson para actualizar la rigidez del modelo, las iteraciones de equilibrio Newton-Raphson proporcionan convergencia al final de cada incremento de carga dentro de los límites de tolerancia.

Las condiciones de apoyo de las vigas son necesarias para obtener una solución única, la cual garantice que el modelo proporcione una solución aproximada a una prueba experimental. Se restringió el lado izquierdo al centro de la cara en dirección x y z, con la finalidad de que no se presentaran concentraciones de esfuerzo, y todos los nodos en dirección z, mientras que en lado derecho del elemento se restringieron todos los nodos en la dirección x y en la parte lateral de la viga se restringió en la dirección y, como se muestra en Figura 6-2a. Para la obtención de la respuesta estructural se inducen cargas aplicadas gradualmente en el centro del claro (Figura 6-2b).

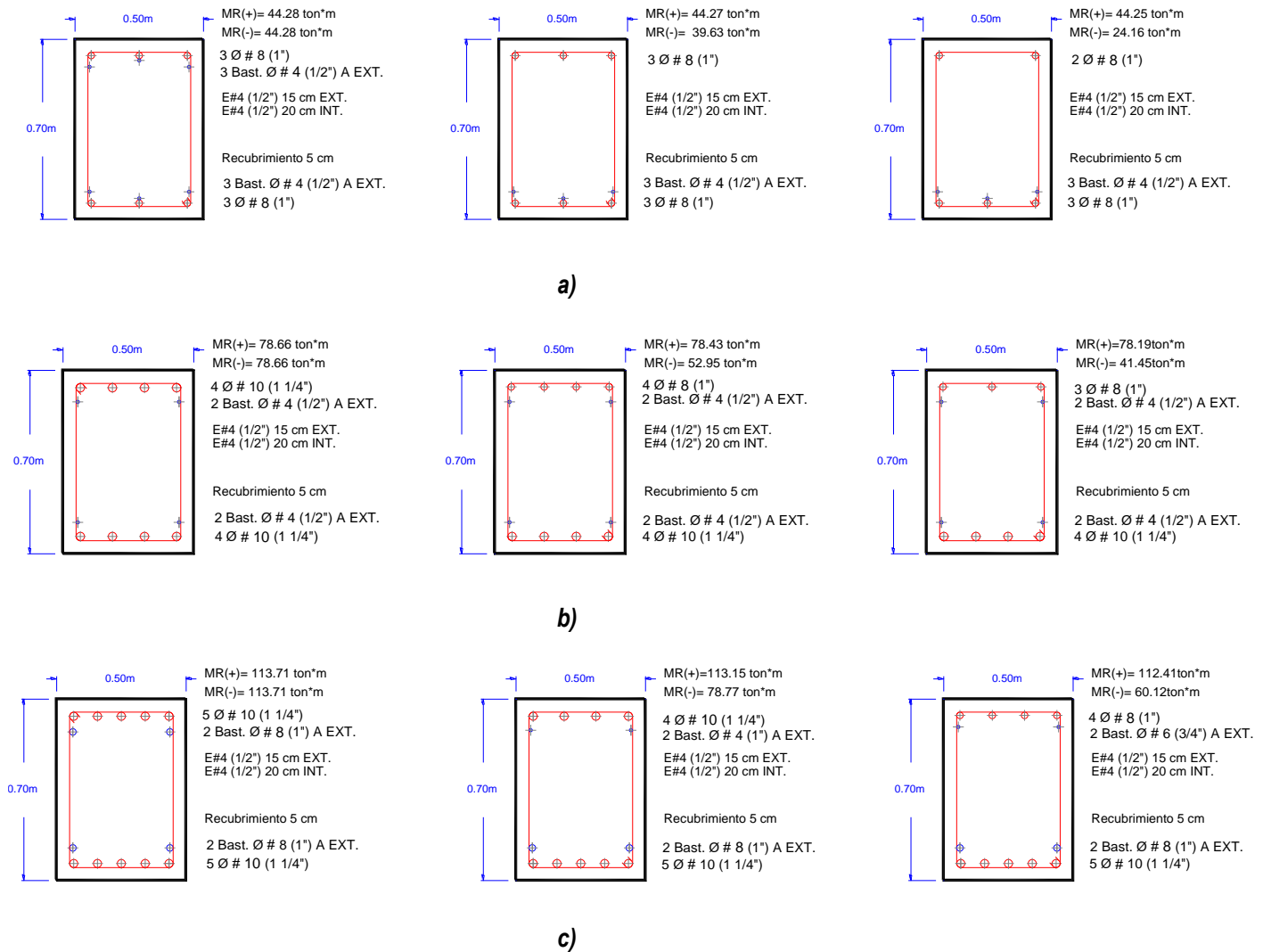


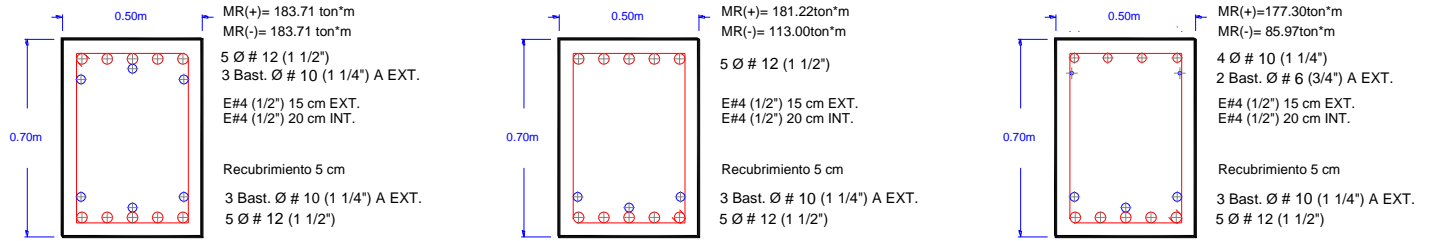
**Figura 6-2 Modelado de  $\frac{1}{4}$  de la viga en estudio: a) condiciones de apoyo y b) condición de carga**

### 6.1.1 Viga 1

En la presente sección se detallan los armados de la viga 1 variando la cuantía de refuerzo de acuerdo con las recomendaciones de las NTCC-17 (2017). Se consideraron cuatro cuantías de refuerzo longitudinal en función de la cuantía balanceada ( $0.25\rho_{bal}$ ,  $0.45\rho_{bal}$ ,  $0.65\rho_{bal}$  y  $0.9\rho_{bal}$ ), así como una relación de refuerzo en tensión y compresión  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y  $2$ , como se muestran en la Figura 6-3. De la Figura 6-4 a la 4-15 se muestran las curvas de la carga contra el desplazamiento,

así como las curvas de degradación de rigideces secante de los modelos en estudio donde se indican el estado de la carga al primer agrietamiento, fluencia del acero y carga última, respectivamente. En la Tabla 6-1 se muestran los valores de desplazamiento, carga y rigideces efectivas obtenidas con elementos finitos en condición de la primera fluencia del acero de refuerzo. Con estos resultados se muestra que los valores de rigideces efectivas a flexión están entre  $I_e/I_g \approx 0.404-0.762$ . Sin embargo, para cuantías mayores a la mínima, existe un incremento de la rigidez efectiva conforme se incrementa el acero de refuerzo.





d)

Figura 6-3 Cuantías de refuerzo a flexión para la viga 1 con detallado no dúctil (Q de 2) en condición simplemente apoyada: a)  $0.25\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho^i = 1, 1.5$  y  $2$ , b)  $0.45\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho^i = 1, 1.5$  y  $2$ , c)  $0.65\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho^i = 1, 1.5$  y  $2$  y d)  $0.90\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho^i = 1, 1.5$  y  $2$

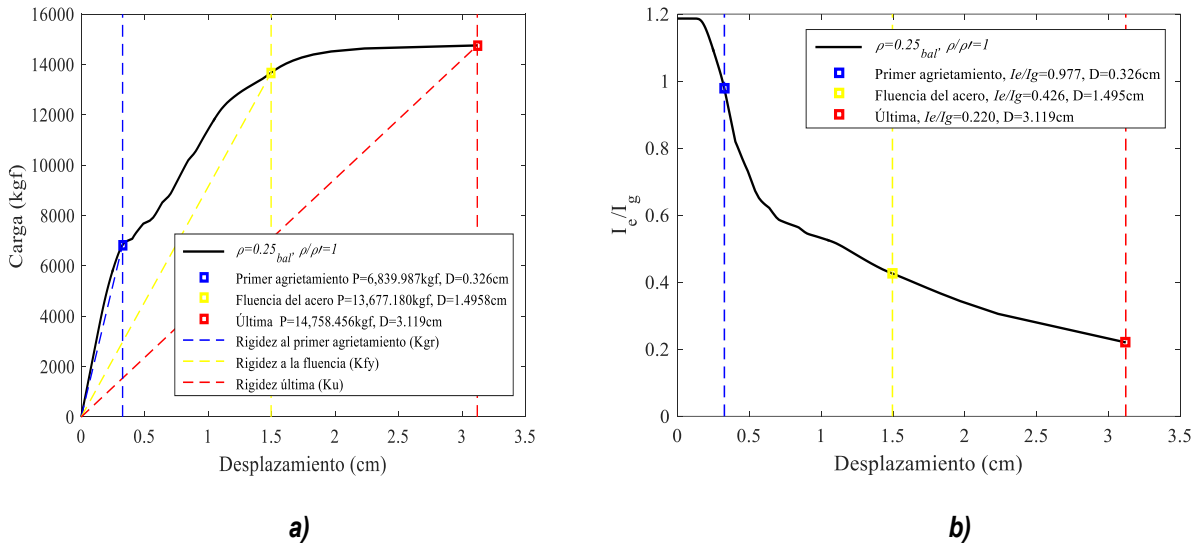


Figura 6-4 Modelo V-1 para  $0.25\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho^i=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

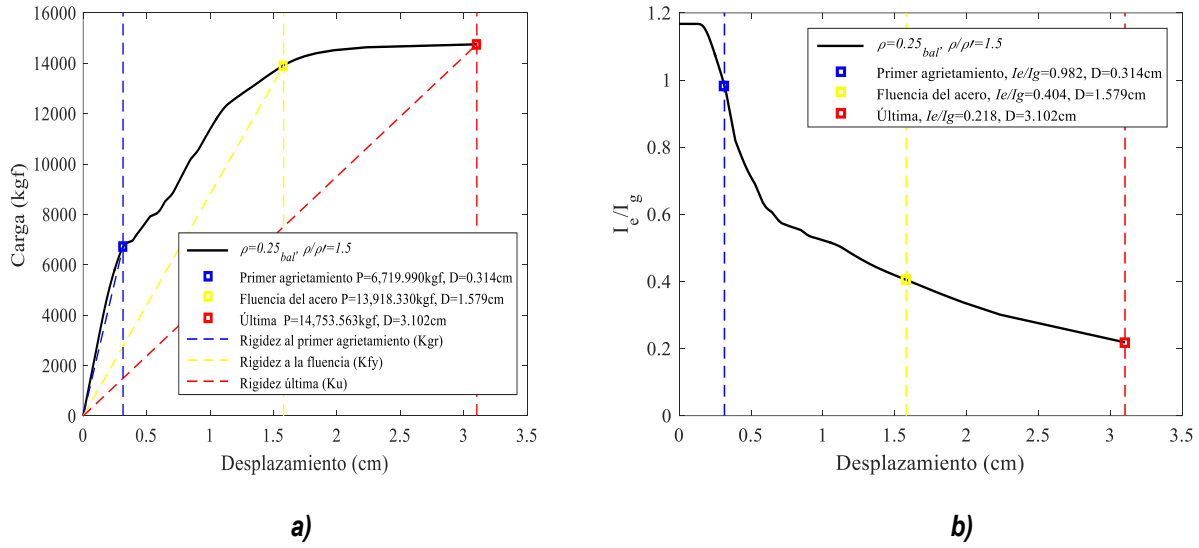


Figura 6-5 Modelo V-1 para  $0.25\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

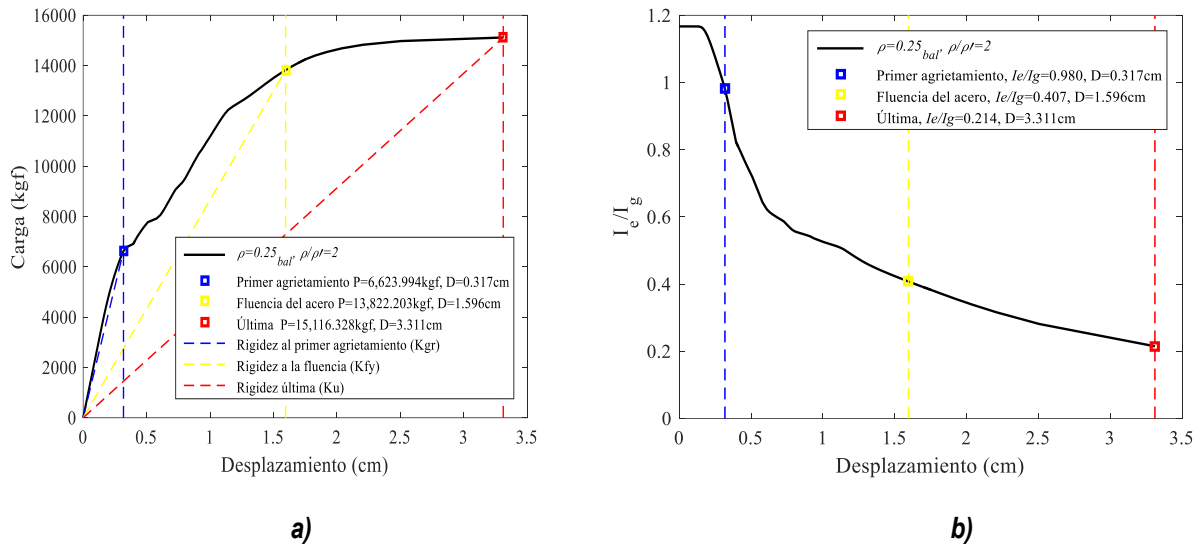


Figura 6-6 Modelo V-1 para  $0.25\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

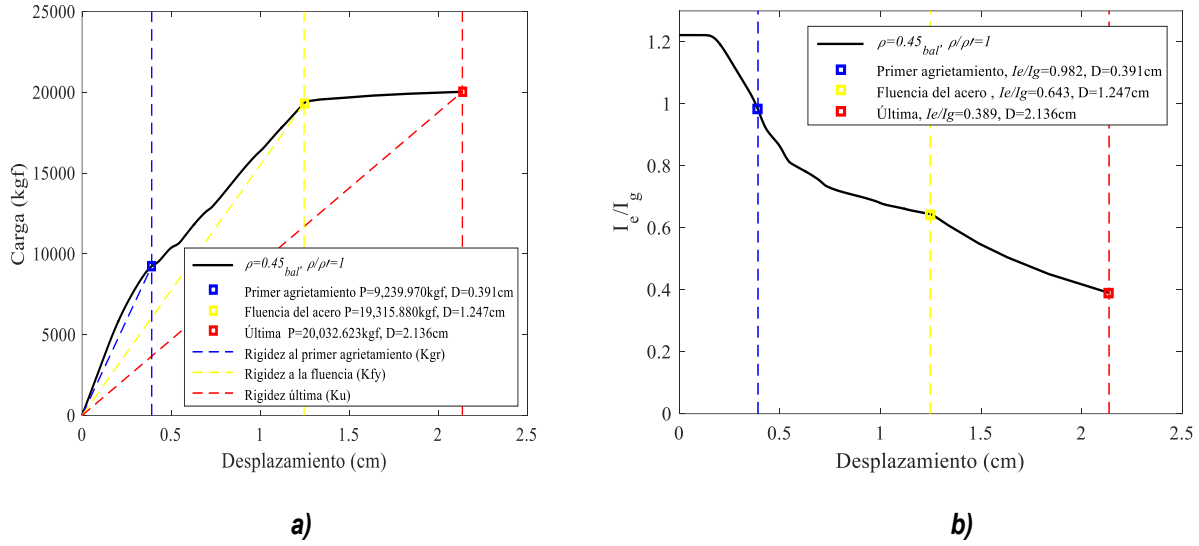


Figura 6-7 Modelo V-1 para  $0.45\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

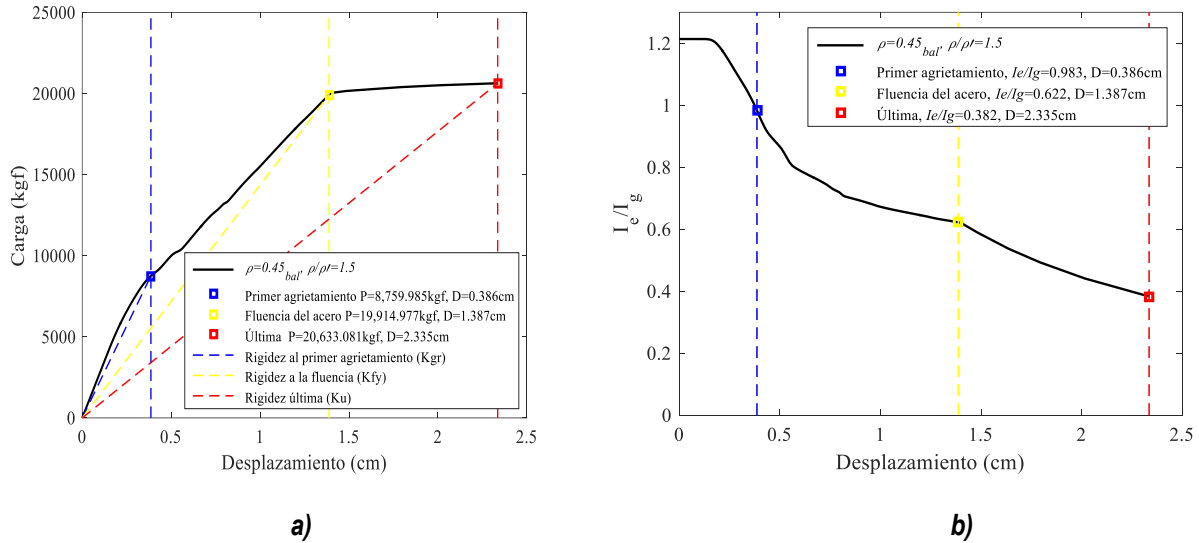
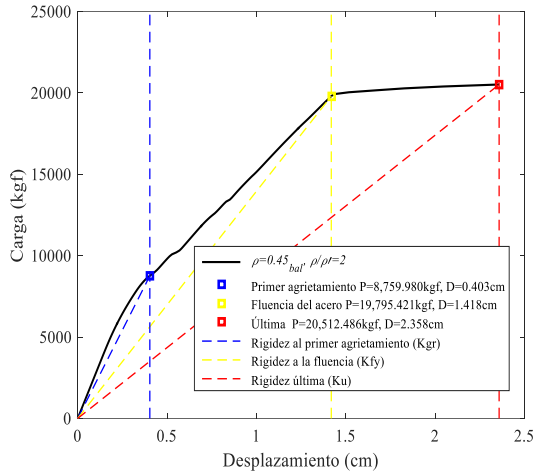
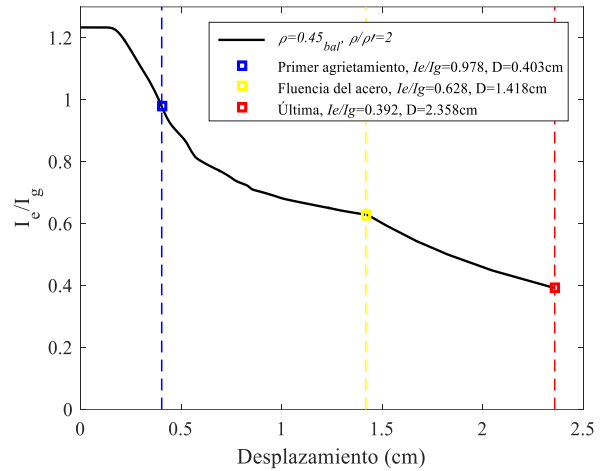


Figura 6-8 Modelo V-1 para  $0.45\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

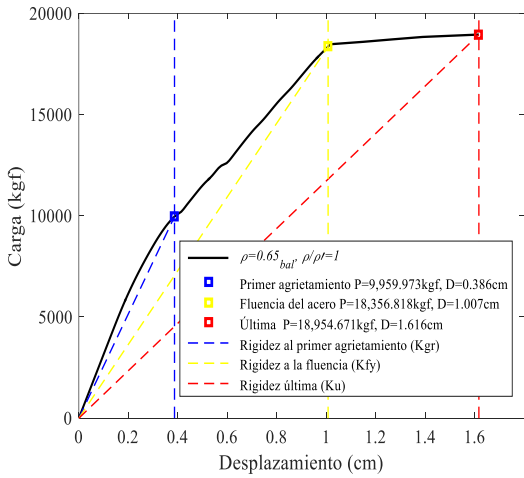


a)

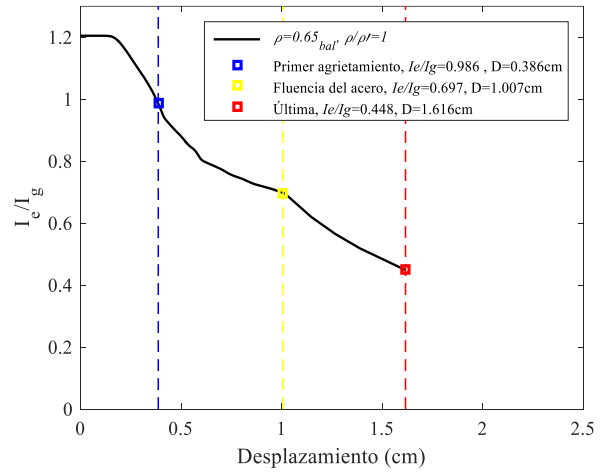


b)

Figura 6-9 Modelo V-1 para  $0.45\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante



a)



b)

Figura 6-10 Modelo V-1 para  $0.65\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

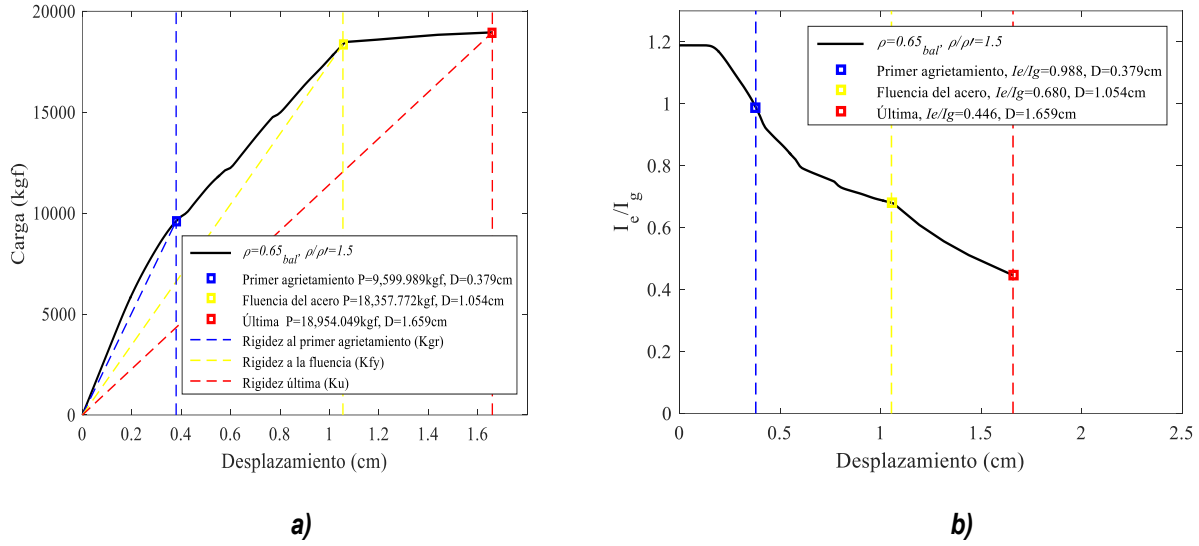


Figura 6-11 Modelo V-1 para  $0.65\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

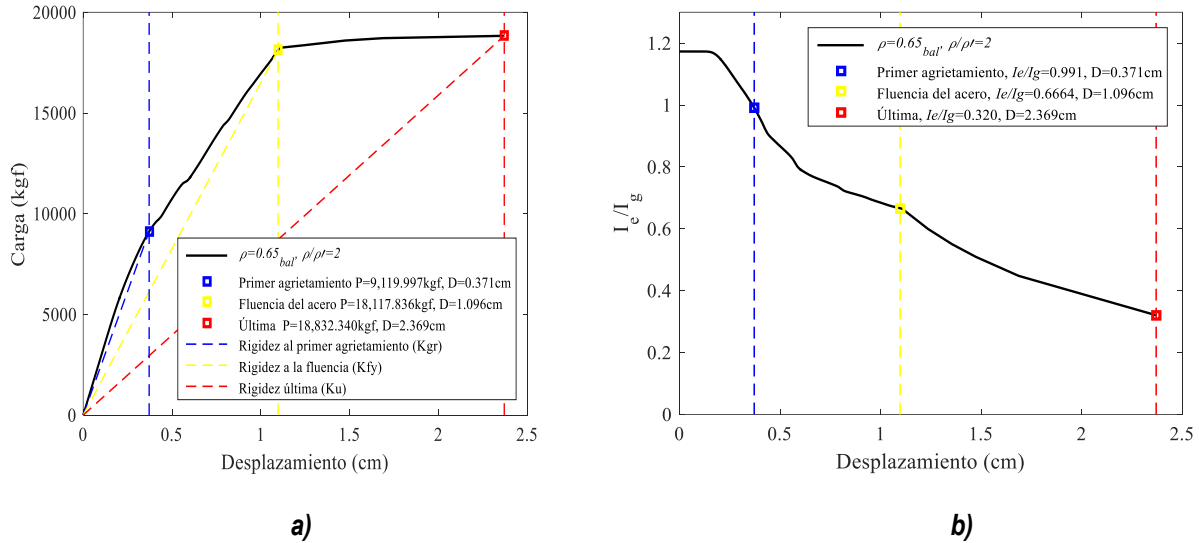
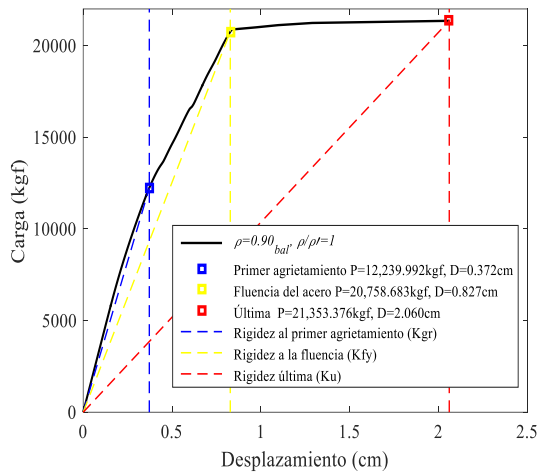
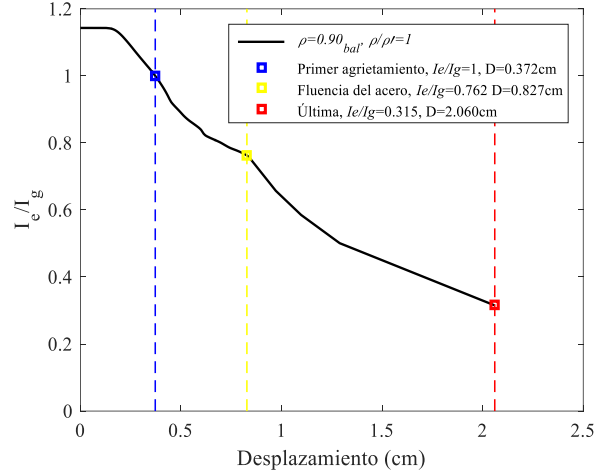


Figura 6-12 Modelo V-1 para  $0.65\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

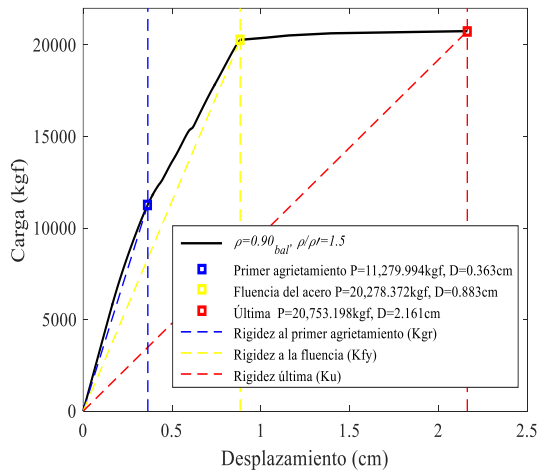


a)

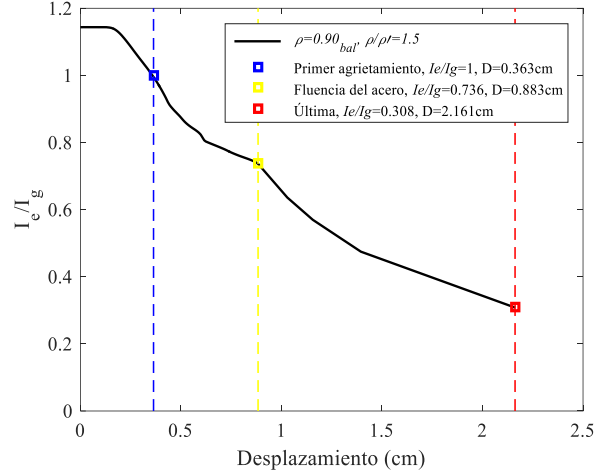


b)

Figura 6-13 Modelo V-1 para  $0.90\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante



a)



b)

Figura 6-14 Modelo V-1 para  $0.90\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

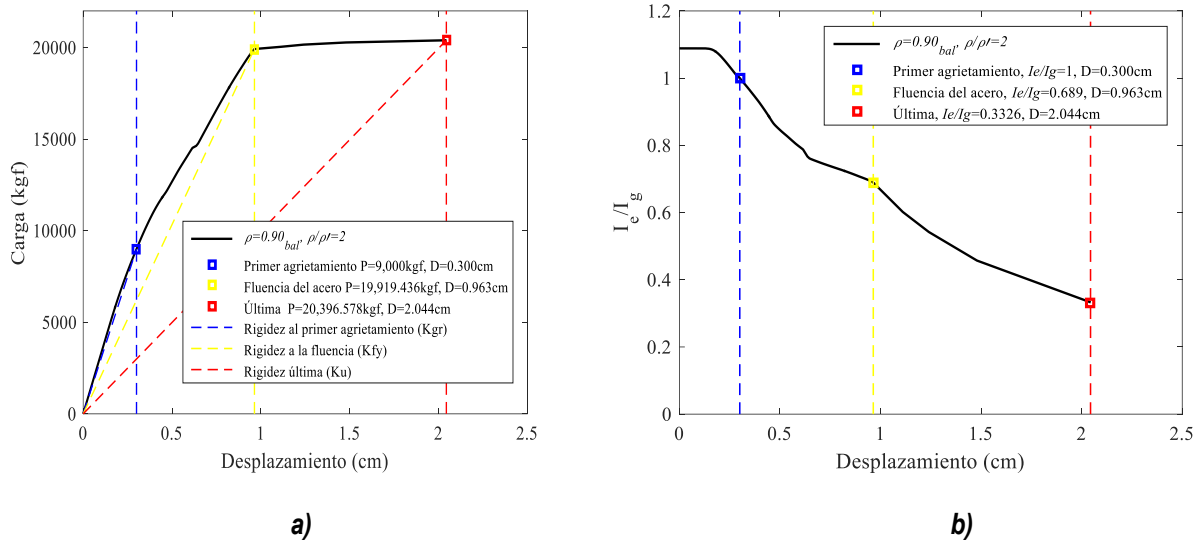


Figura 6-15 Modelo V-1 para  $0.90\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

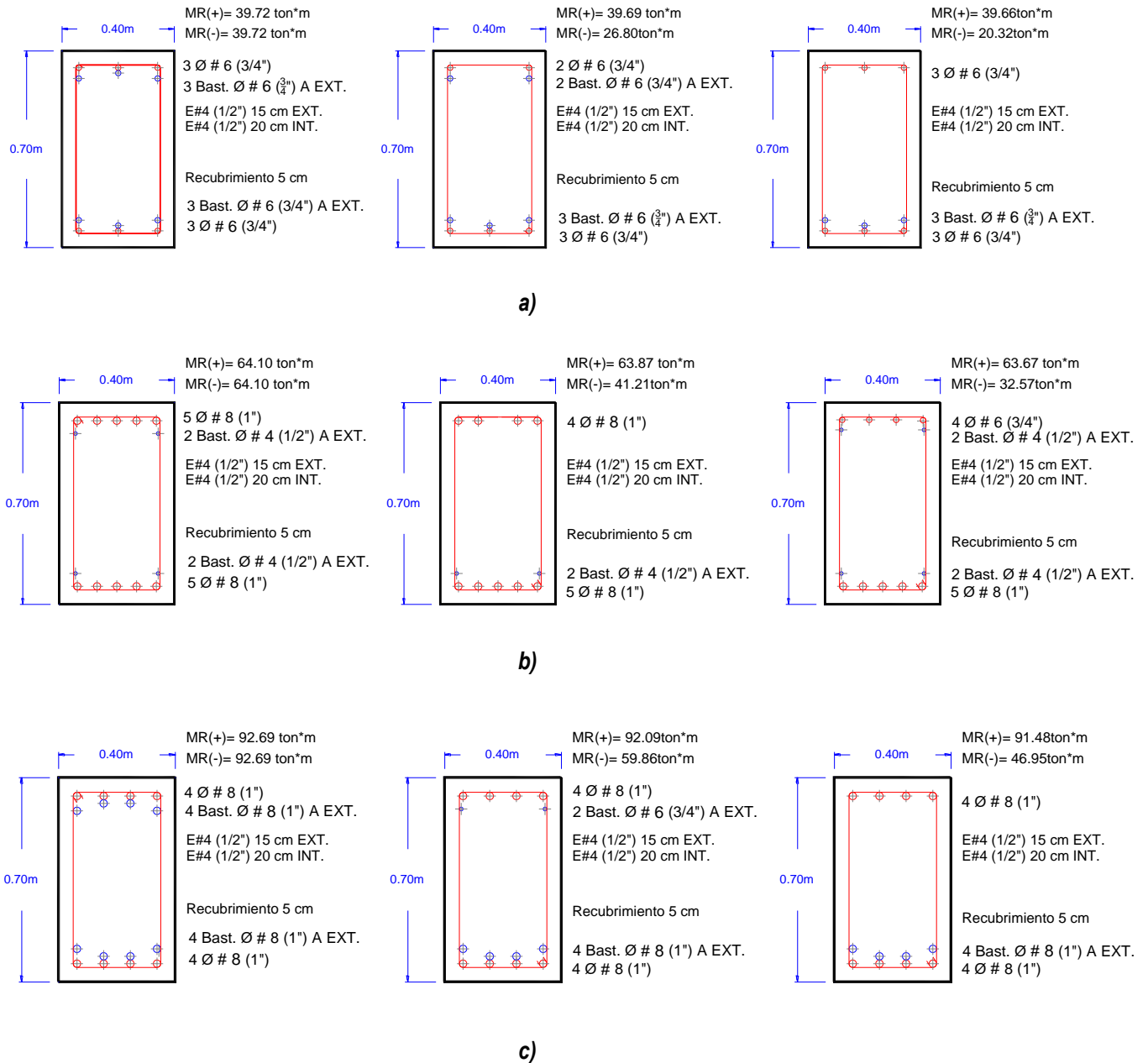
Tabla 6-1 Cargas, desplazamientos y valores de rigideces efectivas a la primera fluencia del acero, modelo V-1

VIGA 1				
		Desplazamiento de fluencia (cm)	Carga de fluencia (kgf)	$I_e/I_g$
$0.25\rho_{bal}$	$\rho/\rho' = 1$	1.495	13,677.180	0.426
	$\rho/\rho' = 1.5$	1.579	13,918.330	0.404
	$\rho/\rho' = 2$	1.596	13,822.203	0.407
$0.45\rho_{bal}$	$\rho/\rho' = 1$	1.247	19,315.887	0.644
	$\rho/\rho' = 1.5$	1.387	19,914.976	0.622
	$\rho/\rho' = 2$	1.418	19,795.421	0.628
$0.65\rho_{bal}$	$\rho/\rho' = 1$	1.007	18,356.818	0.697
	$\rho/\rho' = 1.5$	1.054	18,357.772	0.681
	$\rho/\rho' = 2$	1.096	18,117.836	0.666
$0.90\rho_{bal}$	$\rho/\rho' = 1$	0.827	20,758.683	0.762
	$\rho/\rho' = 1.5$	0.883	20,278.374	0.736
	$\rho/\rho' = 2$	0.963	19,919.436	0.690

## 6.2 Viga 2

En la Figura 6-16 se muestran los armados de la viga 2 empleados para el estudio de las rigideces efectivas a flexión ( $I_e/I_g$ ). De la Figura 6-17 a la 4-28 se muestran las curvas de la carga contra el desplazamiento, así como las curvas de degradación de rigideces secante de los modelos en estudio donde se indican el estado de la carga al primer agrietamiento, fluencia del acero y carga última,

respectivamente. En la Tabla 6-2 se muestran un resumen de los valores de desplazamiento, carga y rigideces efectivas obtenidas numéricamente en condición de la primera fluencia del acero de refuerzo. Se observó que los valores de rigideces efectivas a flexión para esta viga de concreto reforzado están entre  $I_e/I_g \approx 0.359-0.760$ .



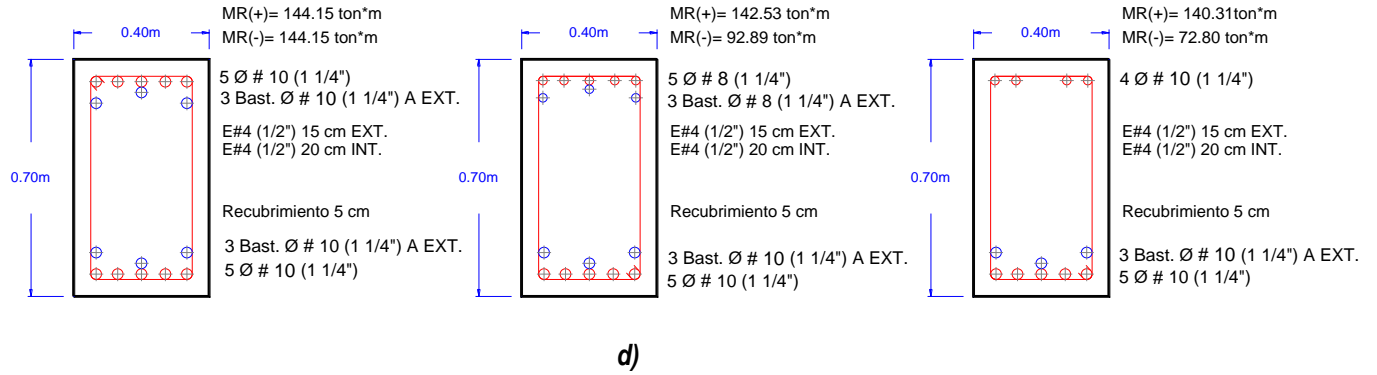


Figura 6-16 Cuantías de refuerzo a flexión para la viga 2 con detallado no dúctil (Q de 2) en condición simplemente apoyada: a)  $0.25\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y  $2$ , b)  $0.45\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y  $2$ , c)  $0.65\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y  $2$  y d)  $0.90\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y  $2$

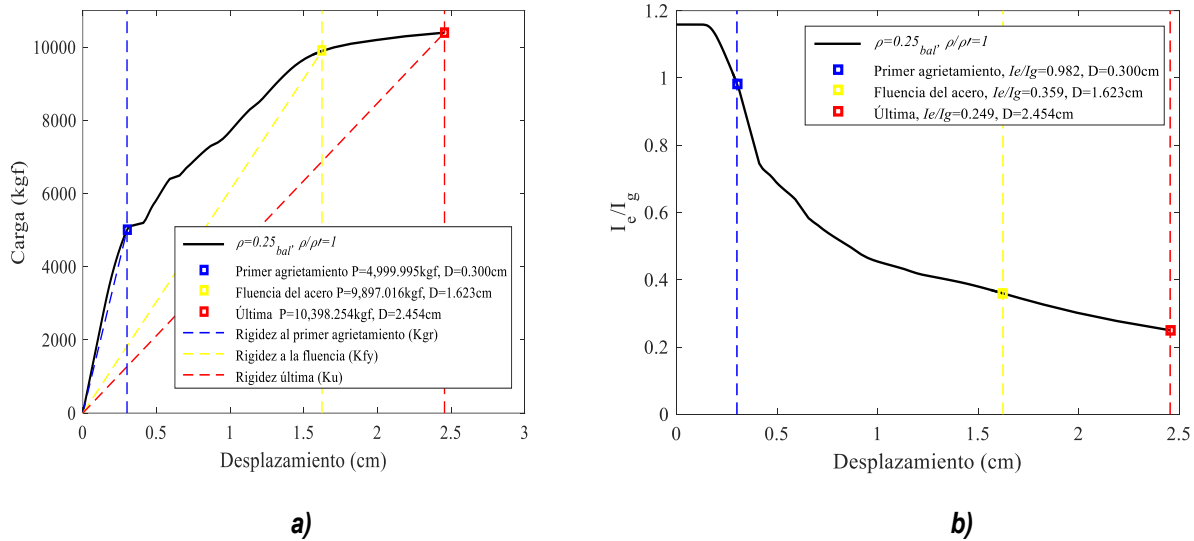
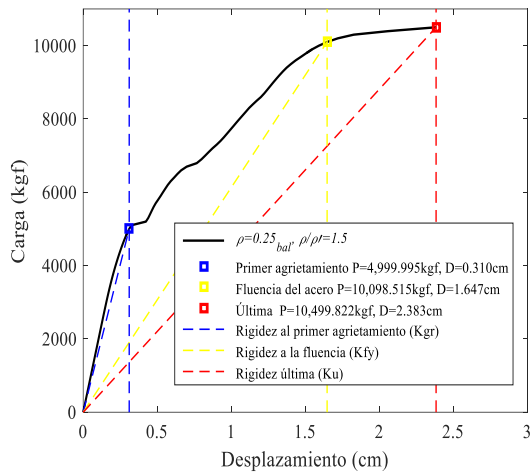
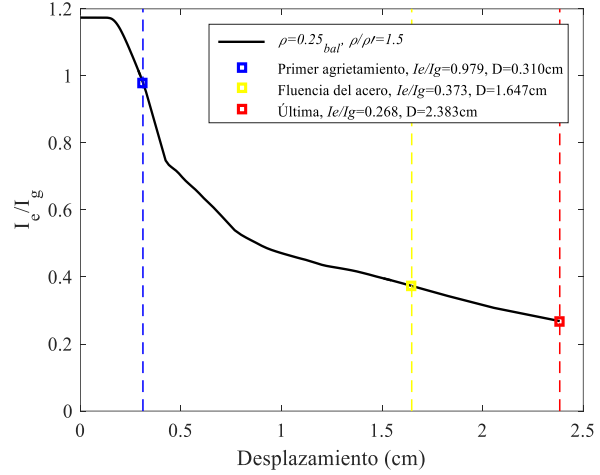


Figura 6-17 Modelo V-2 para  $0.25\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

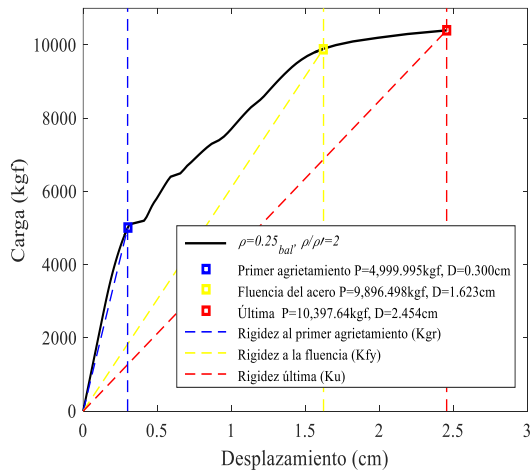


a)

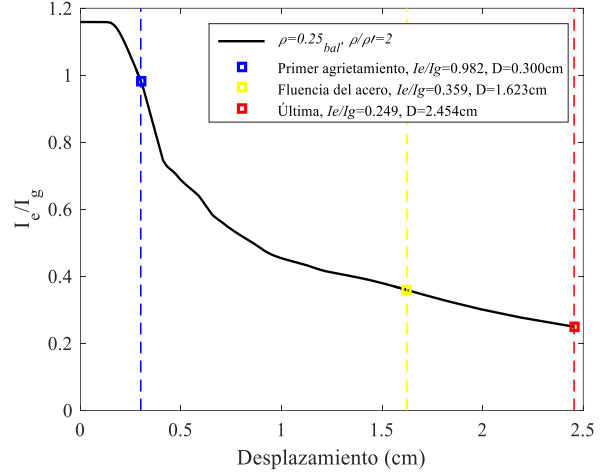


b)

Figura 6-18 Modelo V-2 para  $0.25\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante



a)



b)

Figura 6-19 Modelo V-2 para  $0.25\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

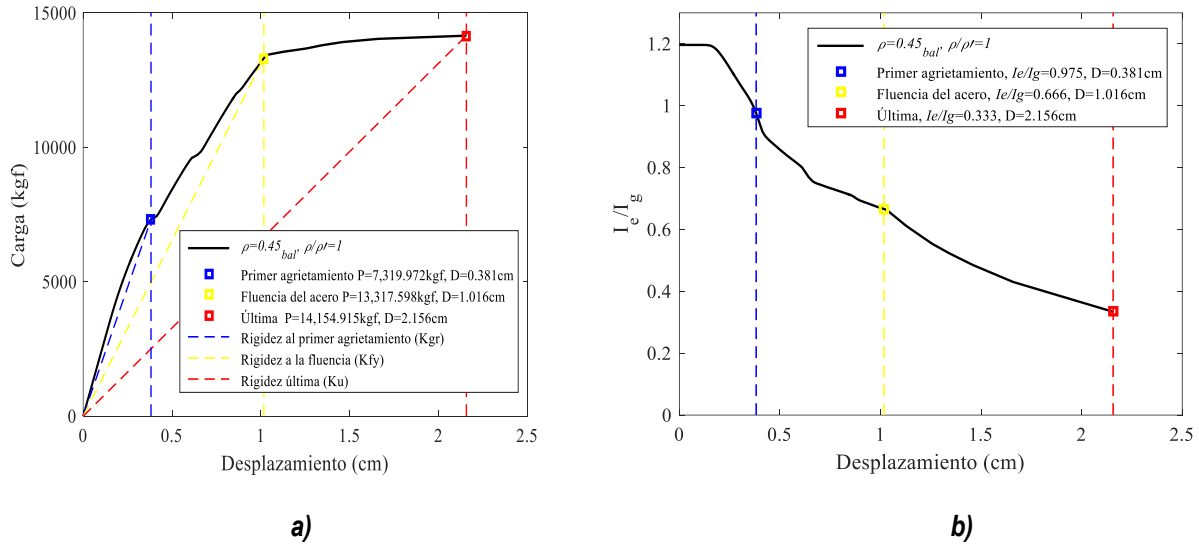


Figura 6-20 Modelo V-2 para  $0.45\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

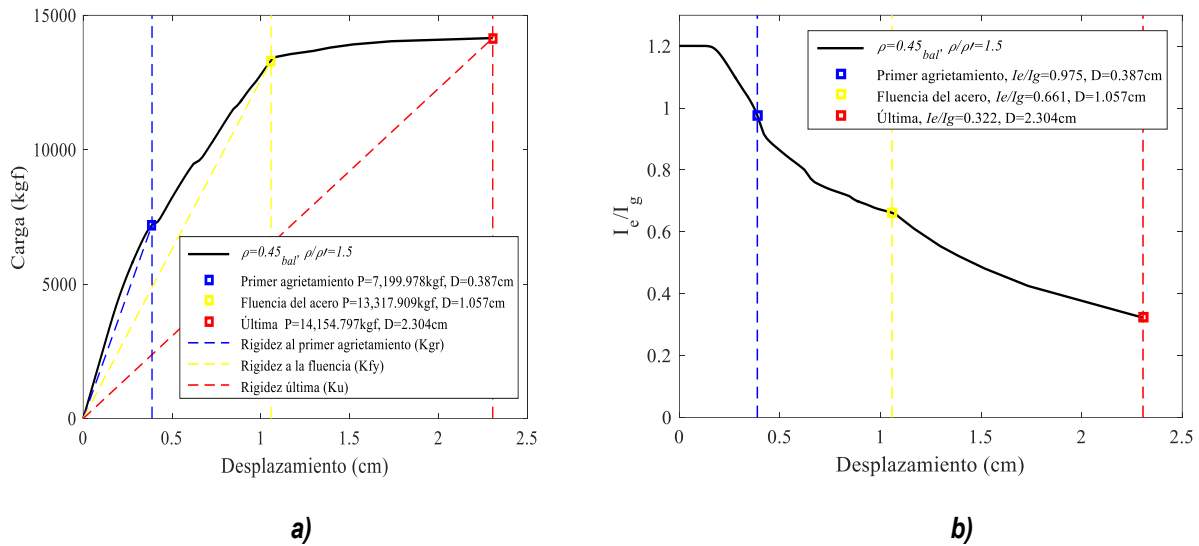


Figura 6-21 Modelo V-2 para  $0.45\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

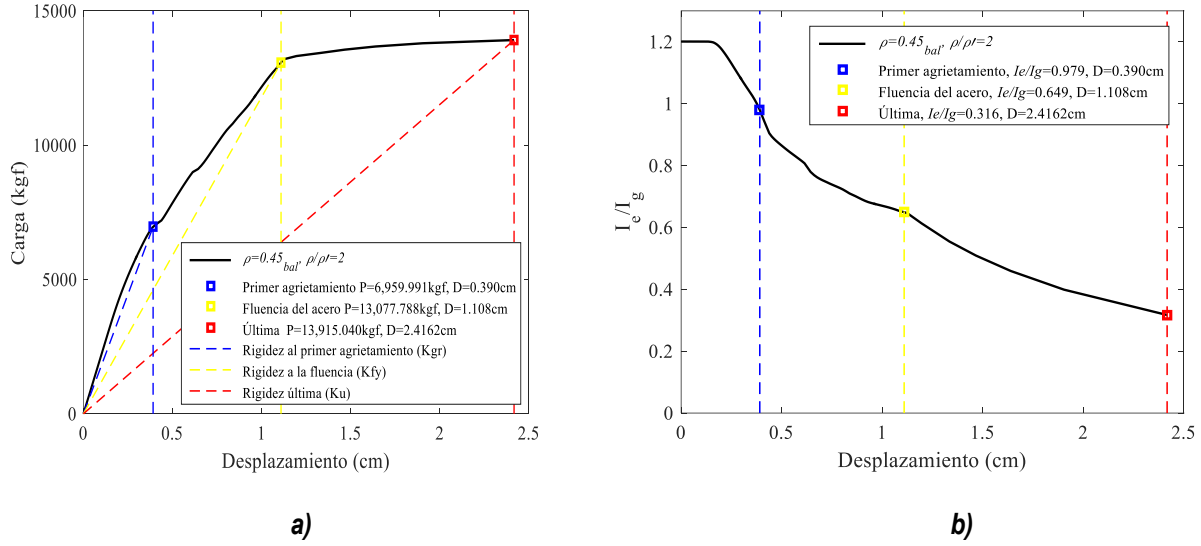


Figura 6-22 Modelo V-2 para  $0.45\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

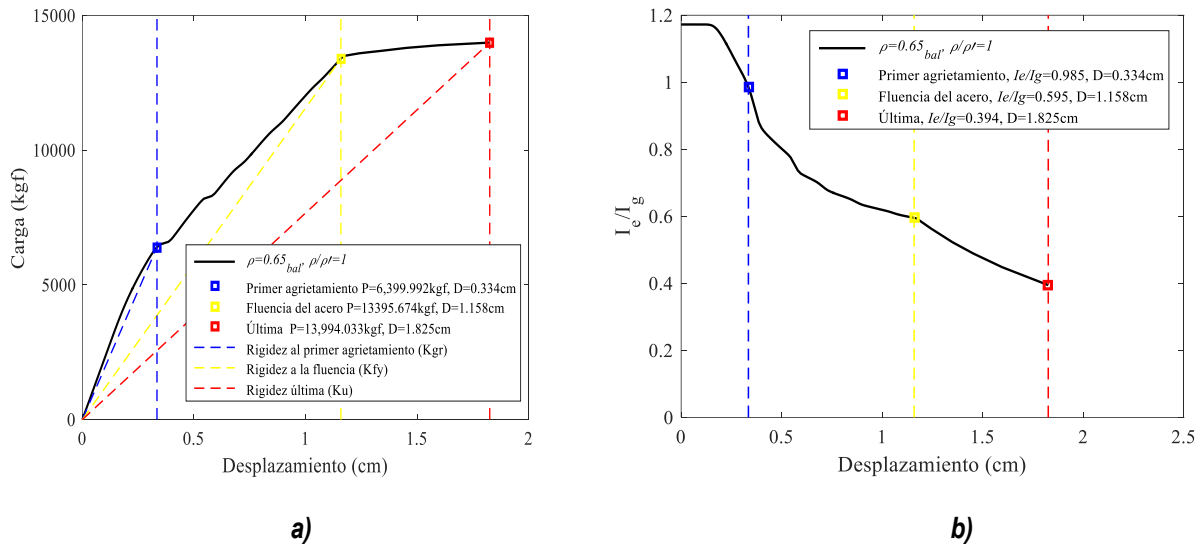


Figura 6-23 Modelo V-2 para  $0.65\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

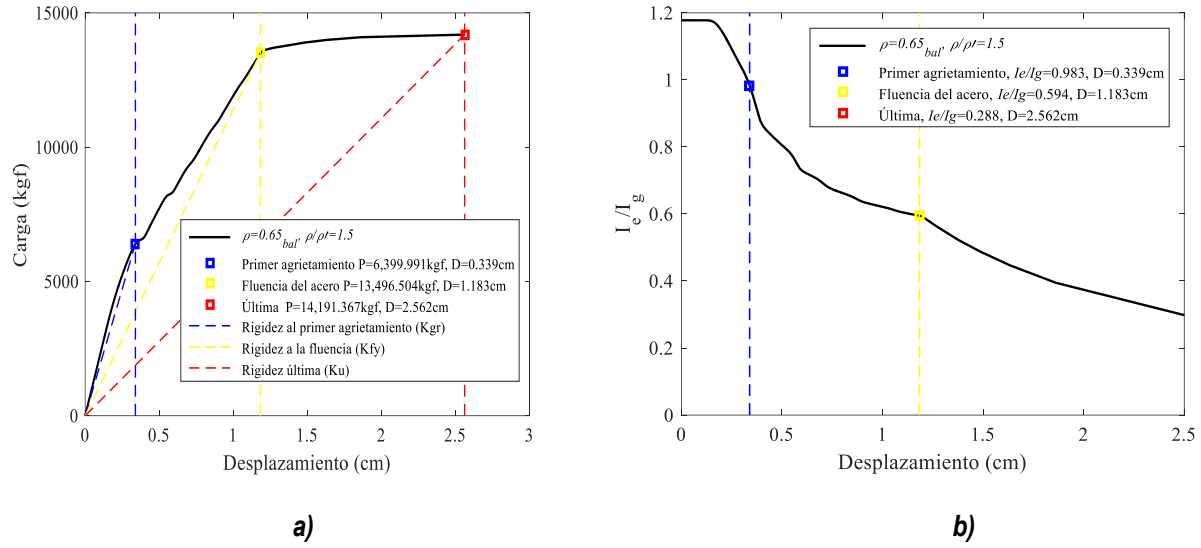


Figura 6-24 Modelo V-2 para  $0.65\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

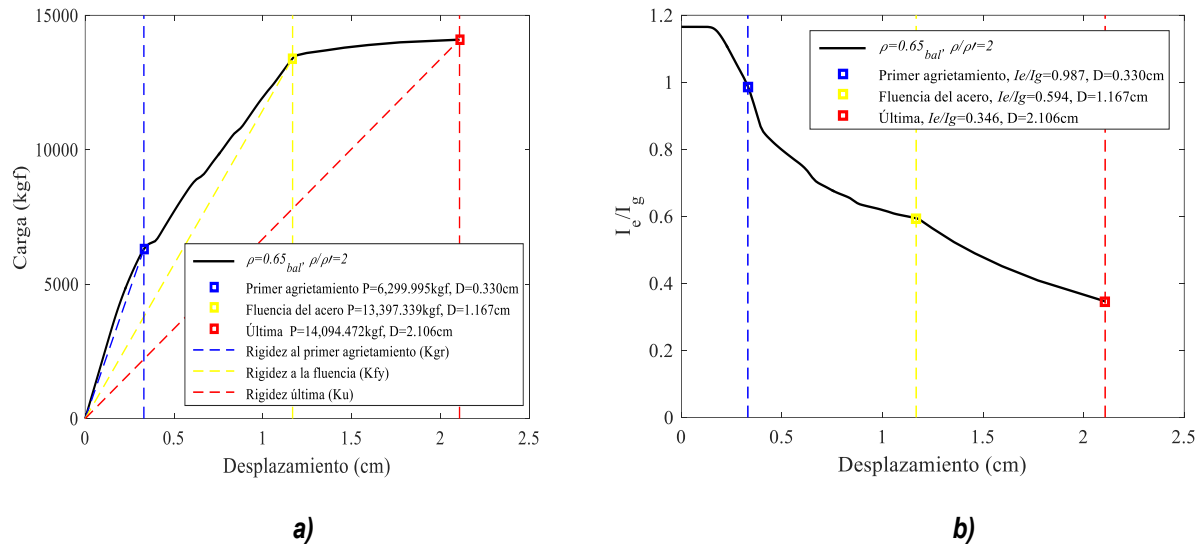


Figura 6-25 Modelo V-2 para  $0.65\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

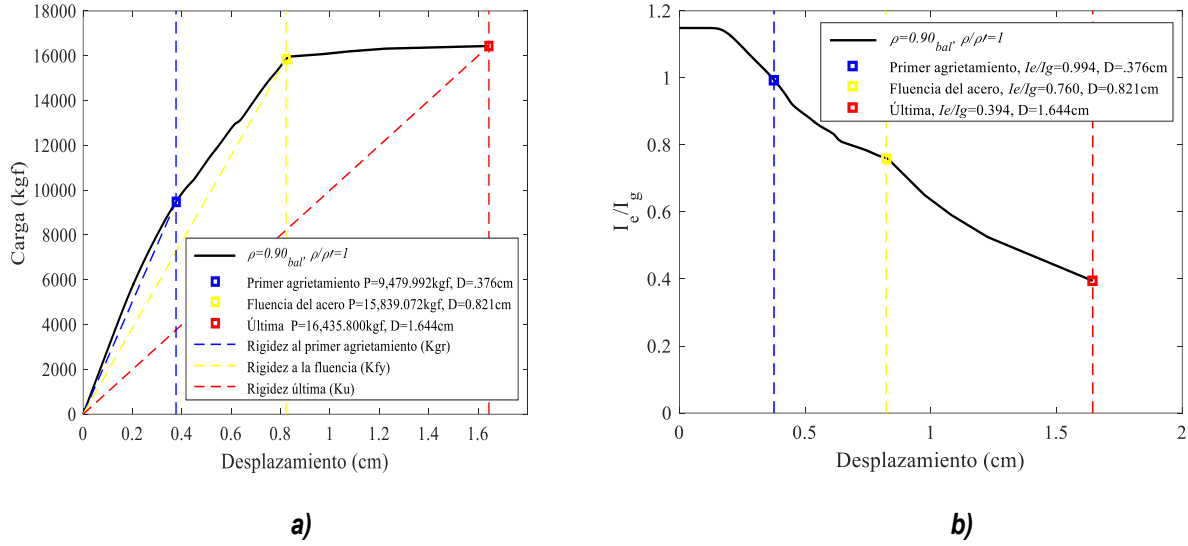


Figura 6-26 Modelo V-2 para  $0.90\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

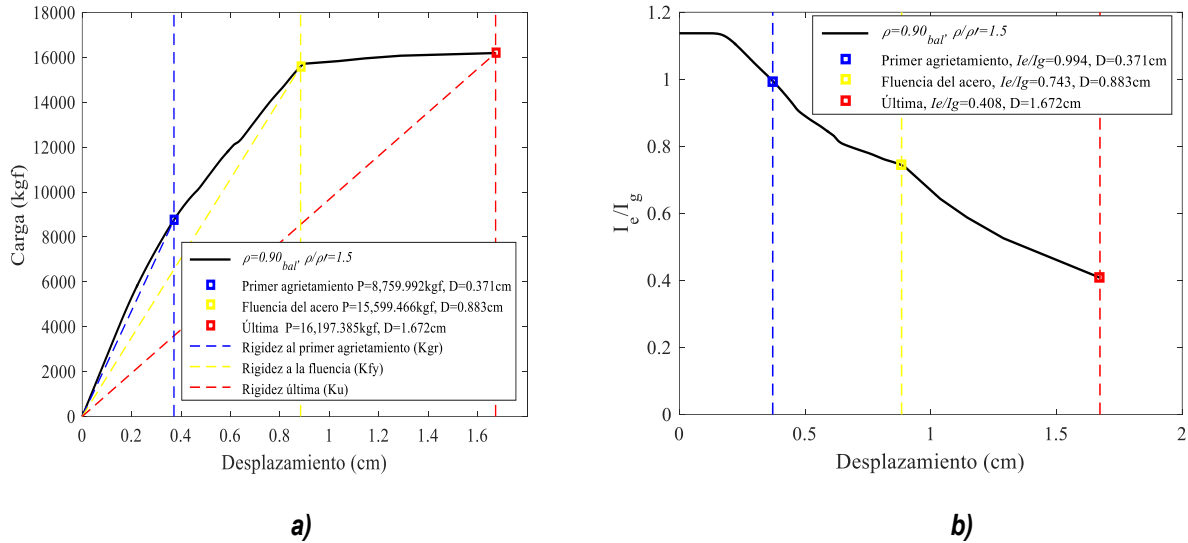


Figura 6-27 Modelo V-2 para  $0.90\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

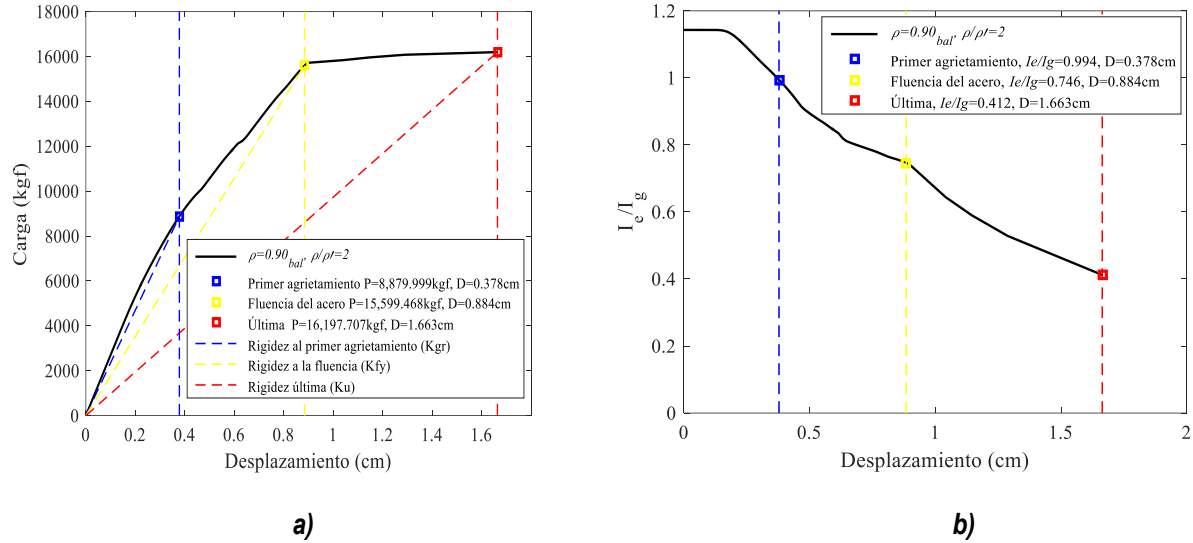


Figura 6-28 Modelo V-2 para  $0.90\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

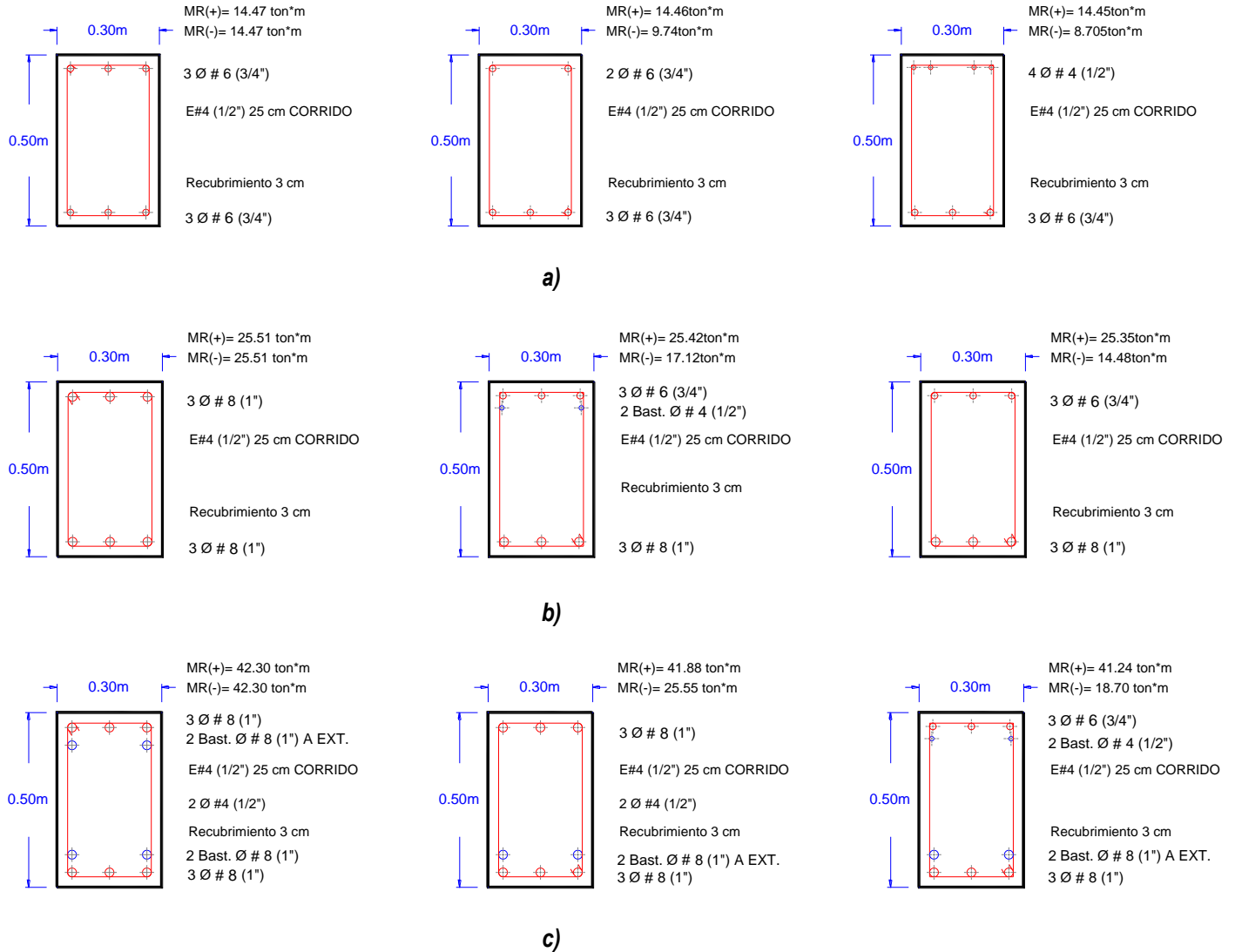
Tabla 6-2 Cargas, desplazamientos y valores de rigideces efectivas a la primera fluencia del acero, modelo V-2

VIGA 2				
		Desplazamiento de fluencia (cm)	Carga de fluencia (kgf)	$I_e/I_g$
$0.25\rho_{bal}$	$\rho/\rho' = 1$	1.623	9,897.015	0.359
	$\rho/\rho' = 1.5$	1.647	10,098.514	0.373
	$\rho/\rho' = 2$	1.623	9,896.428	0.359
$0.45\rho_{bal}$	$\rho/\rho' = 1$	1.016	13,317.598	0.666
	$\rho/\rho' = 1.5$	1.057	13,317.909	0.661
	$\rho/\rho' = 2$	1.108	13,077.788	0.649
$0.65\rho_{bal}$	$\rho/\rho' = 1$	1.158	13,395.674	0.596
	$\rho/\rho' = 1.5$	1.183	13,496.503	0.595
	$\rho/\rho' = 2$	1.167	13,397.338	0.594
$0.90\rho_{bal}$	$\rho/\rho' = 1$	0.821	15,839.072	0.760
	$\rho/\rho' = 1.5$	0.883	15,599.465	0.744
	$\rho/\rho' = 2$	0.884	15,599.467	0.746

### 6.3 Viga 3

Finalmente, en la Figura 6-29 se muestran los armados de la viga 3. De la Figura 6-30 a la 4-41 se muestran las curvas de la carga contra el desplazamiento, así como las curvas de degradación de rigideces secante de los modelos en estudio. En la Tabla 6-3 se muestra el resumen correspondiente de los valores de desplazamiento, carga y rigideces efectivas obtenidas numéricamente con

elementos finitos en condición de la primera fluencia del acero de refuerzo. Los resultados muestran que los valores de rigideces efectivas a flexión para esta viga están entre  $I_e/I_g \approx 0.557-0.732$ . Es evidente que no existe gran diferencia en los valores de rigideces efectivas obtenidos para las diferentes relaciones de refuerzo en tensión y compresión consideradas. Por ejemplo, para la cuantía de  $0.90\rho_{bal}$  para relaciones de  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y  $2$  los valores de rigideces son de  $I_e/I_g \approx 0.711$ ,  $I_e/I_g \approx 0.732$  y  $I_e/I_g \approx 0.709$ , respectivamente.



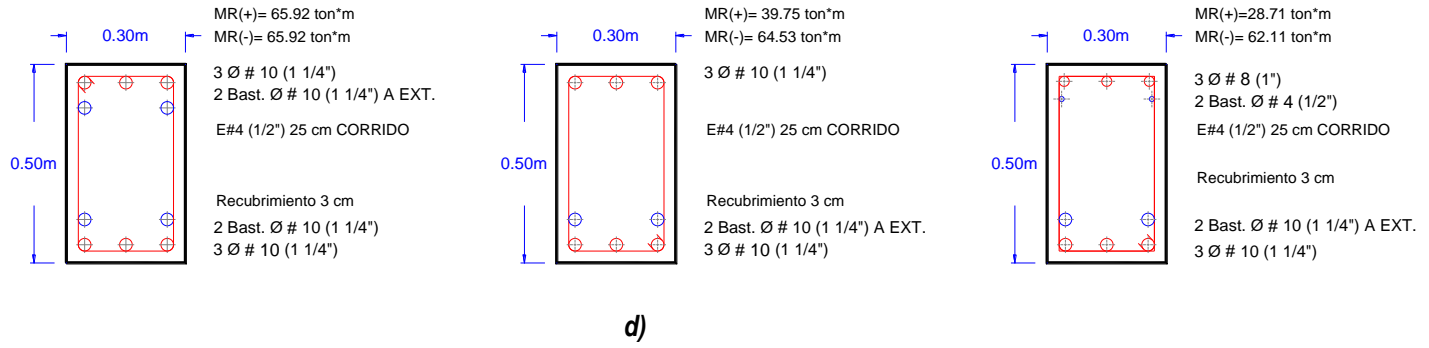


Figura 6-29 Cuantías de refuerzo a flexión para la viga 3 con detallado no dúctil (Q de 2) en condición simplemente apoyada: a)  $0.25\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y  $2$ , b)  $0.45\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y  $2$ , c)  $0.65\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y  $2$  y d)  $0.90\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y  $2$

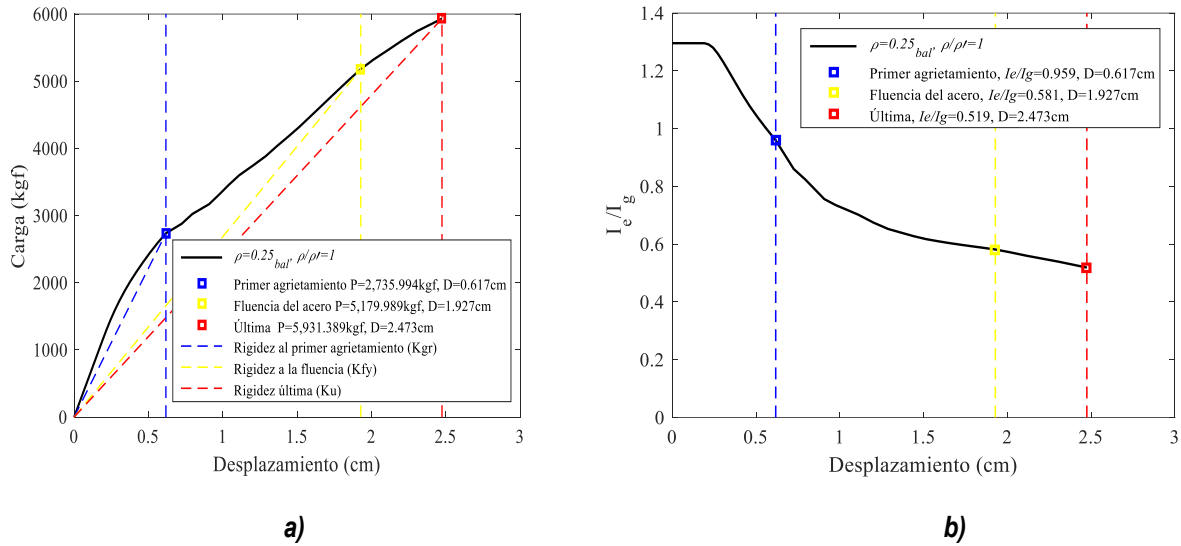
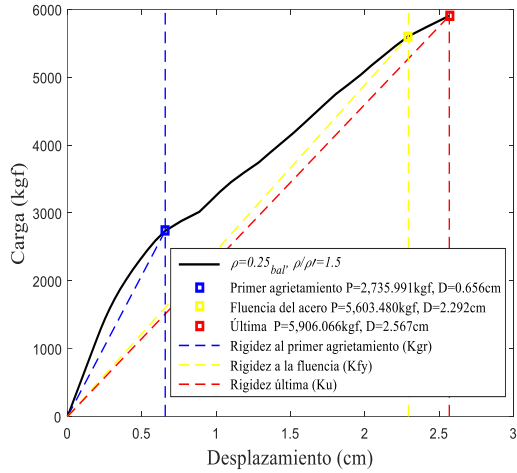
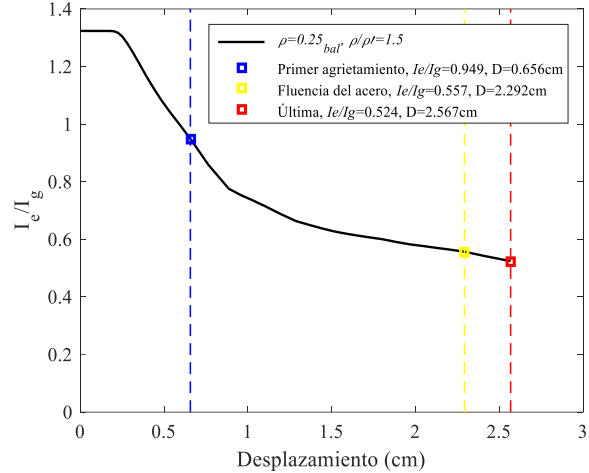


Figura 6-30 Modelo V-3 para  $0.25\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho' = 1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

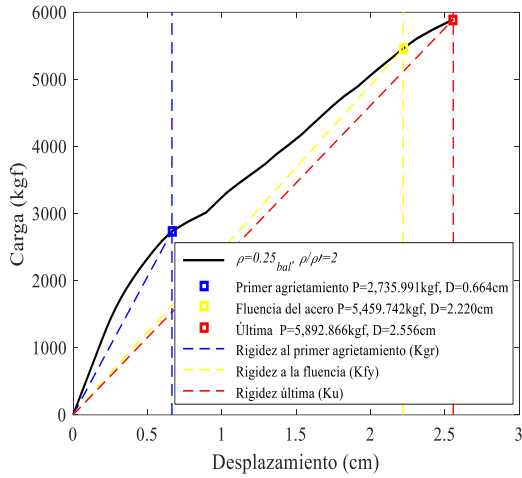


a)

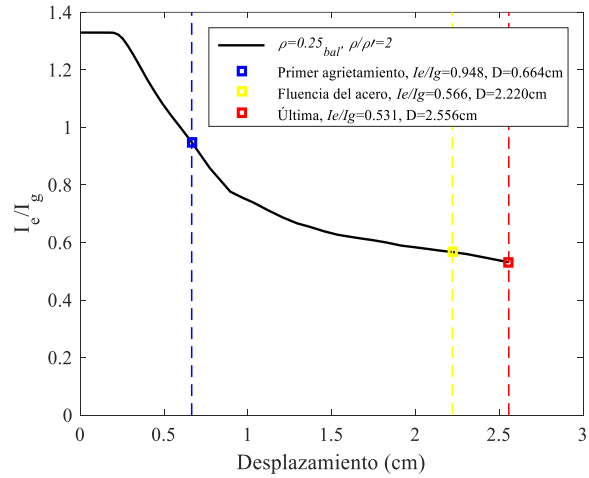


b)

Figura 6-31 Modelo V-3 para  $0.25\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante



a)



b)

Figura 6-32 Modelo V-3 para  $0.25\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

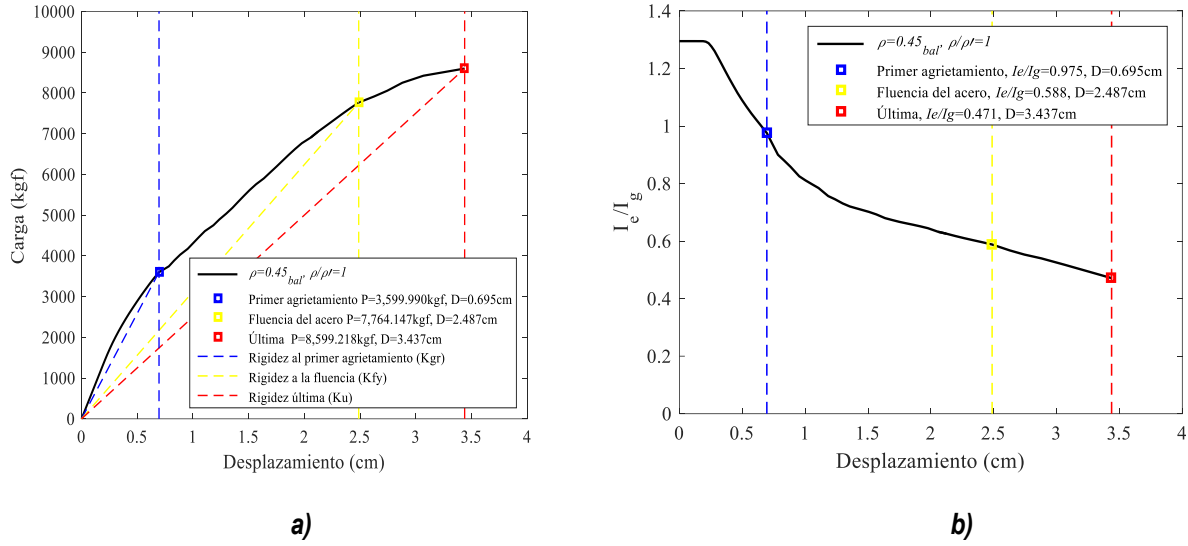


Figura 6-33 Modelo V-3 para  $0.45\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

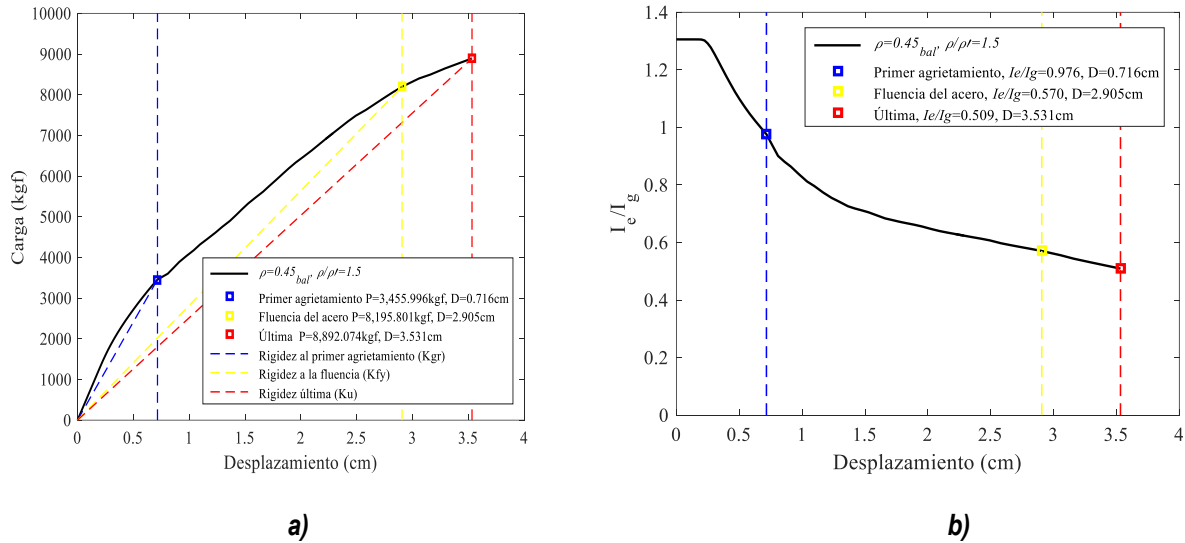
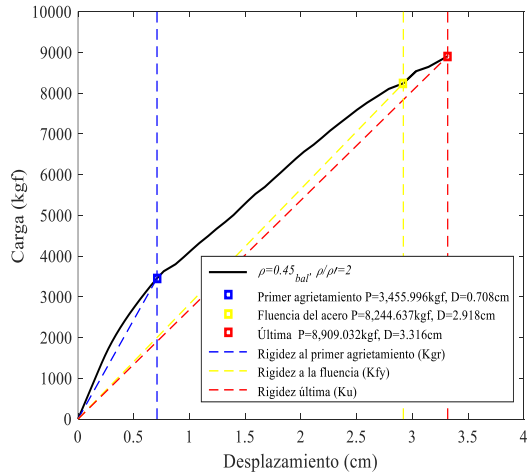
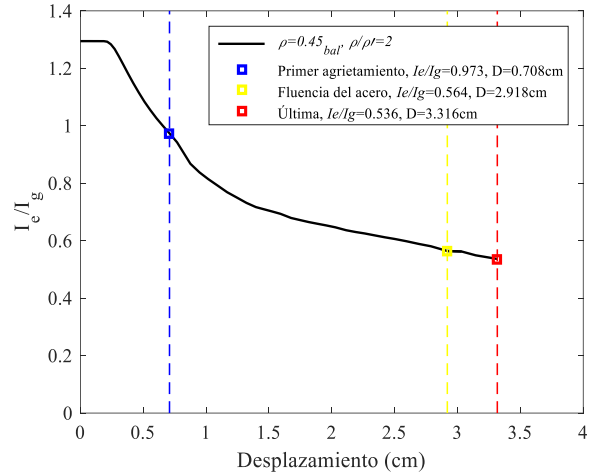


Figura 6-34 Modelo V-3 para  $0.45\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

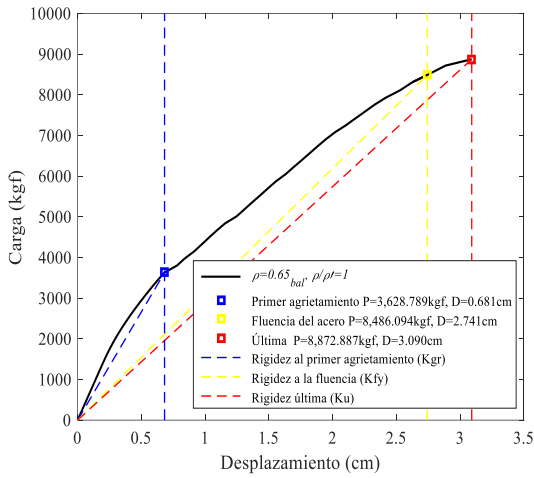


a)

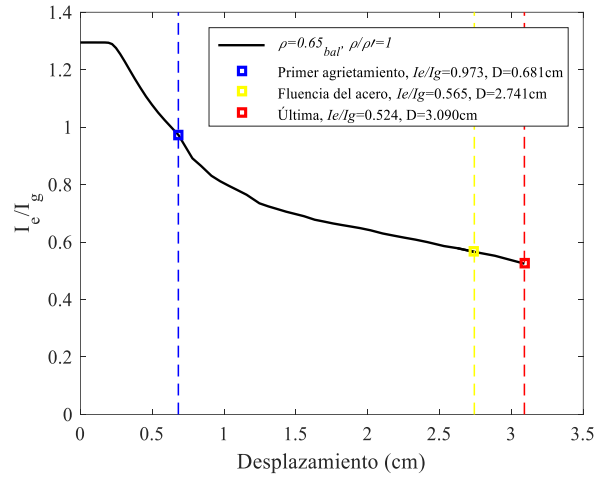


b)

Figura 6-35 Modelo V-3 para  $0.45\rho_{barras}$  y  $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

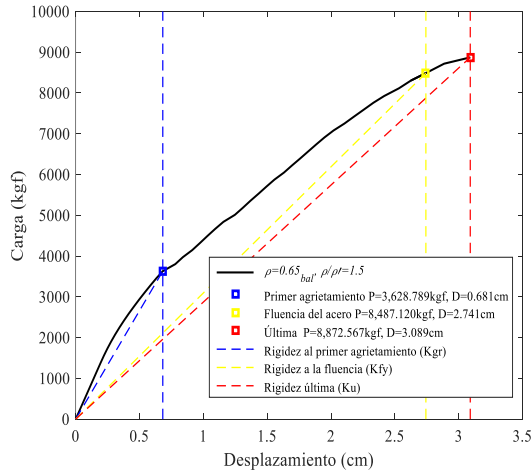


a)

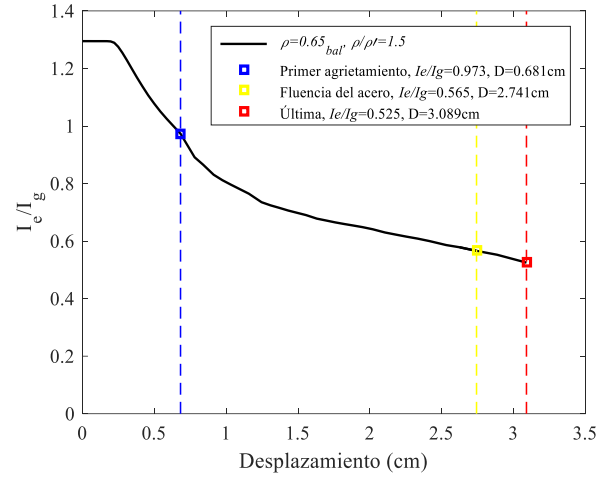


b)

Figura 6-36 Modelo V-3 para  $0.65\rho_{barras}$  y  $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

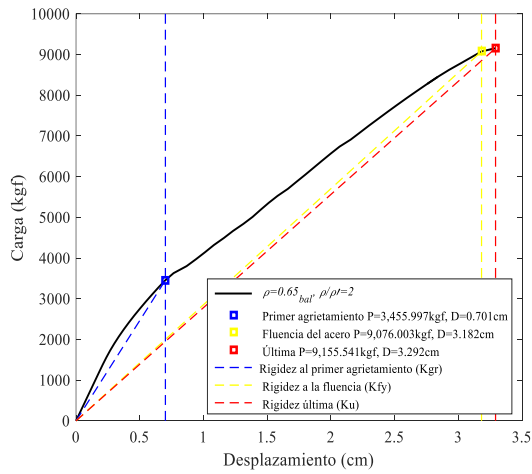


a)

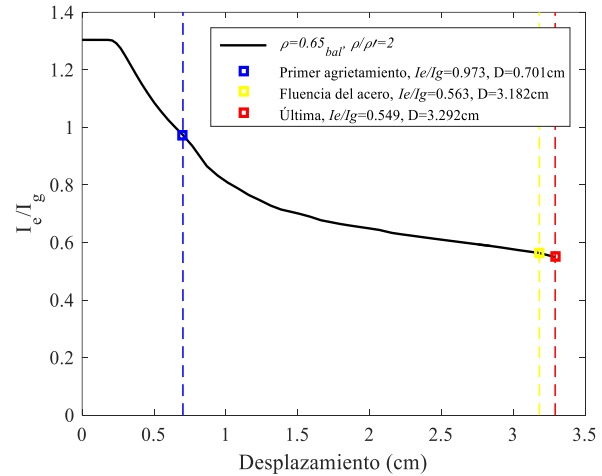


b)

Figura 6-37 Modelo V-3 para  $0.65\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante



a)



b)

Figura 6-38 Modelo V-3 para  $0.65\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

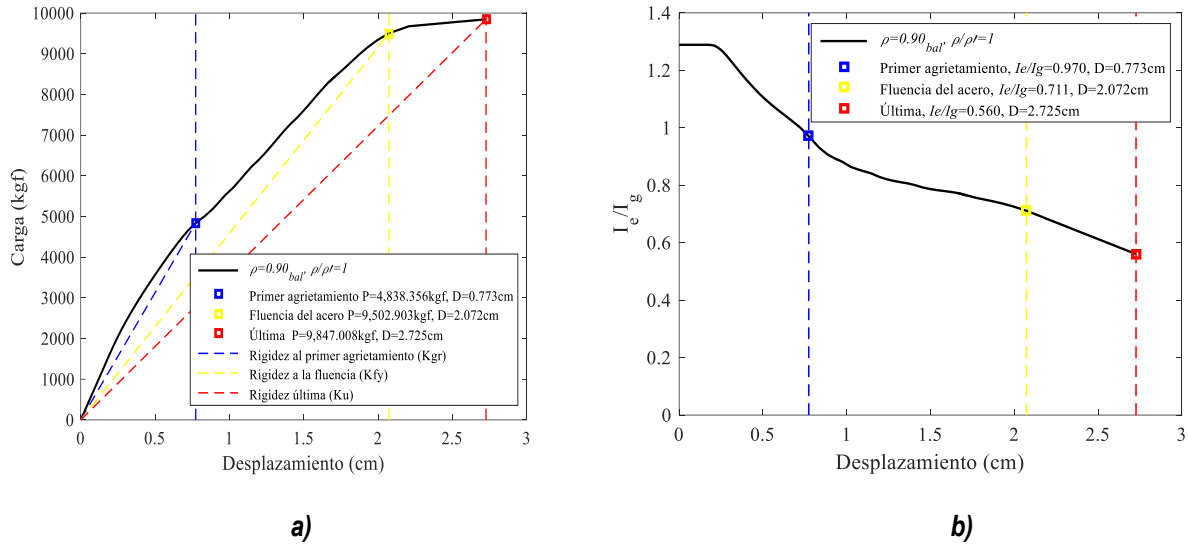


Figura 6-39 Modelo V-3 para  $0.90\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

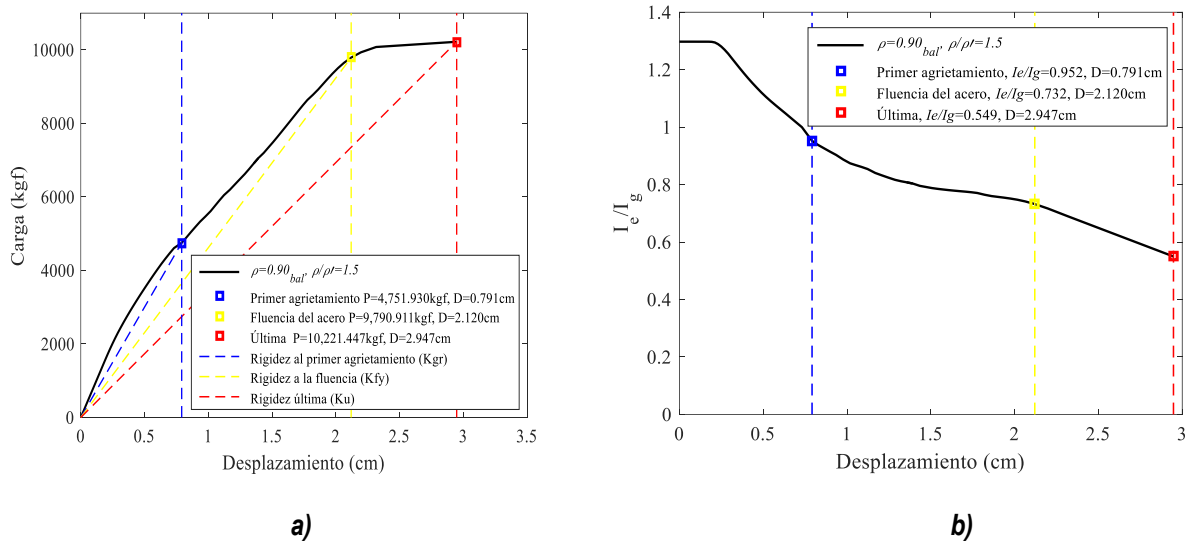


Figura 6-40 Modelo V-3 para  $0.90\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=1.5$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

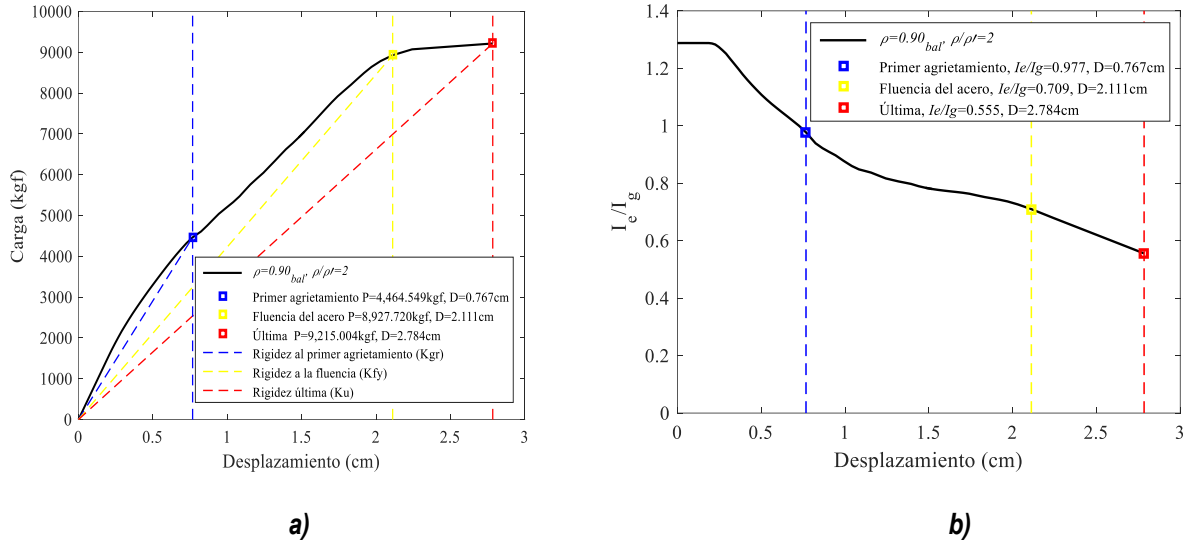


Figura 6-41 Modelo V-3 para  $0.90\rho_{bal}$  y  $\rho/\rho'=2$ : a) curva de la carga contra desplazamiento y b) curva de degradación de rigidez secante

Tabla 6-3 Cargas, desplazamientos y valores de rigideces efectivas a la primera fluencia del acero, modelo V-3

<b>VIGA 3</b>				
		Desplazamiento de fluencia (cm)	Carga de fluencia (kgf)	$I_e/I_g$
<b><math>0.25\rho_{bal}</math></b>	$\rho/\rho' = 1$	1.927	5,179.989	0.581
	$\rho/\rho' = 1.5$	2.292	5,603.480	0.557
	$\rho/\rho' = 2$	2.220	5,459.742	0.566
<b><math>0.45\rho_{bal}</math></b>	$\rho/\rho' = 1$	2.487	7,764.147	0.588
	$\rho/\rho' = 1.5$	2.905	8,195.801	0.570
	$\rho/\rho' = 2$	2.918	8,244.637	0.564
<b><math>0.65\rho_{bal}</math></b>	$\rho/\rho' = 1$	2.741	8,486.094	0.565
	$\rho/\rho' = 1.5$	2.741	8,487.140	0.566
	$\rho/\rho' = 2$	3.182	9,076.003	0.563
<b><math>0.90\rho_{bal}</math></b>	$\rho/\rho' = 1$	2.072	9,502.903	0.711
	$\rho/\rho' = 1.5$	2.120	9,790.911	0.732
	$\rho/\rho' = 2$	2.111	8,927.720	0.709

Como se comentó e ilustró, en las curvas de la carga contra el desplazamiento de los modelos V-1, V-2 y V3 se muestran los valores de carga y desplazamiento al primer agrietamiento, a la primera fluencia del acero y a la carga última que se obtuvo numéricamente con elementos finitos. En los modelos que se presentan se considera una variación de la cuantía de acero de refuerzo ( $\rho=0.25\rho_{bal}$ ,  $0.45\rho_{bal}$ ,  $0.65\rho_{bal}$  y  $0.90\rho_{bal}$ ). En general, las curvas presentan un comportamiento trilineal, donde

la primera pendiente corresponde a una sección no agrietada que continua en el intervalo elástico lineal y que depende principalmente de la resistencia a tensión del concreto, una vez que se excede el esfuerzo a tensión, se inicia una segunda pendiente que muestra una reducción de la rigidez del (momento inercia a lo largo de la sección) del elemento de concreto reforzado, denominado primer agrietamiento y, finalmente, la tercer pendiente muestra que la viga ha incursionado dentro del intervalo no lineal, en la que el acero de refuerzo a tensión fluye y, por lo tanto, la rigidez a flexión del elemento está regida por la condición del primer agrietamiento, la fluencia del acero y la no linealidad del concreto.

De los resultados obtenidos, se observa que los valores de rigideces efectivas a flexión, asociados a la primera fluencia del acero longitudinal, para cuantías mayores a la mínima, se incrementan conforme se incrementa el acero de refuerzo, como se muestra en las Tablas 4-1, 4-2 y 4-3.

Sin embargo, existen artículos en la literatura de ensayos de trabes acarteladas de concreto reforzado en condiciones de apoyo simple, diseñadas para fallar a cortante y sujetas a cargas cíclicas a los tercios de la viga, por ejemplo, Archundia (2004), Archundia *et al.* (2005) y Tena (2019) donde muestran experimentalmente que la degradación de rigidez secante mínima de todo el elemento es mayor al 50% recomendado por los códigos de diseño NTCC-04 (2004) y NTCC-17 (2017) para una falla a cortante, donde la rigidez secante efectiva se degrada más rápido que para una falla a flexión.

Finalmente, los valores de las rigideces efectivas a flexión obtenidos son a lo largo del elemento y en todo su volumen y no en una rebanada infinitesimal (sección transversal). Las rigideces efectivas obtenidas mediante el método de los elementos finitos en las vigas de concreto reforzado son superiores al 50% ( $0.5EI_g$ ) asociado a la primera fluencia del acero, recomendado por las NTCC-17 (2017). No obstante, el emplear los valores recomendados por la norma, como una fracción del momento de inercia grueso de la sección transversal no parece razonable, pues se omiten muchas variables importantes.

# Capítulo 5

## Conclusiones y Recomendaciones

### 7.1 Conclusiones

En este trabajo de investigación se realizó un estudio paramétrico para evaluar la influencia de diferentes variables en la determinación de rigideces efectivas a flexión de vigas de concreto reforzado con detallado no dúctil y diferentes condiciones de apoyo. En los modelos numéricos estudiados en el programa midas FEA se determinaron las curvas de la carga contra el desplazamiento al centro de claro, trayectorias de agrietamiento, desplazamientos verticales a lo largo de elemento, esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo. Con base en lo anterior se construyen curvas de degradación de rigidez.

De los resultados obtenidos y las comparaciones con los resultados experimentales reportados en la literatura, se concluye que, empleando modelos de elementos finitos con no linealidad del material es posible predecir aceptablemente su comportamiento estructural. Por ejemplo, los resultados numéricos obtenidos y comparados con los experimentales reportados por Foley y Buckhouse (1998) y Chan *et al.* (2000) son congruentes, pues existe poca diferencia en los valores de carga y desplazamientos. Las diferencias se pueden atribuir a que no se modeló la pérdida de adherencia entre el concreto y el acero de refuerzo cuando la carga excede la fluencia y tampoco toma en cuenta la variación de la velocidad en el proceso de la carga. Sin embargo, se logra reproducir con buena precisión el comportamiento de la viga y el marco de concreto de reforzado, lo cual valida el uso de estos elementos finitos y modelos constitutivos para el estudio de elementos de concreto reforzado. Es importante hacer notar que el modelado numérico es una herramienta valiosa en las diferentes áreas de la ingeniería; sin embargo, no sustituye de ninguna manera las pruebas experimentales, más bien, puede considerarse complementaria. Respecto a las limitaciones de los resultados obtenidos mediante modelos numéricos, Tena (2019) menciona que se hacen demasiadas simplificaciones a los modelos numéricos de elementos finitos para poder representar en una primera aproximación lo que en realidad sucede en las pruebas experimentales; sin embargo, estos modelos numéricos, realizados con cuidado y conocimiento, proporcionan información y detalles valiosos, como son las zonas más esforzadas de la viga, así como donde iniciará el agrietamientos y plastificación en el elemento estructural.

La rigidez efectiva se evalúa a partir de las curvas de la carga contra el desplazamiento, las cuales decrecen al ocurrir el agrietamiento en el concreto o la plastificación en el acero. Como se esperaba, el agrietamiento y la plastificación ocurren en las zonas más esforzadas, las cuales se localizan en los extremos y/o en el centro del claro. Se observó que al evaluar las rigideces efectivas en los elementos de concreto reforzado con el criterio de las NTCC-17 (2017), los desplazamientos obtenidos con las simulaciones numéricas son mayores, puesto que la viga presenta menor rigidez

a flexión y empieza a decrecer al ocurrir el agrietamiento en el concreto o la plastificación del acero, lo que hace más susceptible a las vigas a tomar mayores desplazamientos.

Finalmente, en las curvas de degradación de rigidez de las vigas de concreto reforzado se presenta un comportamiento de degradación lineal y el emplear las recomendaciones de las NTCC-17 (2017) hace que las vigas se degraden rápidamente. Por lo tanto, el diseñar con una inercia efectiva calculada a partir de la inercia gruesa mediante un factor ( $\epsilon$ ) que intenta capturar la rigidez promedio en toda la longitud de la viga, no parece una estrategia razonable, pues se omiten muchas variables que intervienen en este complejo fenómeno (por ejemplo, cuantía de refuerzo longitudinal y resistencia a compresión del concreto). Además, los valores obtenidos numéricamente no concuerdan con la propuesta de las NTCC-17 (2017), y aunque no son totalmente congruentes con los obtenidos experimentalmente, se obtienen, en general, valores del cociente  $I_e/I_g$  superiores a 0.5 (criterio de las NTCC-17, 2017).

Los resultados de las vigas de concreto reforzado presentados en esta investigación corresponden a zonas extremas que forman parte de un sistema estructural sujeto a demandas sísmicas, pues se consideran típicas de edificios de altura intermedia localizados en la zona del lago de la Ciudad de México o de cualquier región del país con sismicidad alta. Las cuantías de refuerzo se definieron en función del detallado empleado para vigas de baja ductilidad ( $Q=2$ ). Se consideraron cuatro cuantías de refuerzo longitudinal en función de la cuantía balanceada ( $0.25\rho_{bal}$ ,  $0.45\rho_{bal}$ ,  $0.65\rho_{bal}$  y  $0.90\rho_{bal}$ ) calculada conforme a lo recomendado en las NTCC-17 (2017), así como una relación entre las cuantías de refuerzo longitudinal en tensión y compresión  $\rho/\rho' = 1$ ,  $1.5$  y  $2$ . De los resultados obtenidos de las rigideces efectivas a flexión de los tres modelos (V-1, V-2 y V-3) en condición empotradas y sometidas a lo largo del claro a cargas verticales monótonas uniformemente distribuidas, muestran que los valores de rigideces efectivas a la primera fluencia del acero están entre  $I_e/I_g \approx 0.457-0.536$ ,  $I_e/I_g \approx 0.444-0.556$  y  $I_e/I_g \approx 0.395-0.490$  valores aproximados a los que recomienda el código de diseño de la Ciudad de México, pues es evidente que en las curvas de degradación de rigidez secante efectiva mientras aumenta el acero de refuerzo los valores de rigideces efectivas crecen. No obstante, con los resultados obtenidos se observó que las diferentes formas de aplicar la carga y las condiciones de apoyo proporcionan diferentes reducciones de rigidez a flexión ( $I_e$ ) en las vigas de concreto reforzado.

La resistencia a la compresión del concreto ( $f'_c$ ) tiene impacto significativo en la determinación de las rigideces efectivas a flexión, pues a medida que se aumenta el esfuerzo a compresión, los valores de rigideces a flexión son mayores. Esto tiene sentido desde una perspectiva a nivel sección transversal, debido que a mayor resistencia a la compresión se genera un valor menor del peralte del eje neutro, lo que implica que la longitud de las grietas a flexión será mayor y el brazo interno del momento resistente tiende a aumentar, teniendo un valor mayor del momento resistente.

Para evaluar el efecto de algunas variables de importancia en la determinación de rigideces efectivas en vigas de concreto reforzado se diseñaron vigas simplemente apoyadas conforme a los

requisitos de las NTCC-17 (2017) y sometidas a una carga vertical al centro claro. En todos los casos se garantizó que la falla fuera por flexión. En las curvas de la carga contra el desplazamiento de las vigas se observó un comportamiento trilineal, donde la primera pendiente corresponde a una sección no agrietada que continua en el intervalo elástico y que depende principalmente de la resistencia a tensión del concreto, la segunda pendiente muestra que existe una reducción de la rigidez a lo largo de la sección, denominado primer agrietamiento, y la tercer pendiente muestra que la viga ha incursionado dentro del intervalo no lineal y el acero a tensión fluye y, por lo tanto, la rigidez a flexión del elemento está regida por la condición del primer agrietamiento, la fluencia del acero y la no linealidad del concreto. Con los resultados obtenidos de los modelos V-1, V-2 y V-3 se observó que las rigideces efectivas son superiores al 50% ( $0.5EI_g$ ) asociado a la primera fluencia del acero, recomendado por las NTCC-17 (2017). Sin embargo, el emplear los valores recomendados por la norma no parece razonable, pues se omiten muchas variables importantes.

Finalmente, se debe comprender que el agrietamiento es un fenómeno inevitable en los elementos estructurales de concreto reforzado y se agrietan a un nivel bajo de carga, incluso con presencia de acero de refuerzo, debido a la baja resistencia a la tensión del concreto y la propagación del agrietamiento depende de la carga, que consecuentemente, tiene un efecto significativo en la reducción de la rigidez efectiva a flexión. Sin embargo, el uso de los coeficientes de rigideces efectivas a flexión que recomiendan los códigos de diseño para vigas, columnas y muros, son valores promedio que se ocuparían únicamente para la revisión exhaustiva de distorsiones de entrepiso y rotaciones plásticas, entre otros parámetros de respuesta después de un evento sísmico intenso.

## 7.2 Recomendaciones

Luego de estudiar la variación de la rigidez con modelos de elementos finitos con no-linealidad del material, se recomienda:

- Antes de realizar un análisis no-lineal, realizar un análisis elástico-lineal para localizar las zonas más esforzadas de los elementos estructurales, con base en ello realizar un mallado más fino en estas zonas, que permitan obtener con mejor precisión las trayectorias de agrietamiento y la fluencia en el acero de refuerzo, así como los niveles de carga y esfuerzos asociados.
- Estudiar los manuales de los programas de elementos finitos para conocer el alcance que tiene cada uno de sus elementos y modelos constitutivos empleados en el análisis.
- El considerar una resistencia a compresión mayor ( $f'_c=300, 350, 400, 450$  y  $500\text{kgf/cm}^2$ ) respecto a una resistencia de  $f'_c=250\text{kgf/cm}^2$  y una cuantía de refuerzo mayor a la mínima hace que los valores de rigideces efectivas incrementen entre  $I_e/I_g \approx 0.55-0.745$ , valores superiores al 50% que recomienda las NTCC-17 (2017).

- Tener presente que las rigideces efectivas dependen de las condiciones de apoyo y la carga aplicada, pues éstas incrementan para vigas simplemente apoyada con carga puntual al centro del claro.
- Realizar un estudio en que se consideren tanto modelos numéricos como pruebas experimentales para determinar las rigideces efectivas a flexión en vigas.
- El uso de los coeficientes de rigideces efectivas a flexión que recomiendan los códigos de diseño para los elementos estructurales, que incluyan valores promedio para la revisión exhaustiva de distorsiones de entrepiso y rotaciones plásticas, entre otros parámetros de respuesta.

### **7.3 Trabajos futuros**

En esta investigación quedan abiertas varias líneas de investigación, por lo que a continuación se presentan algunos trabajos futuros que podrían desarrollarse:

- Estudiar el efecto de la carga sísmica en las vigas de concreto reforzado.
- Estudiar el efecto de la contribución de la losa en las vigas (secciones T).
- Estudiar el efecto de las rigideces efectivas en vigas y columnas de concreto reforzado con presfuerzo y postensado.
- Considerar modelos numéricos en que se tome en cuenta el efecto del deslizamiento entre el acero de refuerzo y el concreto.
- Desarrollar expresiones analíticas para la determinación de las rigideces efectivas para vigas y columnas de concreto reforzado
- Evaluar la degradación de la rigidez efectiva de marcos de concreto reforzado ante cargas gravitacionales y sísmicas.

# Referencias

- [1] Archundia A.H.I., Tena C.A. y González C.O.M. (2005). “Estudio experimental de cortante estático en trabes acarteladas de concreto reforzado”, Reporte de investigación 453, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, junio.
- [2] ACI 318-11 (2011). “Building code requirements for structural concrete (ACI-318-11) and commentary”, Farmington Hills. (MI, USA) American Concrete Institute.
- [3] ACI 318-14 (2014). “Building code requirements for structural concrete (ACI-318-14) and commentary”, Farmington Hills. (MI, USA) American Concrete Institute.
- [4] Bonet J.L, Romero M.L. y Miguel P.F. (2011). “Effective flexural stiffness of slender reinforced concrete columns under axial forces and biaxial bending”. *Engineering Structures* 33(2011), 881-893.
- [5] Chan C.M, Ning F. y Mickleborough N. C. (2000). “Lateral stiffness characteristics of tall reinforced concrete buildings under service loads”. *The Structural Design of Tall Building*, 365-383.
- [6] Caglar N., Demir A., Ozturk H., Akkaya A. (2015). “A simple formulation for effective flexural stiffness of circular reinforced concrete columns”. *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 38 (2015), 79–87.
- [7] Eurocode 2 [2004] “EN 1992-1-1: Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings, CEN, Brussels, Belgium, 2004
- [8] Elwood K.J. y Eberhard M.O. (2006). “Effective Stiffness of Reinforced Concrete Columns”. *ACI Structural Journal, Research Digest No. 2006-1*, marzo, pp. 1-5.
- [9] Foley, C.M, Buckhouse, E.R. (1998). Strengthening existing reinforced concrete beams for flexure using bolted external structural steel channels. Reporte MUST-98-2, Marquette University, Department of Civil and Environmental Engineering, enero.
- [10] FEMA-356 (2000), “NEHRP guidelines for the seismic rehabilitation of buildings. FEMA publication 356”. Washington, DC: Federal Emergency Management Agency, noviembre.
- [11] Felippa C.A. (2005). “The Amusing History of Shear Flexible Beam Elements”. Center for Aerospace Structures, College of Engineering University of Colorado, Report No. CU-CAS-05-01.

- [12] Guerrero C.J. J y González C.O.M (2006) “Estudio paramétrico de la rigidez a la flexión en secciones de concreto reforzado”. Memorias, XV Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, Puerto Vallarta, Jalisco.
- [13] Ghugal Y.M. y Sharma R. (2011). “A refined shear deformation theory flexure of thick beams”. *Latin American Journal of Solids and Structures* 8(2011) pp.,183–195
- [14] Godínez E.A., Camacho C.C y España H.S.F (2017) “Diseño sísmico de edificios de marcos de concreto reforzado considerando diferentes criterios para la definición de las rigideces efectivas de los elementos estructurales”, *Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras*.
- [15] Godínez E.A., Velázquez G.I, Silvestre P.R.E y Tena C. A (2018) “Influencia de diferentes variables en la determinación de rigideces efectivas de secciones de concreto reforzado sujetas a flexión”. Memorias, XXI Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, Campeche, Campeche, pp 1-27, noviembre.
- [16] Godínez E.A., H. Villafuerte, A. Tena, y O.M. González (2020), “Evaluación del impacto económico de las disposiciones de las NTCC-17 para el cálculo de rigideces efectivas en marcos no dúctiles de concreto reforzado”, *Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras*, Vol. 25, No. 2, pp. 147-166.
- [17] Juárez L.G. y Godínez D.E.A (2018).” Modelado del daño en elementos de concreto reforzado”. *Revista PAKBAL*, Facultad de ingeniería, Universidad de Chiapas.
- [18] Kara I.F. y Dundar C. (2009). “Effect of loading types and reinforcement ratio on an effective moment of inertia and deflection of a reinforced concrete beam”. *Advances in Engineering Software* 40 (2009) 836–846.
- [19] Khuntia M. y Ghosh S.K. (2004) “Flexural stiffness of reinforced concrete columns and beams: Experimental verification”, *ACI Structural Journal*, vol.101, No.3, mayo-junio, pp.364-374.
- [20] MacGregor, J.G. (1993), "Design of slender concrete columns-revisited", *ACI Structural Journal*, Vol.90, No.3, pp.302-309.
- [21] Martínez Z.E (2017).” Detección de daño estructural en vigas de concreto reforzado parcialmente agrietadas”. Tesis de Maestría, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco.
- [22] Midas FEA (2016). *Analysis and Algorithm manual*. midas FEA advanced Nonlinear and Detail Analysis Program.
- [23] NTCC-04 (2004) “Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de estructuras de Concreto”. *Gaceta Oficial del Distrito Federal*, Tomo II, No.103-BIS, octubre.

- [24] NTCS-04 (2004) “Normas Técnicas Complementarias para diseño por Sismo”. Gaceta Oficial del Distrito Federal, Tomo II, No.103-BIS, octubre.
- [25] NZS-06 (2006), “Code of practice for the design of concrete structures”, NZS 3101. Standards Association of New Zealand. Private Bag. Wellington.
- [26] NTCC-17 (2017) “Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de estructuras de Concreto”. Gaceta Oficial de la Ciudad de México, No.220-BIS, diciembre.
- [27] NTCDS-17 (2017) “Normas Técnicas Complementarias para diseño por Sismo”. Gaceta Oficial de la Ciudad de México, No.220-BIS, diciembre.
- [28] Oller S. (2001). Fractura mecánica. Un enfoque global. CIMNE, España.
- [29] Priestley, M.N.J., Seible, F., Calvi, G.M. (1996). Seismic design and retrofit of bridges. John Wiley & Sons, Inc., New York, 686.
- [30] Pan Z., Li B. y Lu Z. (2014), “Effective shear stiffness of diagonally cracked reinforced concrete beams”. Engineering Structures 59 (2014) pp.95–103.
- [31] Rots J.G. (1988). “Computational modelling of concrete fracture. Tesis de doctorado, Universidad de Tecnología de Delft.
- [32] Rodríguez, M. E. y Restrepo J. I. (2012), “Práctica y diseño sísmico de edificios en México. Cambios necesarios”. Revista de Ingeniería Sísmica, No. 86, pp. 89-118.
- [33] RCDF-04 (2004), “Reglamento de Construcciones del Departamento del Distrito Federal”, Gaceta Oficial del Distrito Federal, octubre.
- [34] RCDF-17 (2017), “Reglamento de Construcciones del Departamento del Distrito Federal”, Gaceta Oficial del Distrito Federal, diciembre.
- [35] Tena C.A, Gatica A.G., Urbina C.L.A y Victoria T.L. (2012). “Impacto de la disposición de vigas secundarias en losas perimetralmente apoyadas en el comportamiento sísmico de edificios diseñados con base en marcos de concreto reforzado”. Revista internacional de Ingeniería de Estructuras, Vol. 17, 1 y 2, 63-85.
- [36] Tena C.A., (2018). “Algunos aspectos a considerar en el modelado de estructuras para el análisis y diseño por sismo”. Sociedad Mexicana de Ingeniería estructural, XXI Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, Campeche, Campeche.
- [37] Tena C.A., (2019). “Rigideces efectivas de vigas de concreto reforzado para diseño sísmico: mitos y realidades”. Revista internacional de Ingeniería de Estructuras. 24, 1, 1-38

[38] Villafuerte, H. (2020), “Diseño sísmico de estructuras de concreto reforzado considerando diferentes criterios para definir la rigidez efectiva de los elementos estructurales”, Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Chiapas, en prensa.

[39] William, K.J., Warnke E.D. (1975). Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete. Proceedings of the International Association for Bridge and Structural Engineering, 19, ISMES, Bergamo, Italia, 174.

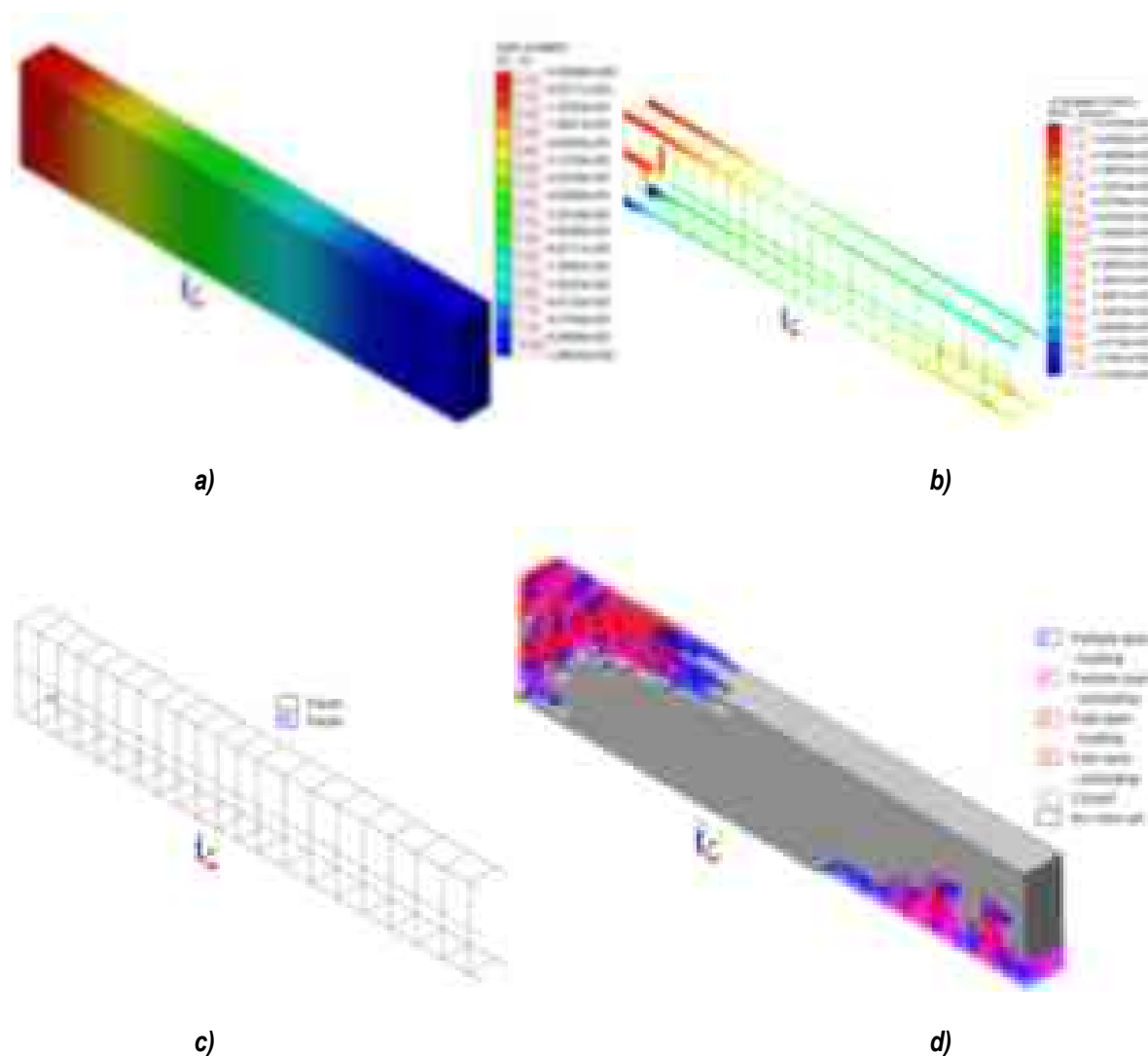
[40] Xiao S., Cao W. y Pan H. (2012). “Experiment of Reinforce Concrete Beams at Different Loading Rates”. 15th World Conference on Earthquake Engineering.

## **NOTA ACLARATORIA RESPECTO A LOS APÉNDICES**

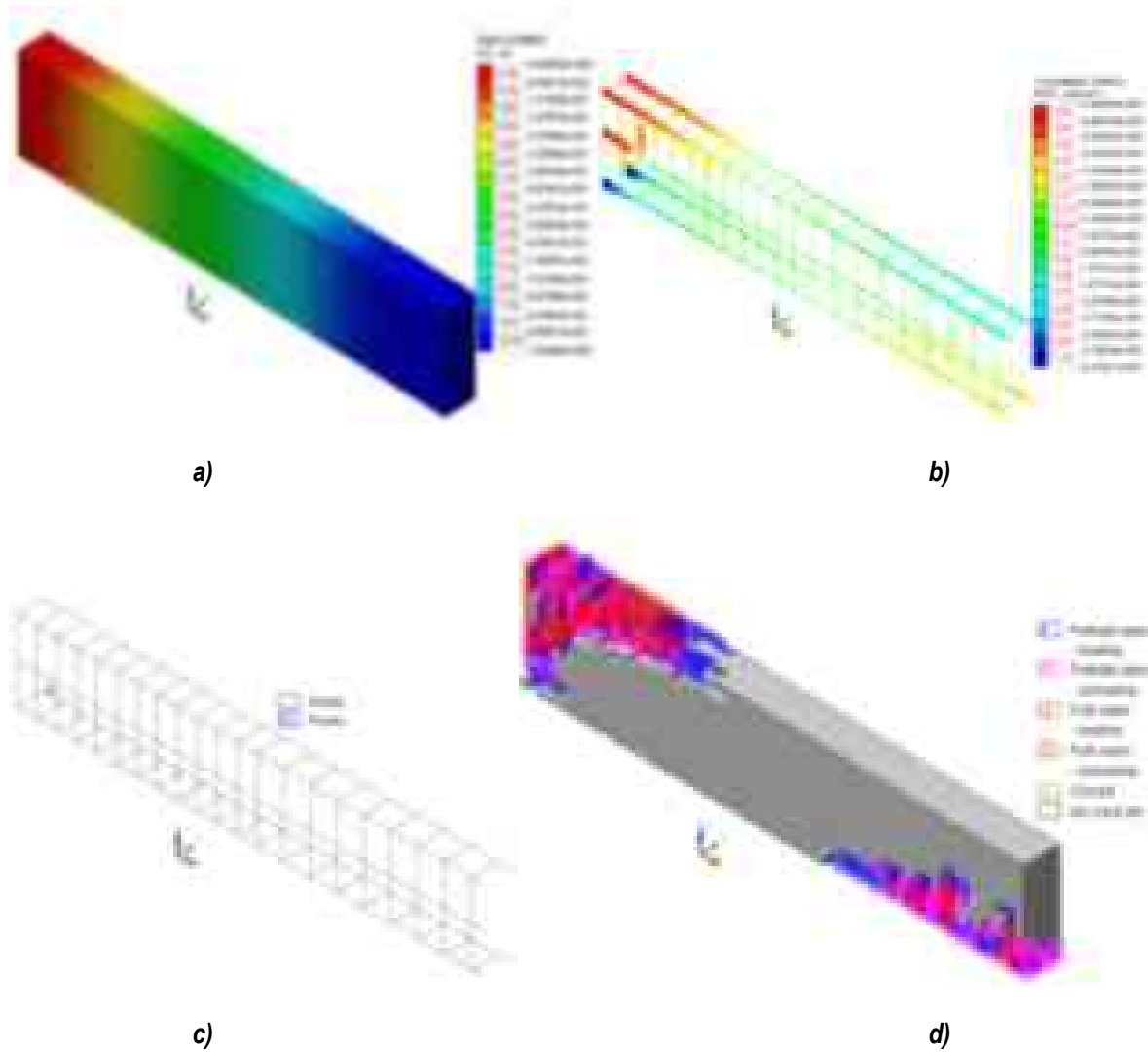
Únicamente se incluyen en formato electrónico en un CD-ROM adjunto al documento impreso.

# APÉNDICE A

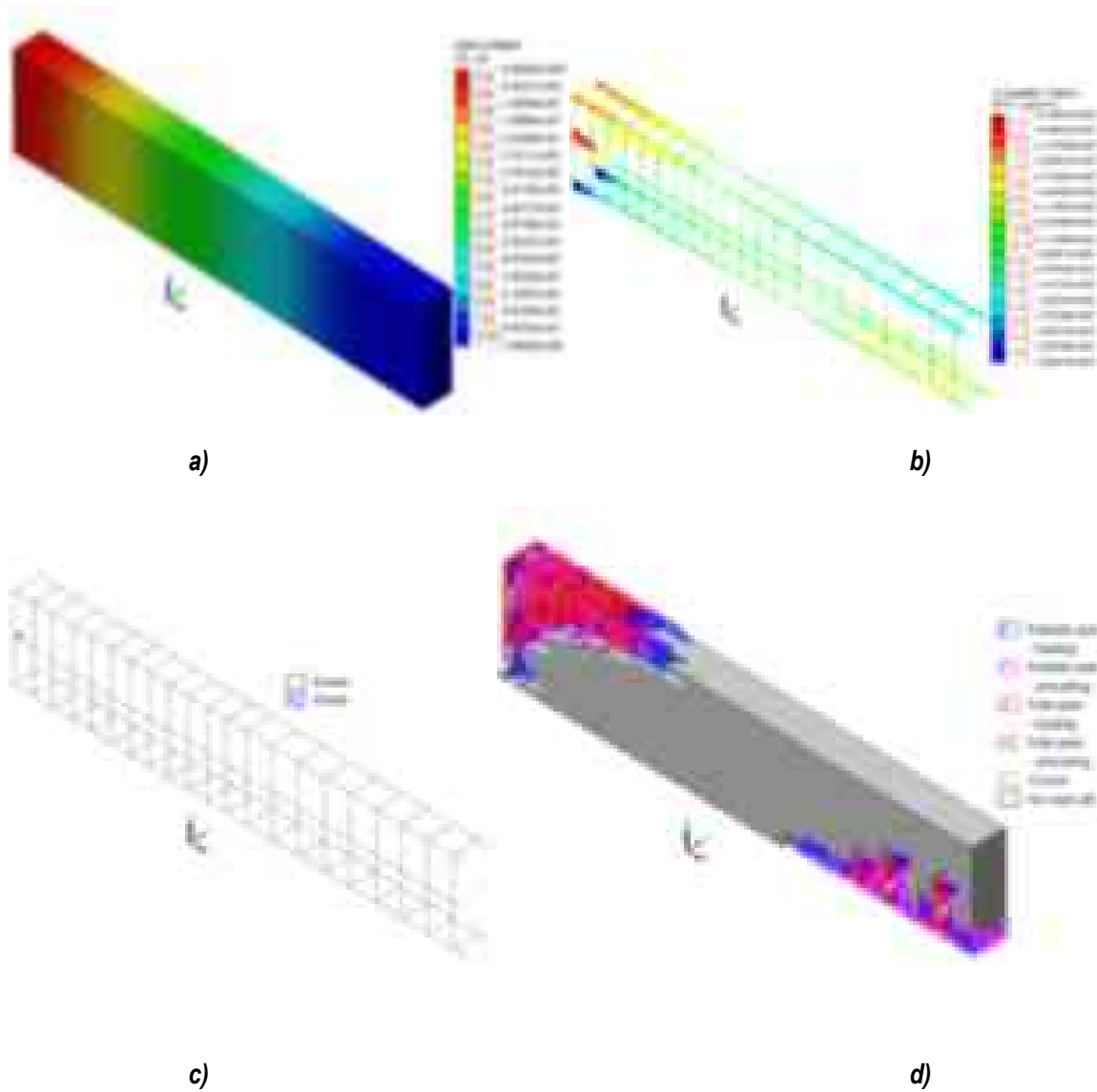
En esta sección, de la Figura A.1 a la A.18 se muestran los diferentes estados de daño en condición de la primera fluencia del acero de refuerzo de las vigas de concreto reforzado de los modelos V-1, V-2 y V-3. Se consideraron seis resistencias a la compresión del concreto  $f'_c$ : 250, 300, 350, 400, 450 y 500 kgf/cm<sup>2</sup> con relación entre cuantías en tensión y compresión de  $\rho/\rho' = 1.4$ , para la viga 2  $\rho/\rho' = 1.6$  y para la viga 3  $\rho/\rho' = 2$ .



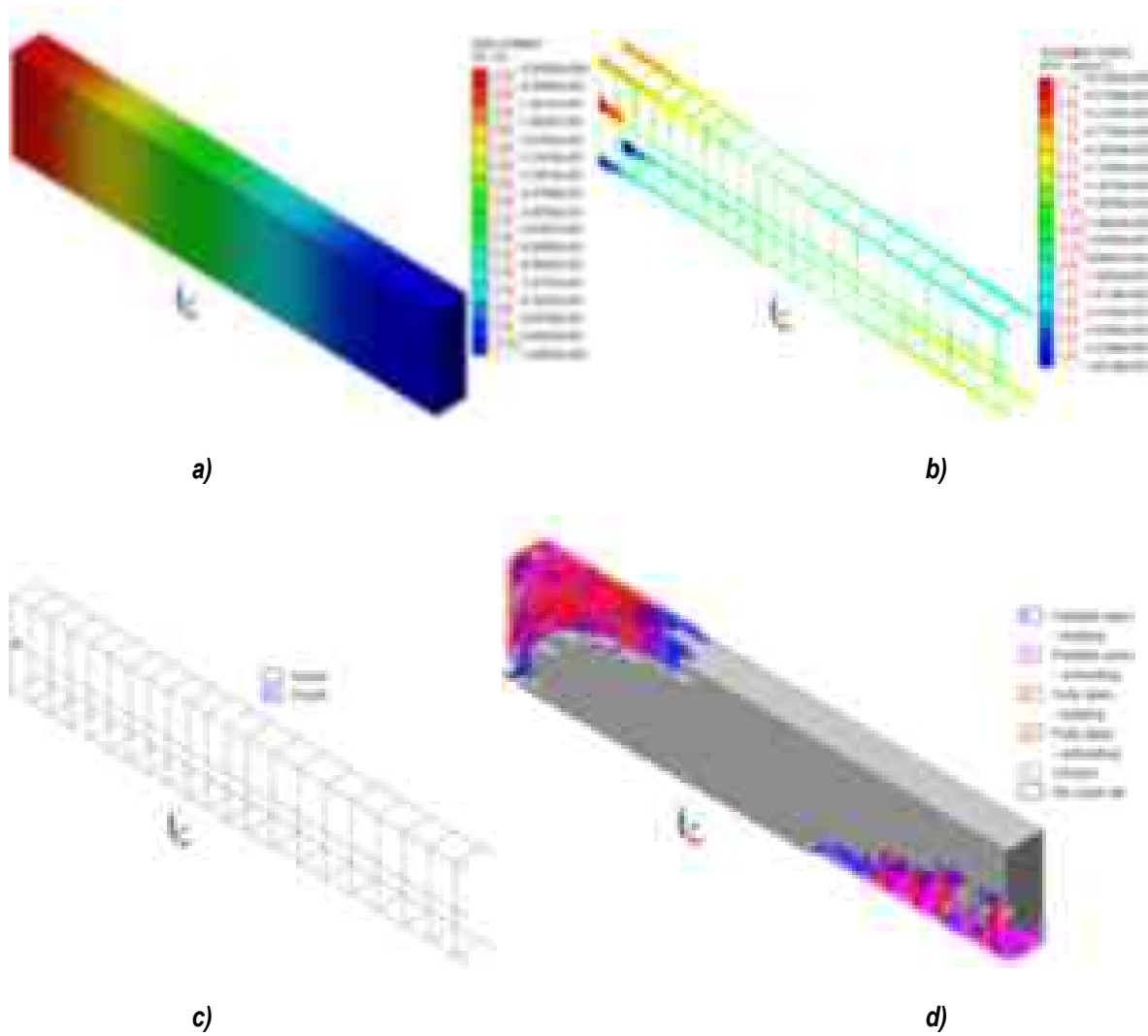
**Figura A. 1** Modelo V-1, esfuerzo a la compresión  $f'_c=250$  kgf/cm<sup>2</sup>: a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



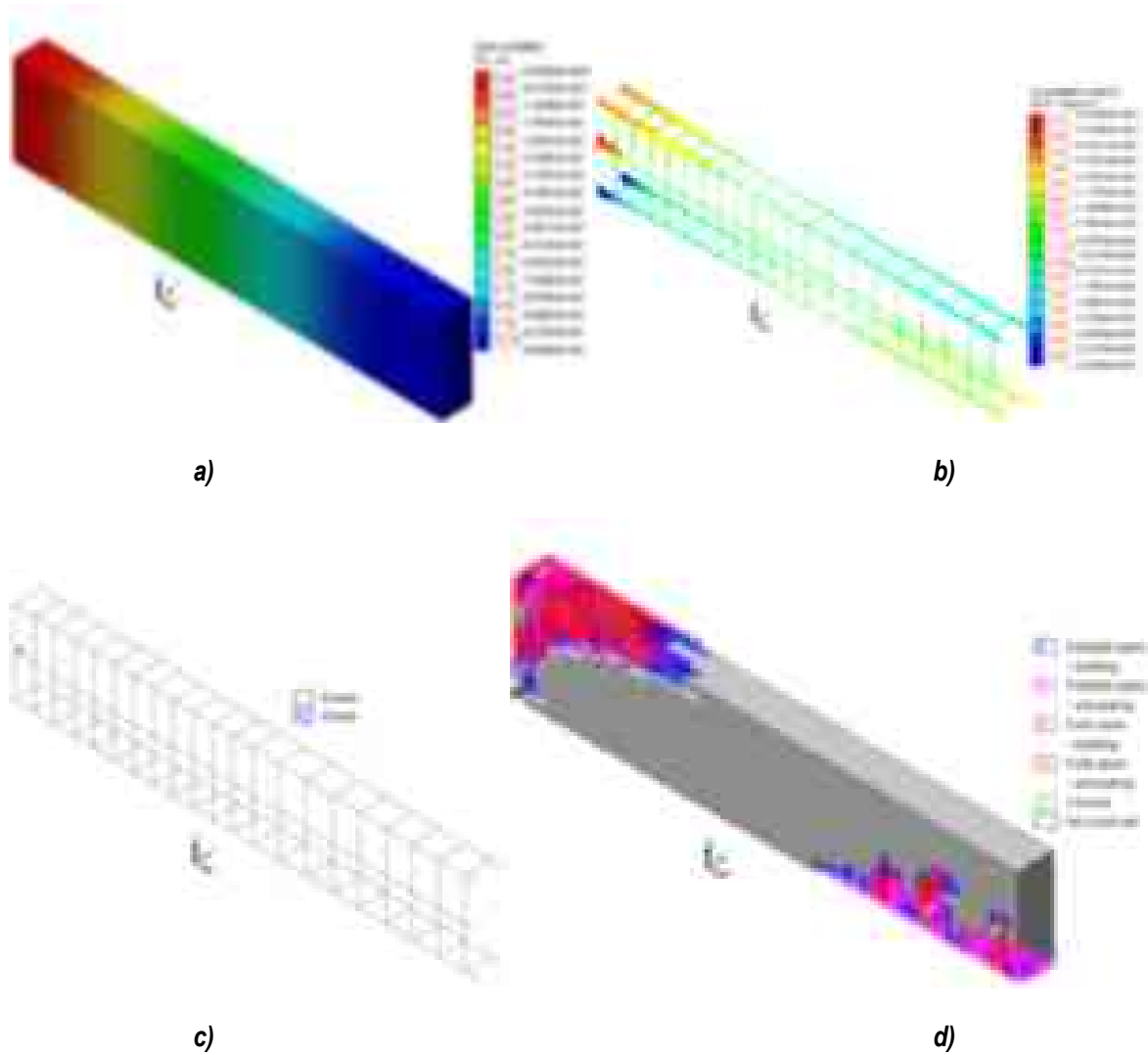
**Figura A. 2** Modelo V-1, esfuerzo a la compresión  $f'_c=300 \text{ kgf/cm}^2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



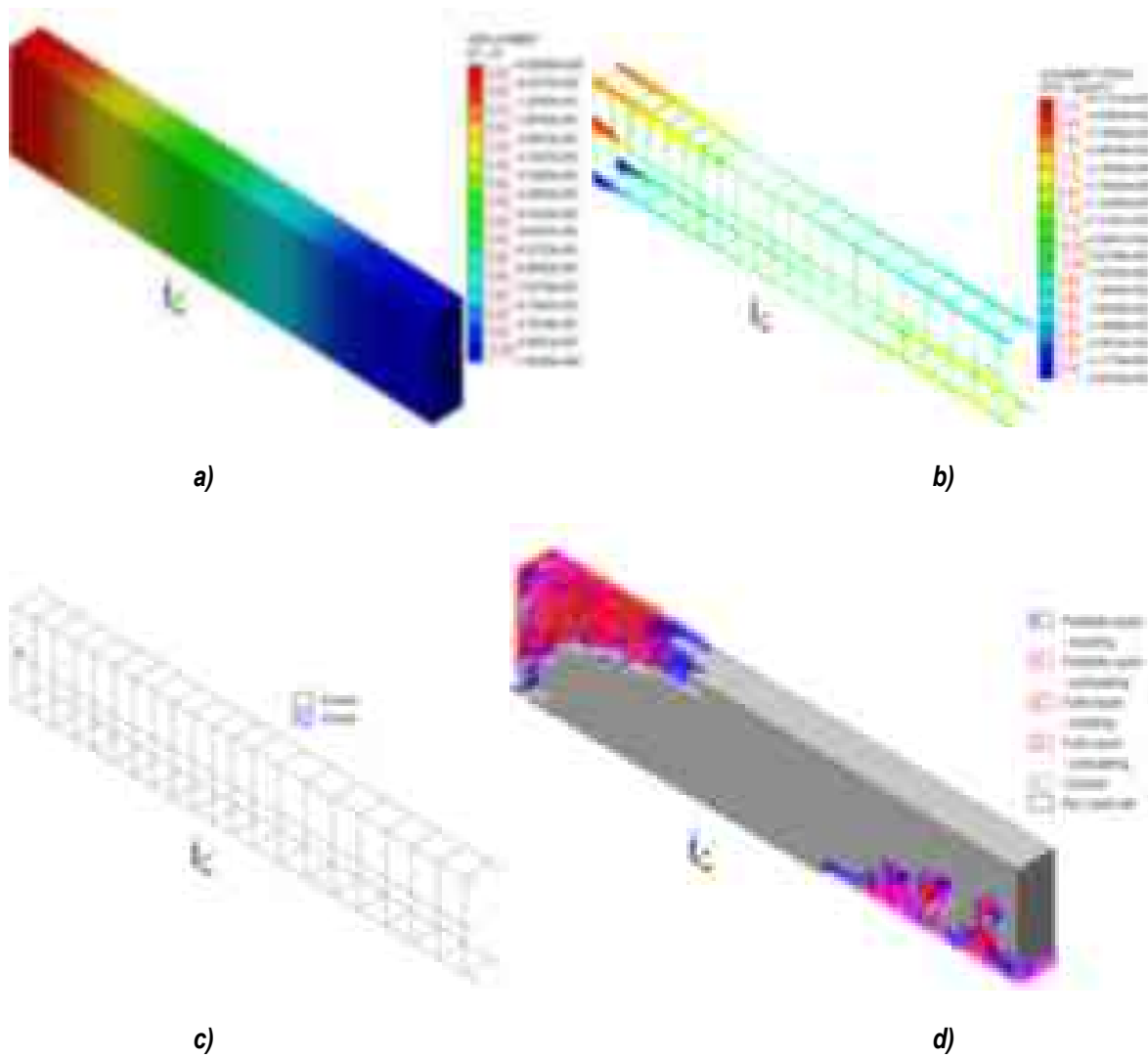
**Figura A. 3** Modelo V-1, esfuerzo a la compresión  $f'_c=350 \text{ kgf/cm}^2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



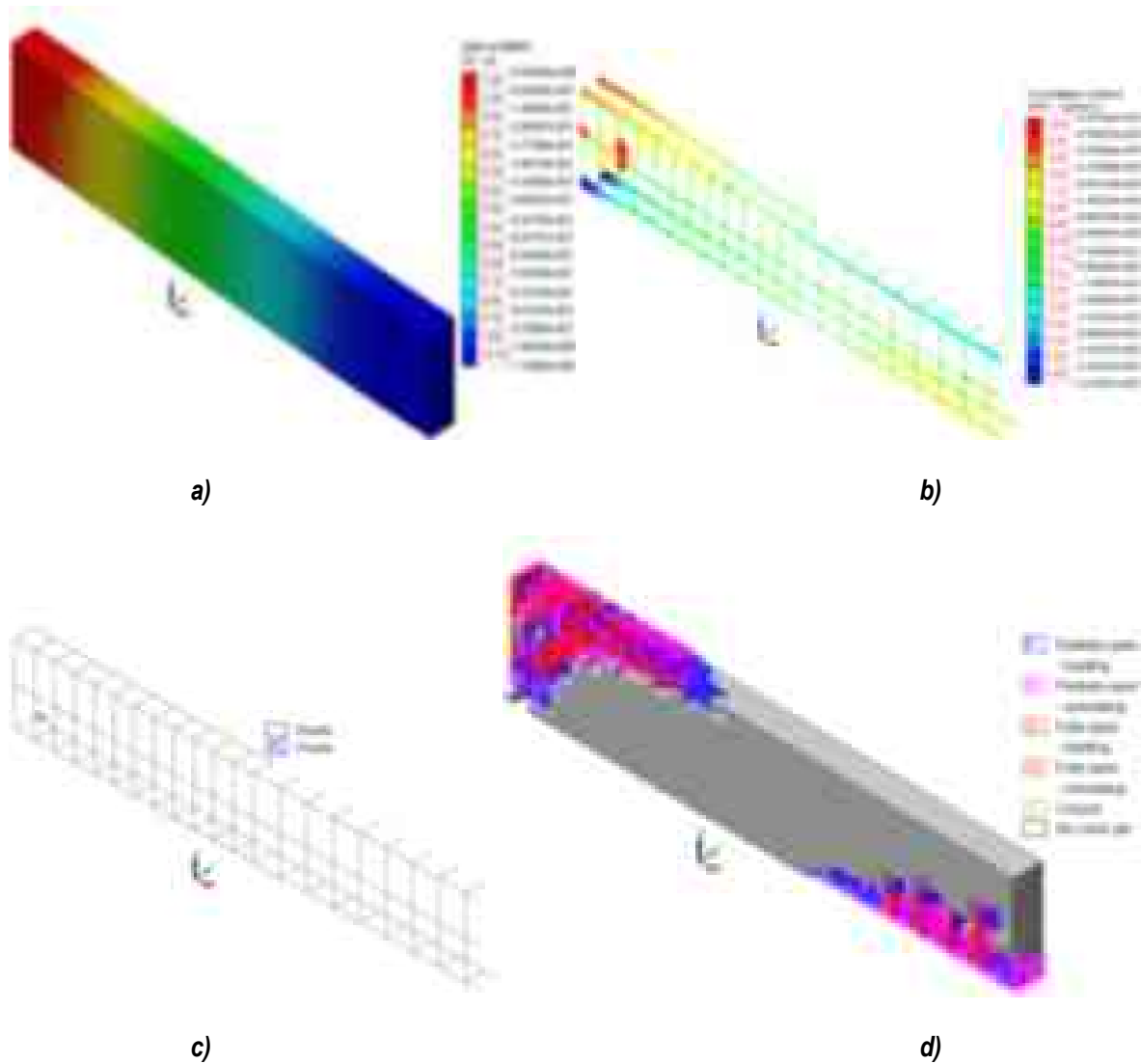
**Figura A. 4** Modelo V-1, esfuerzo a la compresión  $f'_c=400 \text{ kgf/cm}^2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



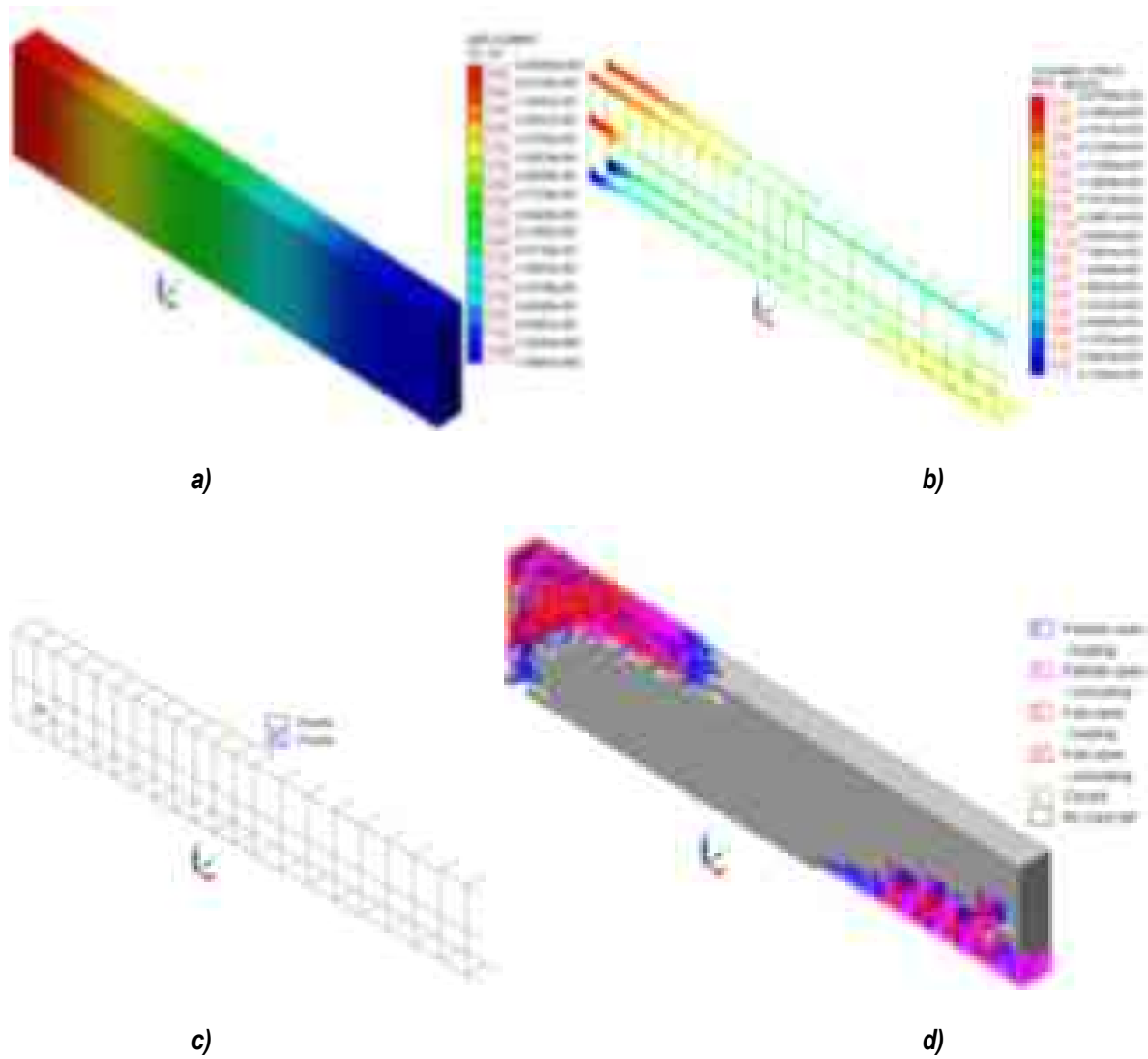
**Figura A. 5** Modelo V-1, esfuerzo a la compresión  $f'_c=450 \text{ kgf/cm}^2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



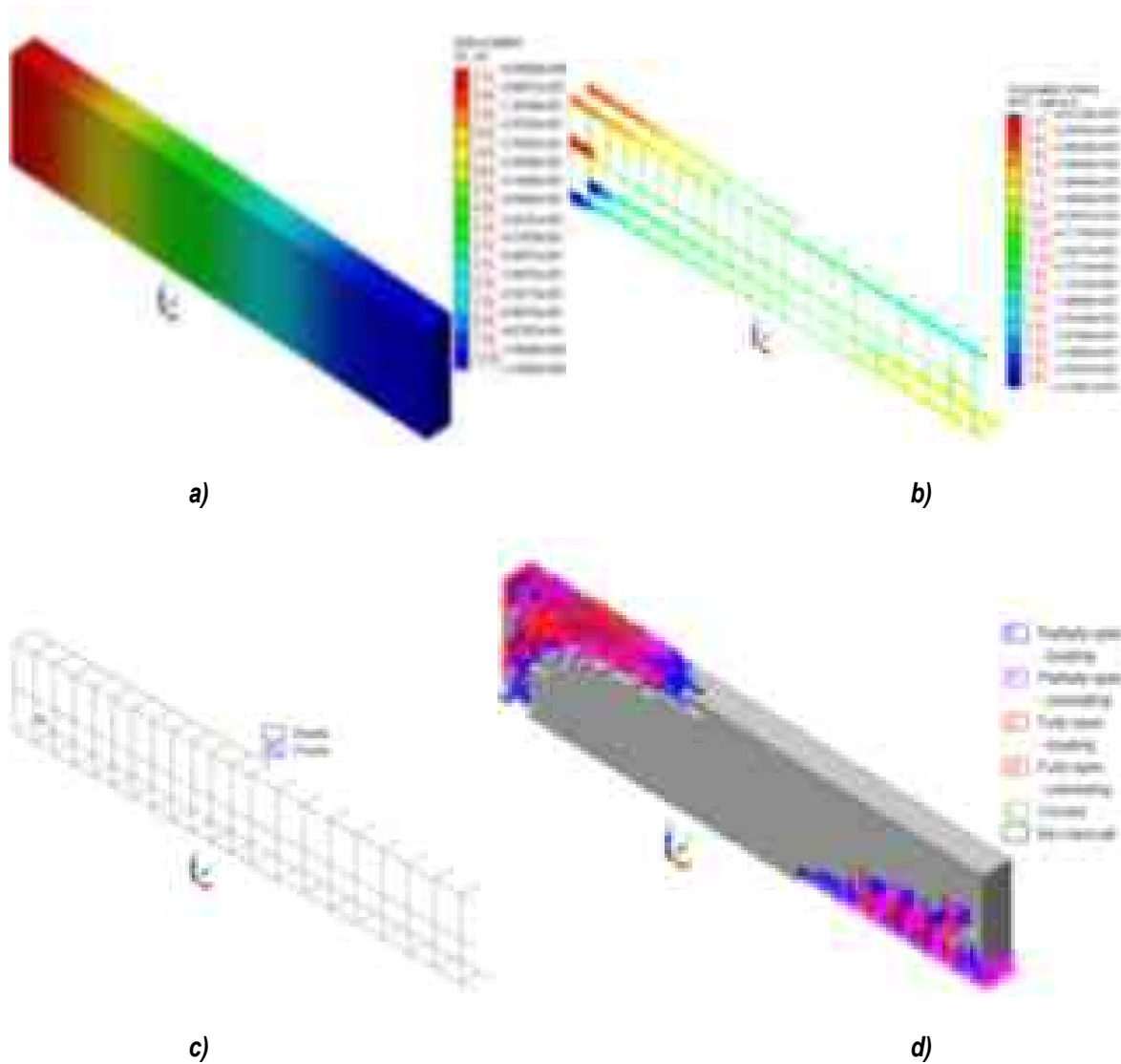
**Figura A. 6** Modelo V-1, esfuerzo a la compresión  $f'_c=500 \text{ kgf/cm}^2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



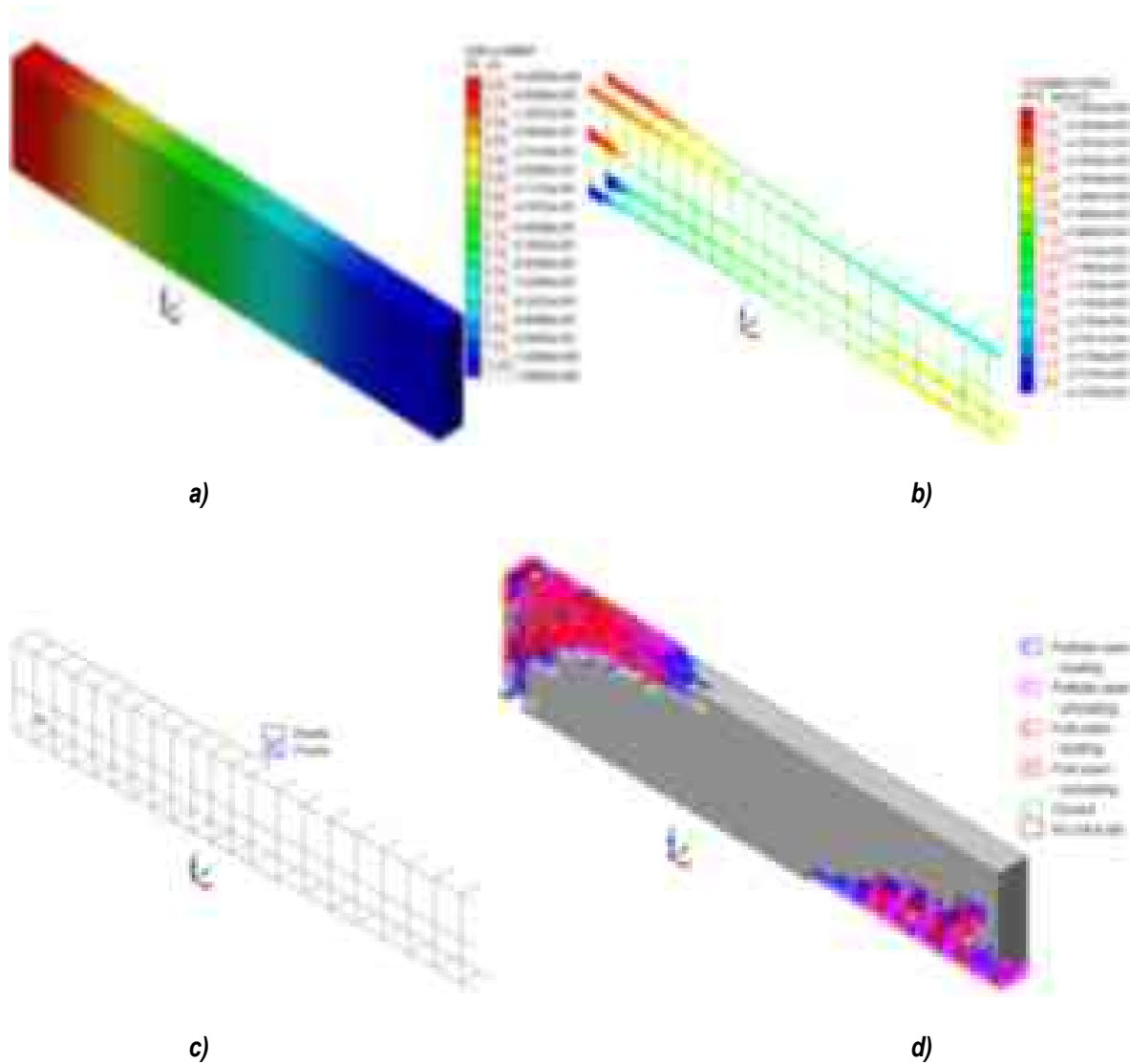
**Figura A. 7** Modelo V-2, esfuerzo a la compresión  $f'_c=250 \text{ kgf/cm}^2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



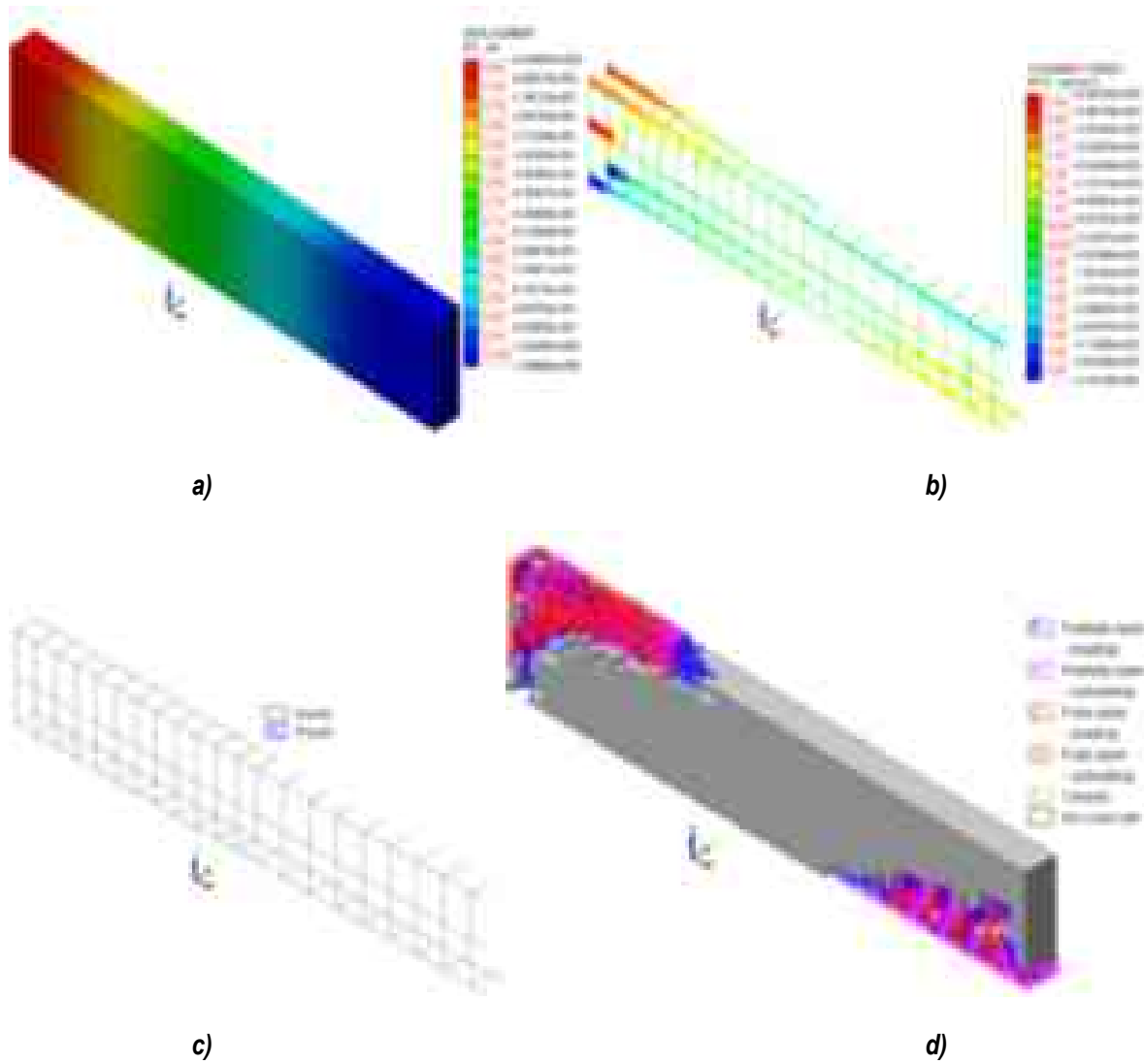
**Figura A. 8** Modelo V-2, esfuerzo a la compresión  $f'_c=300 \text{ kgf/cm}^2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



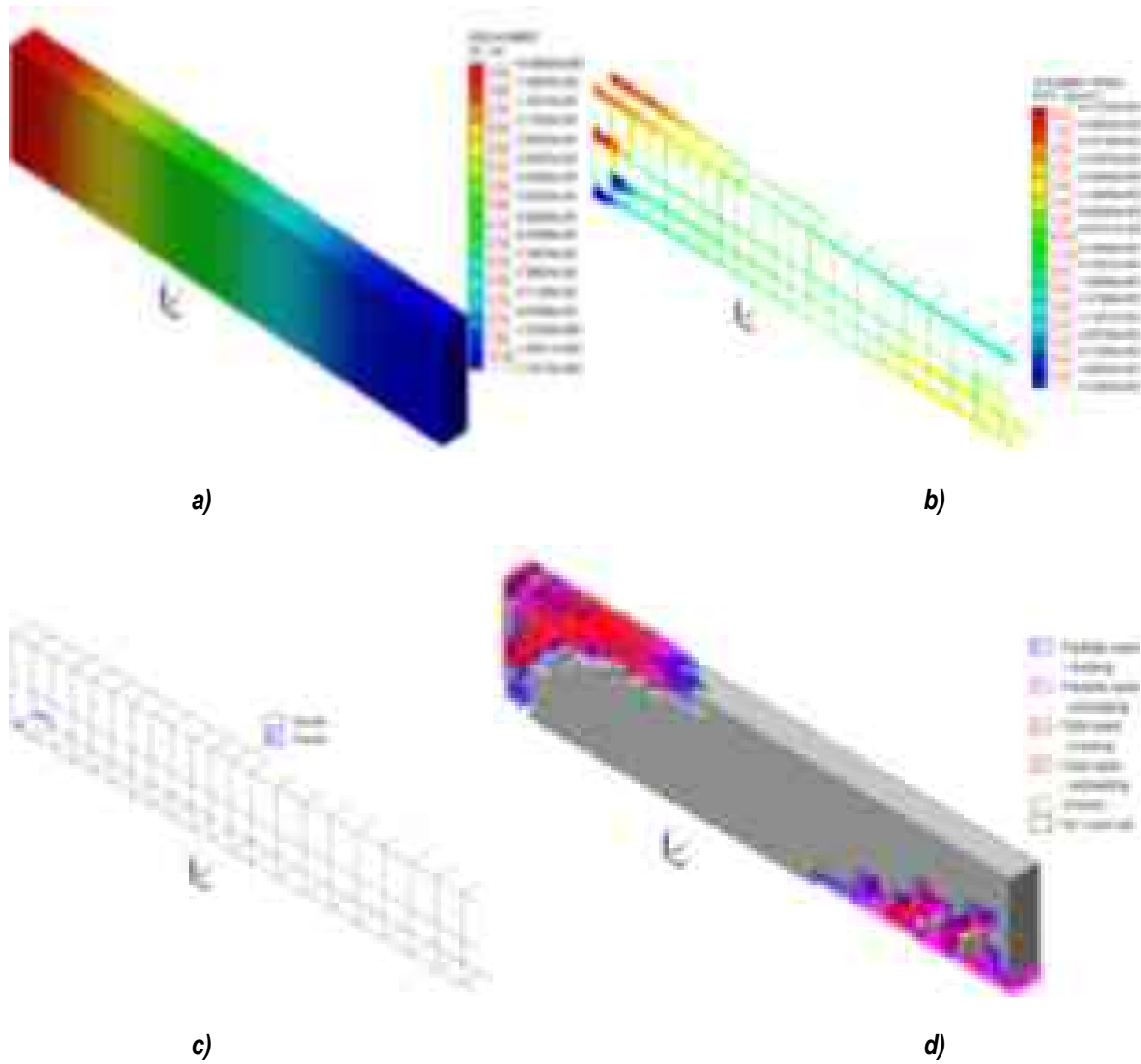
**Figura A. 9** Modelo V-2, esfuerzo a la compresión  $f'_c=350 \text{ kgf/cm}^2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



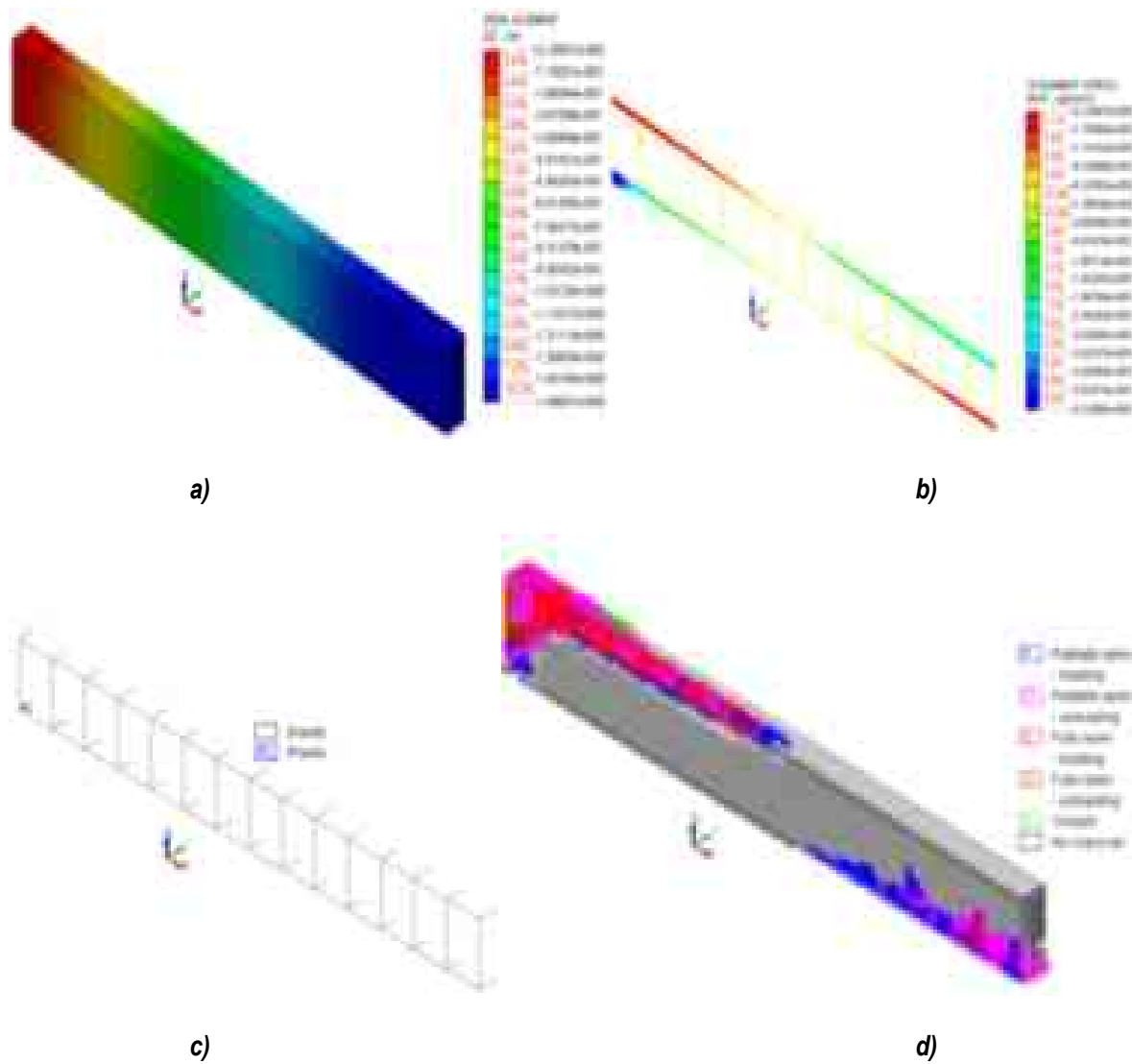
**Figura A. 10** Modelo V-2, esfuerzo a la compresión  $f'_c=400 \text{ kgf/cm}^2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



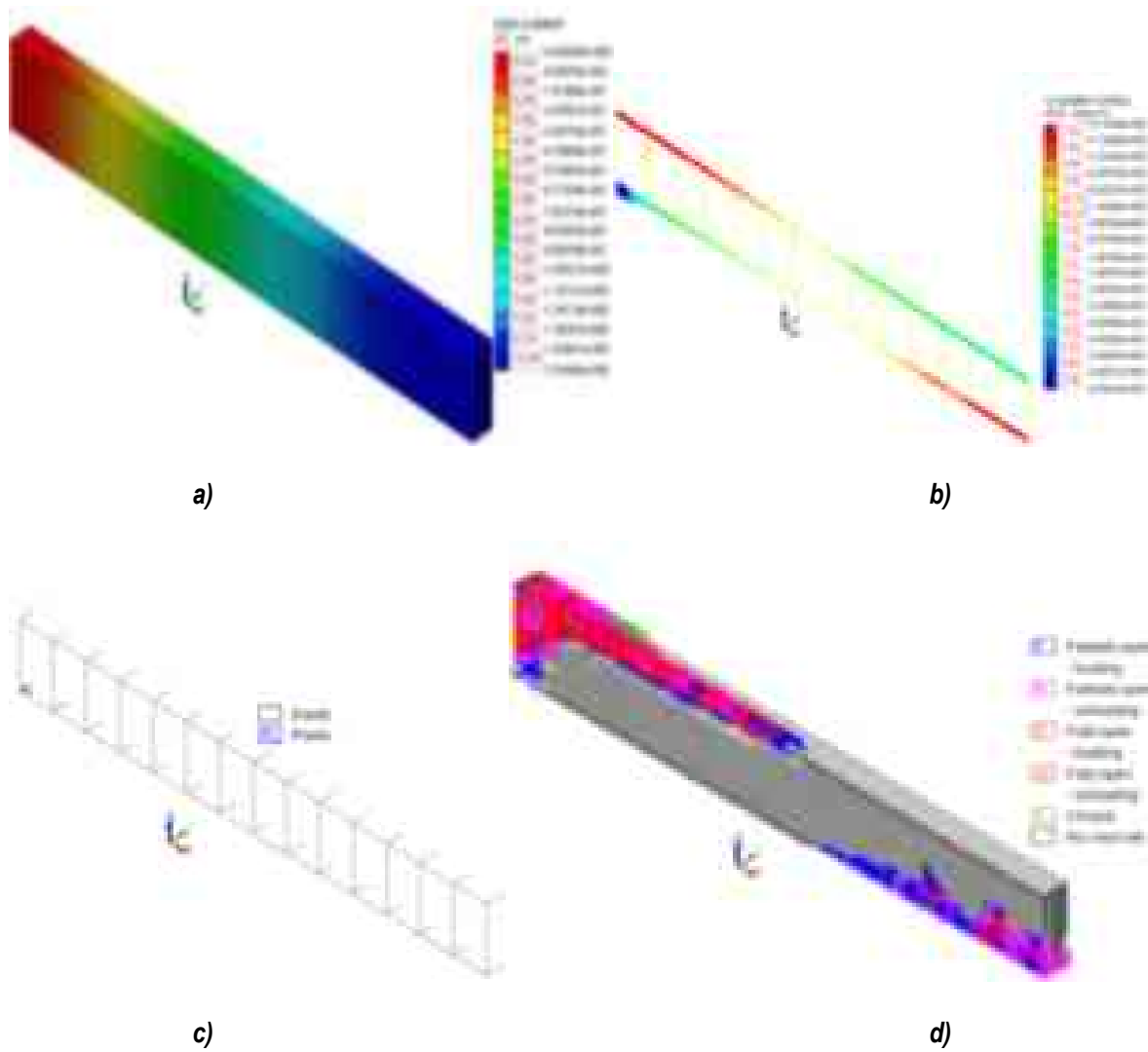
**Figura A. 11 Modelo V-2, esfuerzo a la compresión  $f'_c=450 \text{ kgf/cm}^2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento**



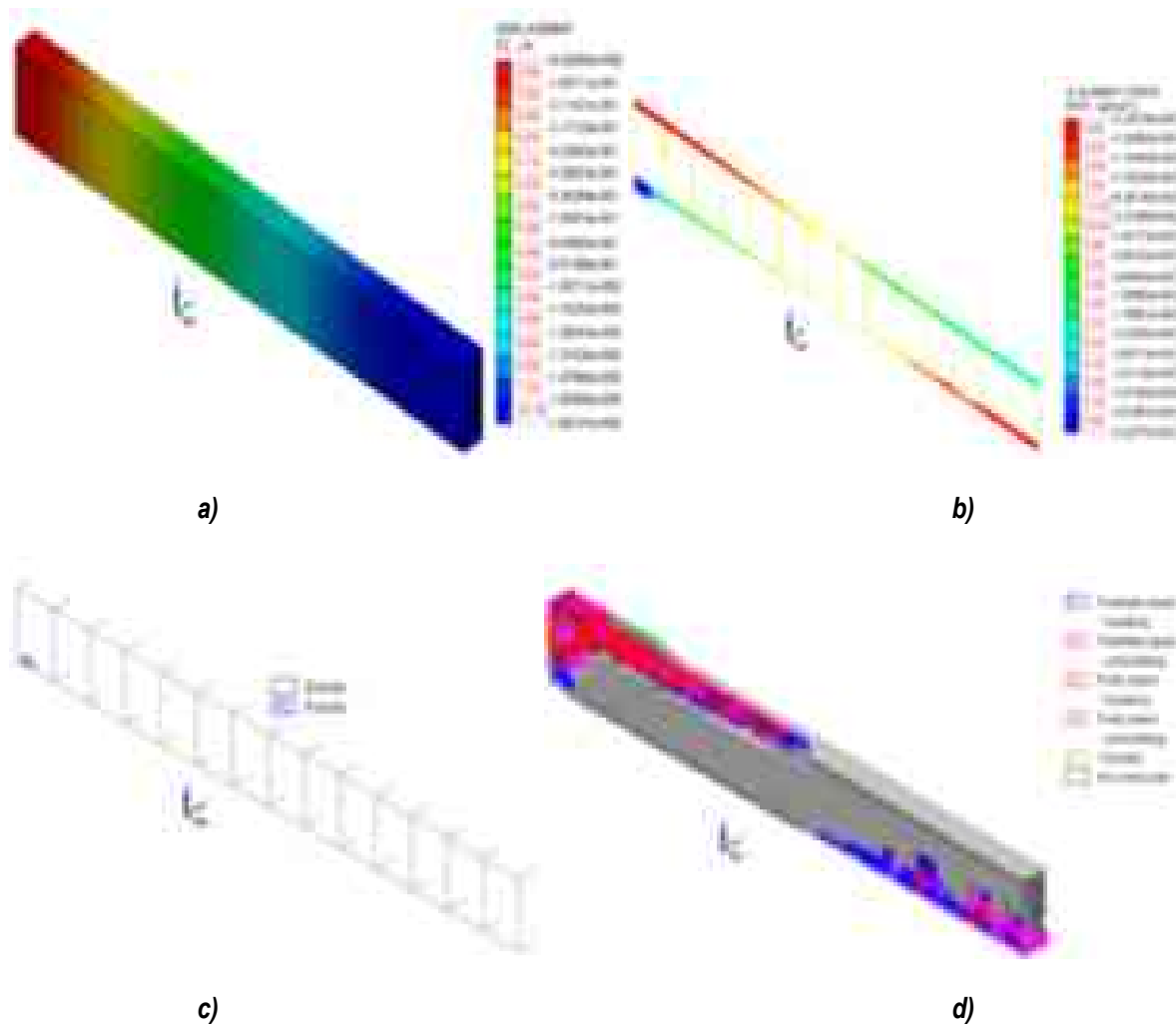
**Figura A. 12** Modelo V-2, esfuerzo a la compresión  $f'_c=500 \text{ kgf/cm}^2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



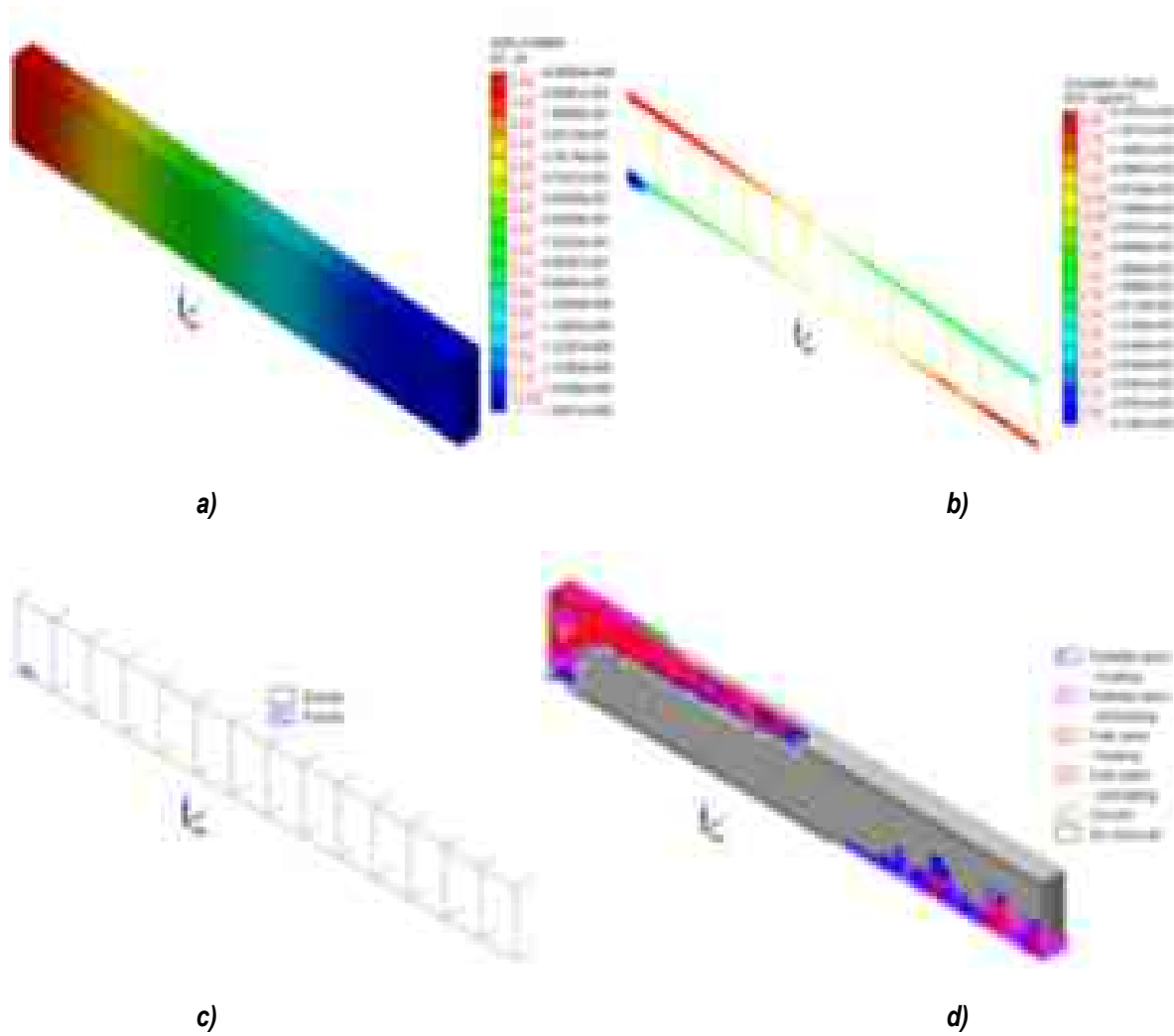
**Figura A. 13** Modelo V-3, esfuerzo a la compresión  $f'_c=250 \text{ kgf/cm}^2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



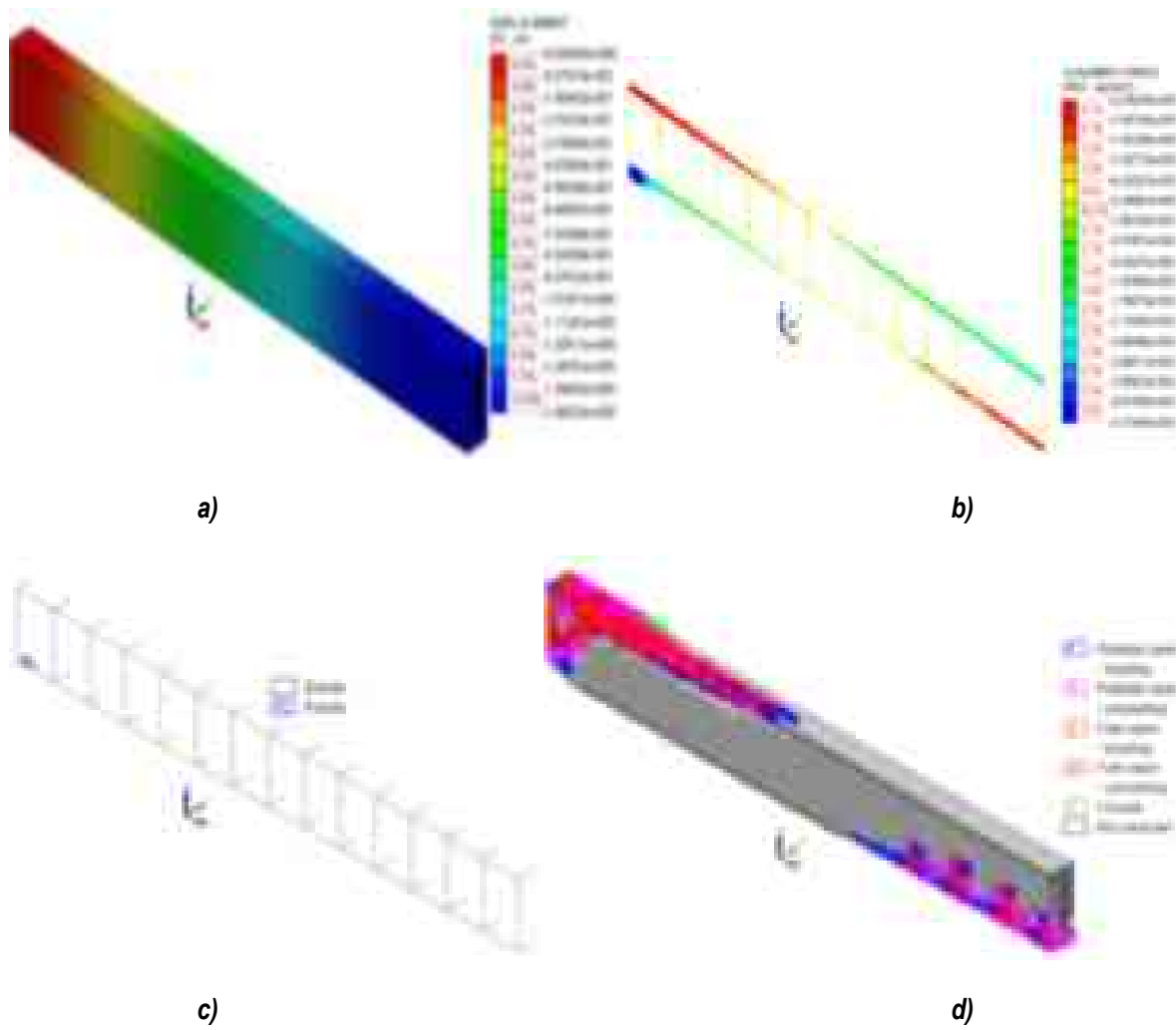
**Figura A. 14** Modelo V-3, esfuerzo a la compresión  $f'_c=300 \text{ kgf/cm}^2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



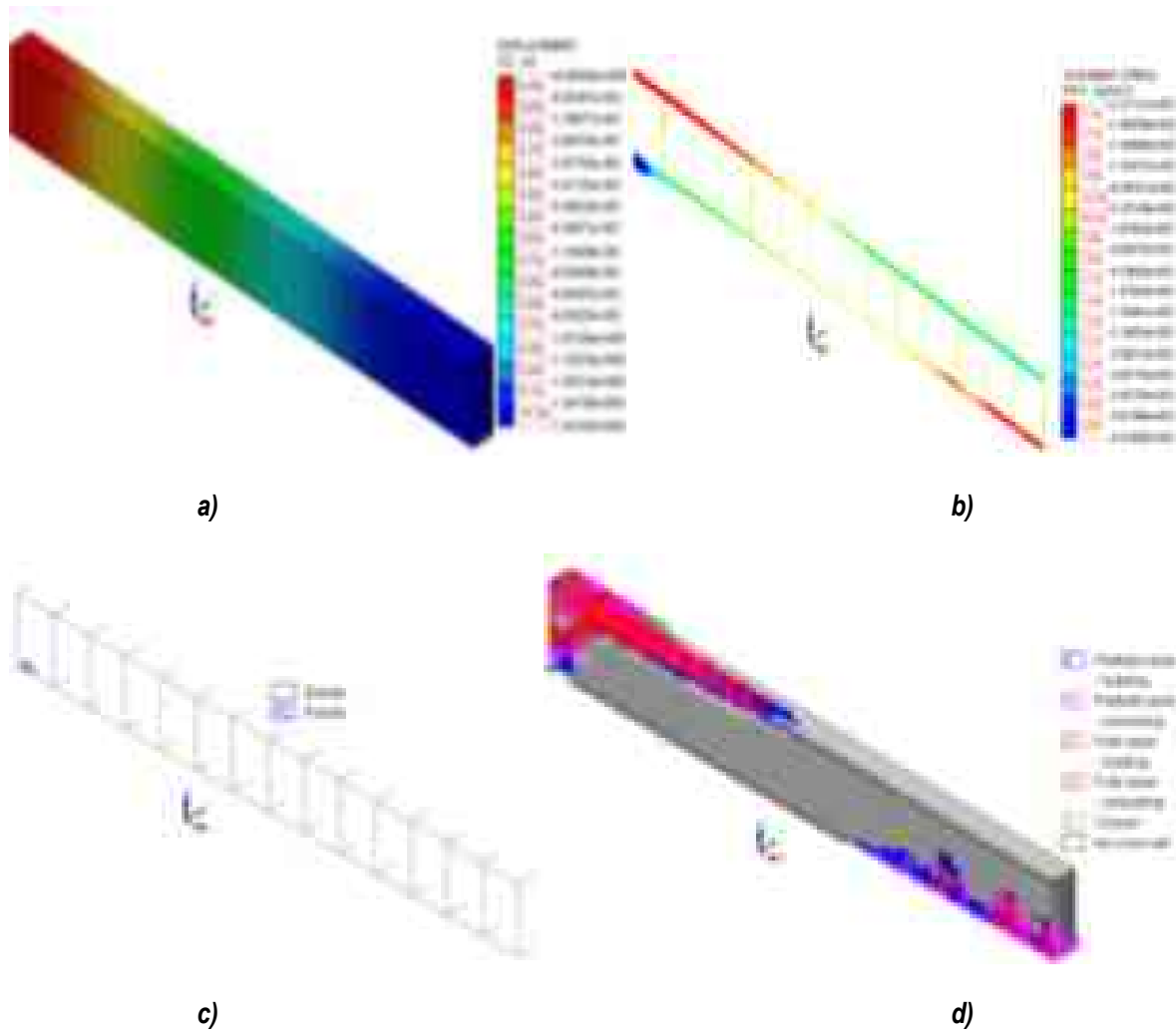
**Figura A. 15** Modelo V-3, esfuerzo a la compresión  $f'_c=350 \text{ kgf/cm}^2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



**Figura A. 16** Modelo V-3, esfuerzo a la compresión  $f'_c=400$  kgf/cm<sup>2</sup>: a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



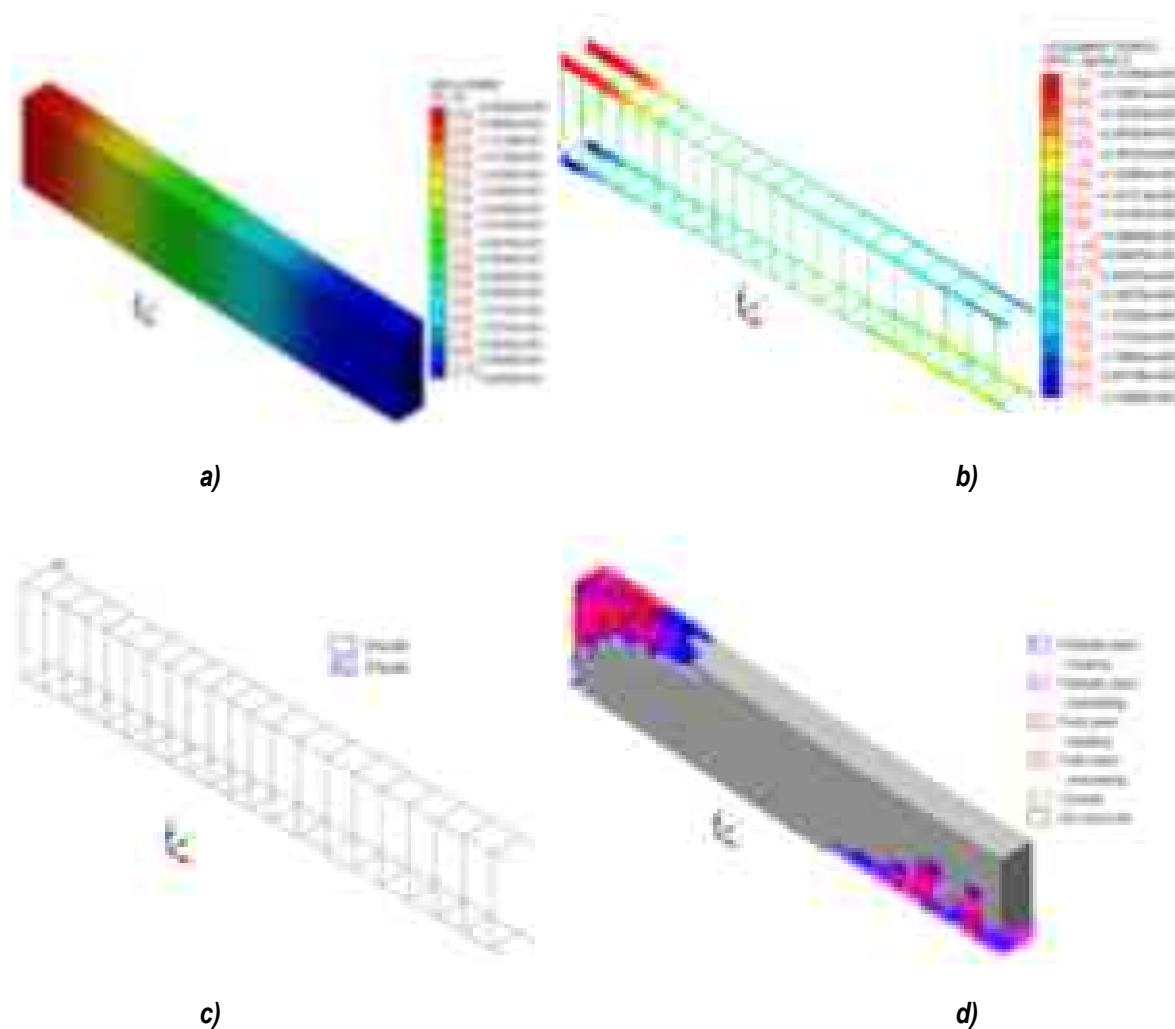
**Figura A. 17** Modelo V-3, esfuerzo a la compresión  $f'_c=450 \text{ kgf/cm}^2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



**Figura A. 18** Modelo V-3, esfuerzo a la compresión  $f'_c=500 \text{ kgf/cm}^2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento

# APÉNDICE B

En esta sección, de la Figura B. 1 a la B. 36 se muestran los diferentes estados de daño en condición de la primera fluencia del acero de refuerzo de los modelos V-1, V-2 y V-3, las vigas están empotradas y sometidas a lo largo del claro a cargas verticales monótonas uniformemente distribuidas. Por otra parte, de la Figura B. 37- a la B. 72 se muestran las vigas en condición simplemente apoyada y sometida a una carga vertical al centro del claro. Las cuantías consideradas son:  $0.25\rho_{bal}$ ,  $0.45\rho_{bal}$ ,  $0.65\rho_{bal}$  y  $0.90\rho_{bal}$ , así como una relación entre las cuantías de refuerzo longitudinal en tensión y compresión  $\rho/\rho' = 1, 1.5$  y  $2$ .



**Figura B. 1** Modelo V-1,  $0.25\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento

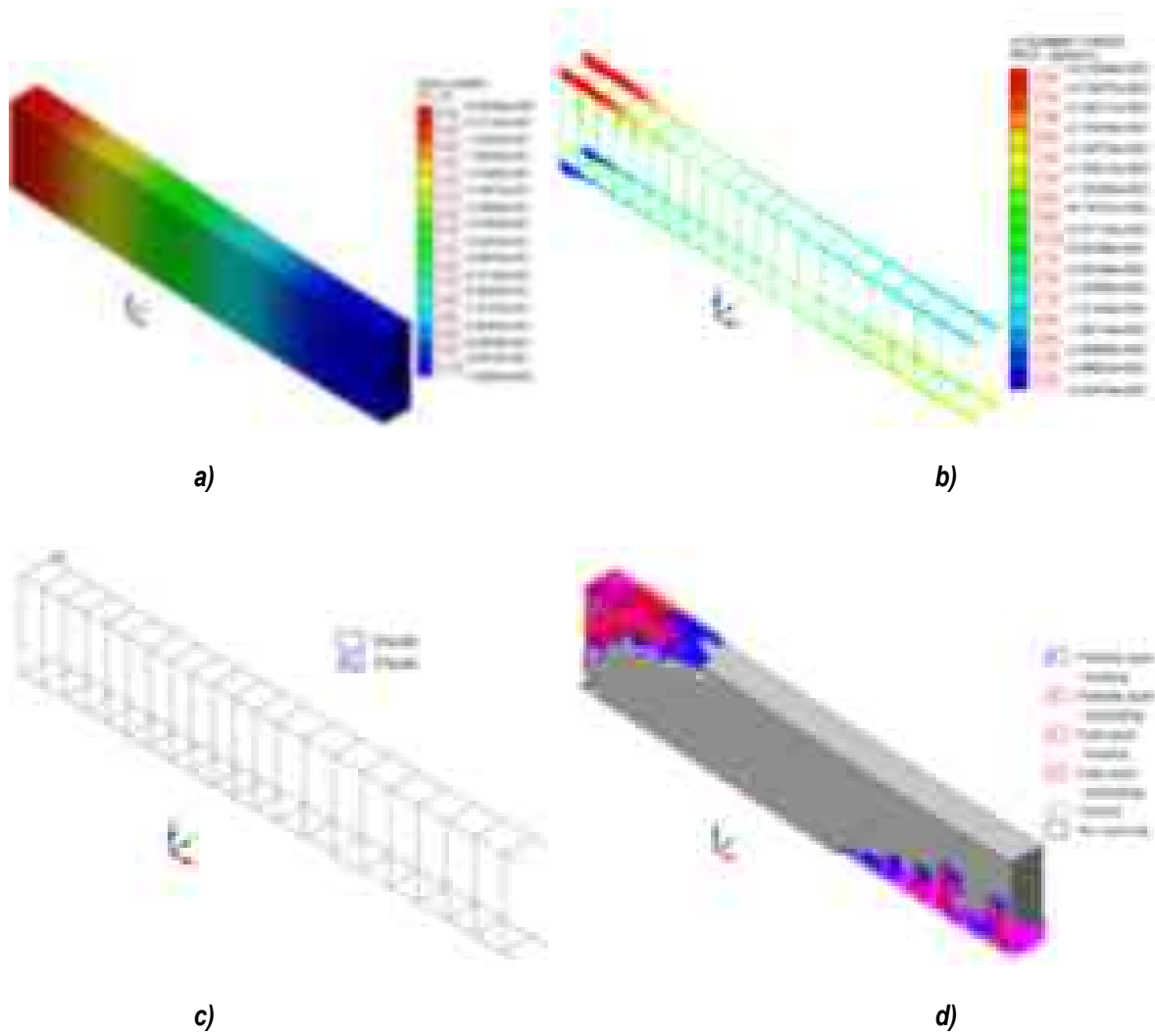
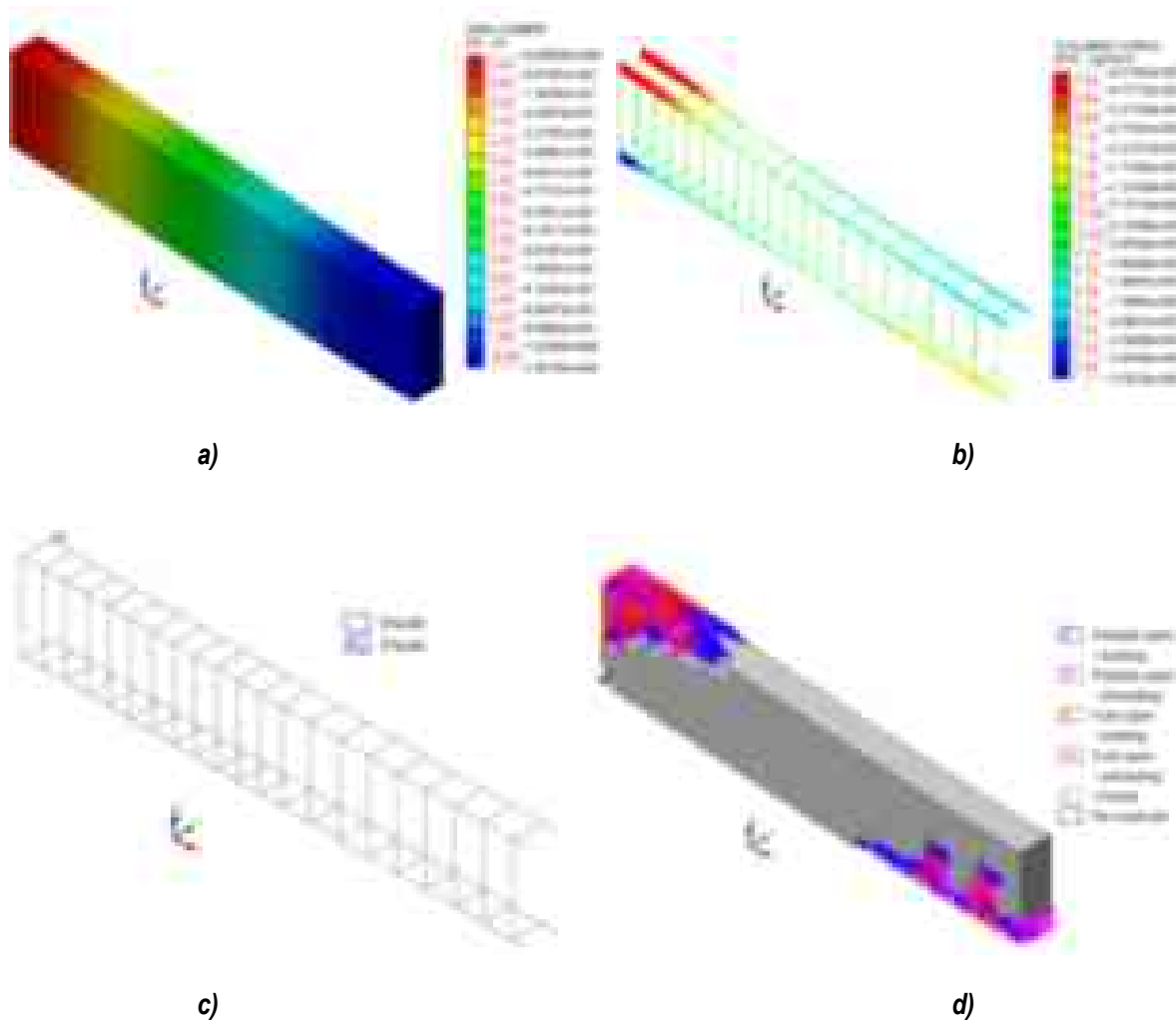
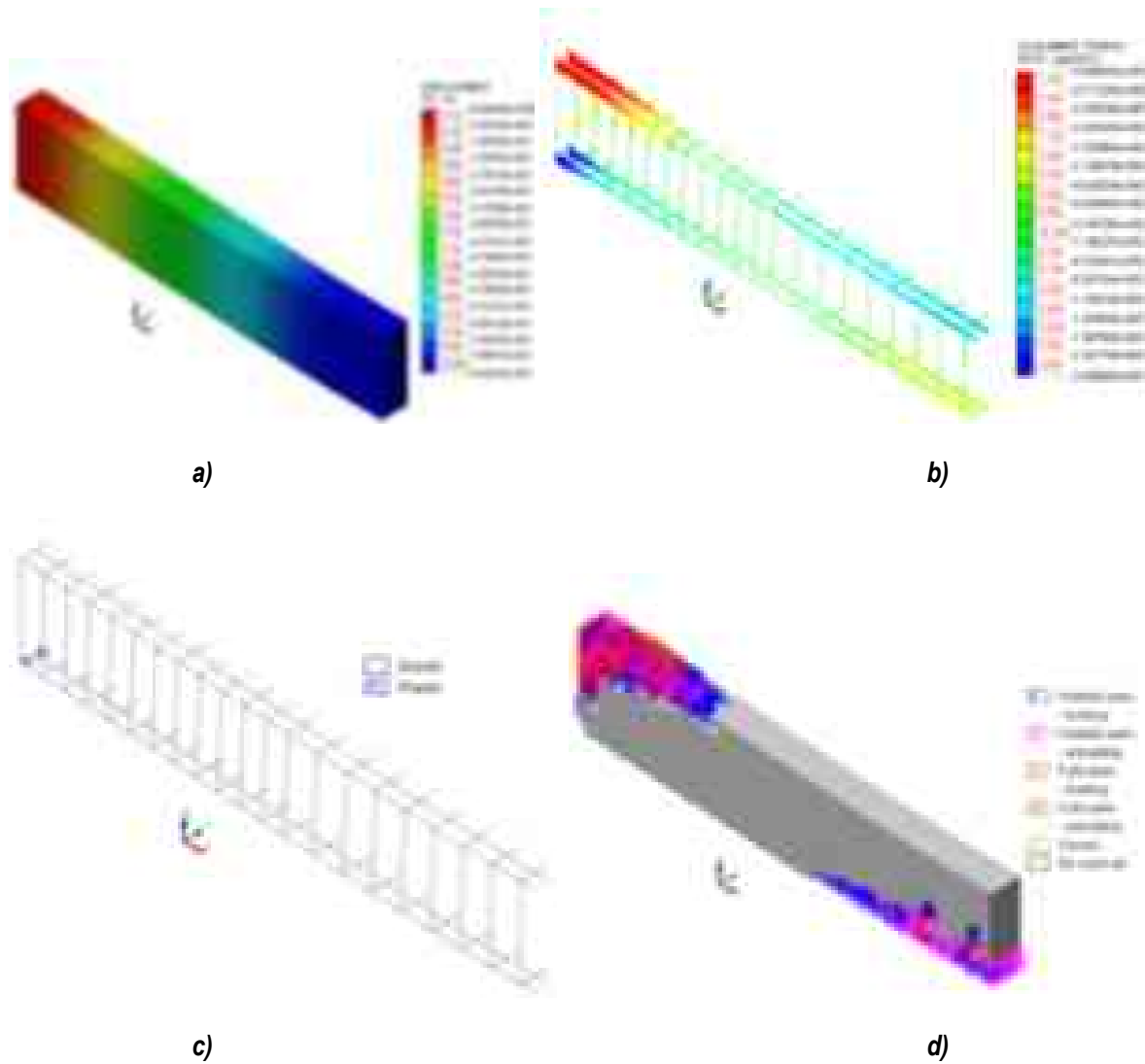


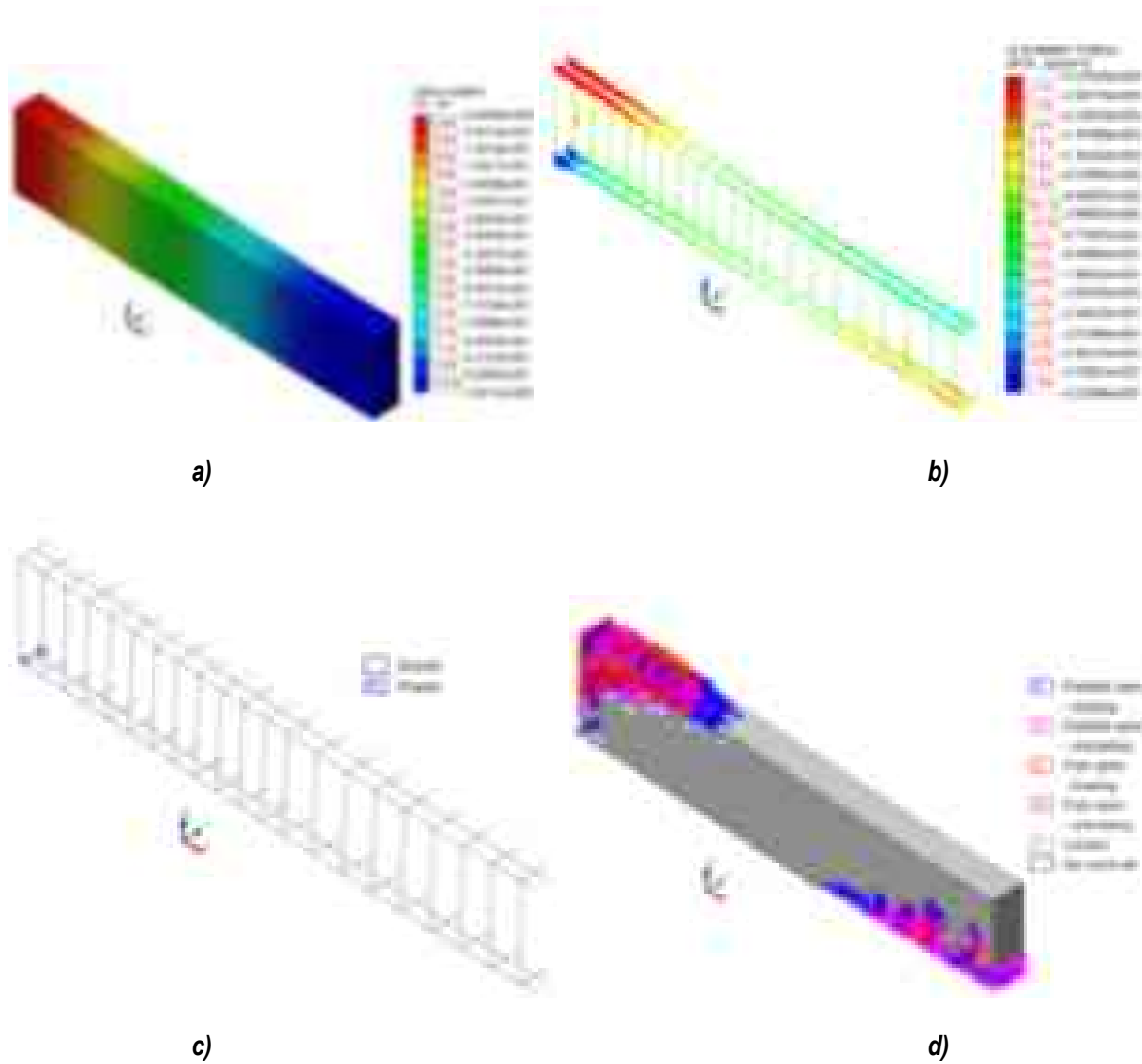
Figura B. 2 Modelo V-1,  $0.25\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



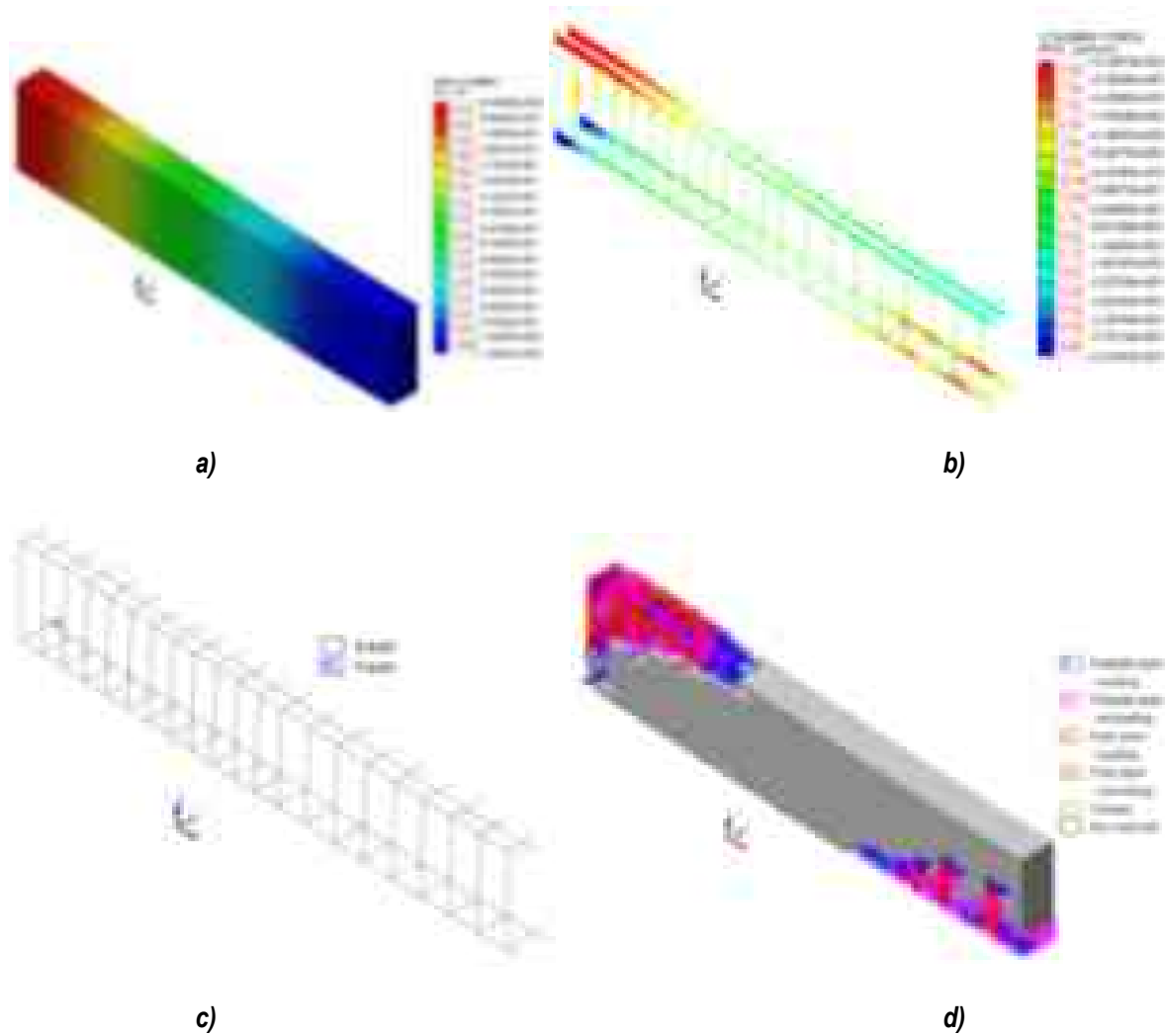
**Figura B. 3** Modelo V-1,  $0.25\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



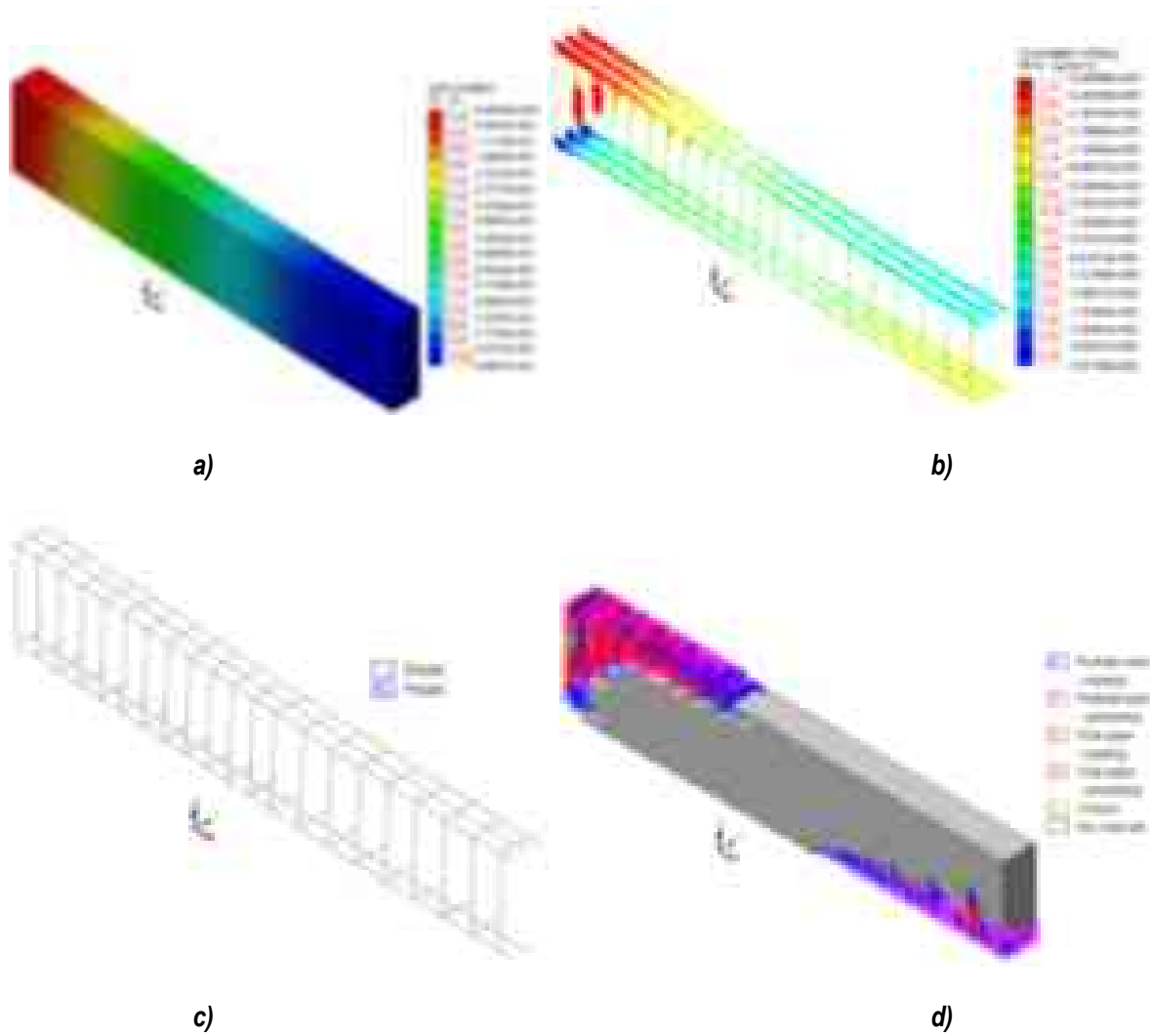
**Figura B. 4** Modelo V-1,  $0.45\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



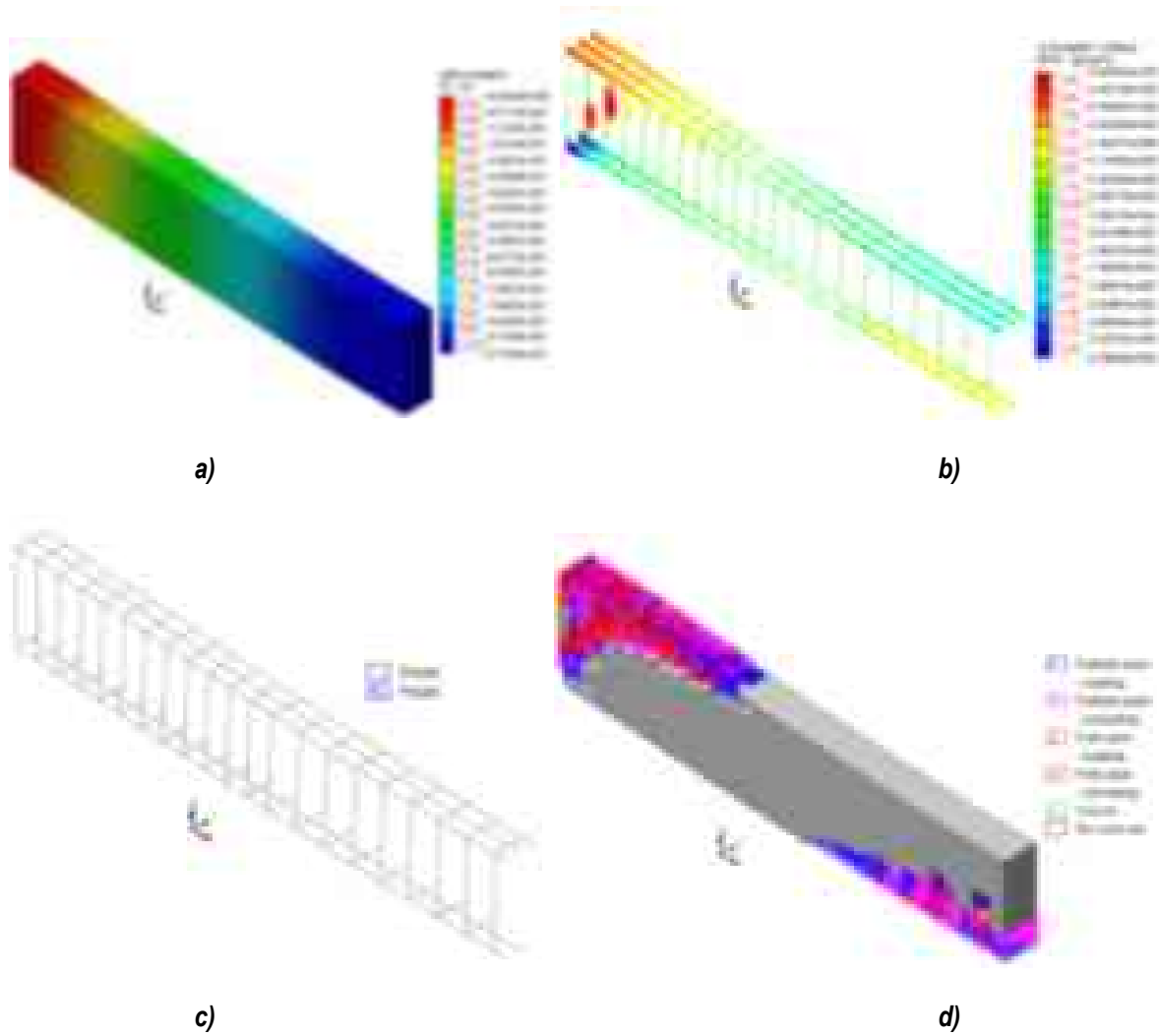
**Figura B. 5 Modelo V-1,  $0.45\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento**



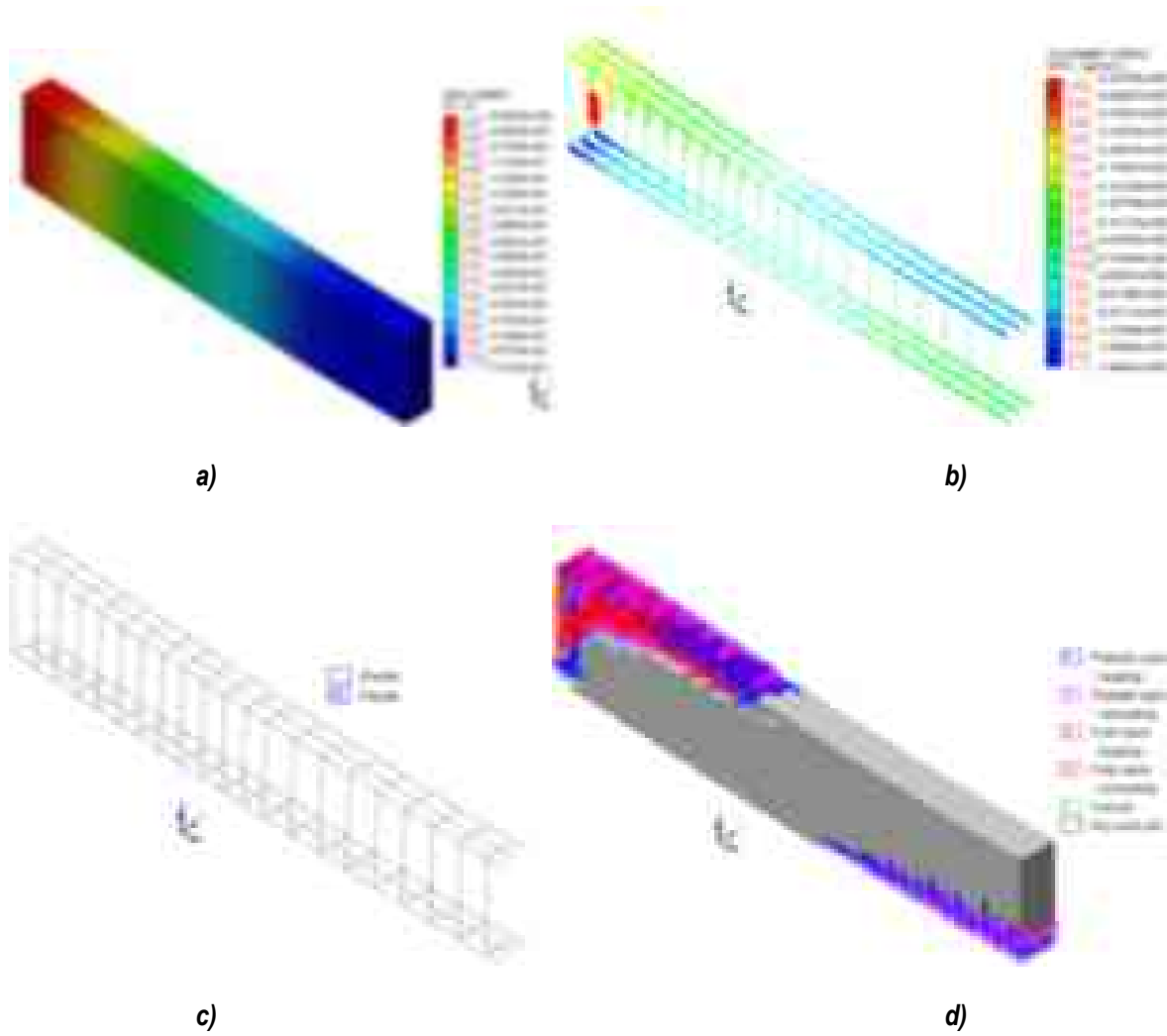
**Figura B. 6** Modelo V-1,  $0.45\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



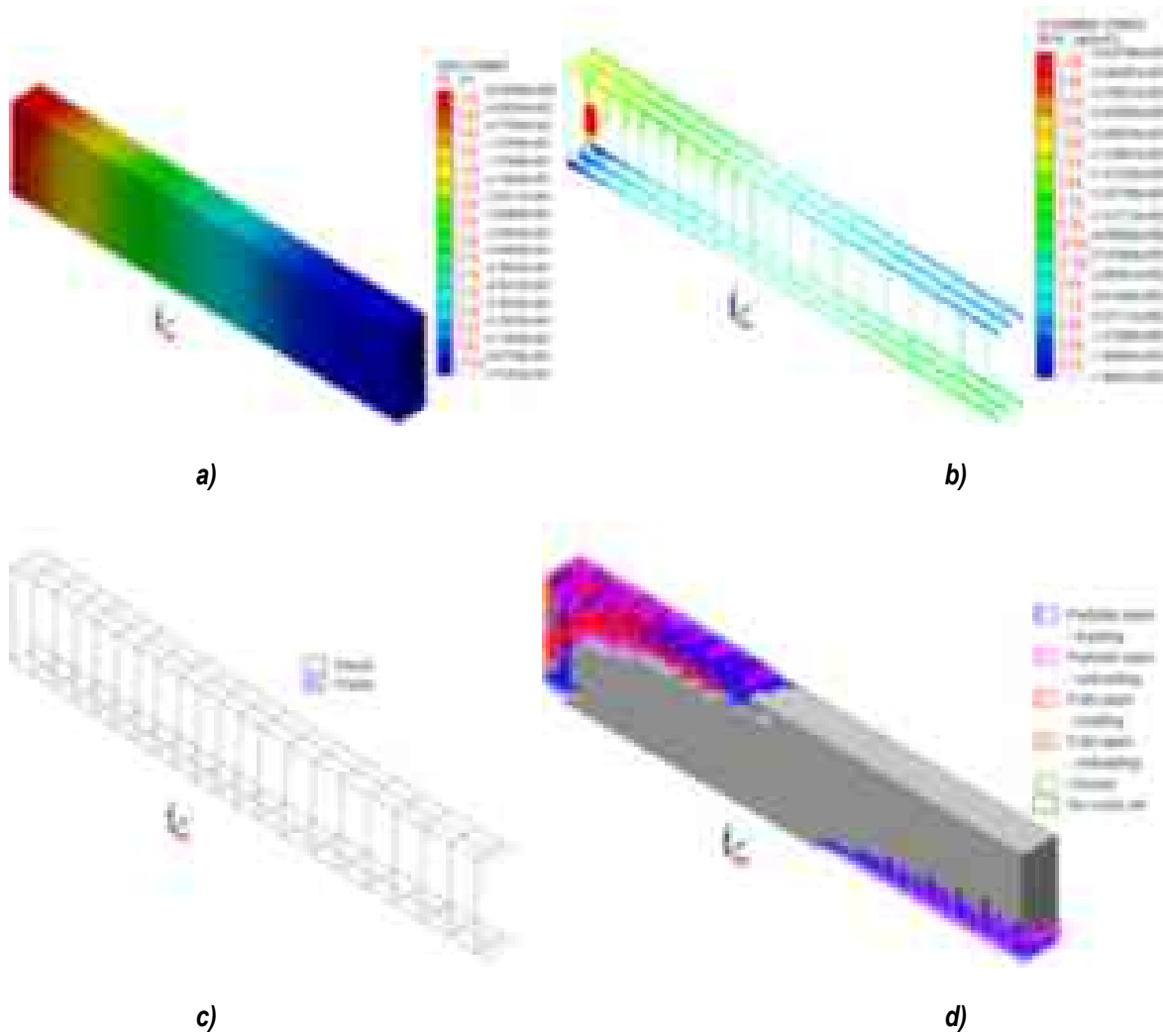
**Figura B. 7 Modelo V-1,  $0.65\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento**



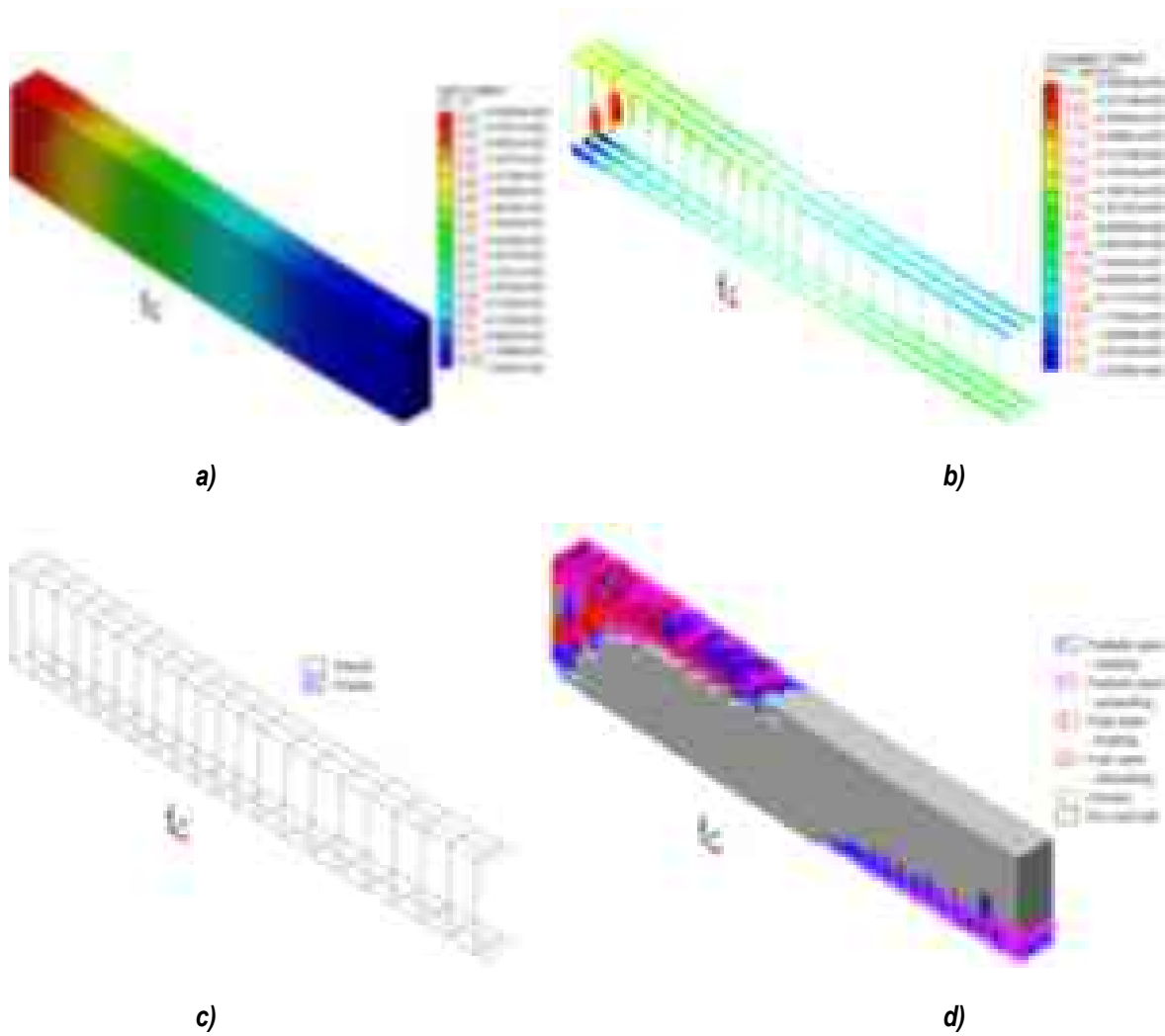
**Figura B. 8** Modelo V-1,  $0.65p_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



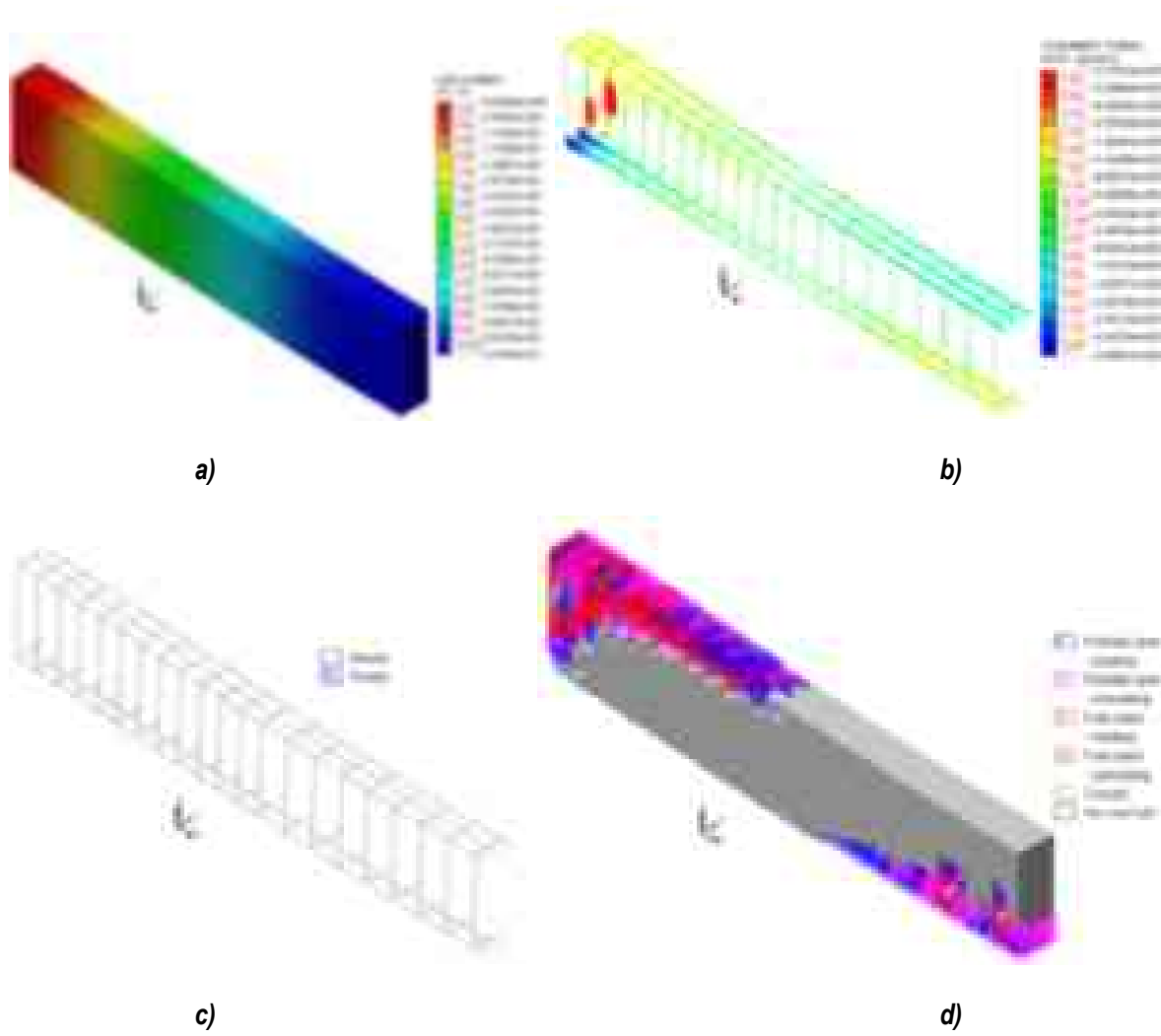
**Figura B. 9 Modelo V-1,  $0.65\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento**



**Figura B. 10** Modelo V-1,  $0.90\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



**Figura B. 11** Modelo V-1,  $0.90\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



**Figura B. 12** Modelo V-1,  $0.90\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento

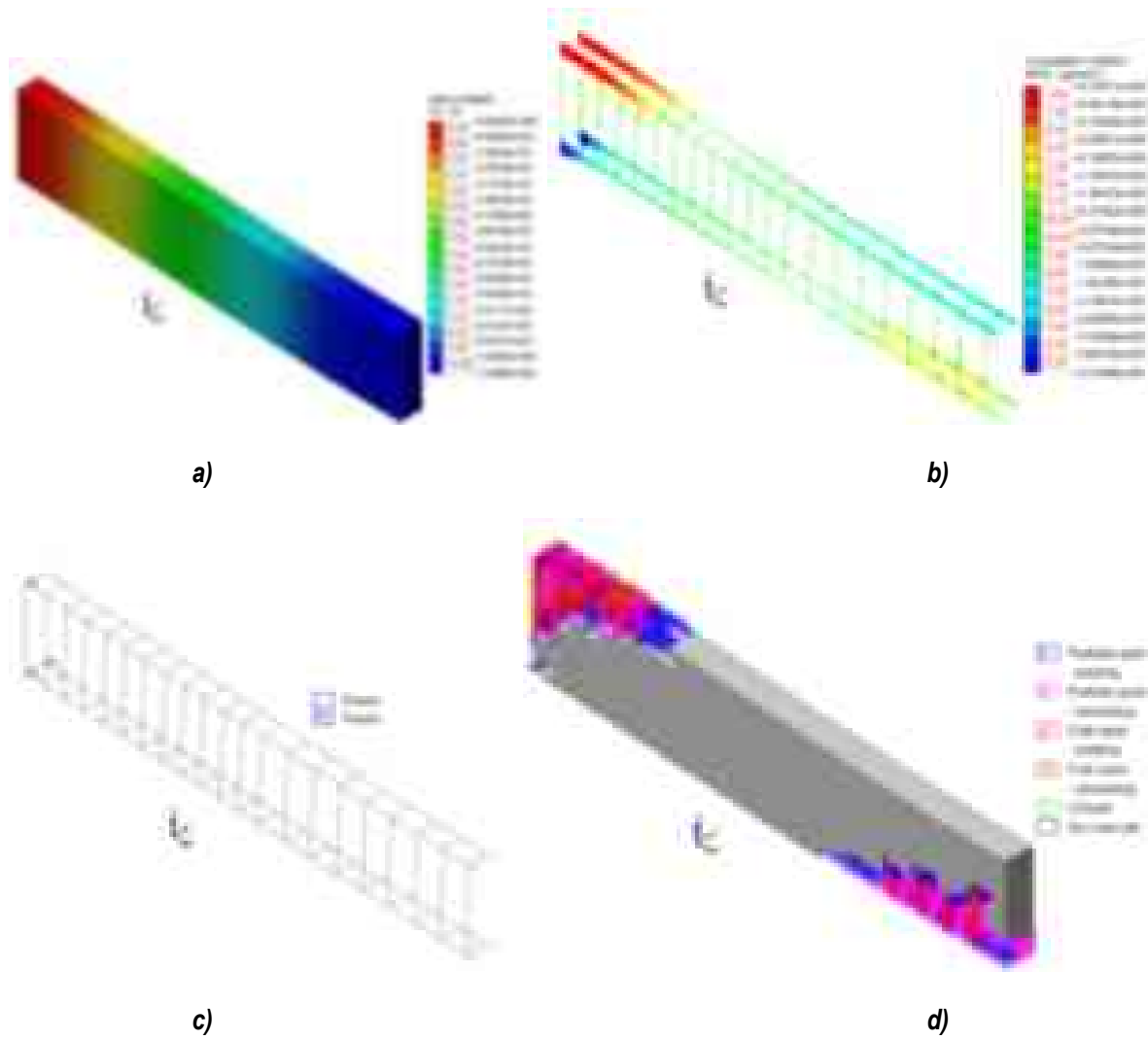
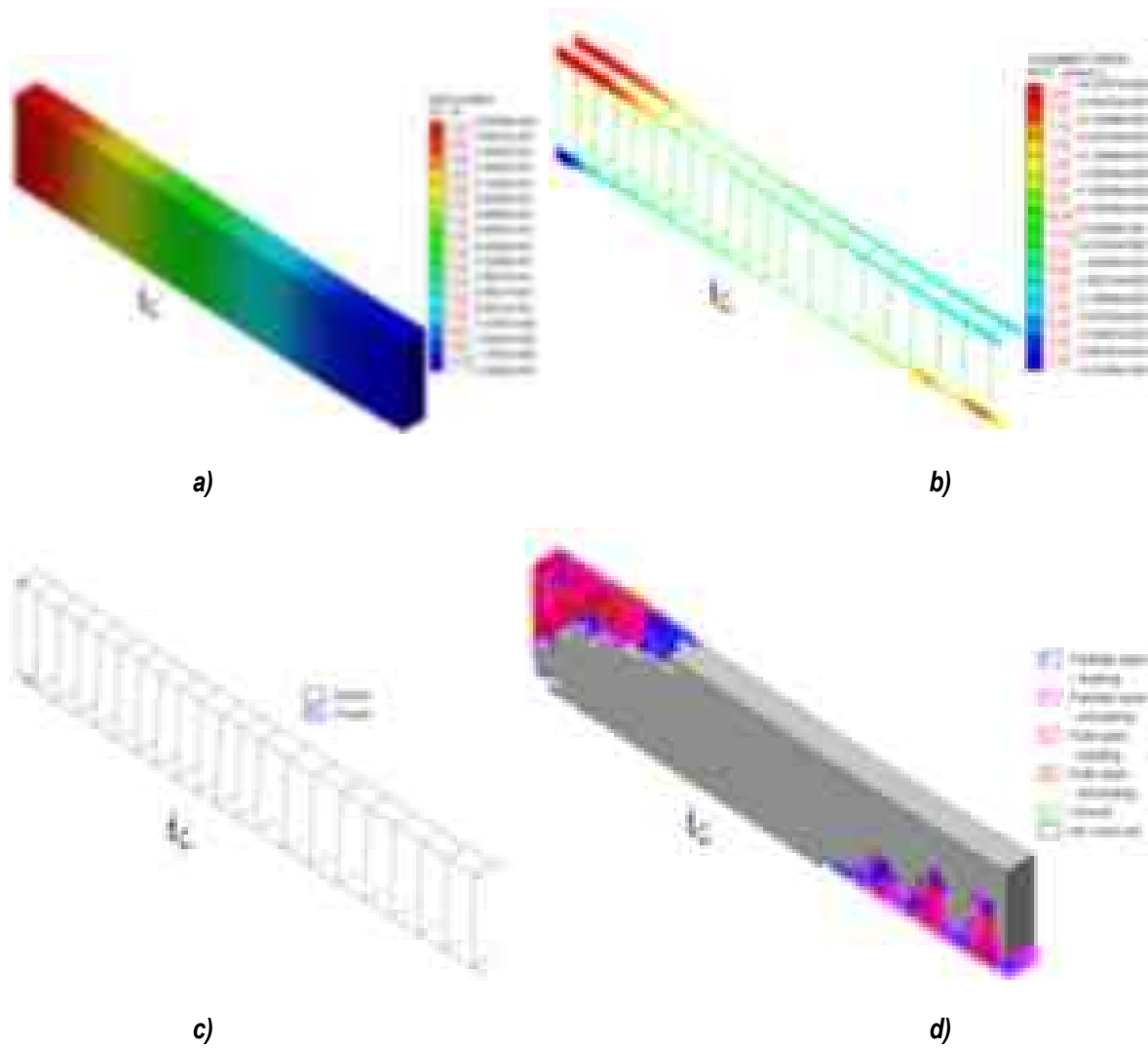
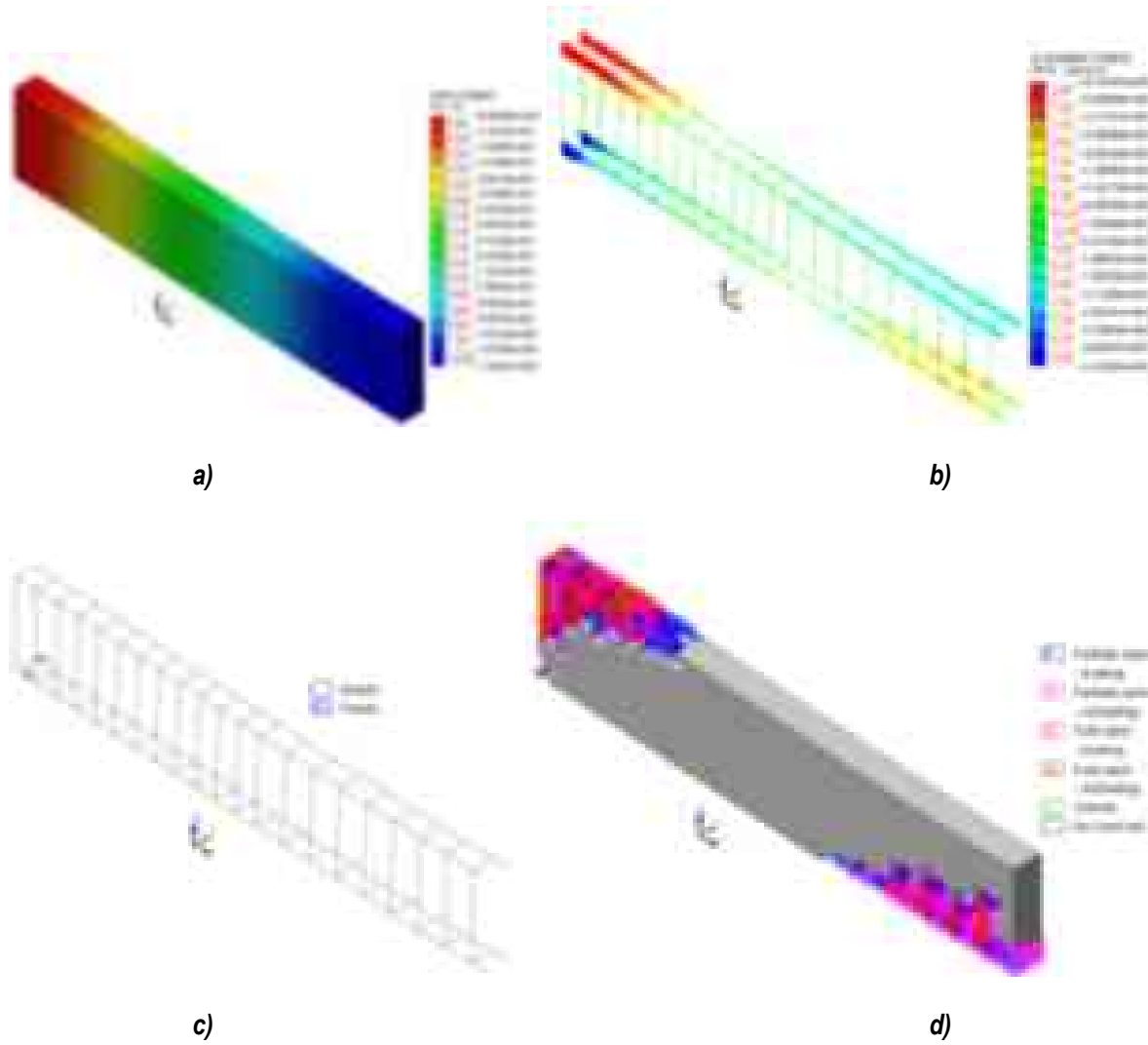


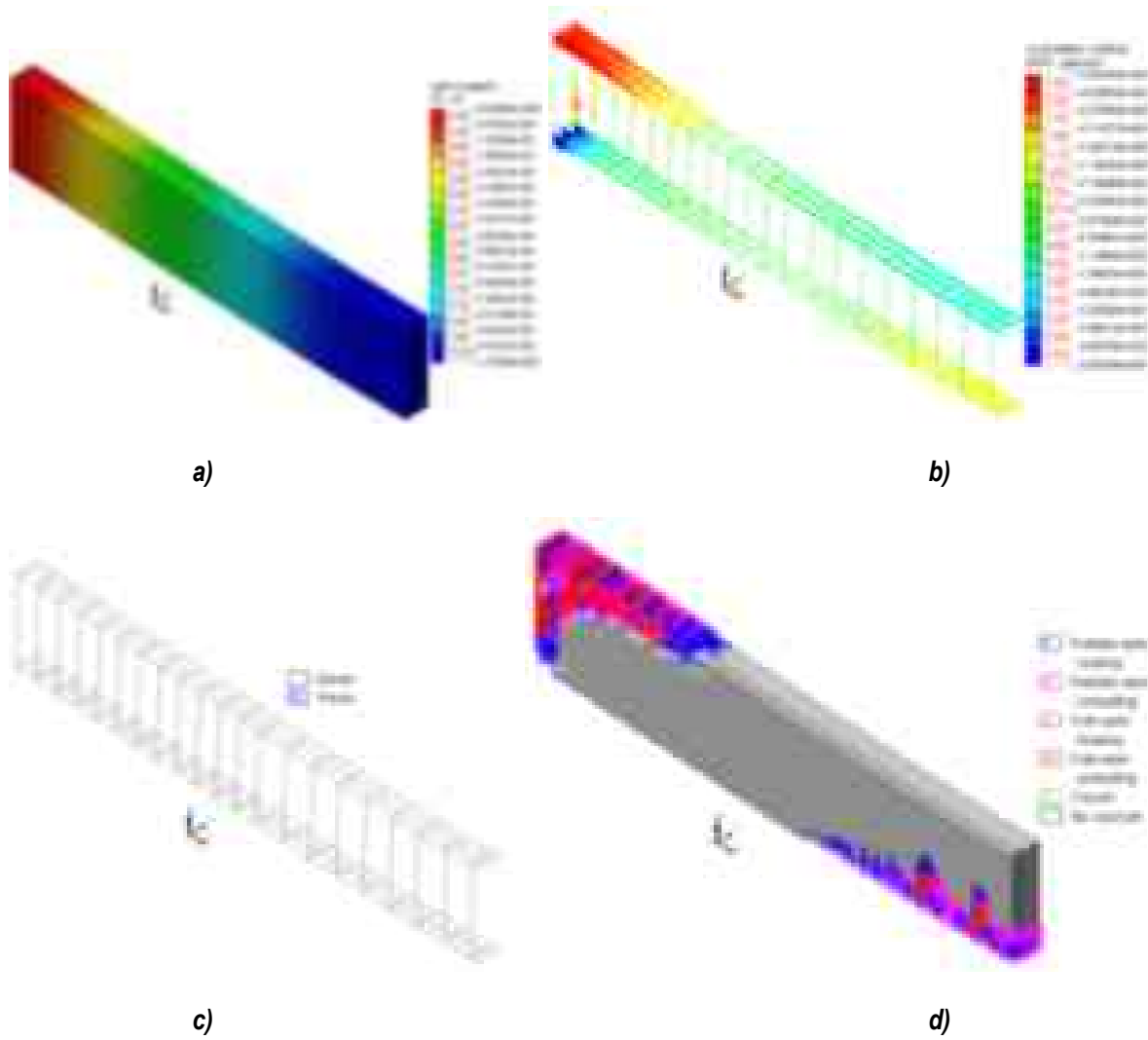
Figura B. 13 Modelo V-2,  $0.25\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



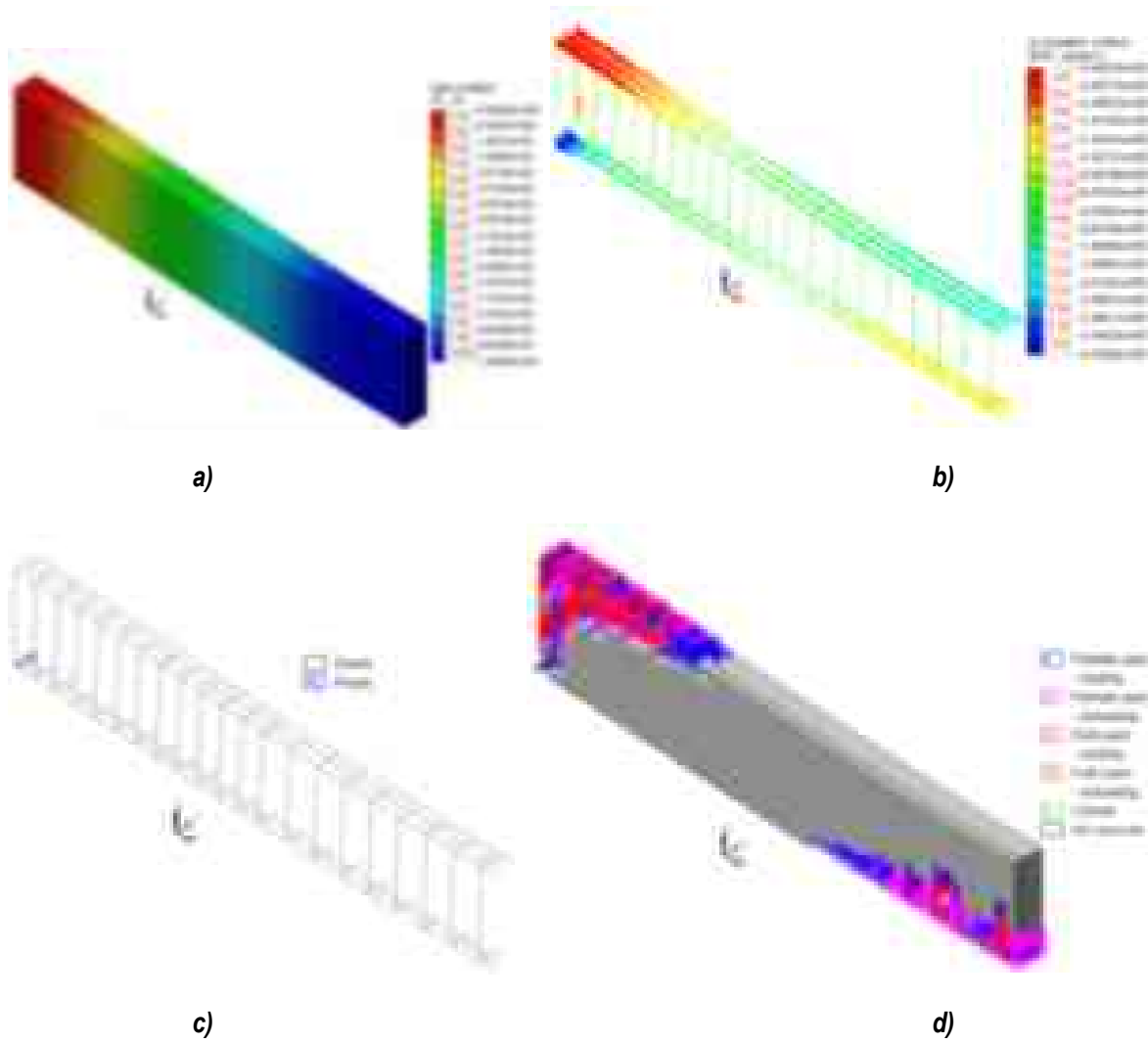
**Figura B. 14** Modelo V-2,  $0.25\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



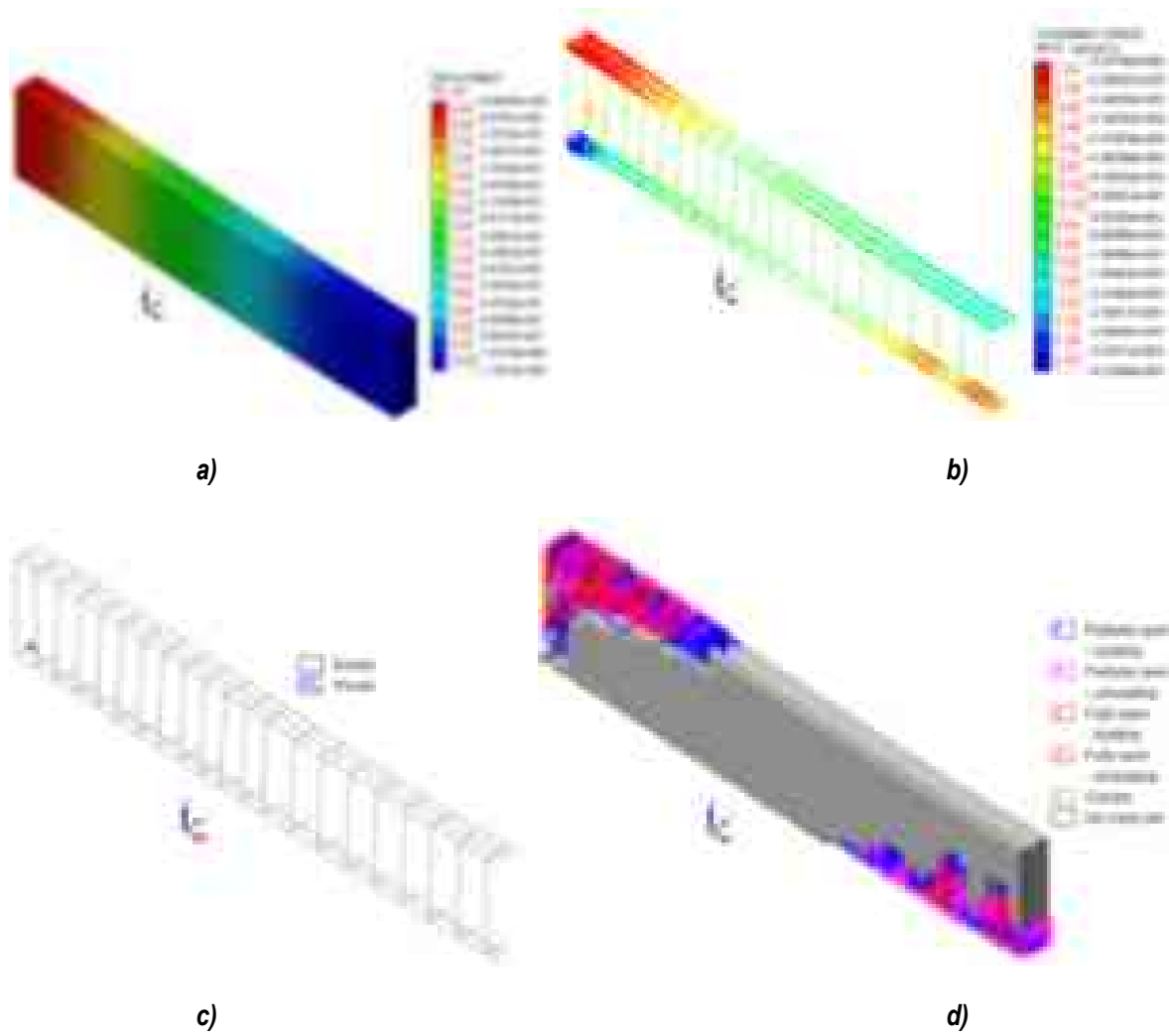
**Figura B. 15** Modelo V-2,  $0.25\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



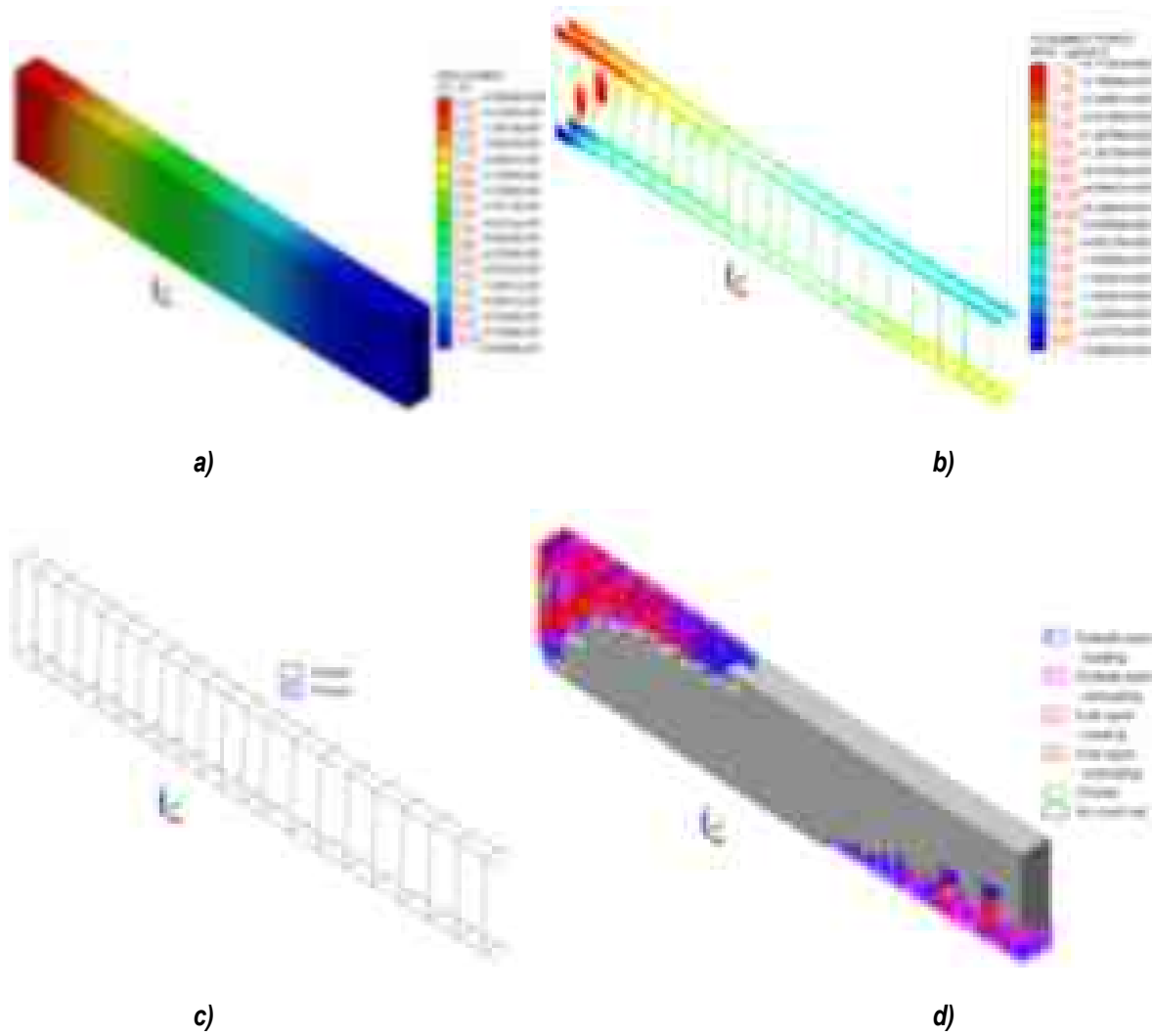
**Figura B. 16 Modelo V-2,  $0.45\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento**



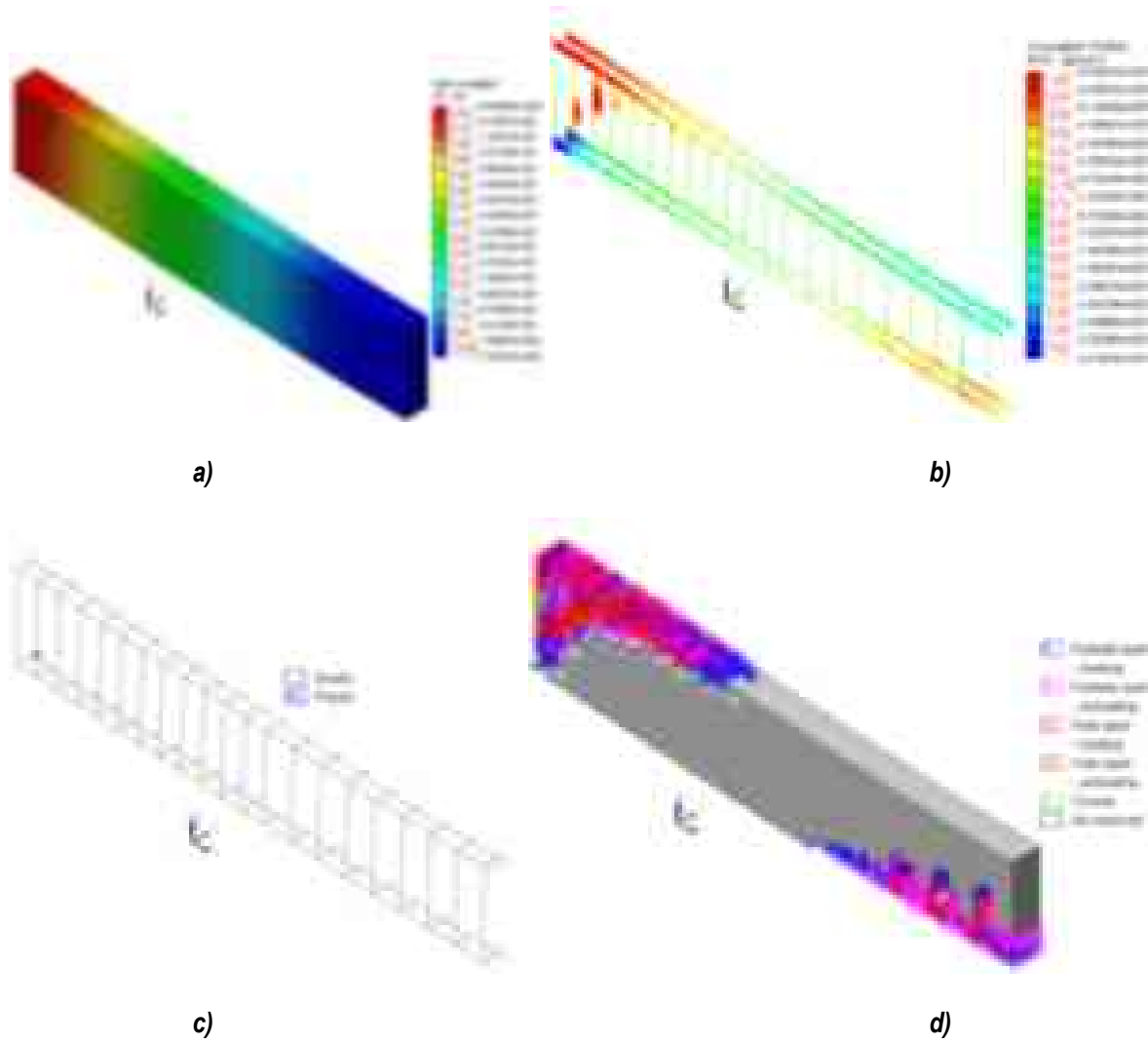
**Figura B. 17** Modelo V-2,  $0.45\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



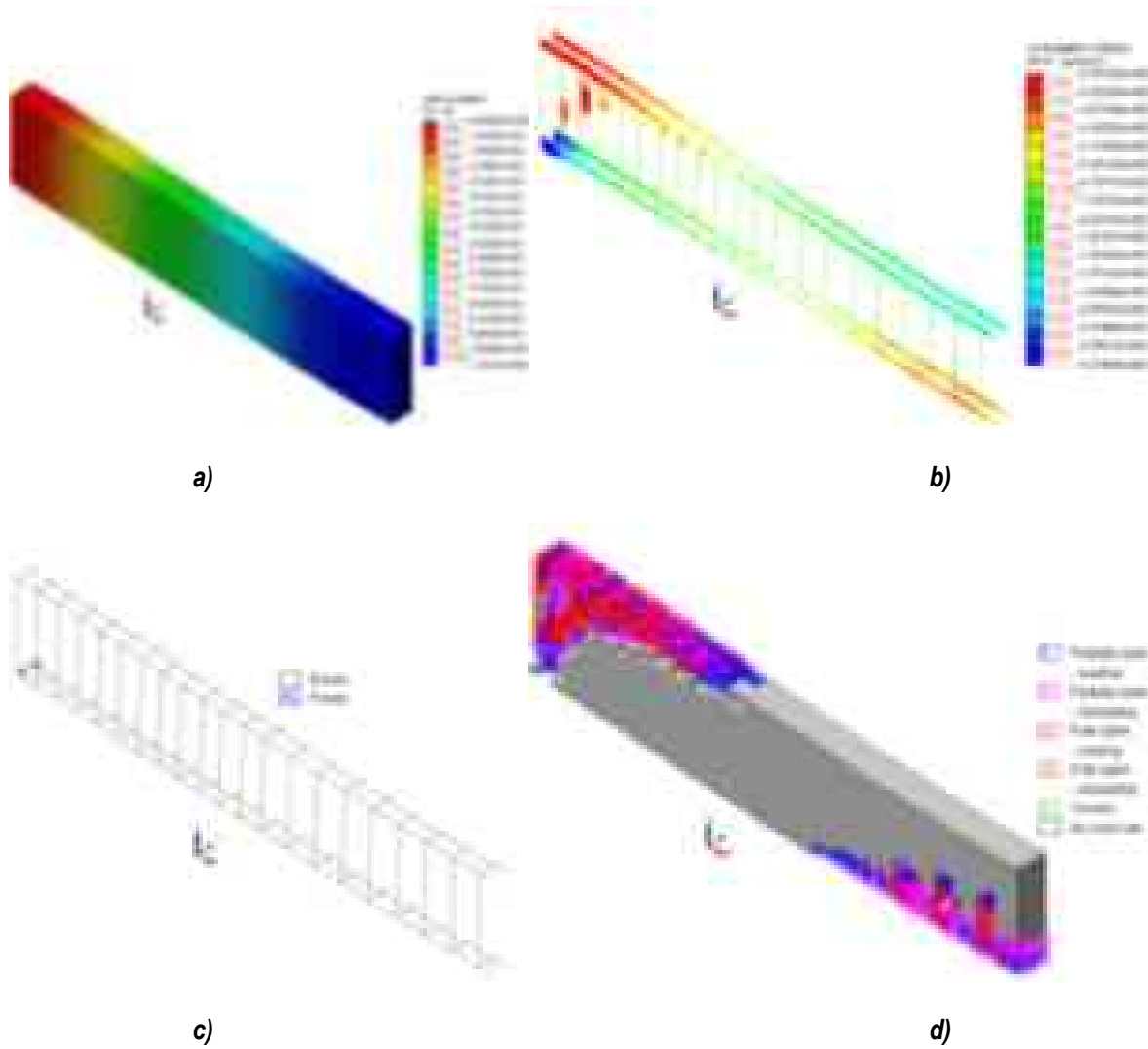
**Figura B. 18 Modelo V-2,  $0.45\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento**



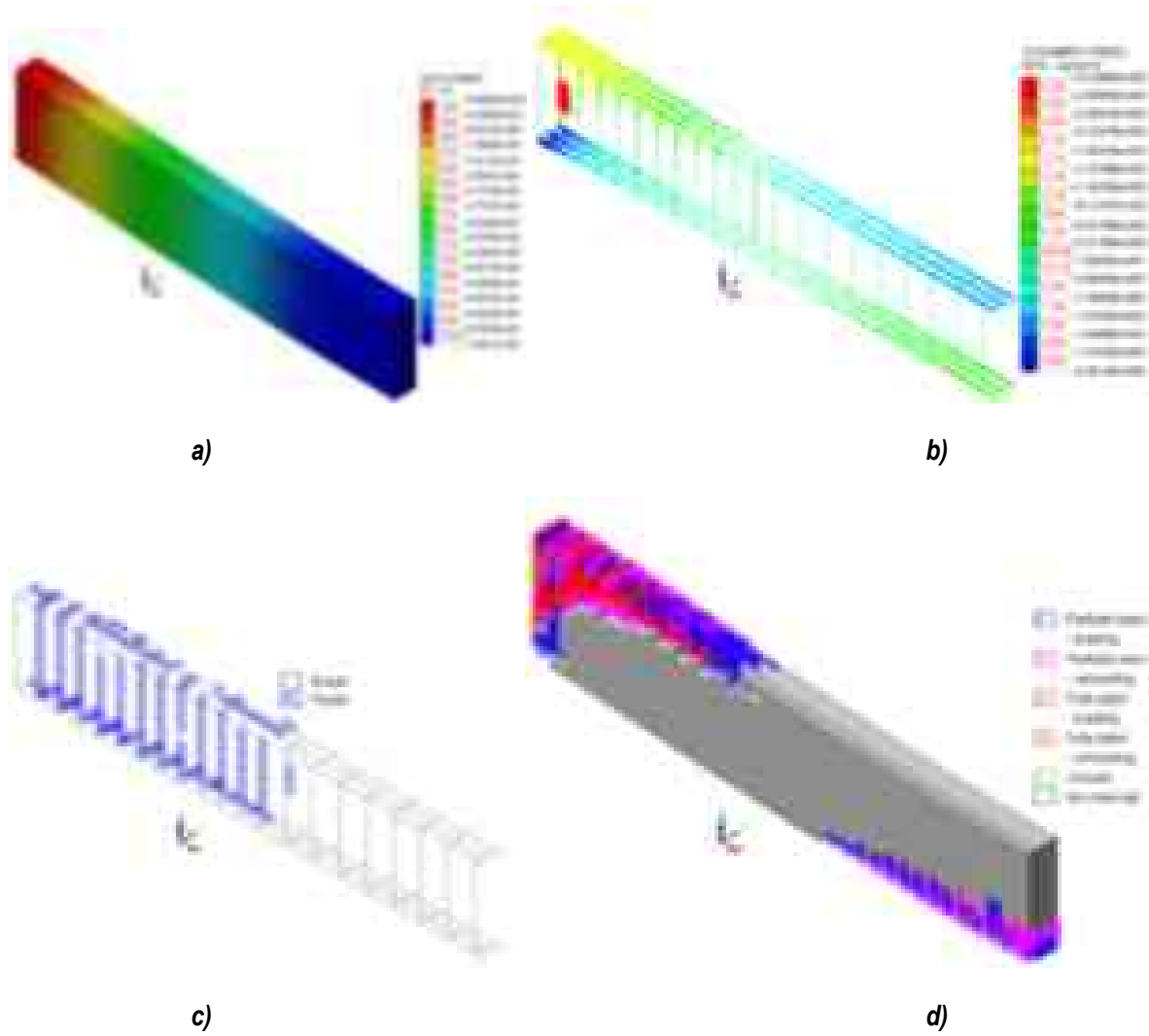
**Figura B. 19** Modelo V-2,  $0.65\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



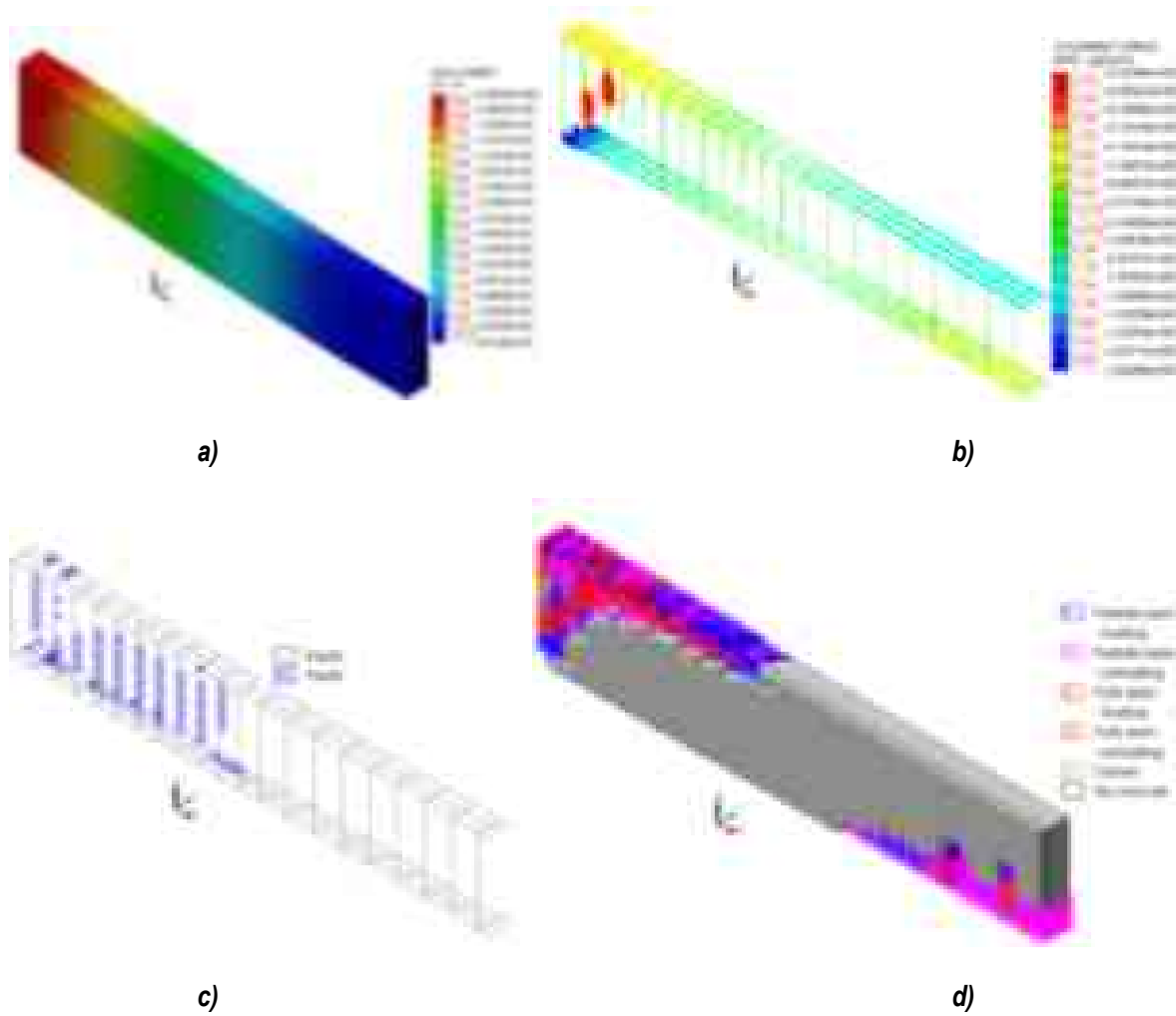
**Figura B. 20** Modelo V-2,  $0.65\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



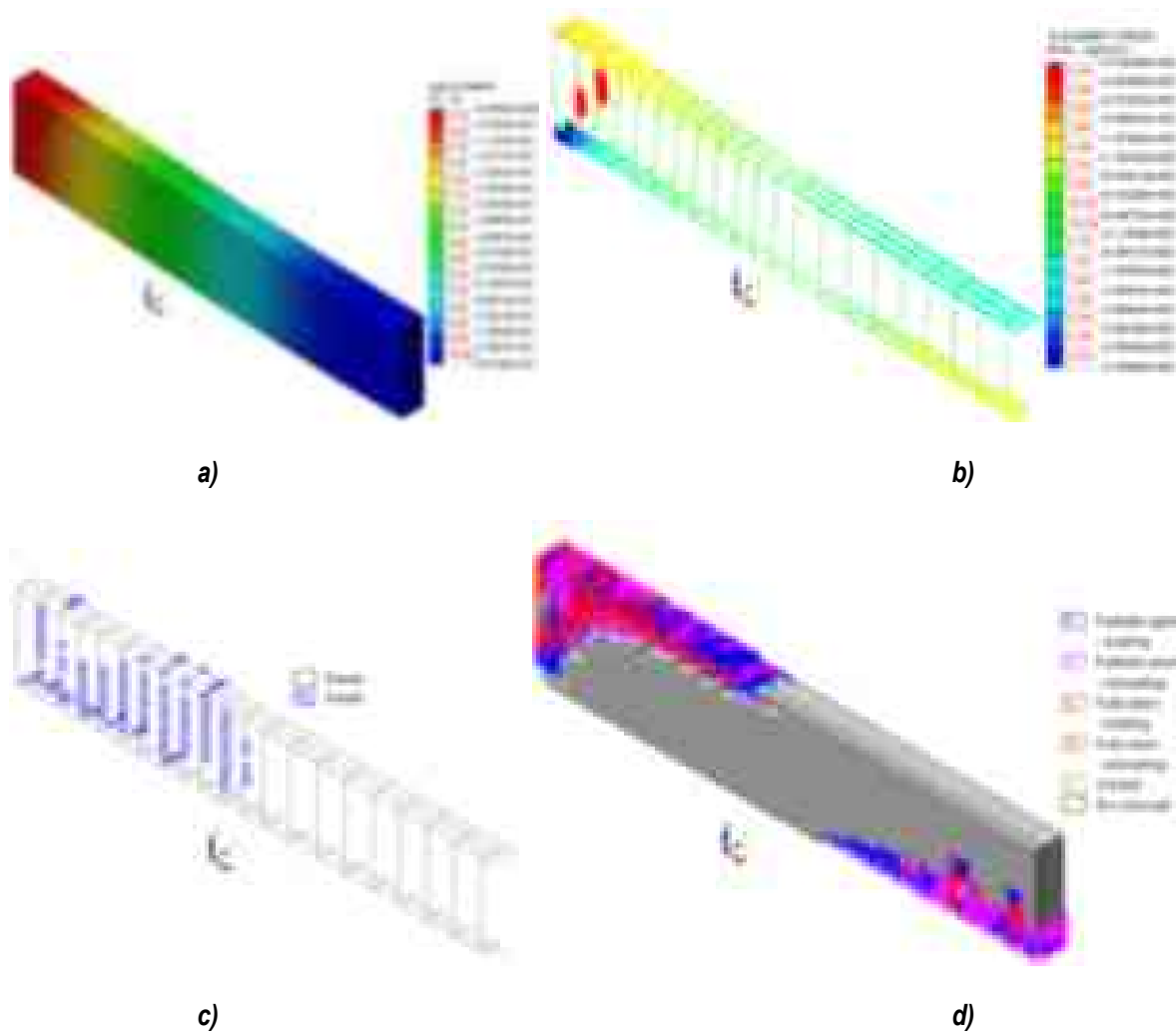
**Figura B. 21** Modelo V-2,  $0.65\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



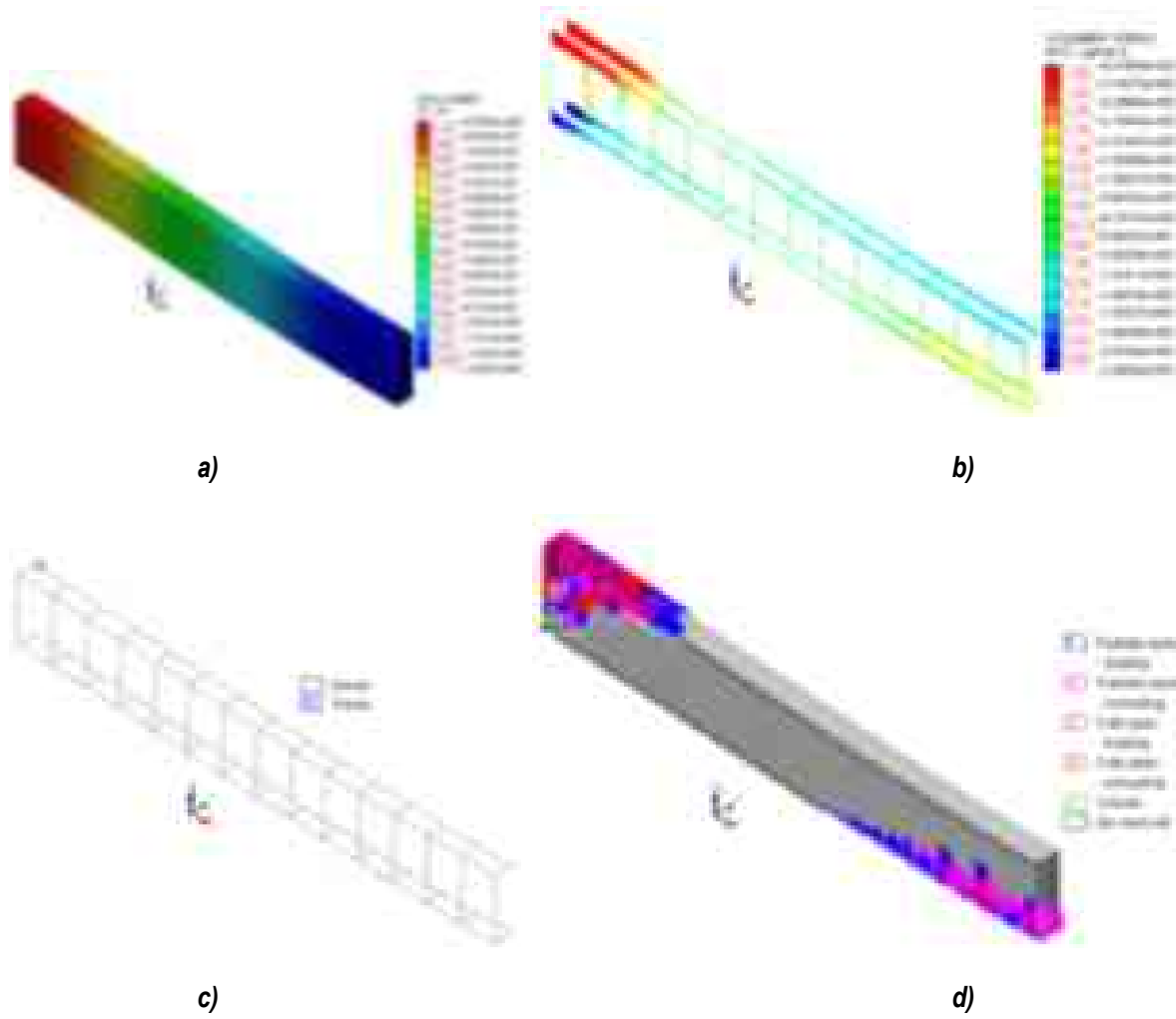
**Figura B. 22 Modelo V-2,  $0.90\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento**



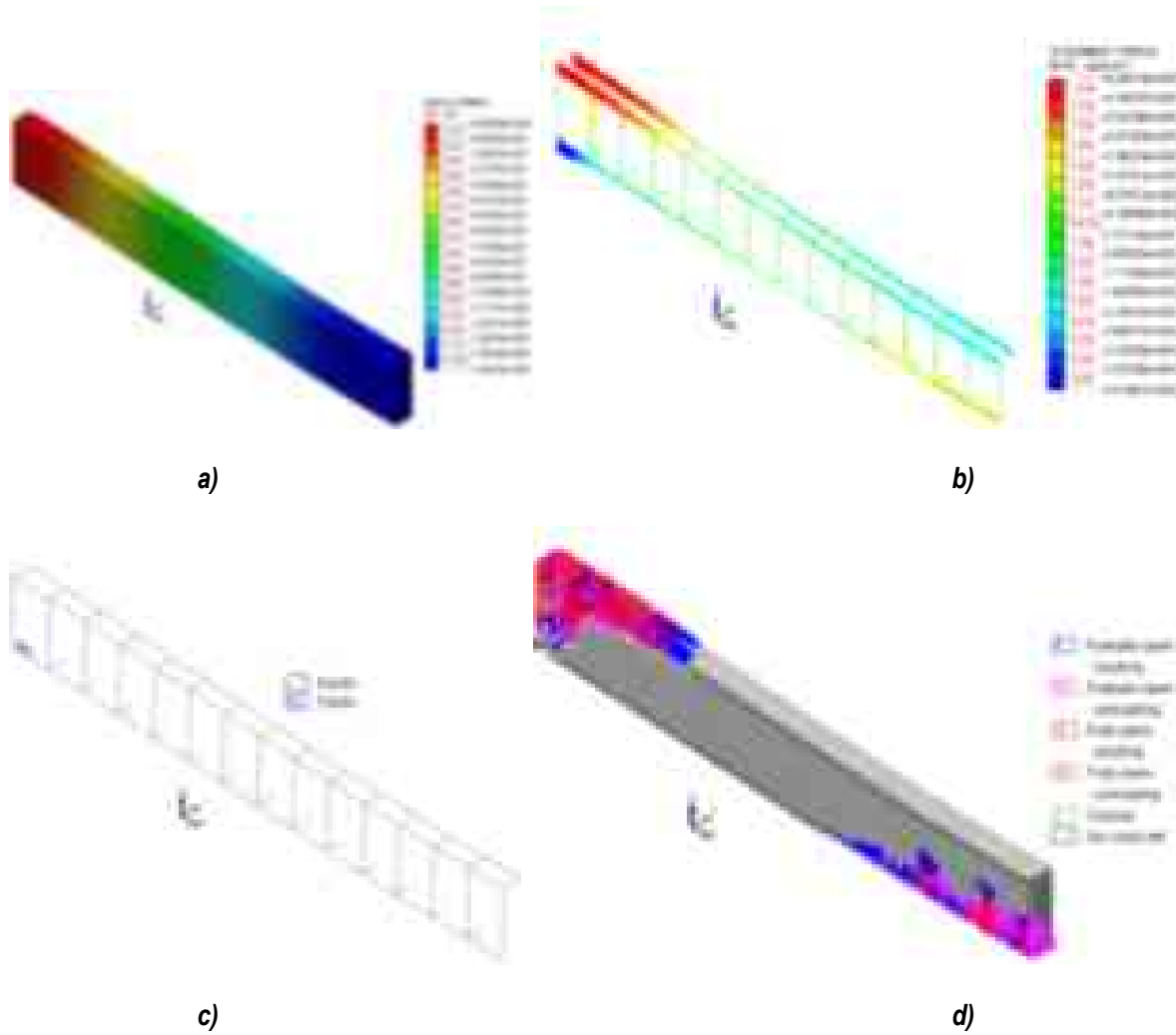
**Figura B. 23** Modelo V-2,  $0.90p_b$ , para  $p/p'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



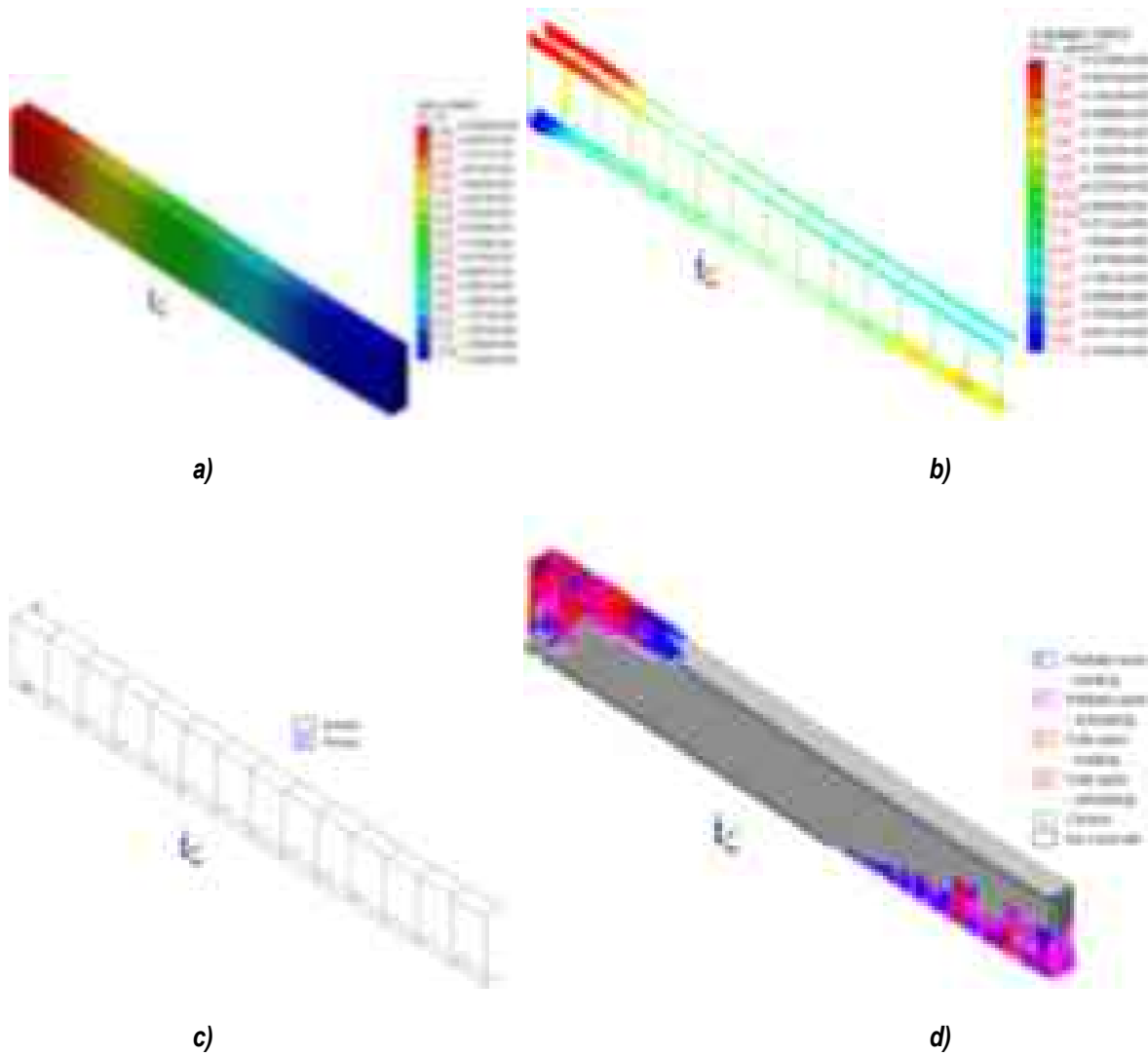
**Figura B. 24** Modelo V-2,  $0.90\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



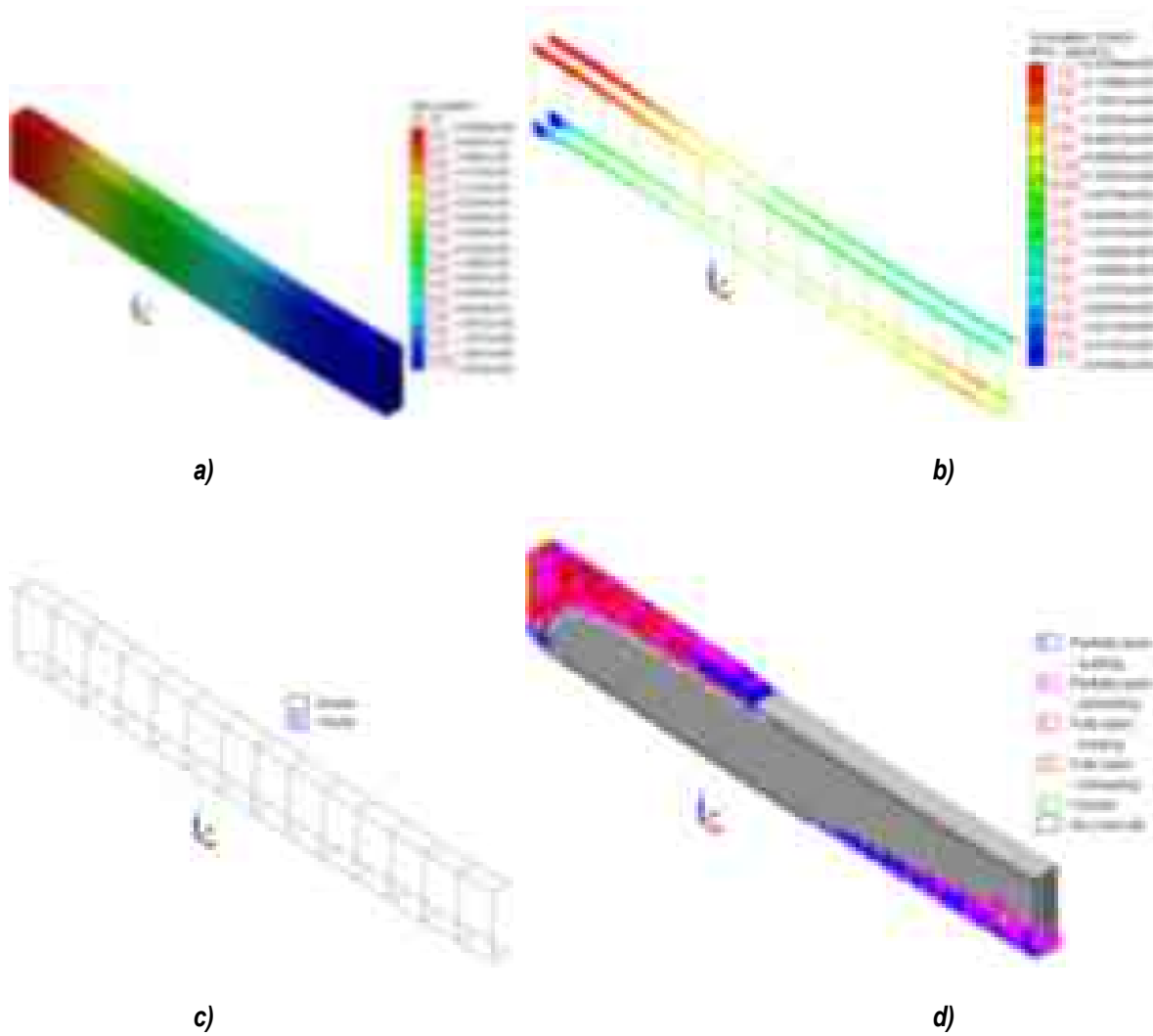
**Figura B. 25 Modelo V-3,  $0.25\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento**



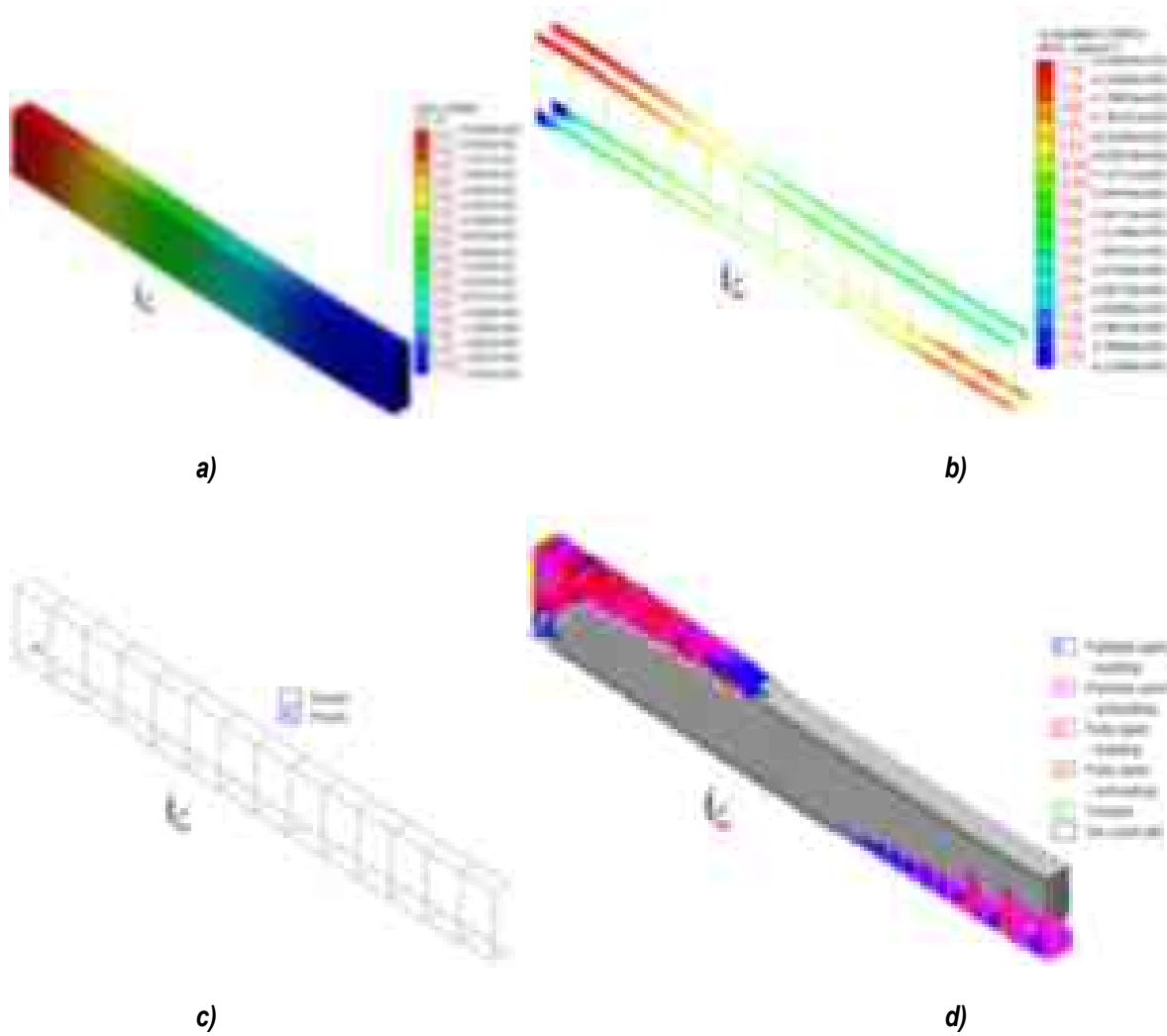
**Figura B. 26** Modelo V-3,  $0.25\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



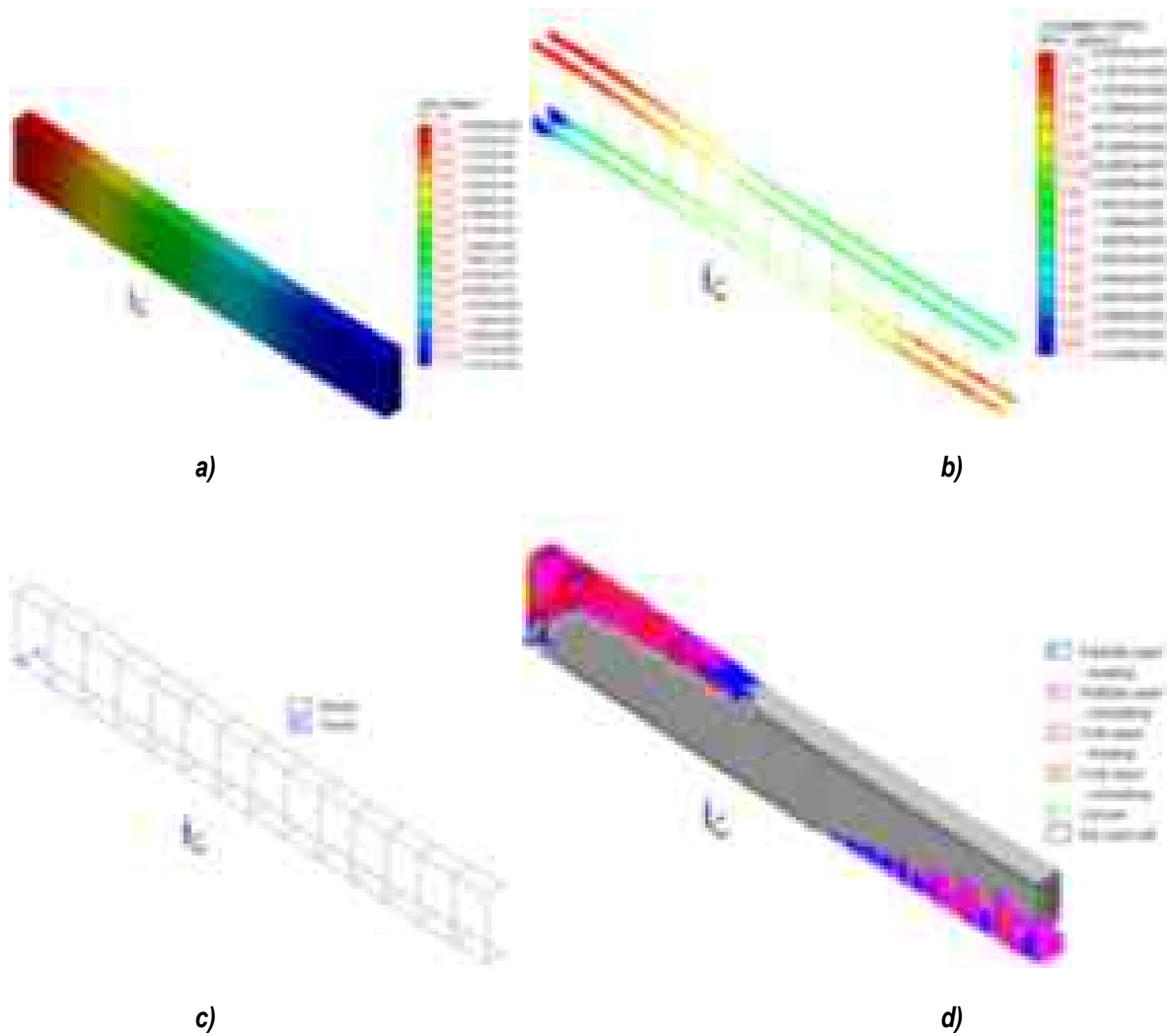
**Figura B. 27** Modelo V-3,  $0.25\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



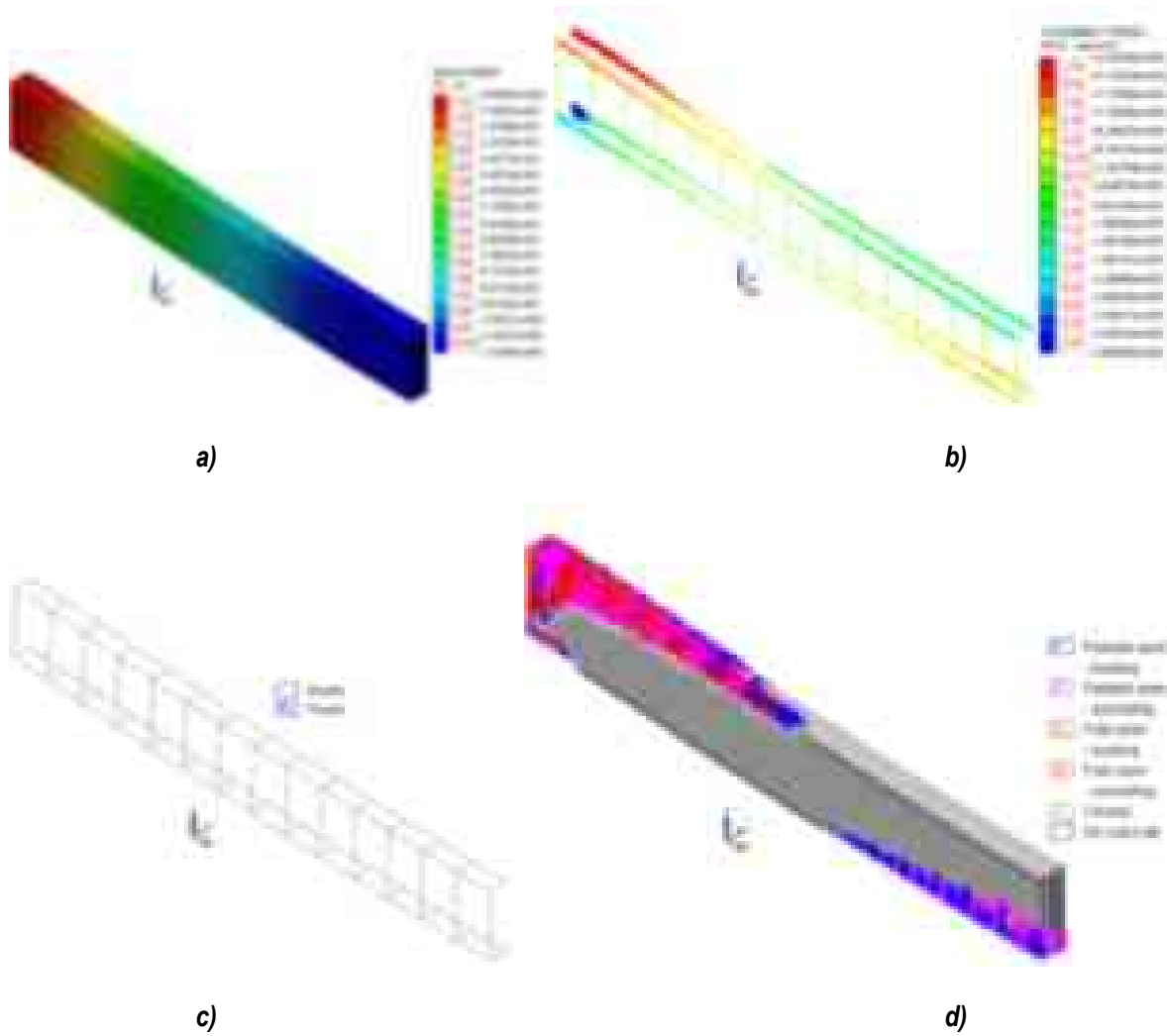
**Figura B. 28** Modelo V-3,  $0.45\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



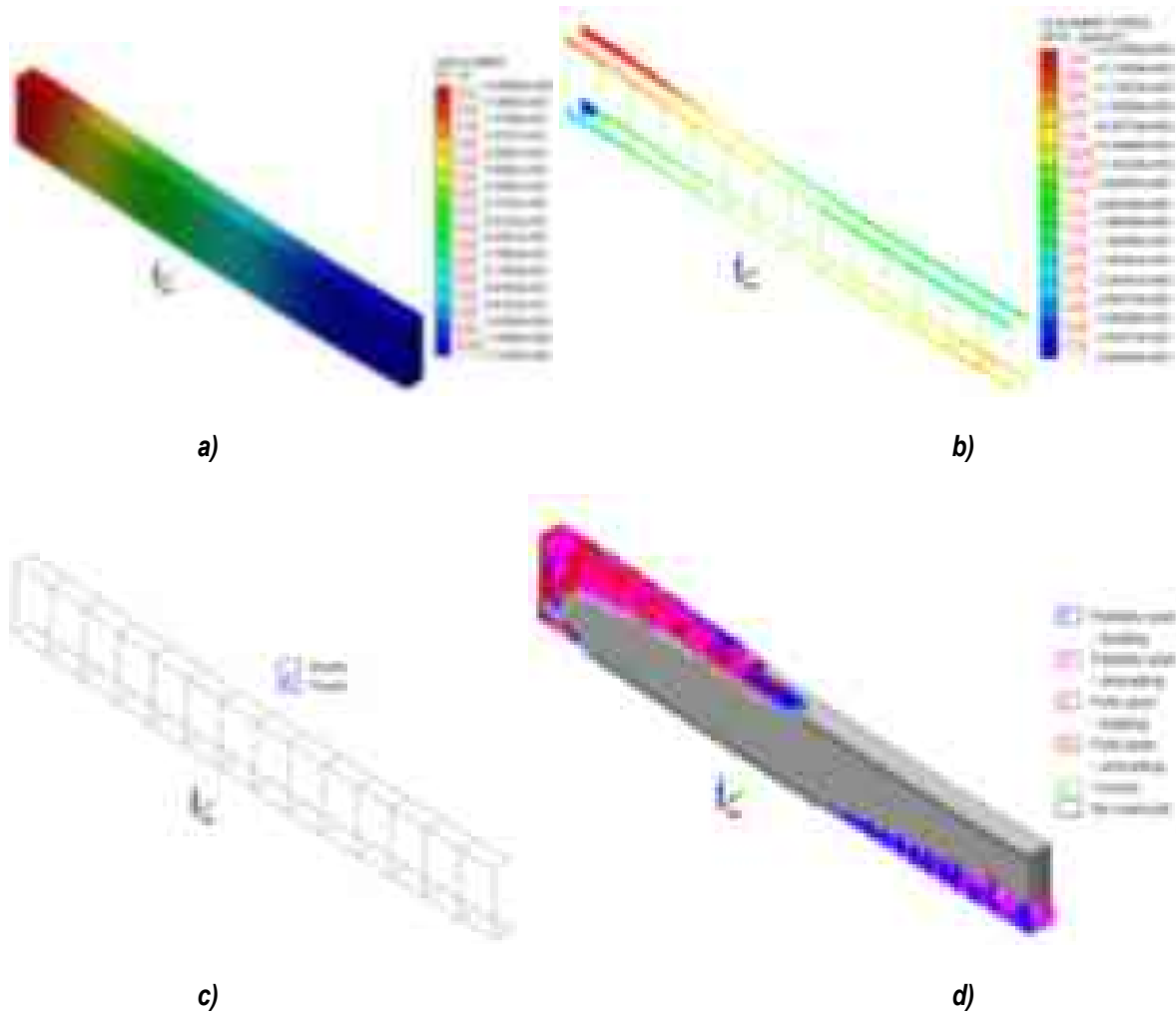
**Figura B. 29 Modelo V-3,  $0.45\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento**



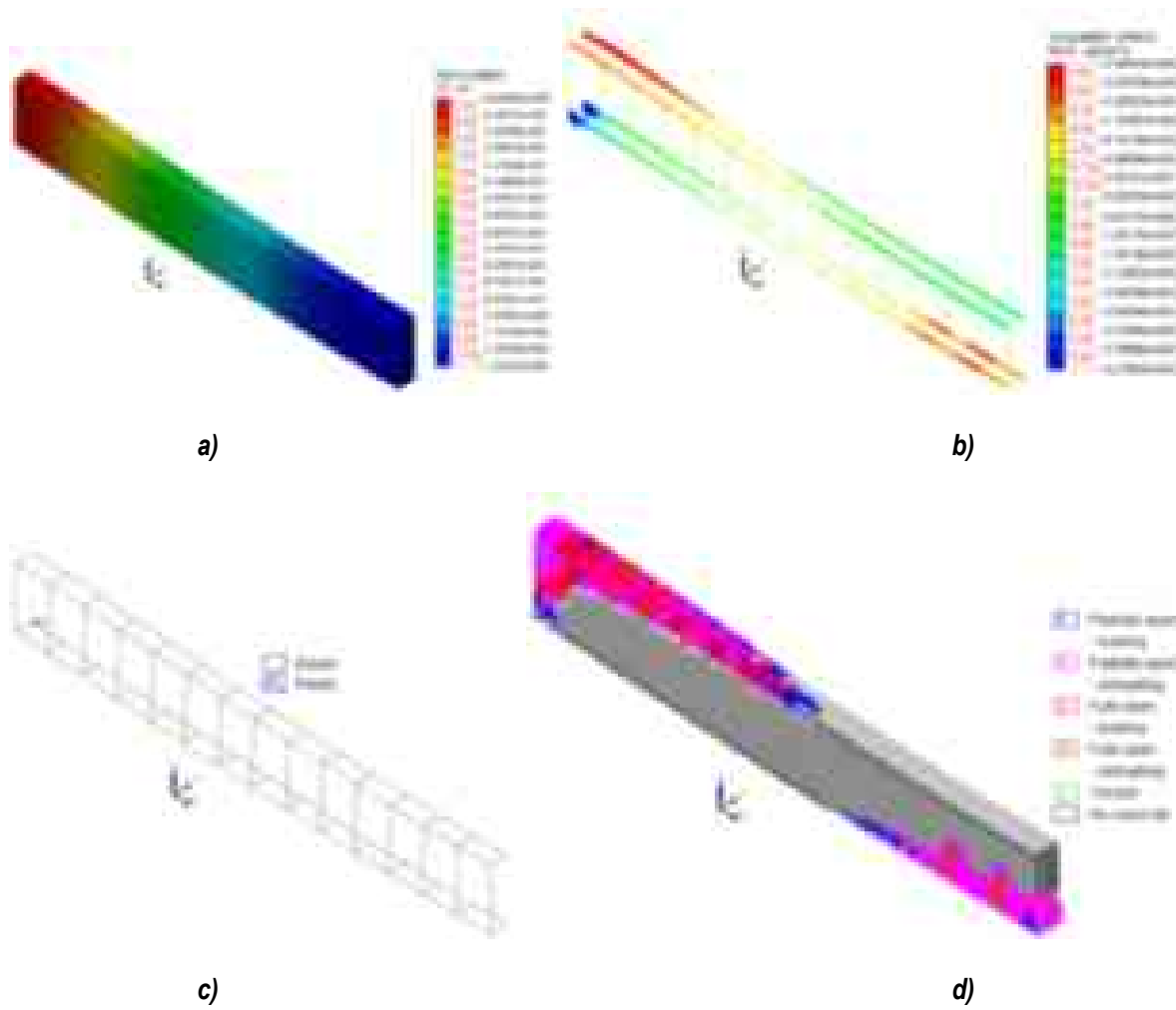
**Figura B. 30** Modelo V-3,  $0.45\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



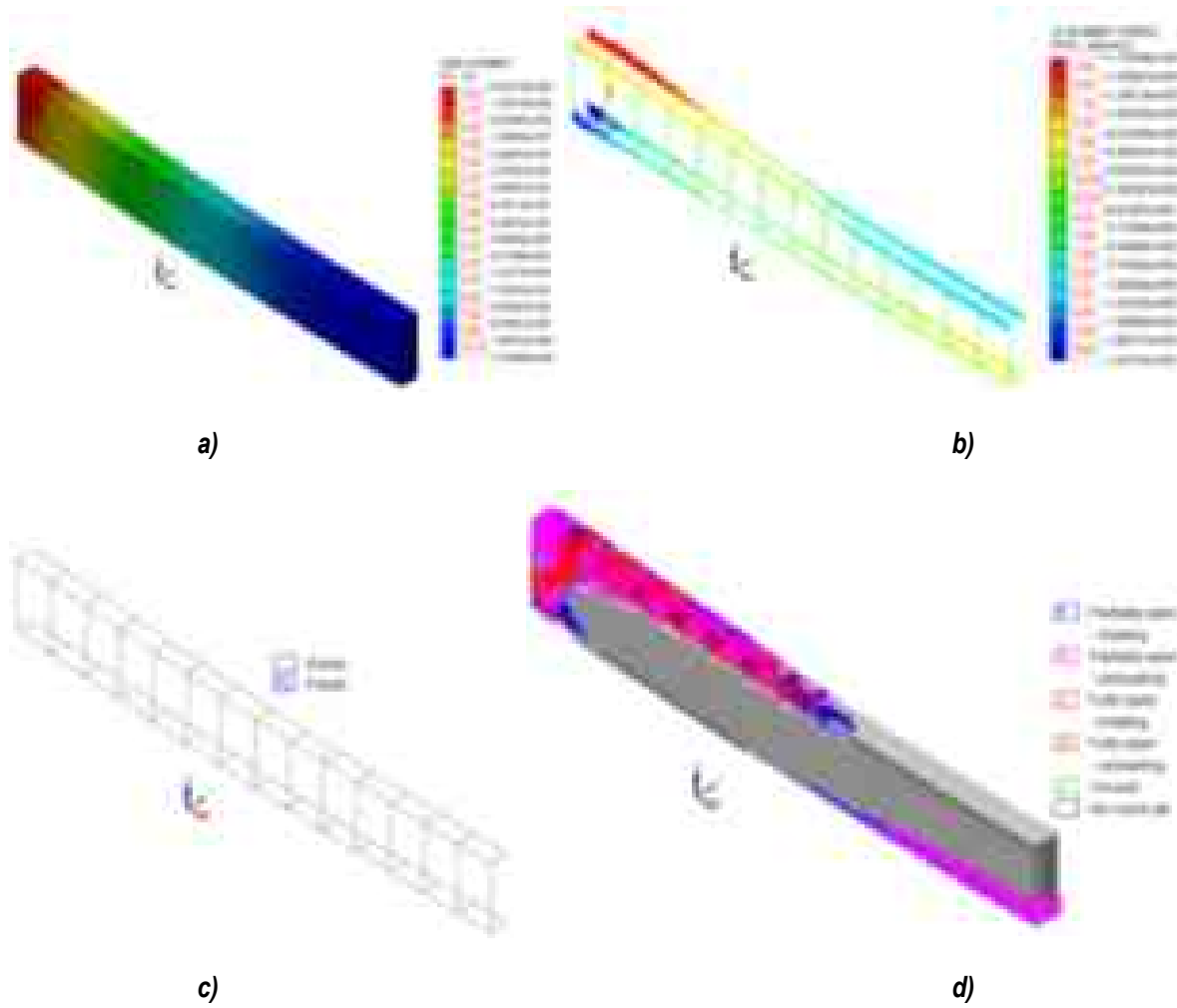
**Figura B. 31** Modelo V-3,  $0.65\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



**Figura B. 32** Modelo V-3,  $0.65\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



**Figura B. 33** Modelo V-3,  $0.65p_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



**Figura B. 34** Modelo V-3,  $0.90\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento

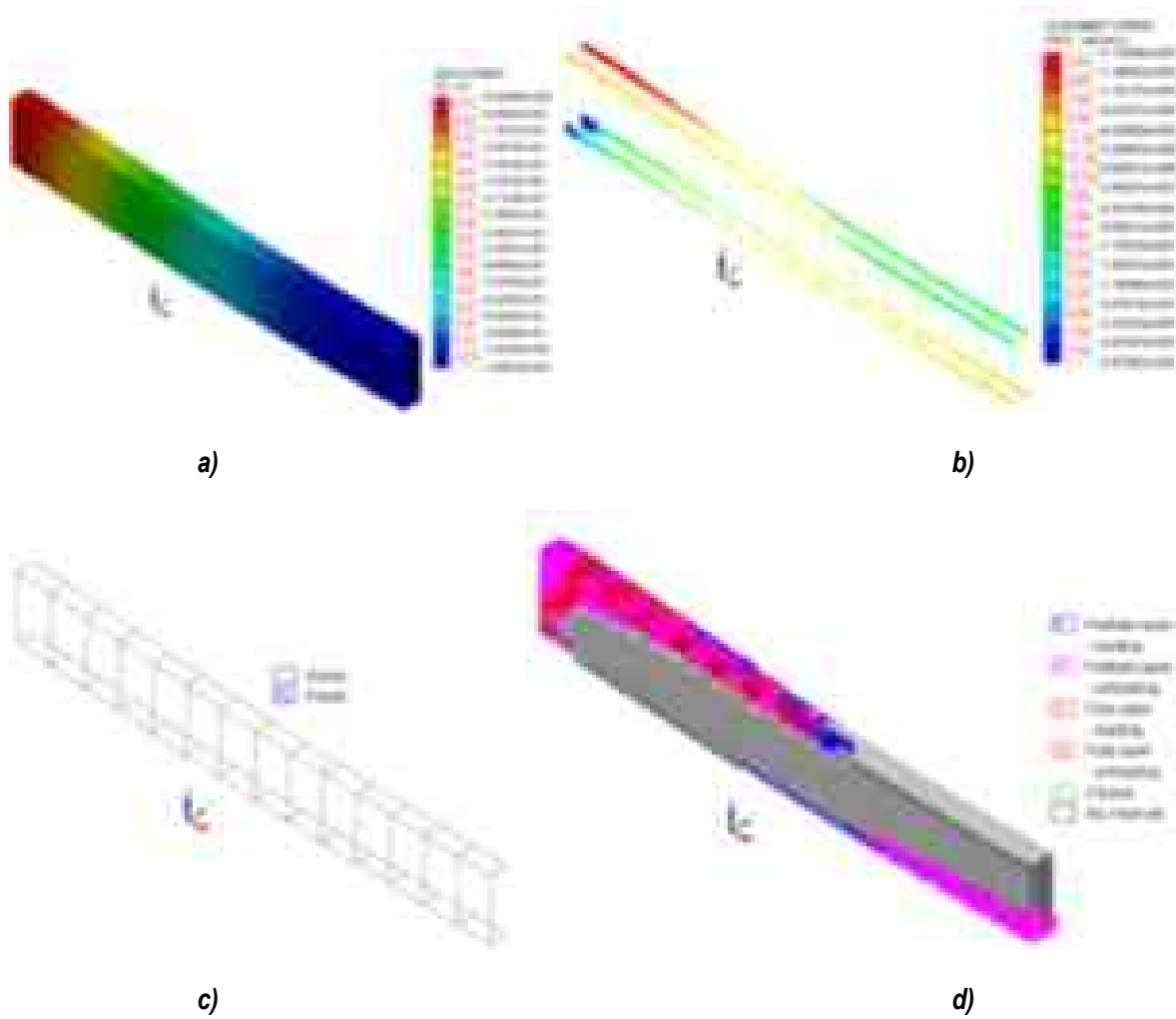
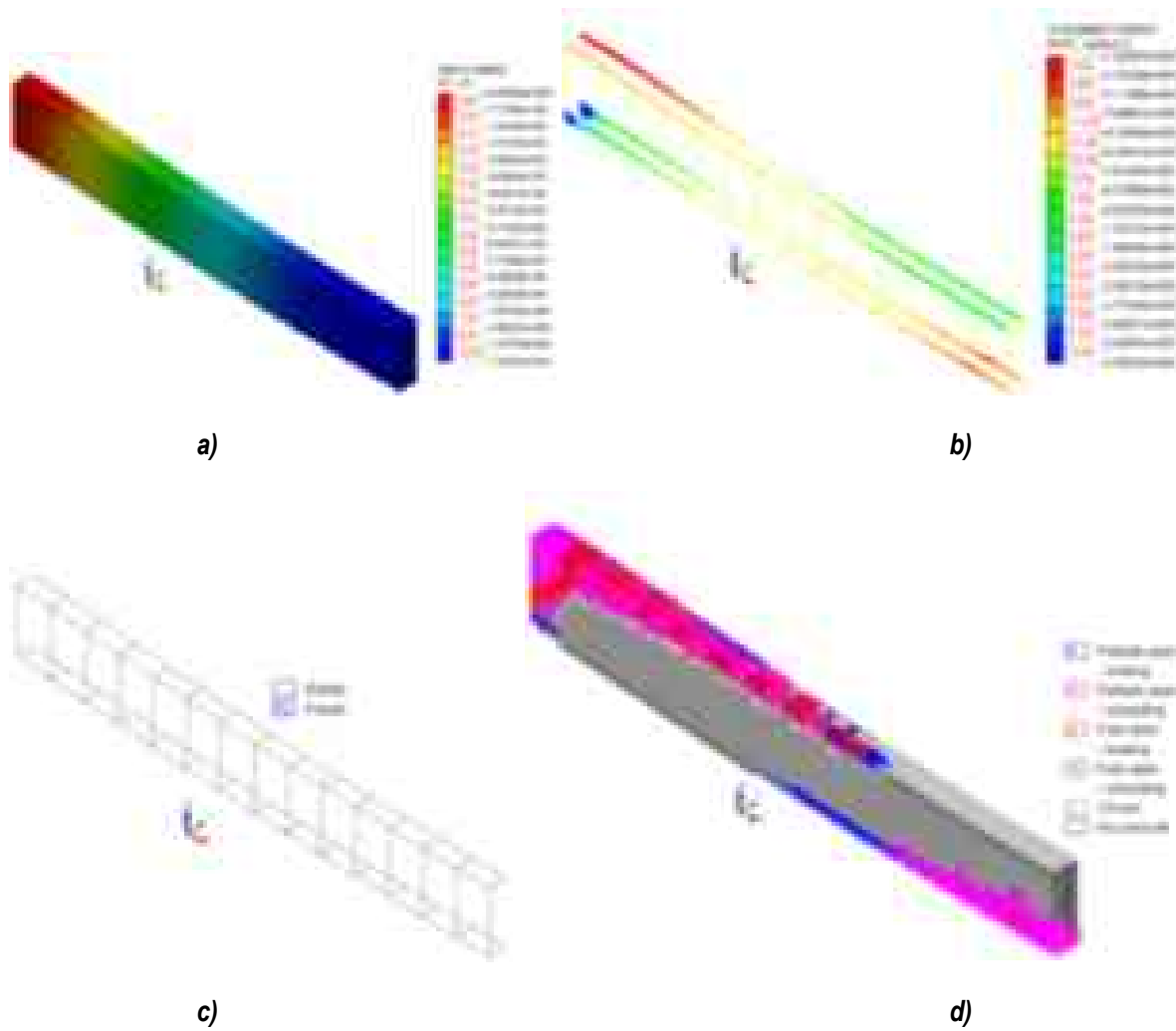
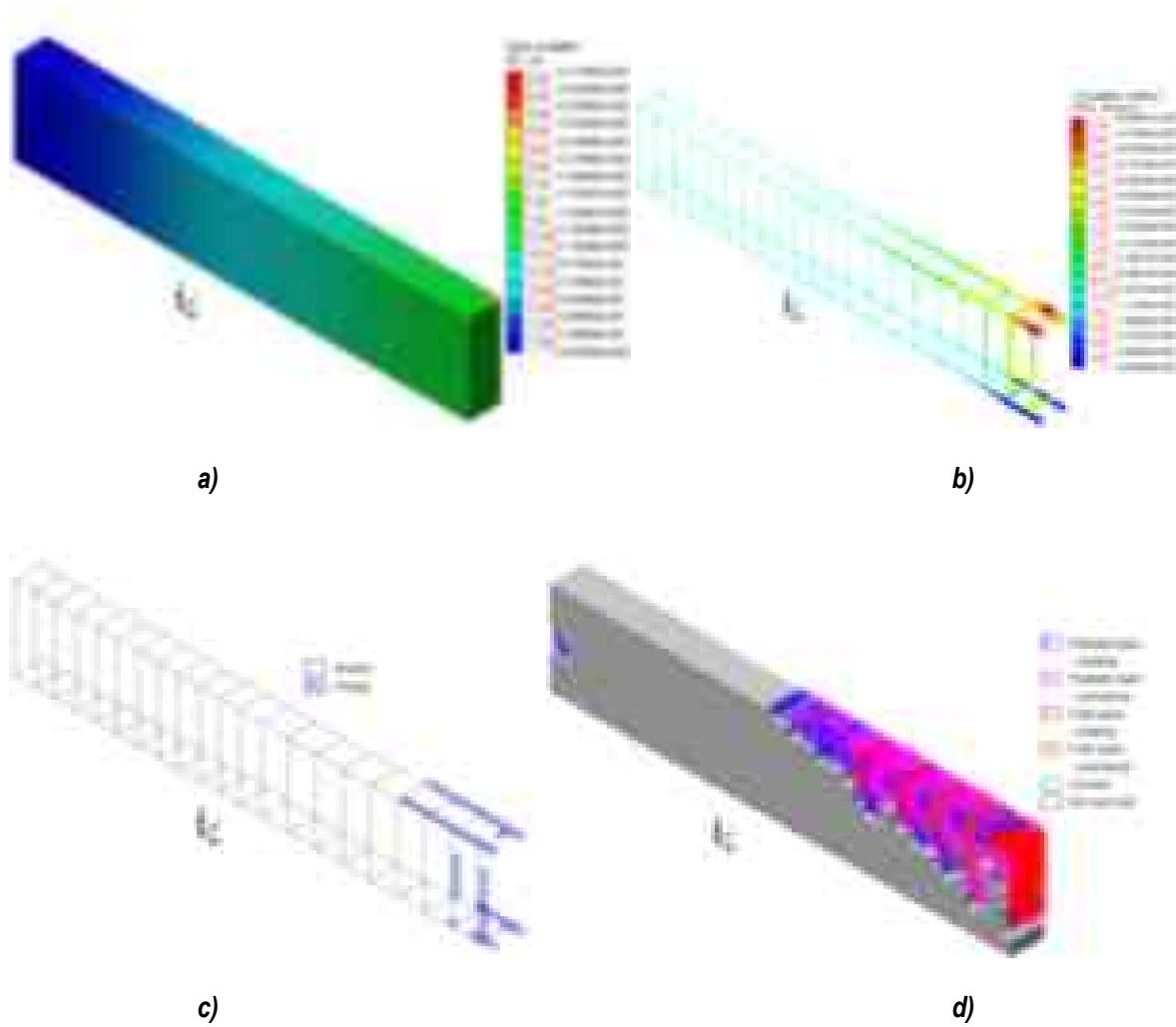


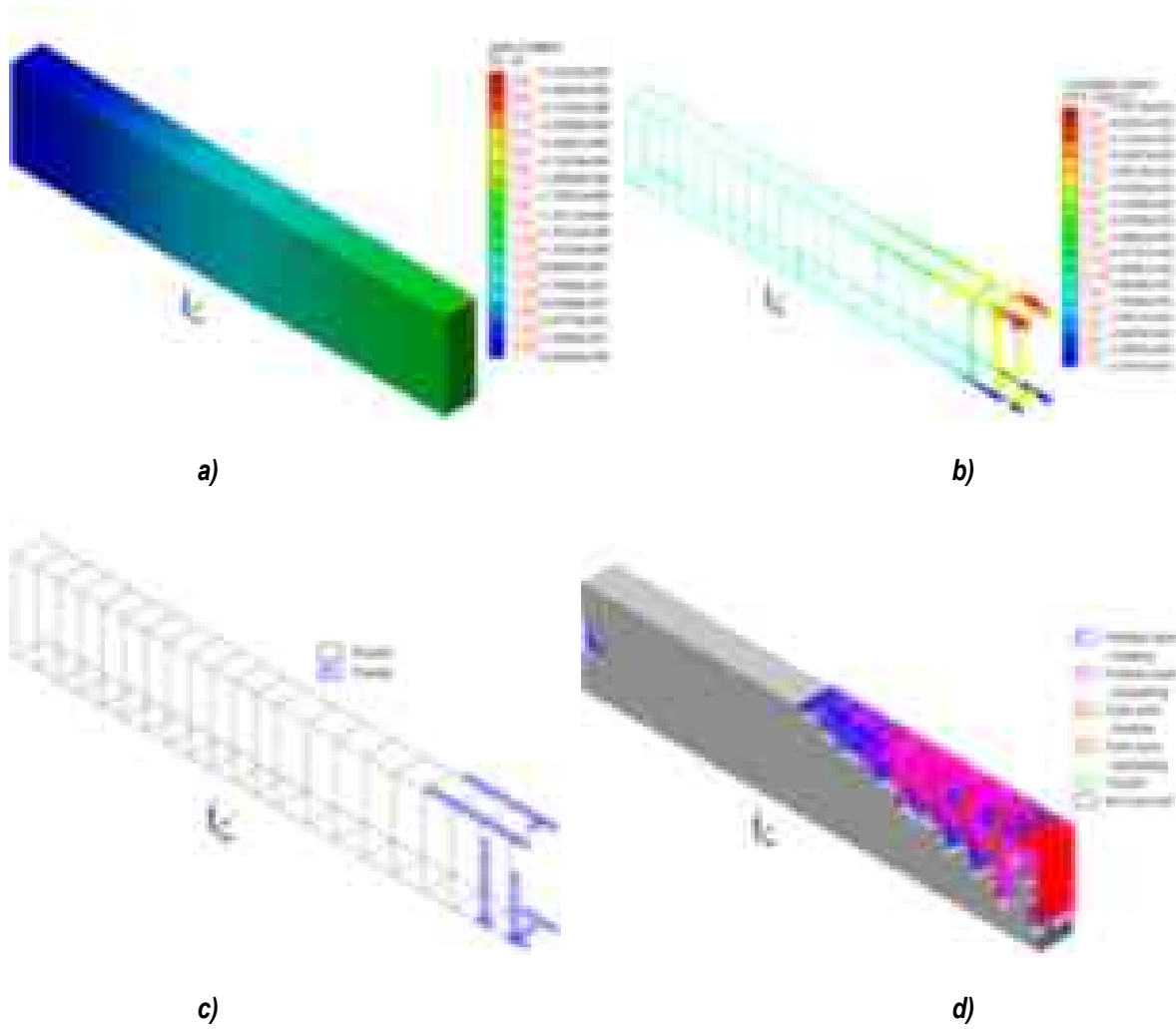
Figura B. 35 Modelo V-3,  $0.90\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



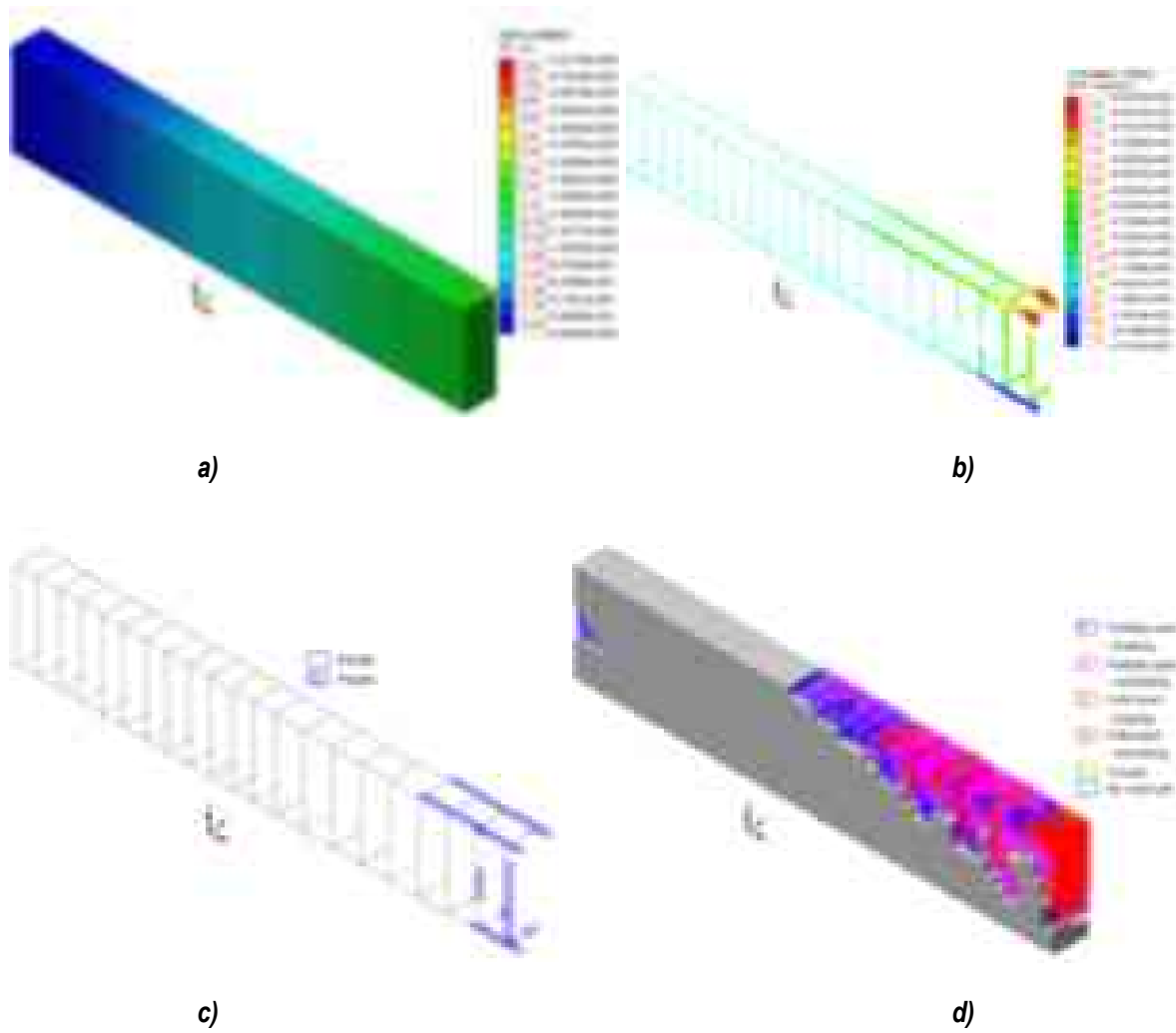
**Figura B. 36 Modelo V-3,  $0.90\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento**



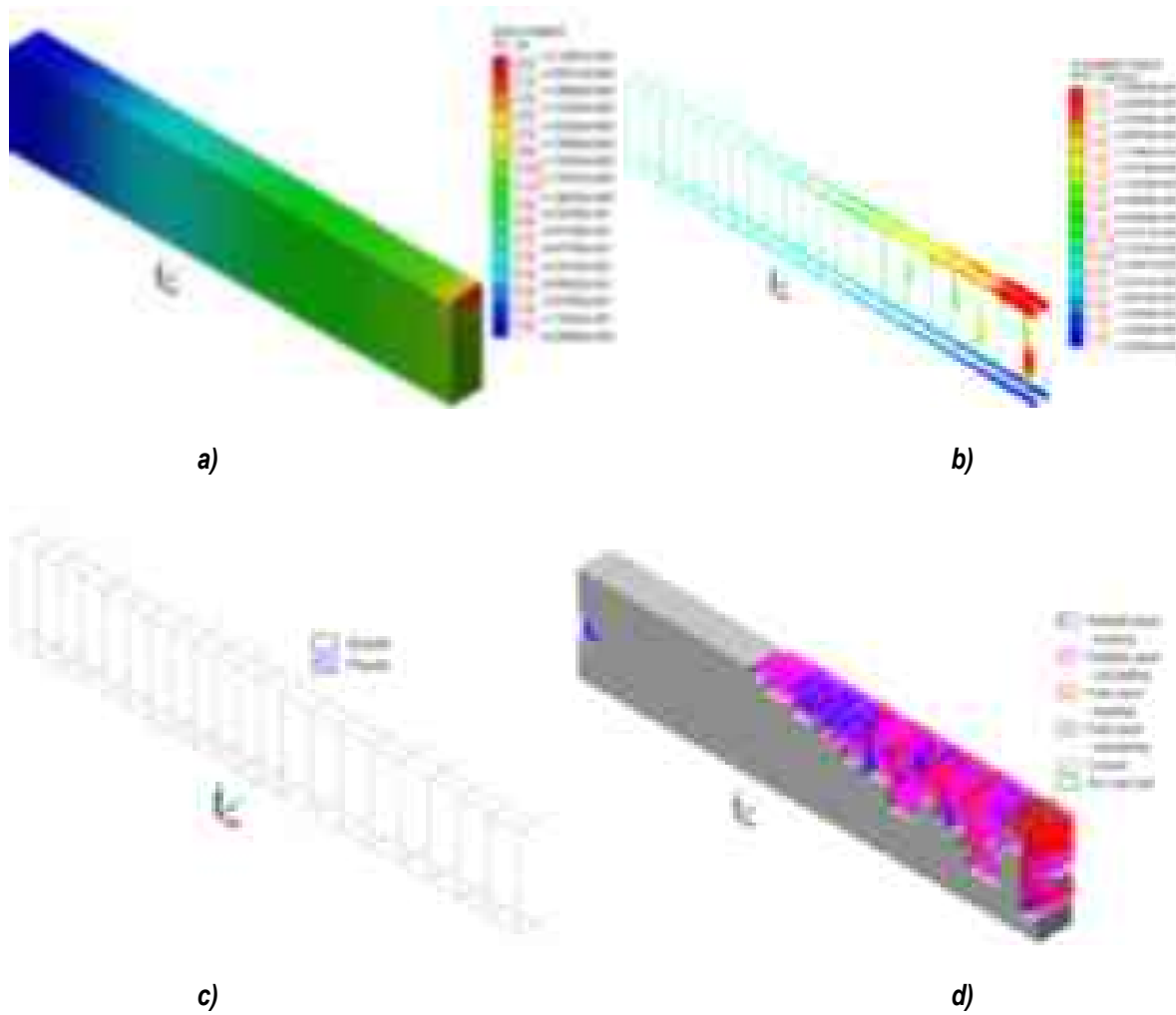
**Figura B. 37** Modelo V-1,  $0.25p_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



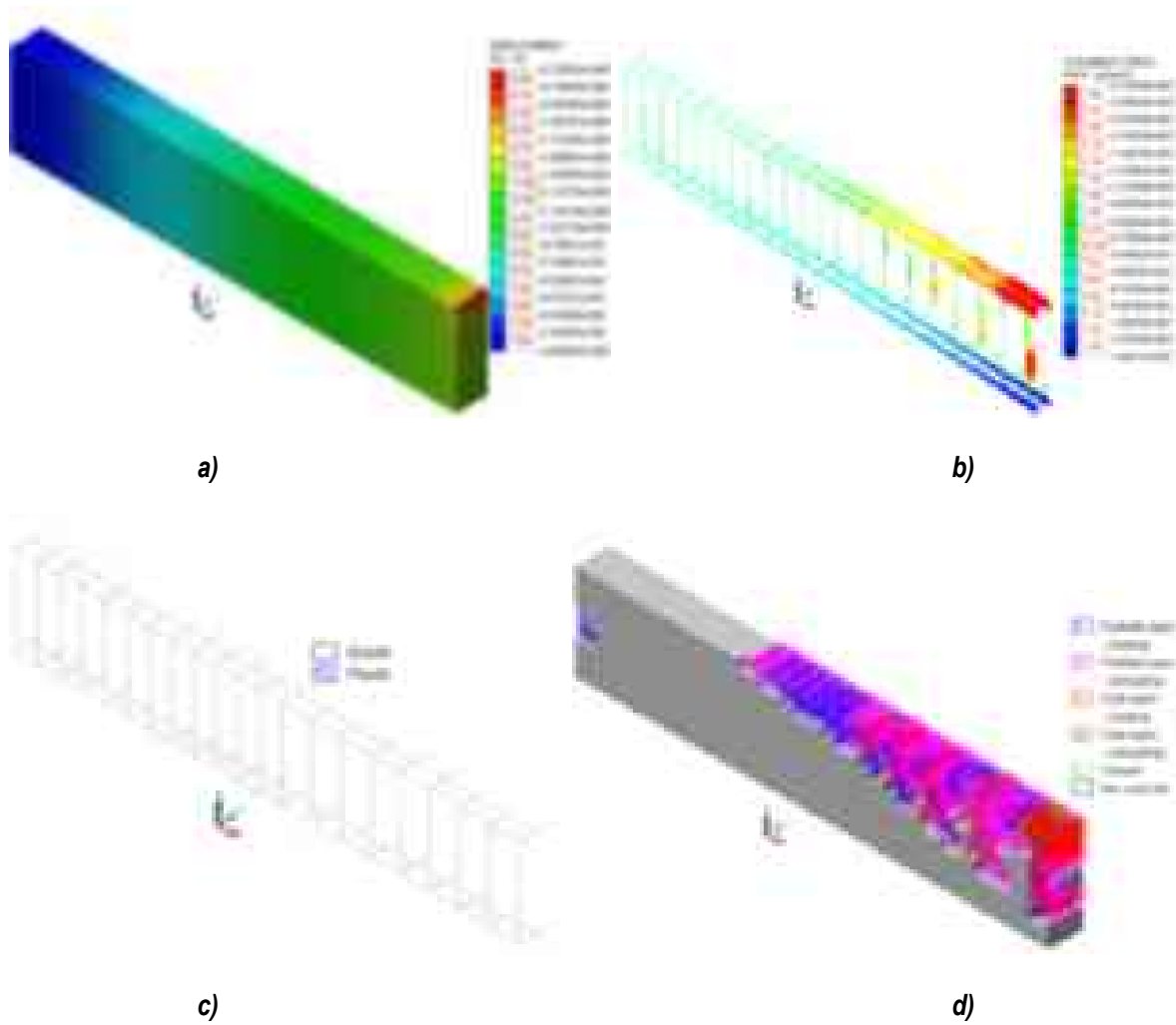
**Figura B. 38** Modelo V-1,  $0.25\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



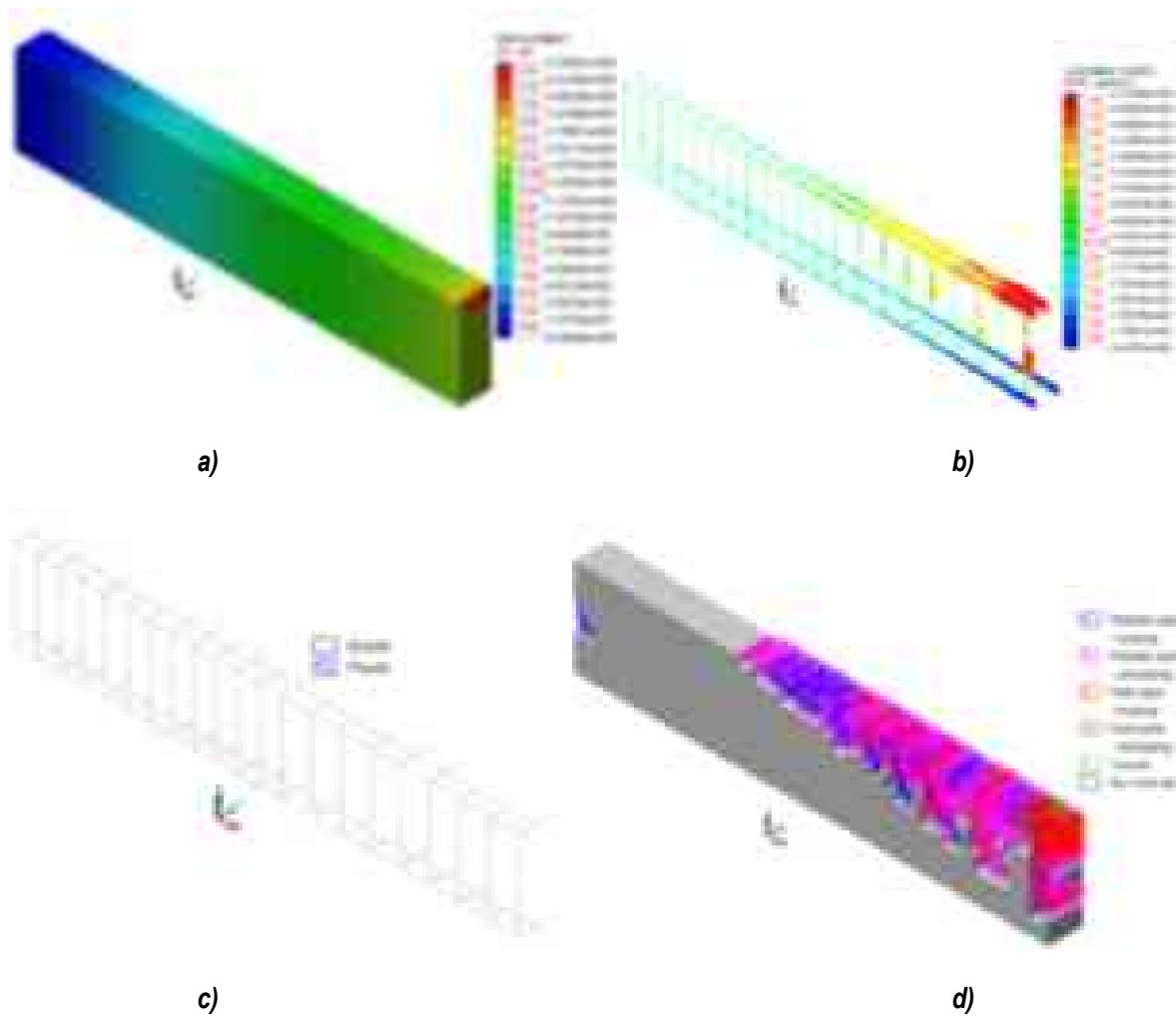
**Figura B. 39 Modelo V-1,  $0.25\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento**



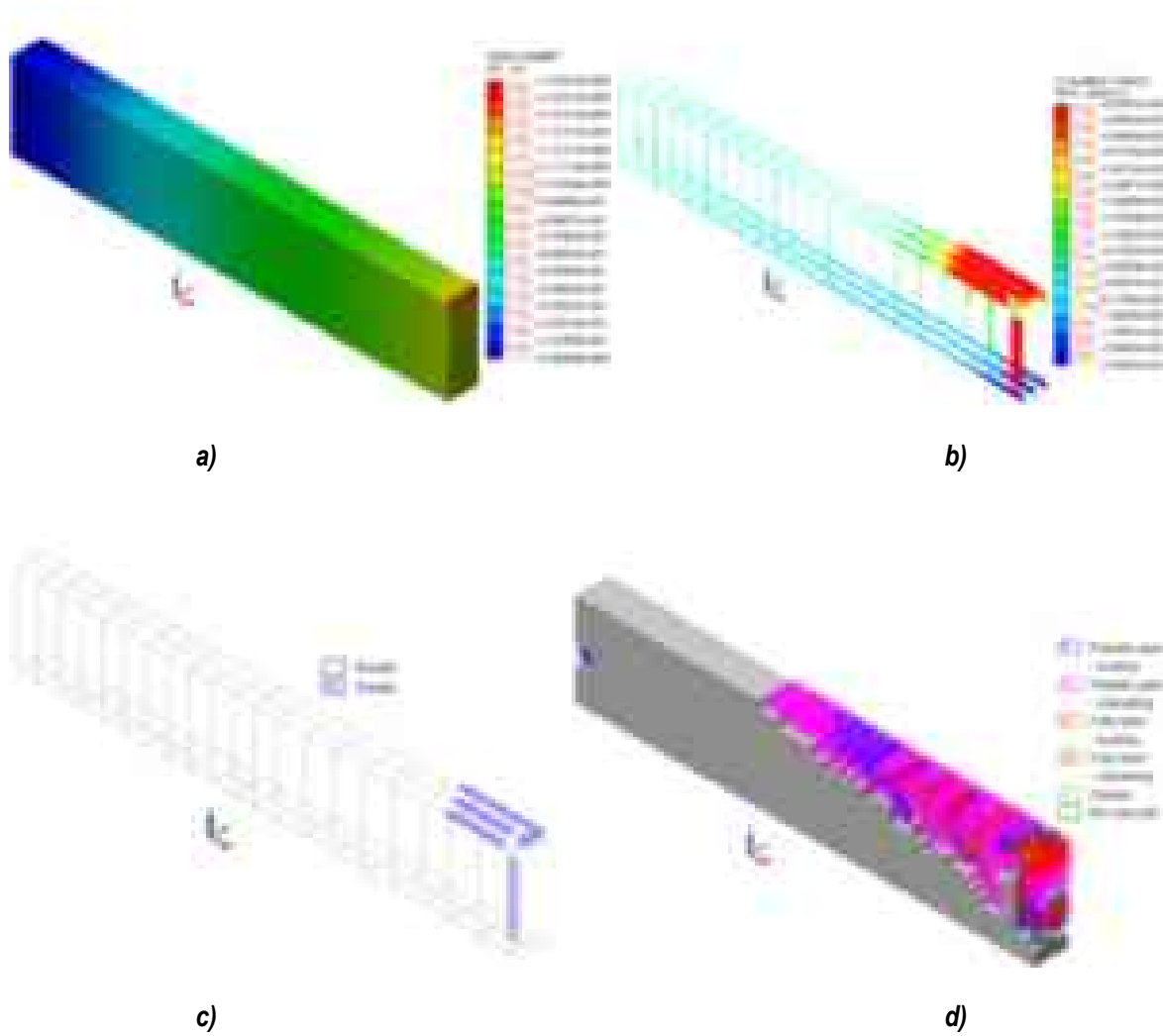
**Figura B. 40** Modelo V-1,  $0.45\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



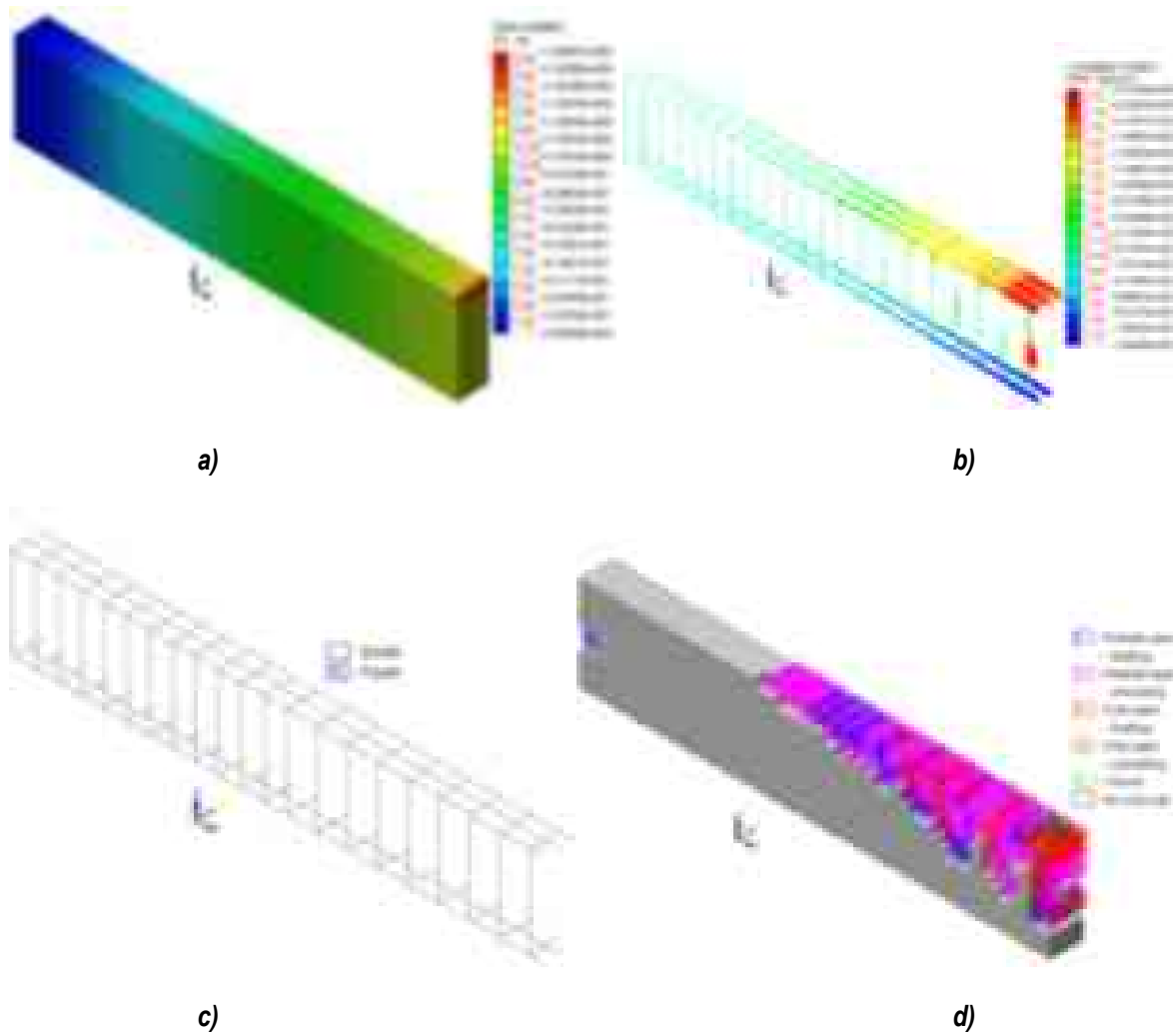
**Figura B. 41** Modelo V-1,  $0.45p_{bal}$  para  $p/p'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



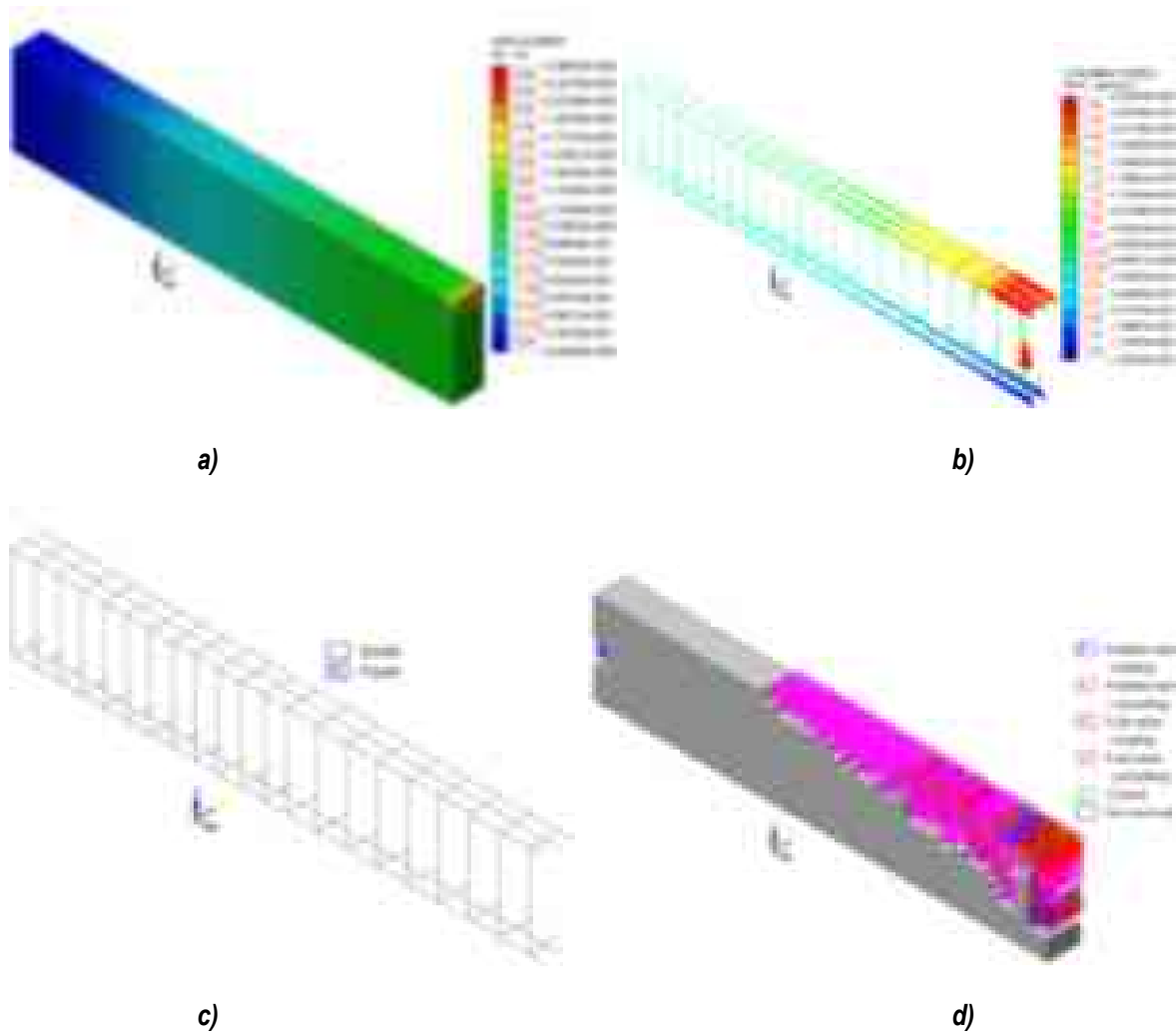
**Figura B. 42** Modelo V-1,  $0.45\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



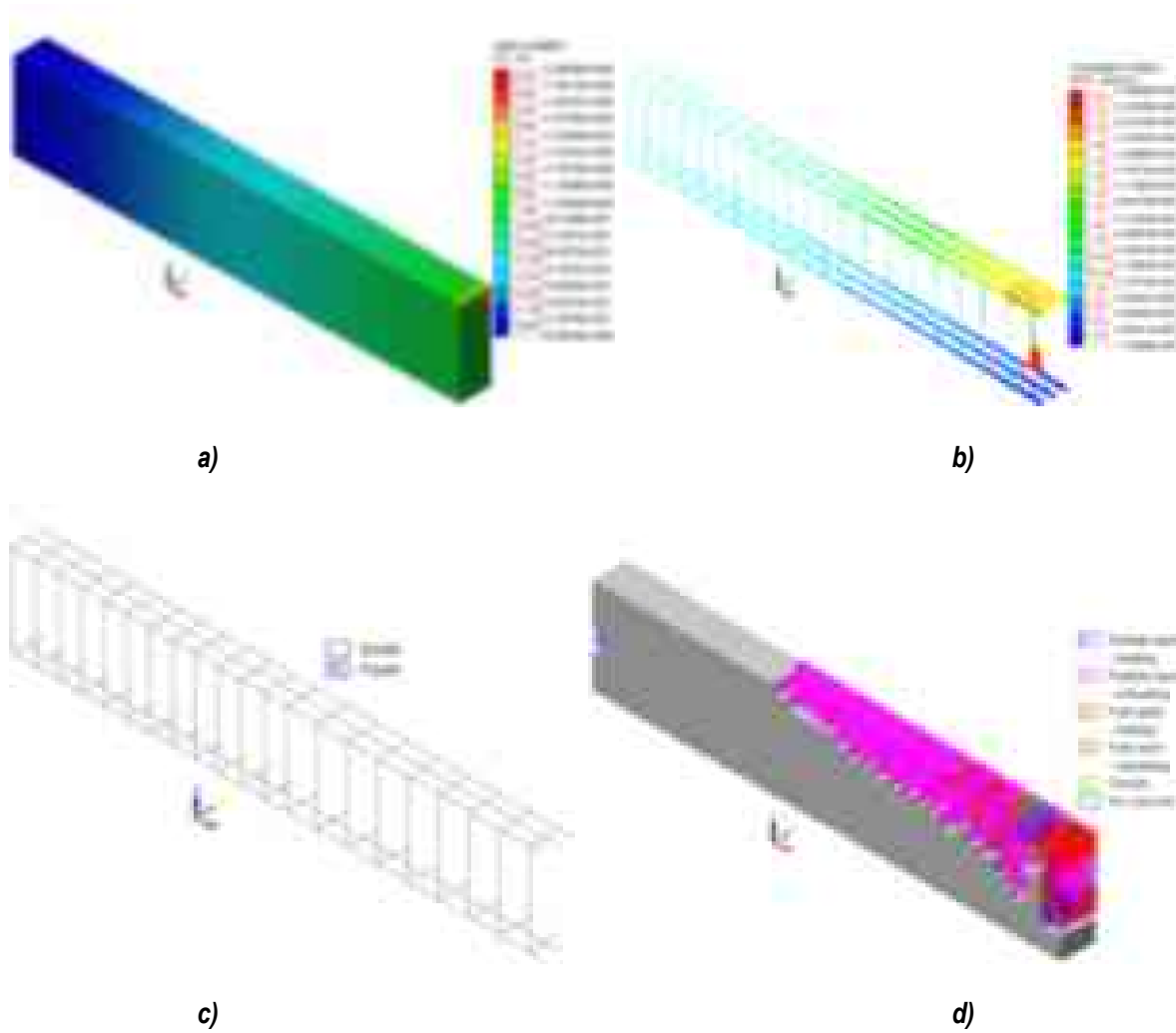
**Figura B. 43** Modelo V-1,  $0.65\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



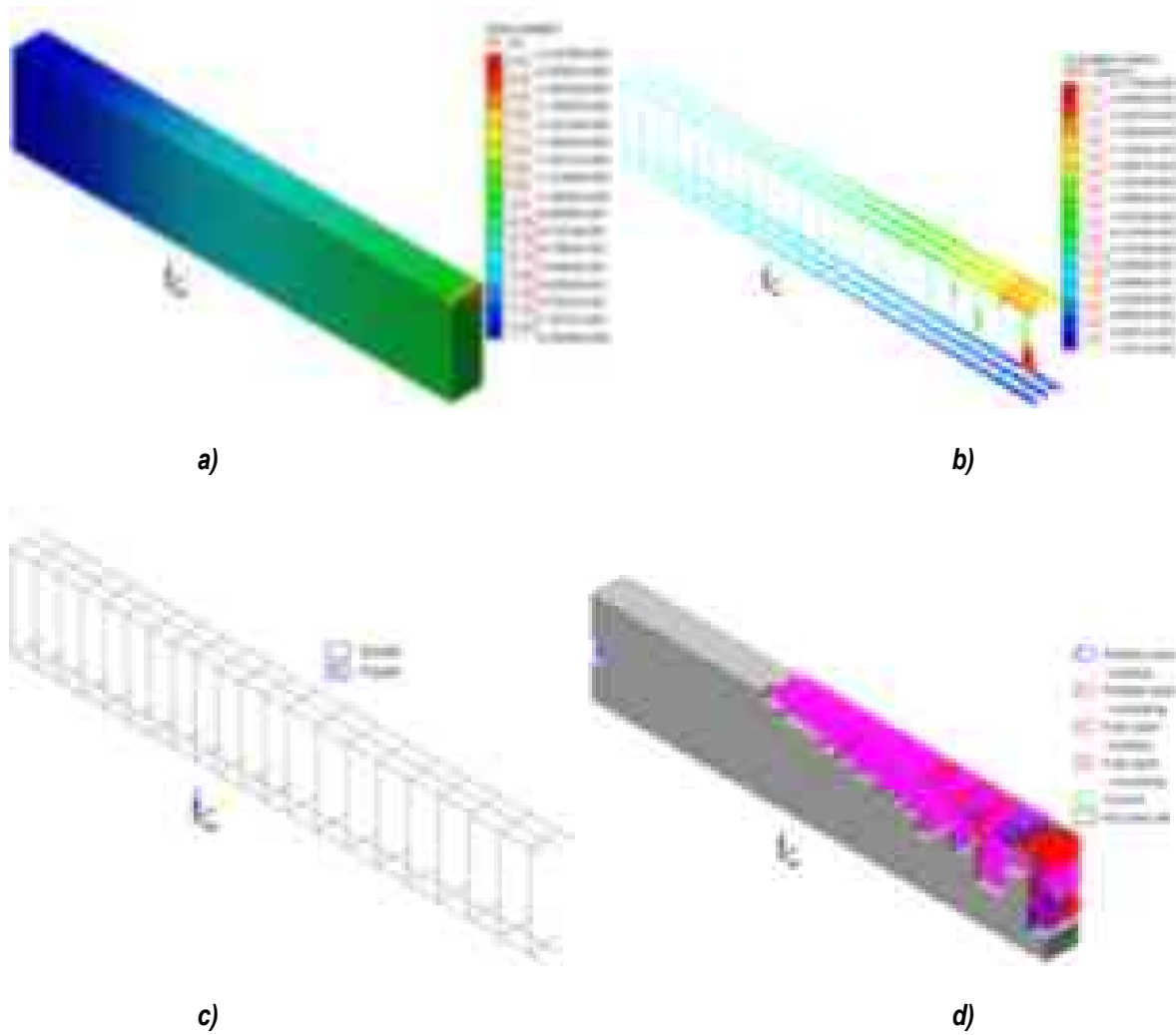
**Figura B. 44 Modelo V-1,  $0.65\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento**



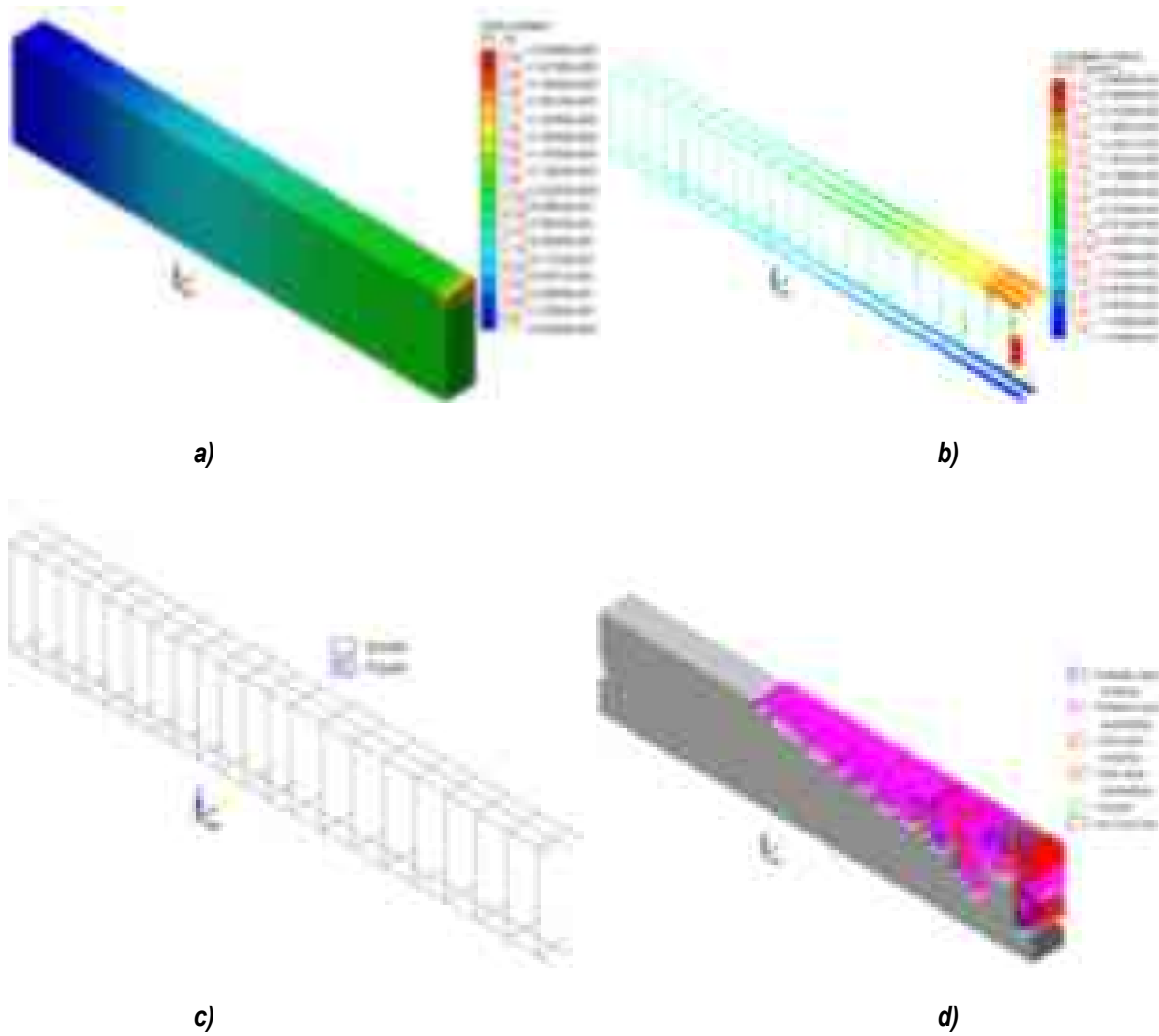
**Figura B. 45** Modelo V-1,  $0.65\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



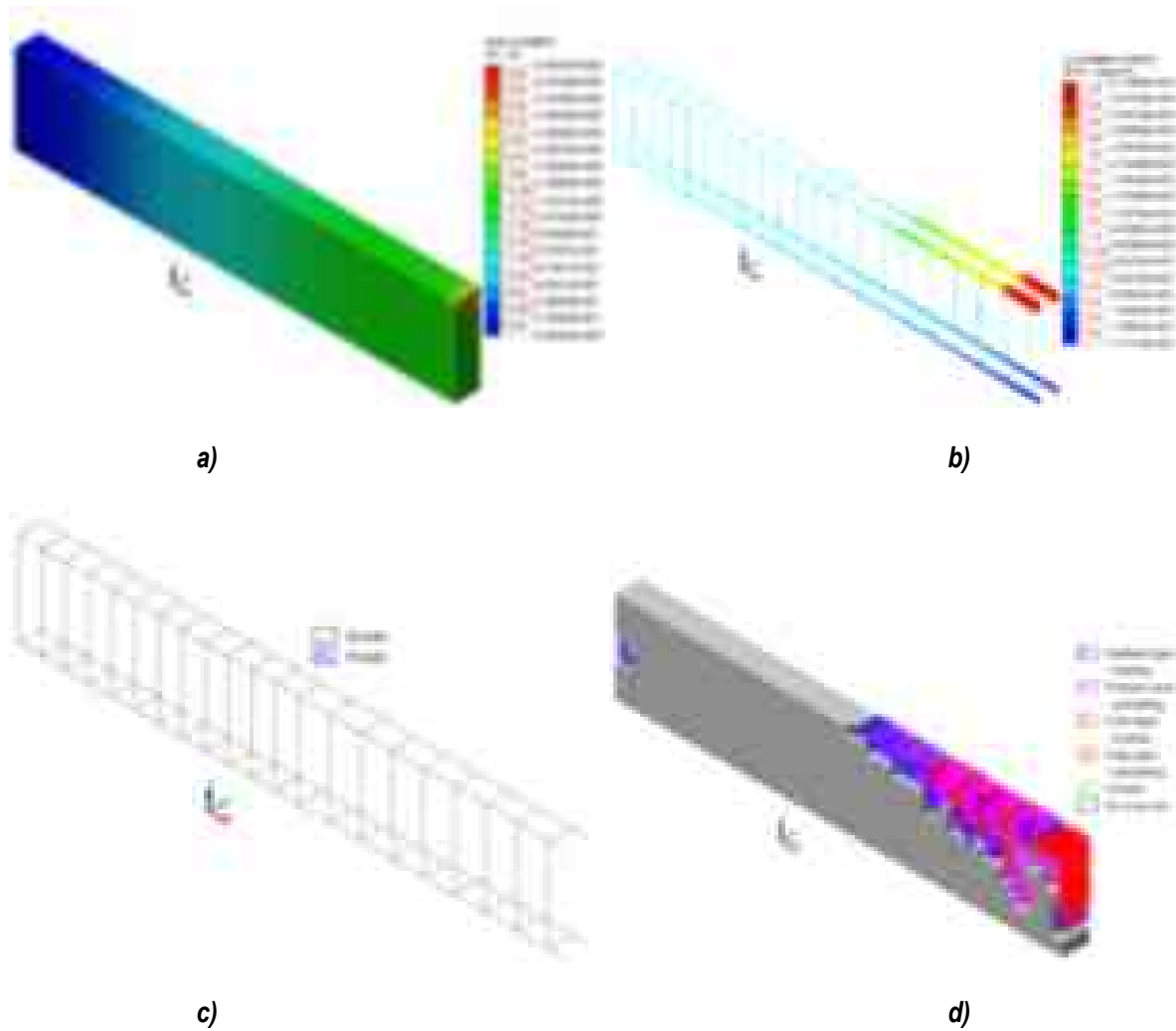
**Figura B. 46** Modelo V-1,  $0.90\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



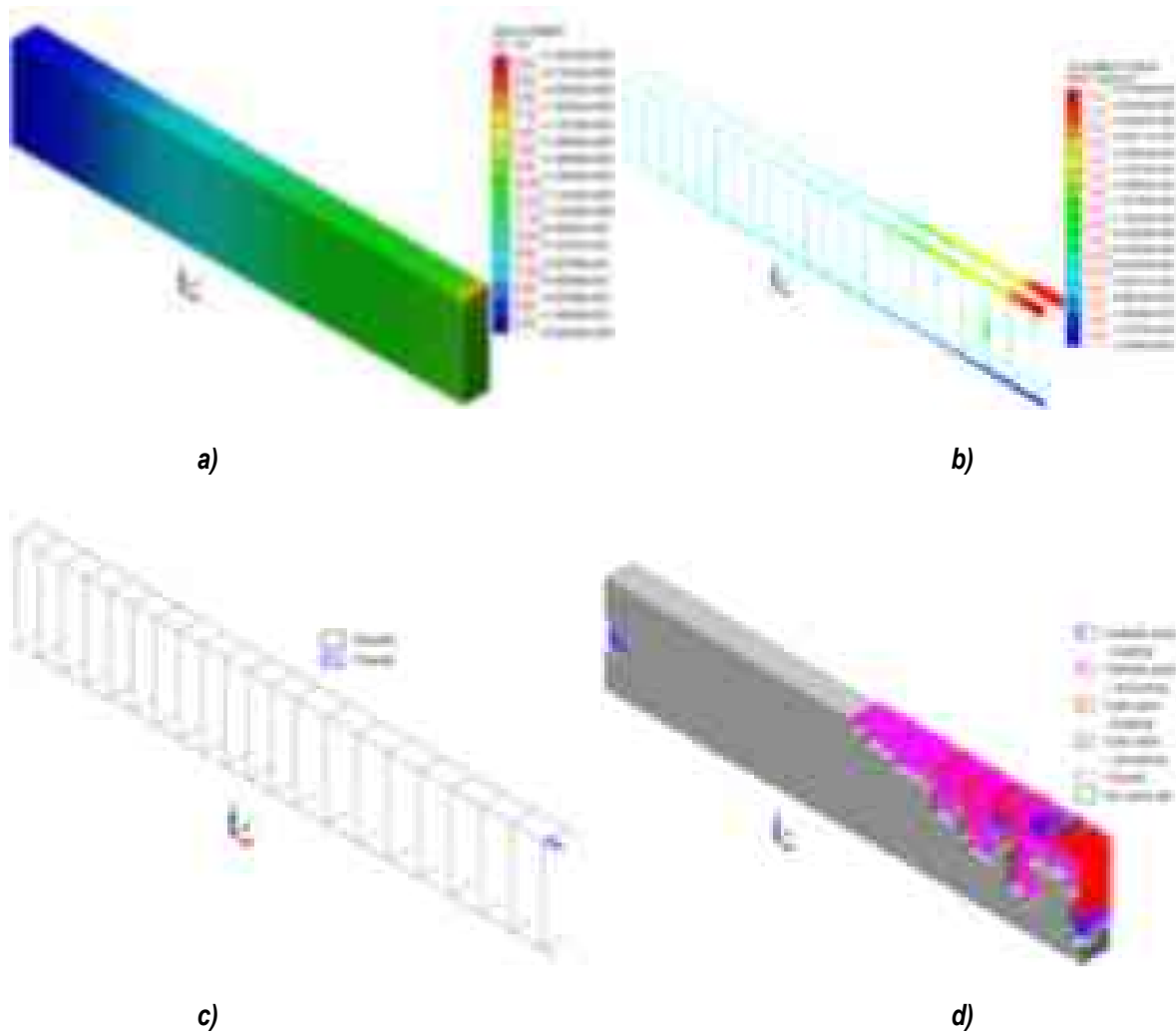
**Figura B. 47** Modelo V-1,  $0.90\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



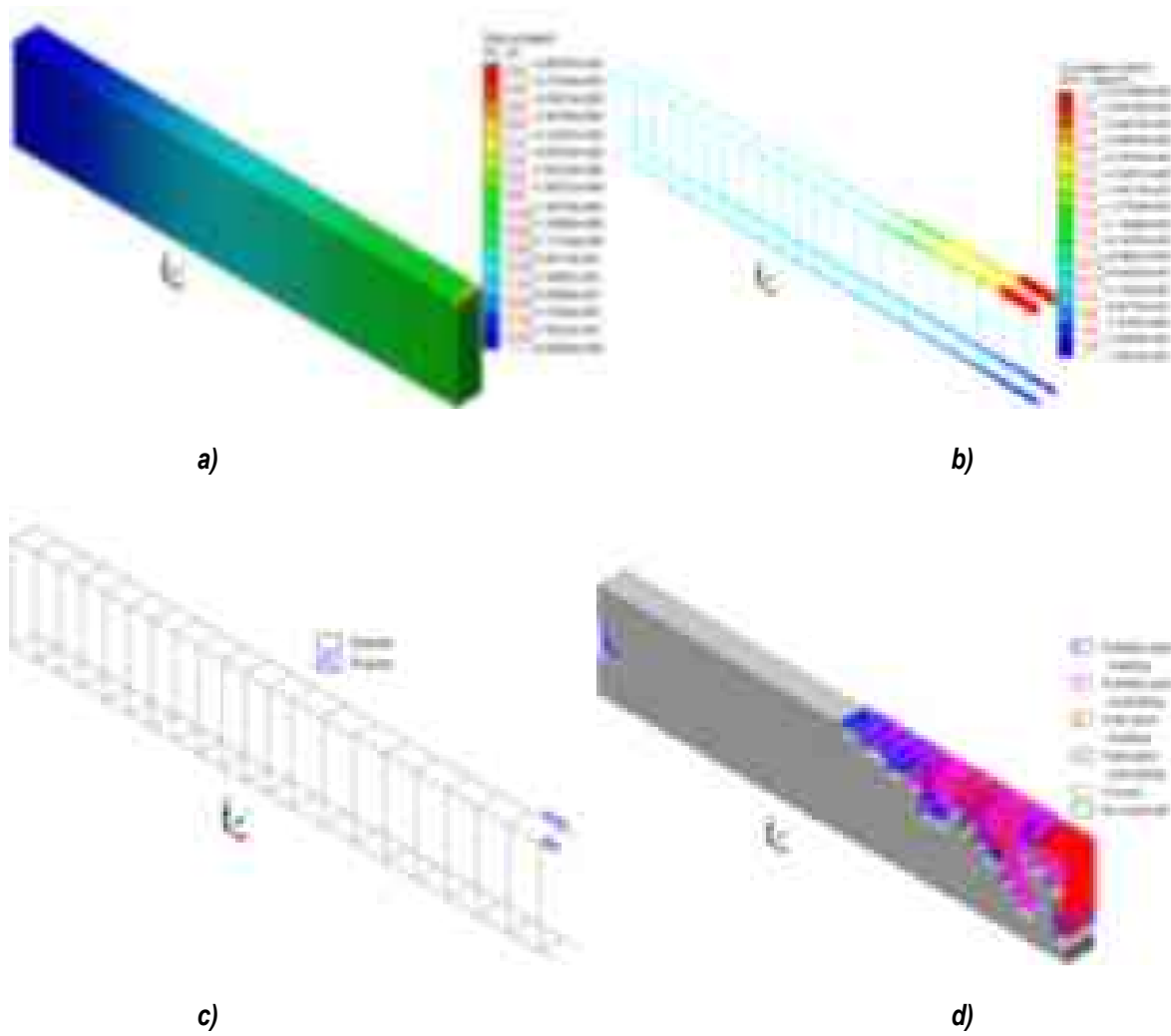
**Figura B. 48** Modelo V-1,  $0.90\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



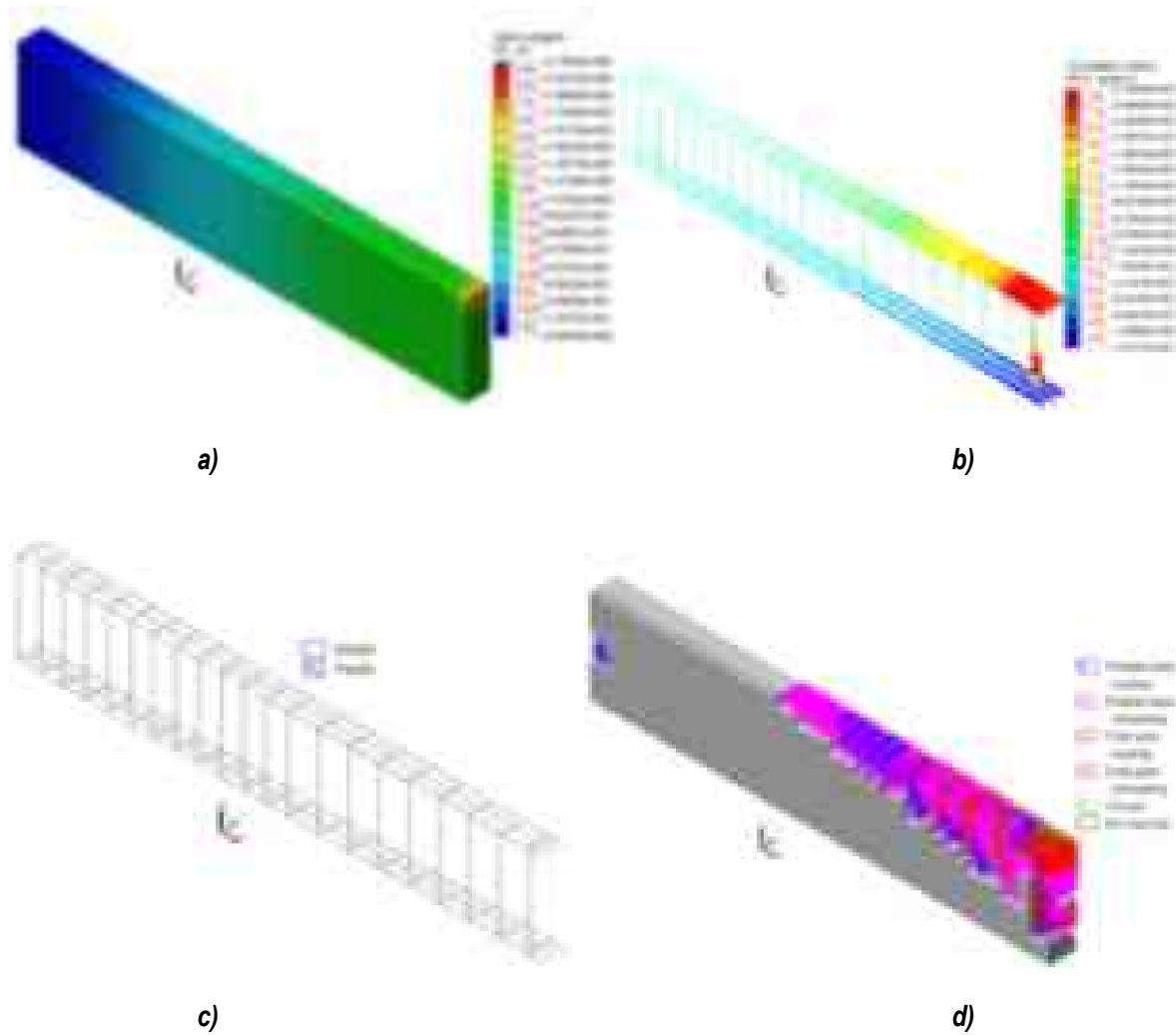
**Figura B. 49** Modelo V-2,  $0.25\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



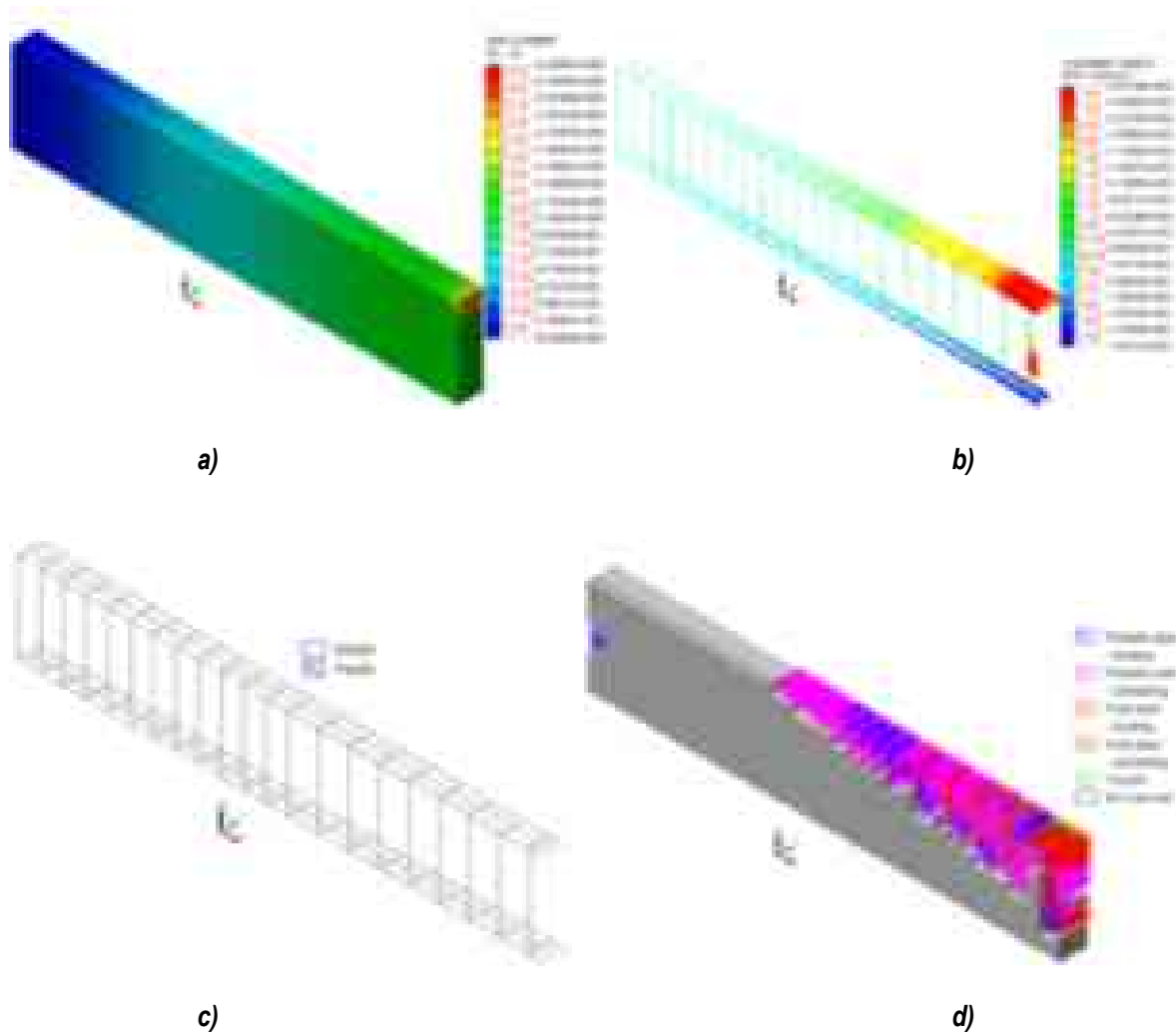
**Figura B. 50** Modelo V-2,  $0.25\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



**Figura B. 51** Modelo V-2,  $0.25\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



**Figura B. 52** Modelo V-2,  $0.45\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



**Figura B. 53 Modelo V-2,  $0.45\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento**

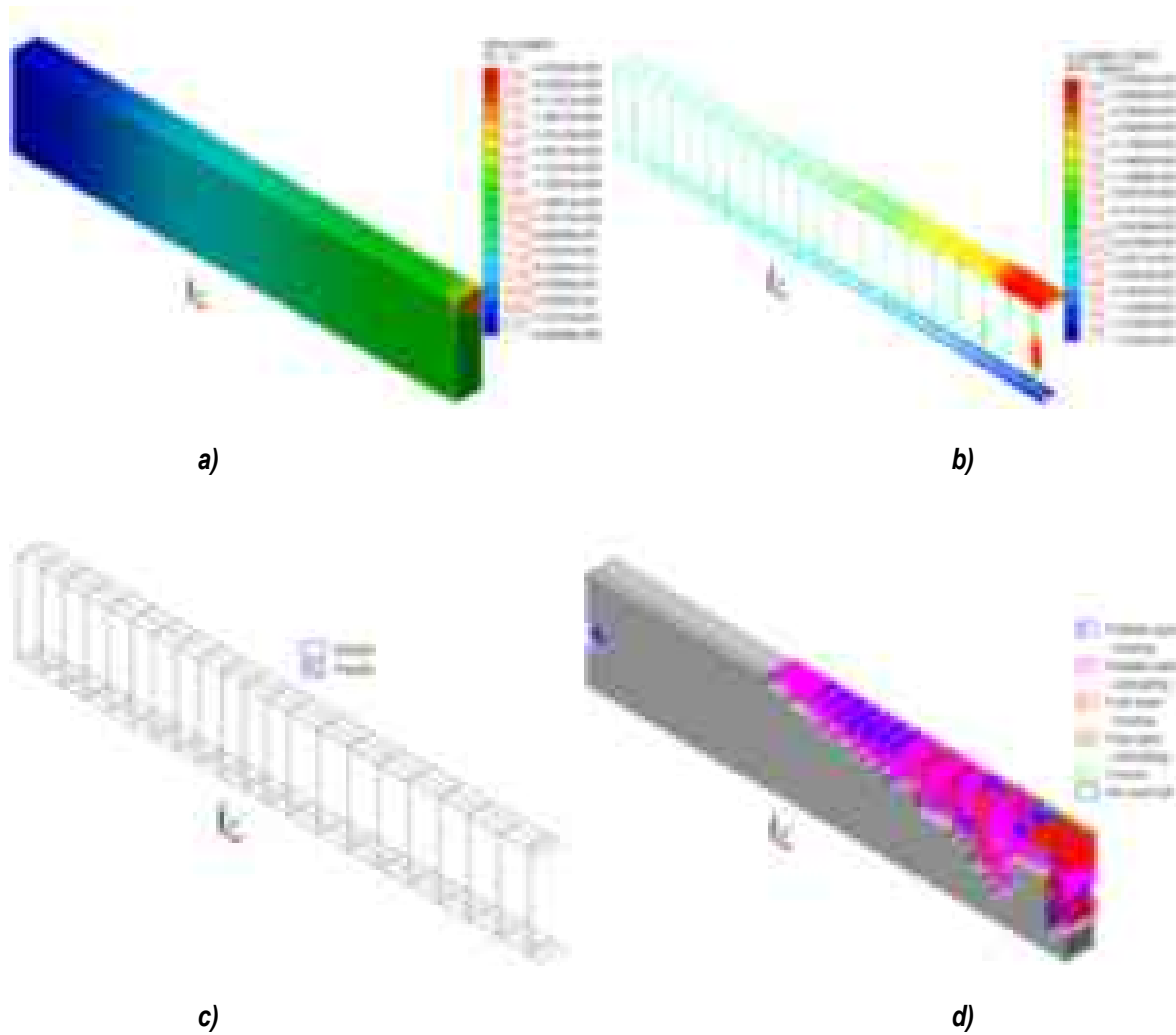
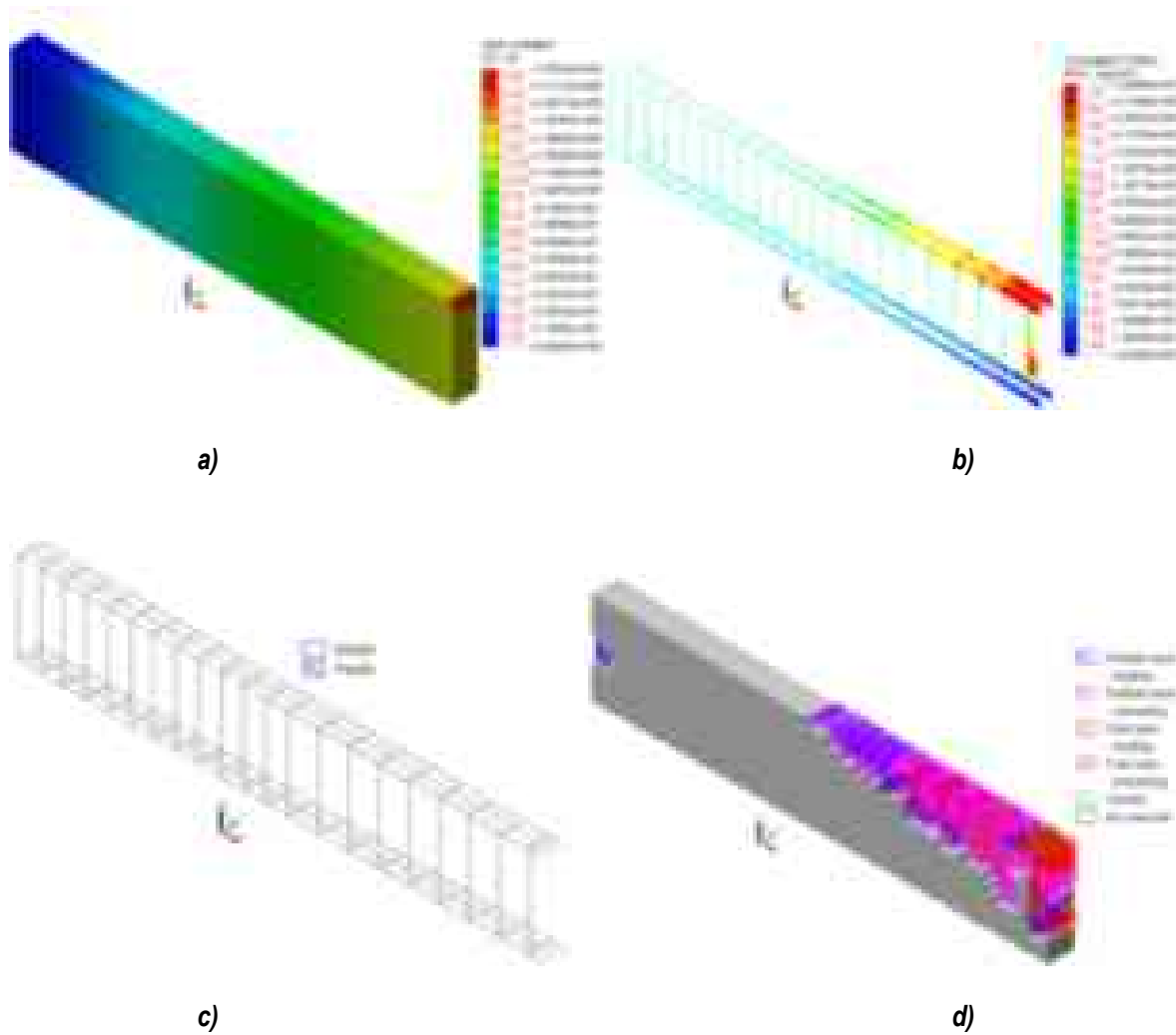
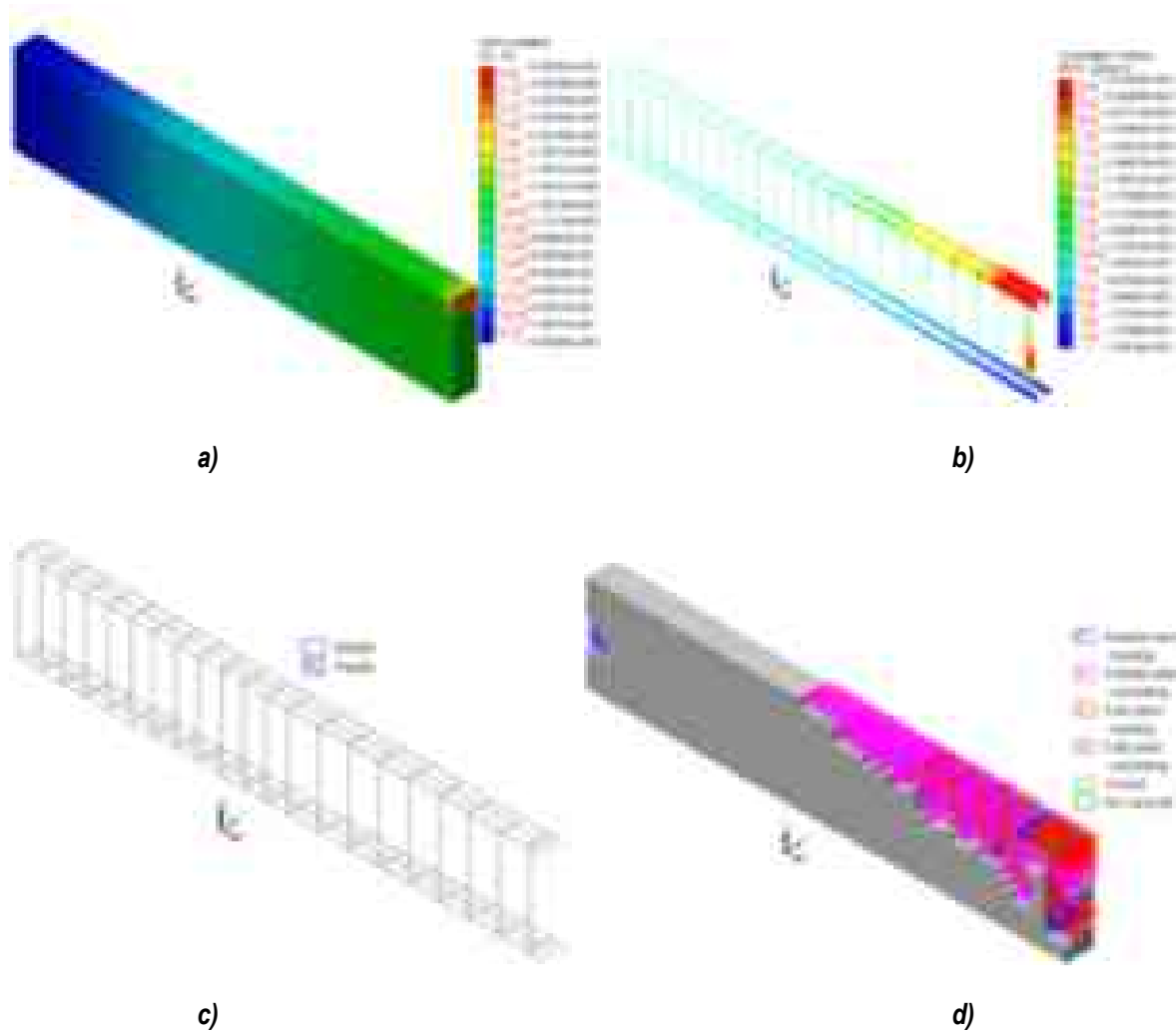


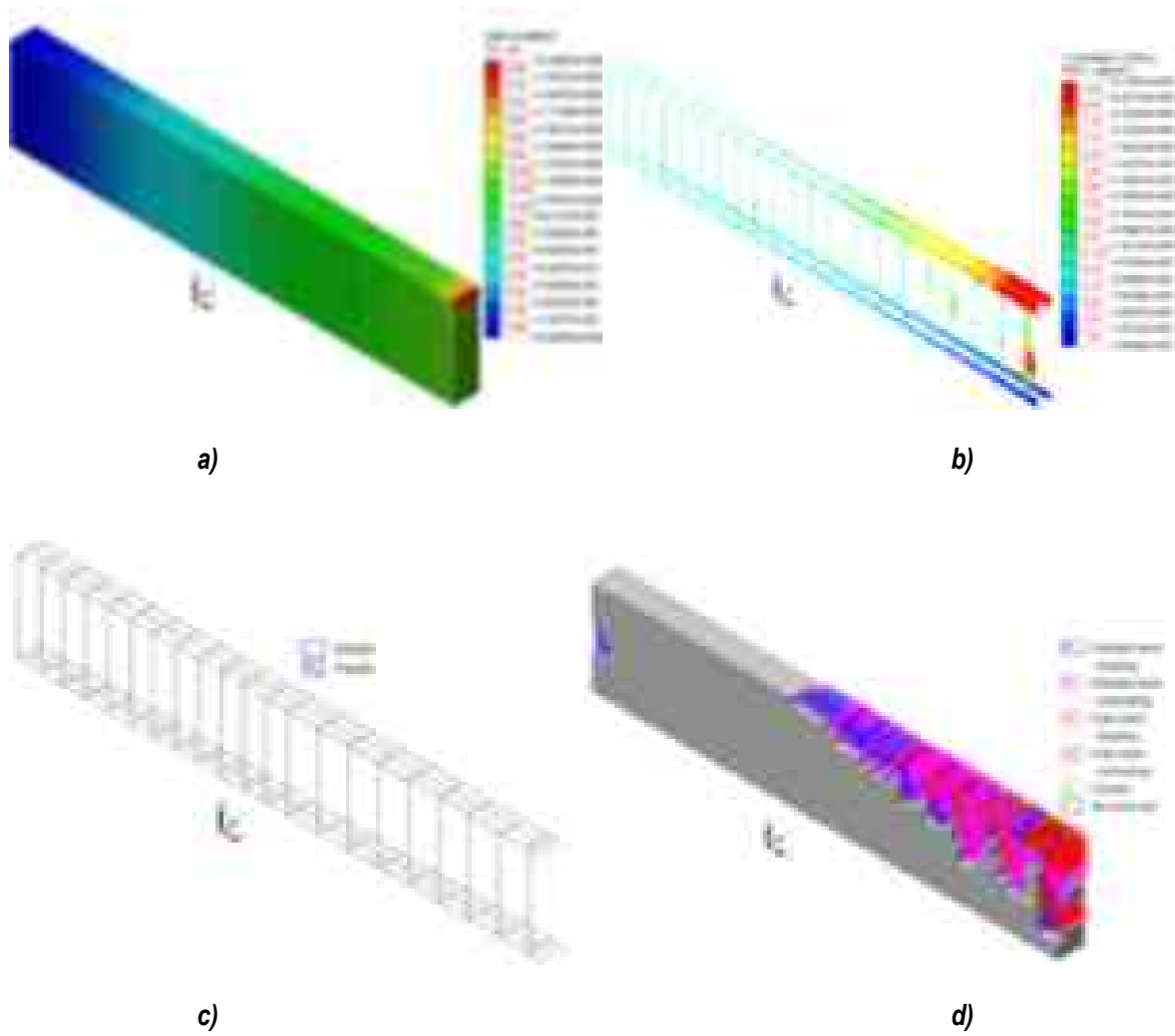
Figura B. 54 Modelo V-2,  $0.45\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



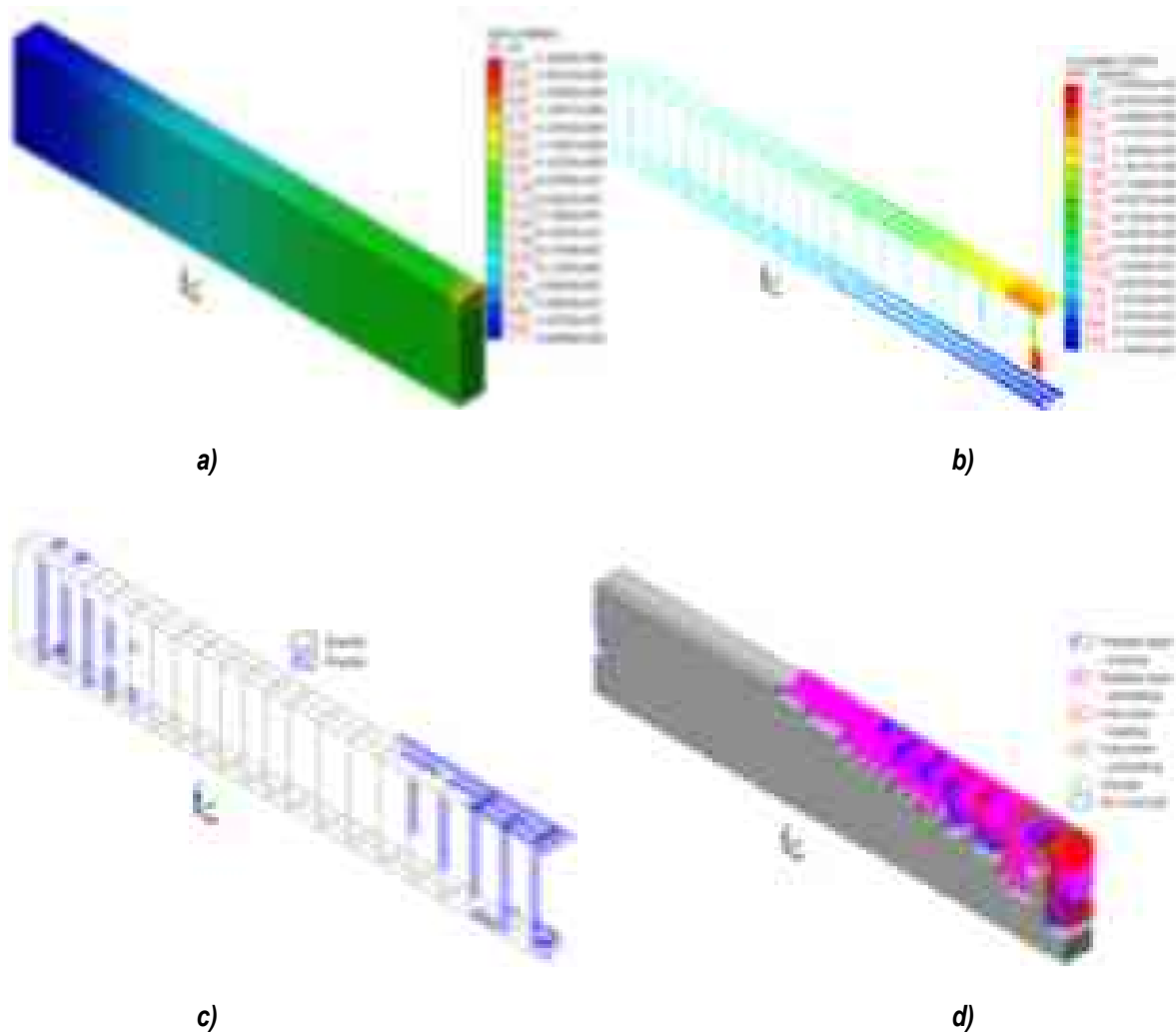
**Figura B. 55** Modelo V-2,  $0.65\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



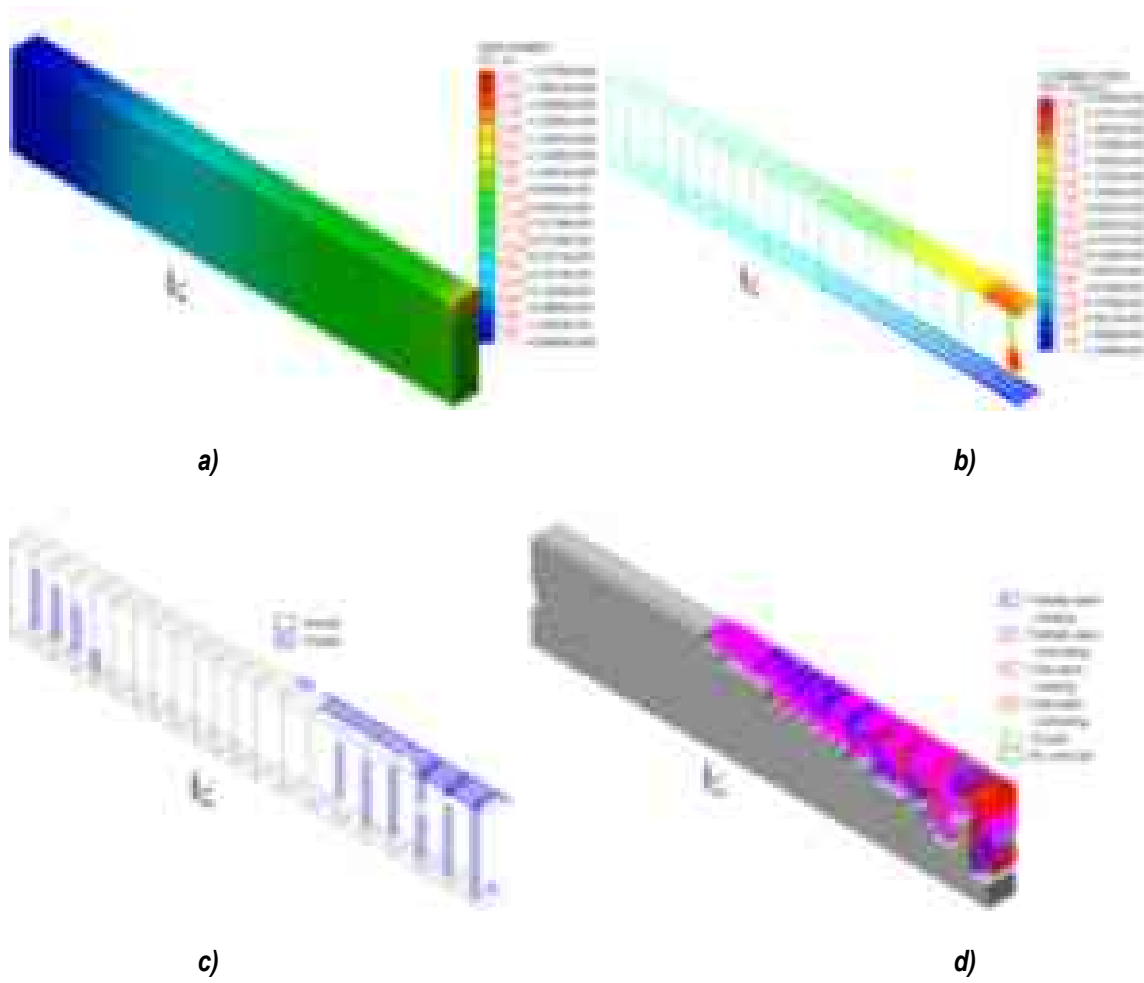
**Figura B. 56** Modelo V-2,  $0.65\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



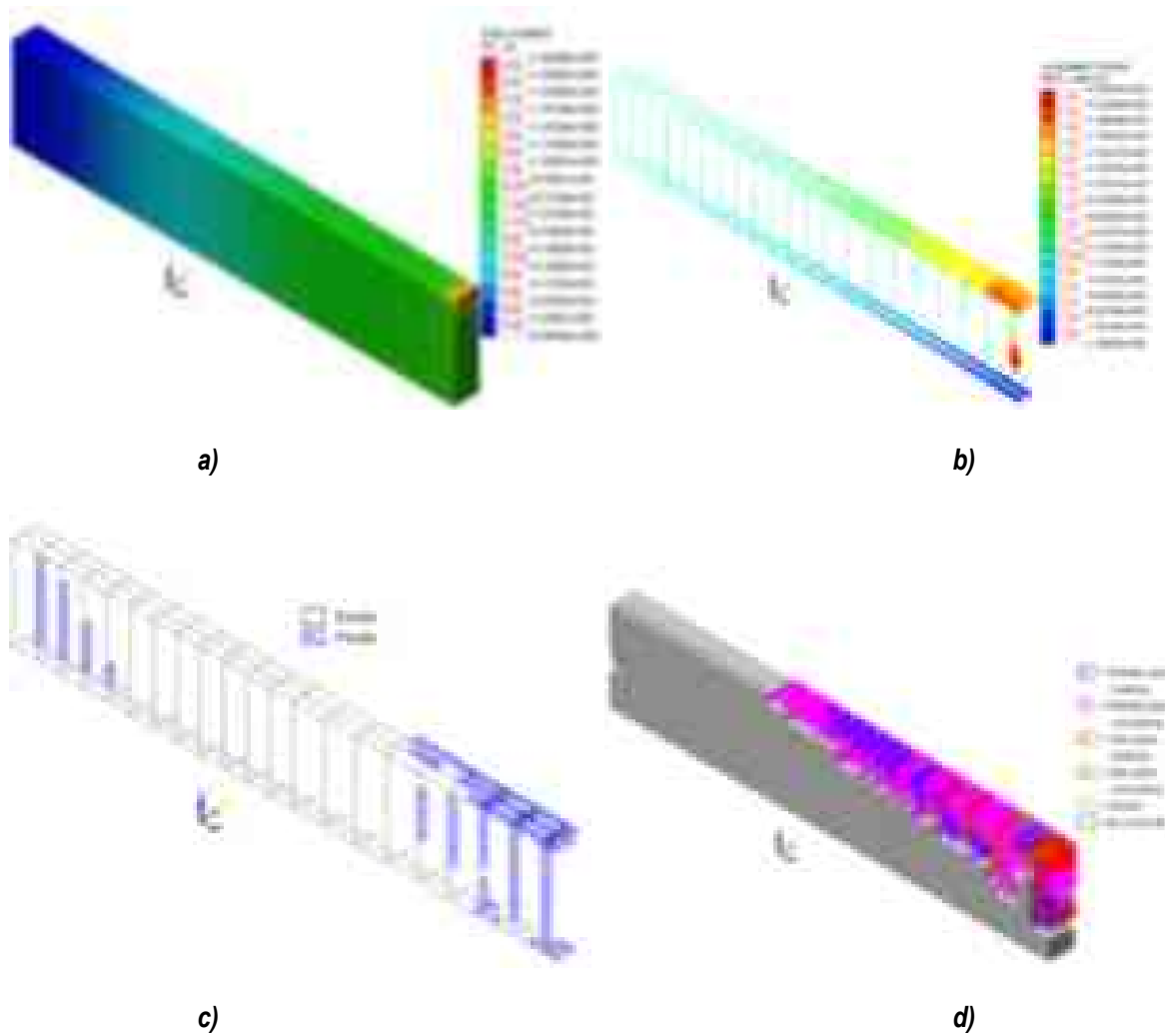
**Figura B. 57** Modelo V-2,  $0.65\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



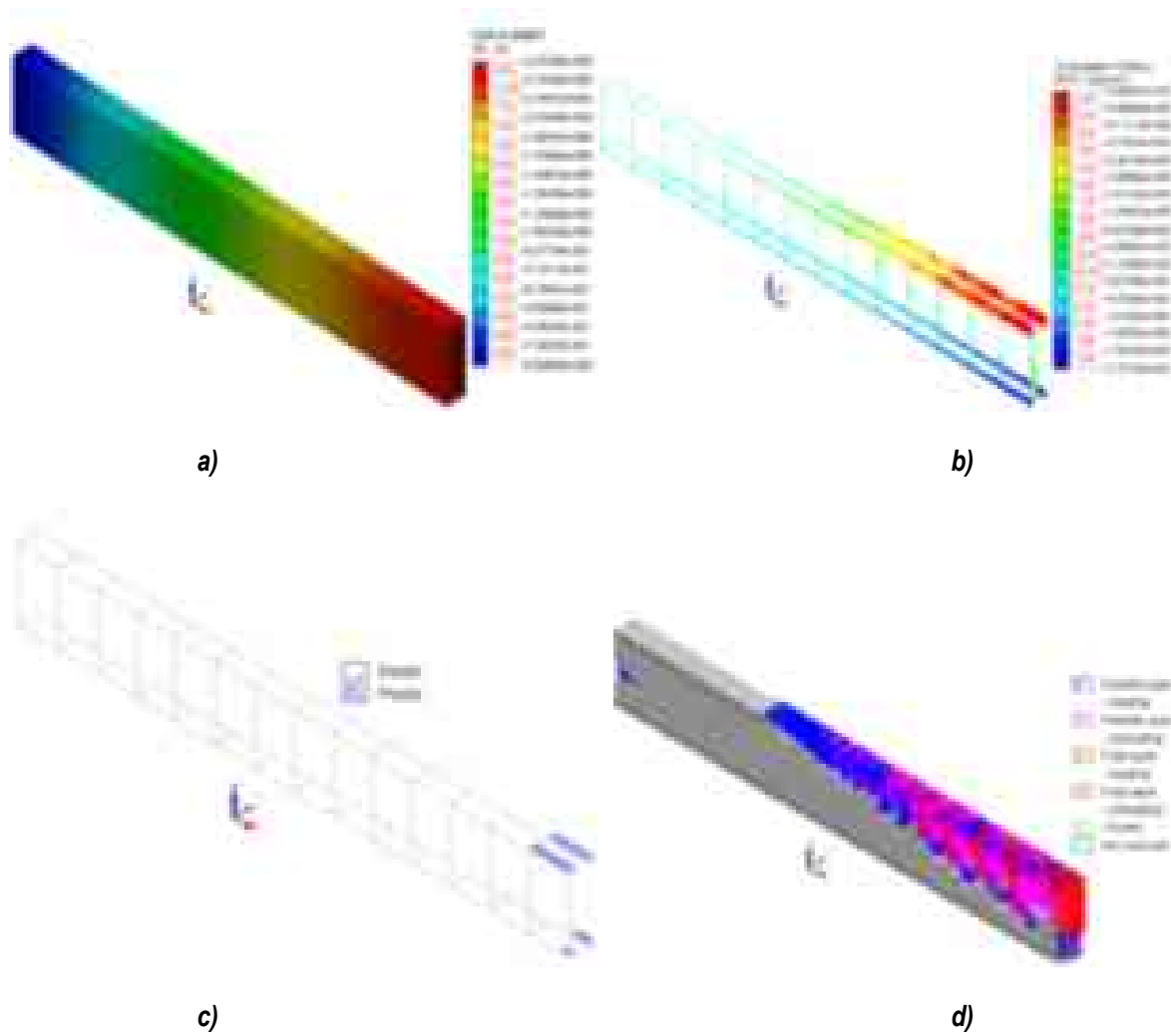
**Figura B. 58** Modelo V-2,  $0.90\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



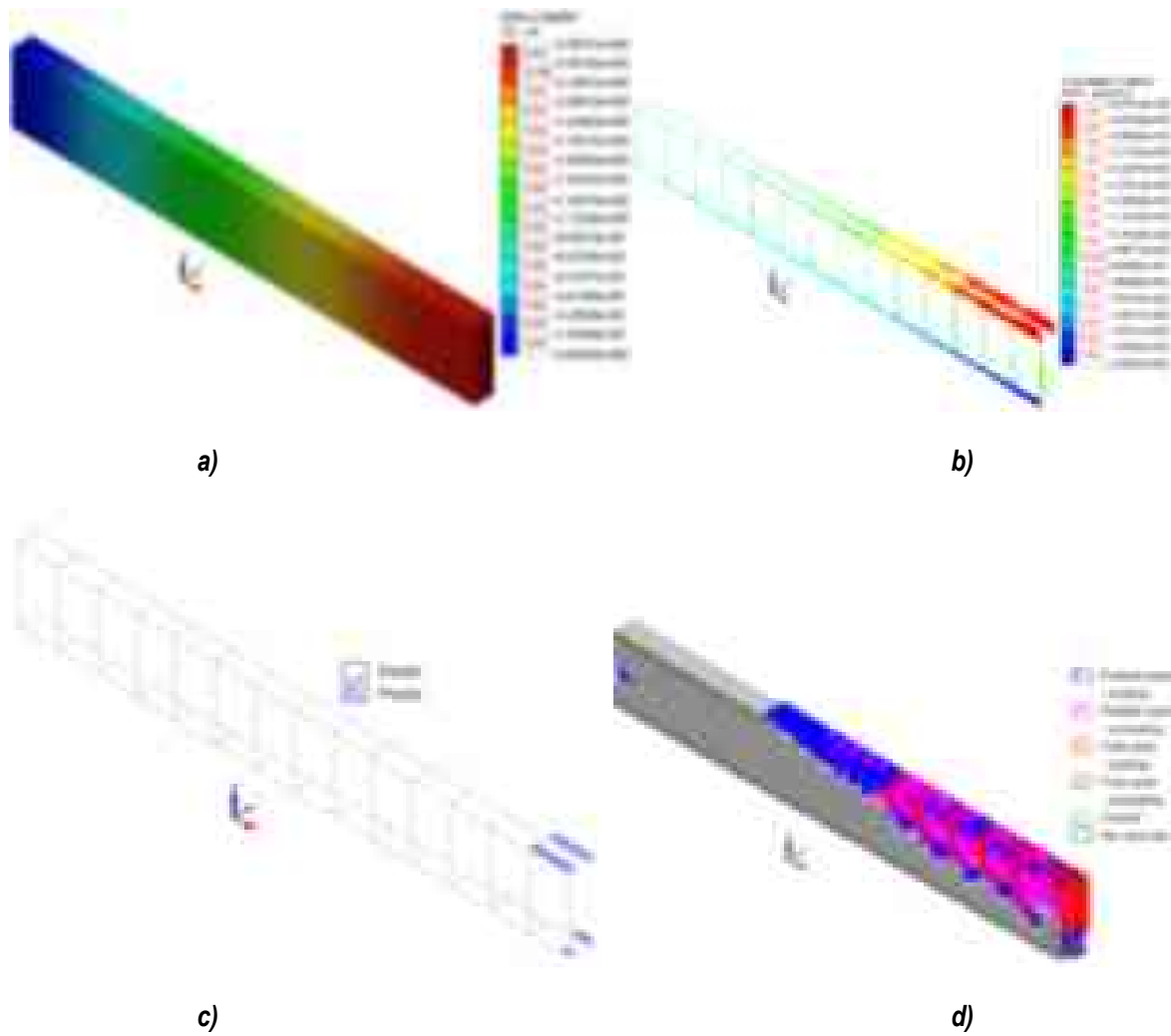
**Figura B. 59** Modelo V-2,  $0.90\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



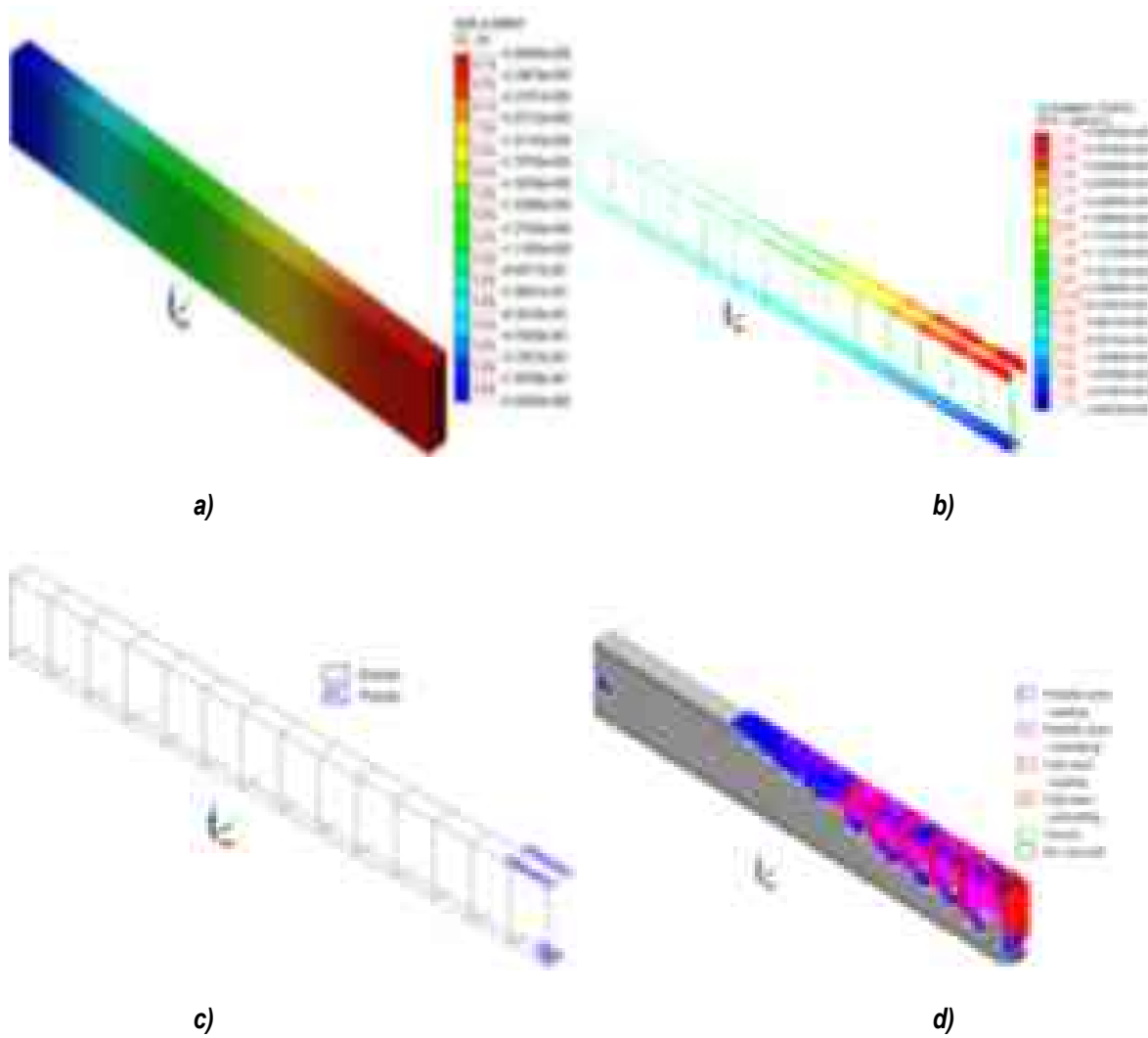
**Figura B. 60** Modelo V-2,  $0.90\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



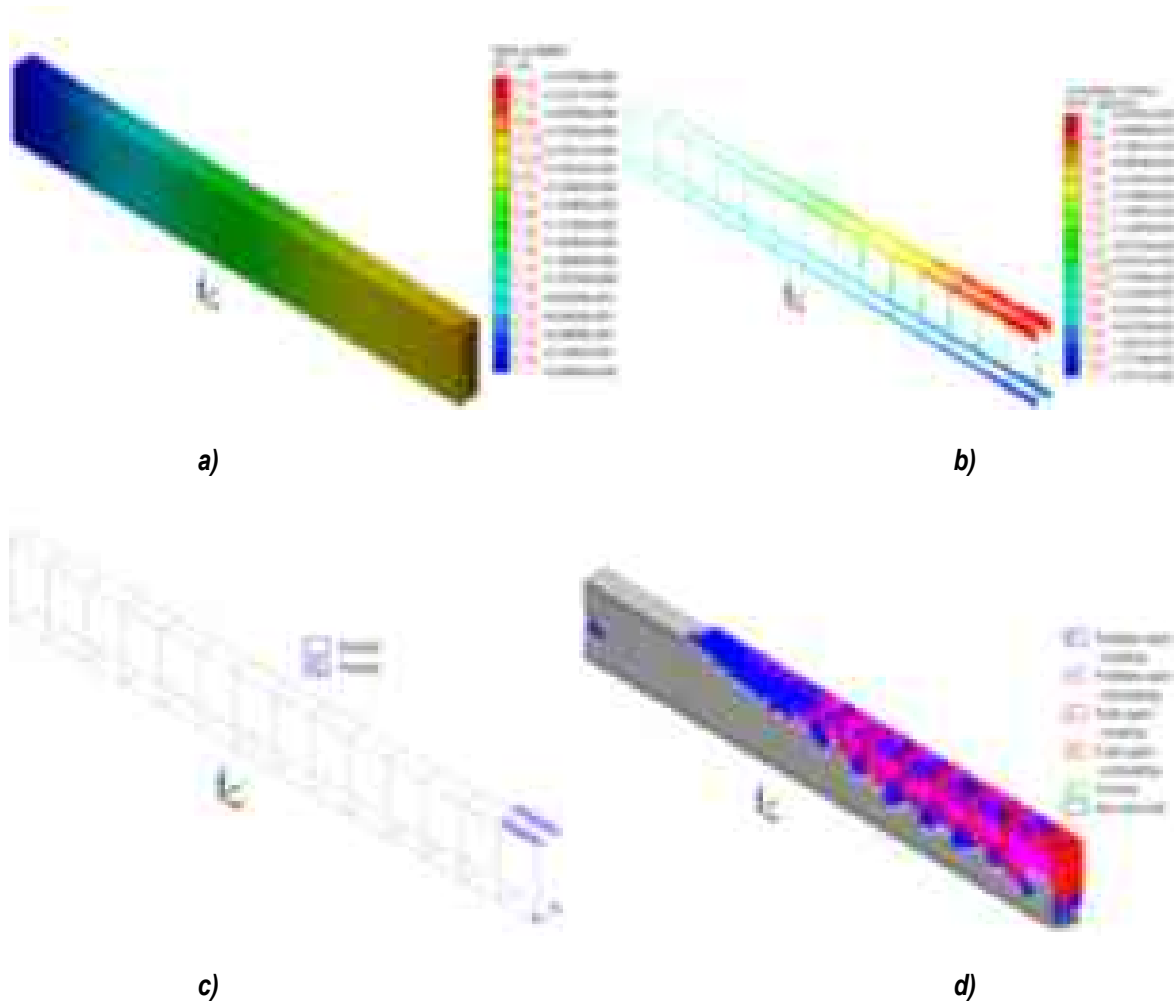
**Figura B. 61** Modelo V-3,  $0.25\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



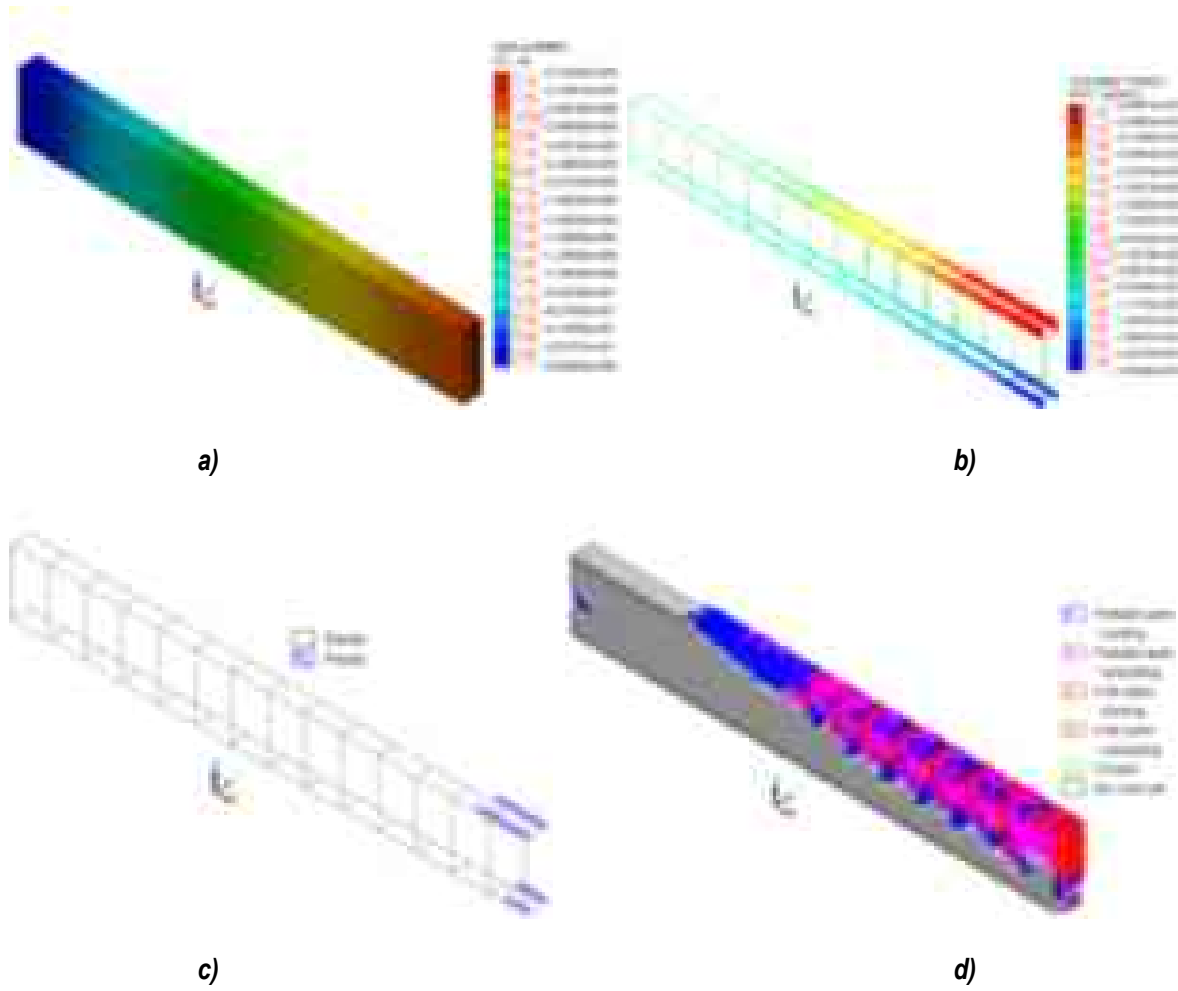
**Figura B. 62** Modelo V-3,  $0.25\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



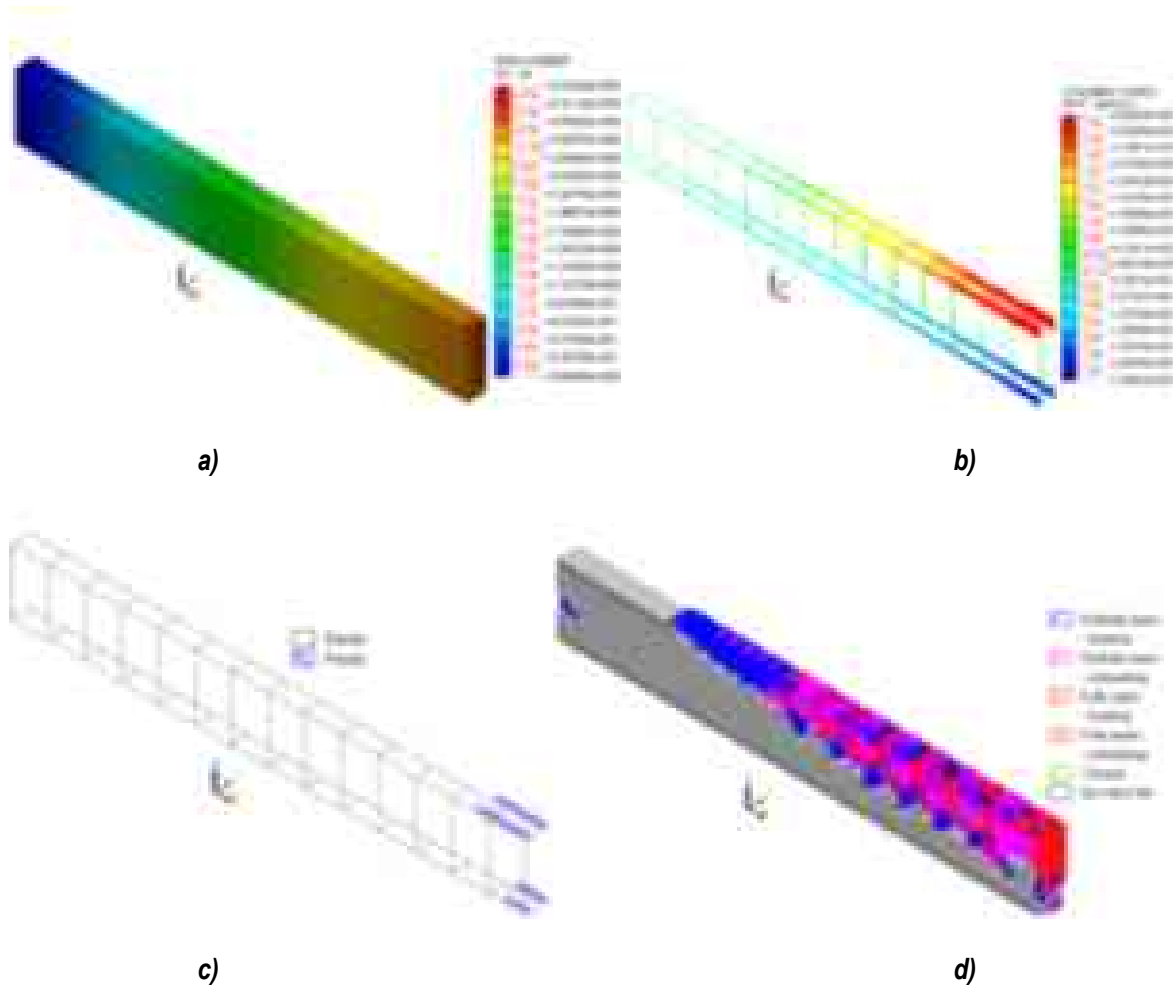
**Figura B. 63 Modelo V-3,  $0.25\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento**



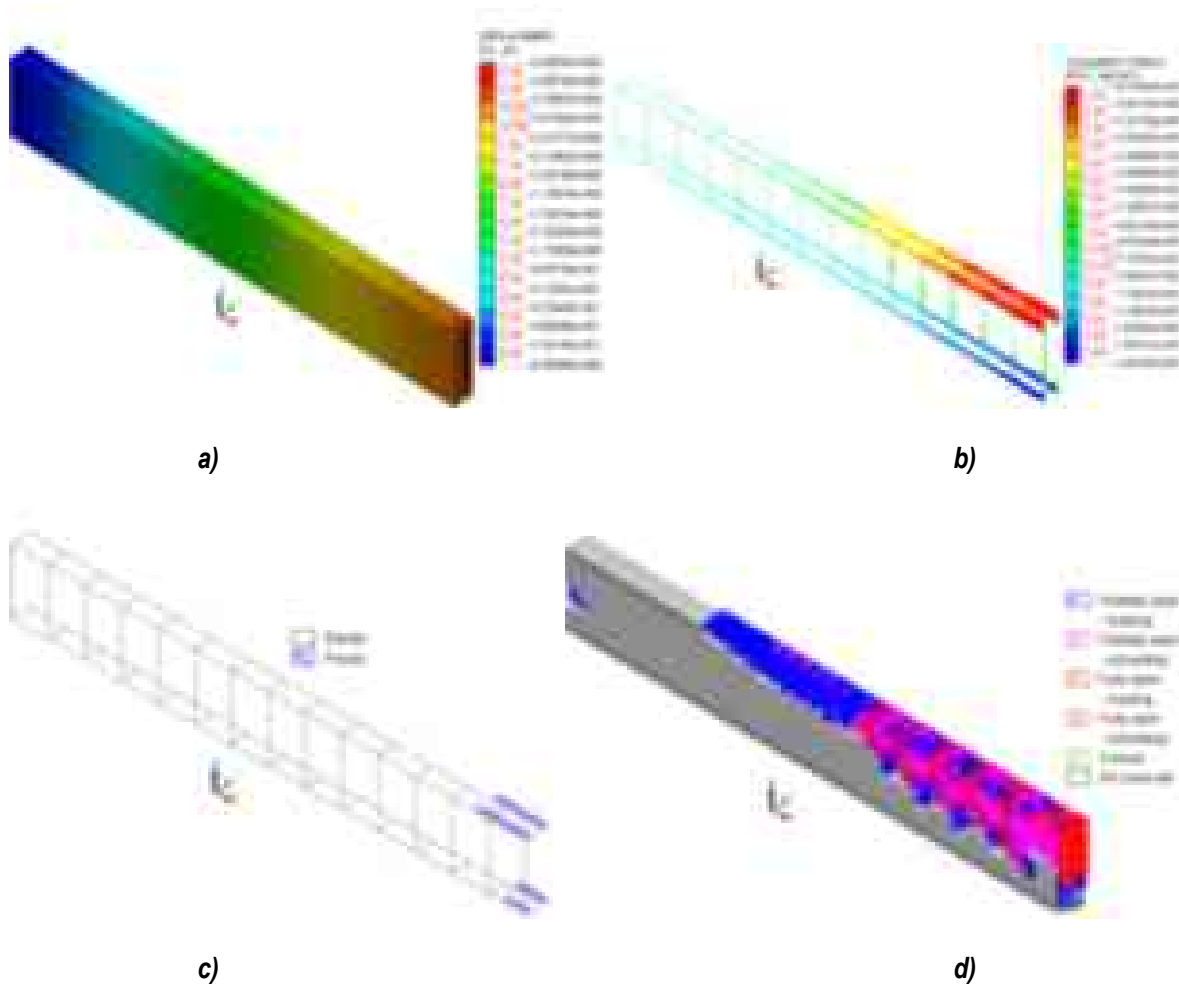
**Figura B. 64** Modelo V-3,  $0.45\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



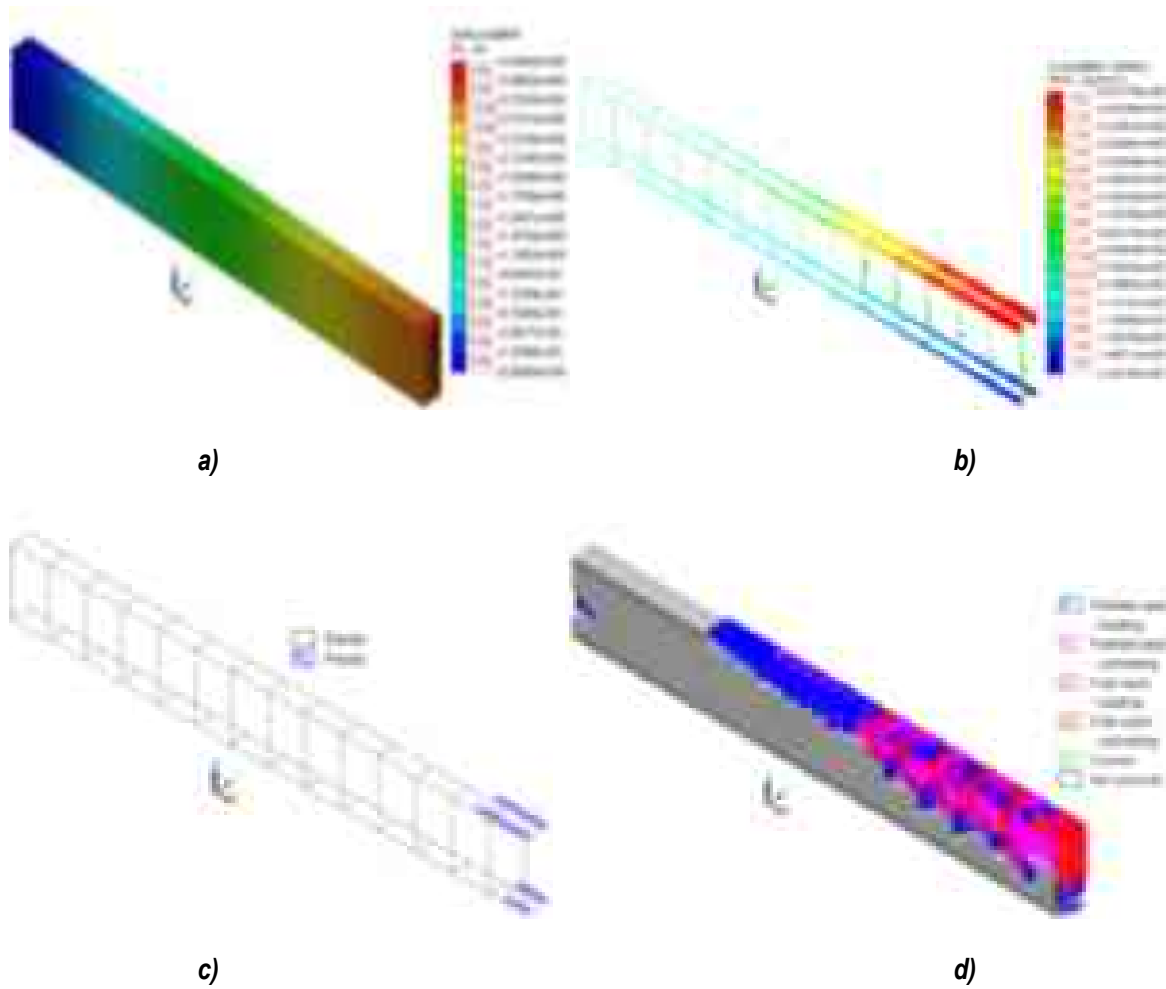
**Figura B. 65** Modelo V-3,  $0.45\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



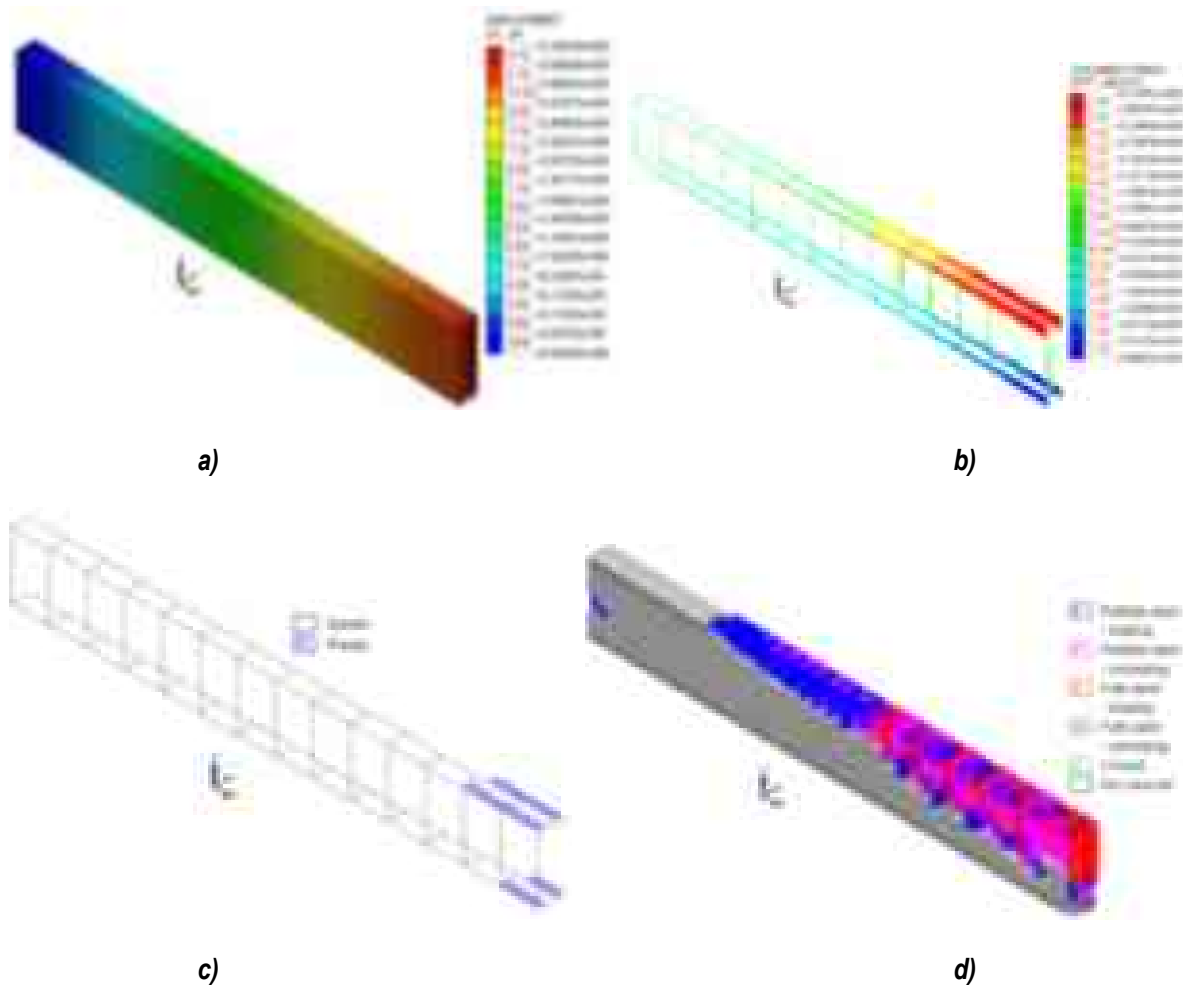
**Figura B. 66** Modelo V-3,  $0.45\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



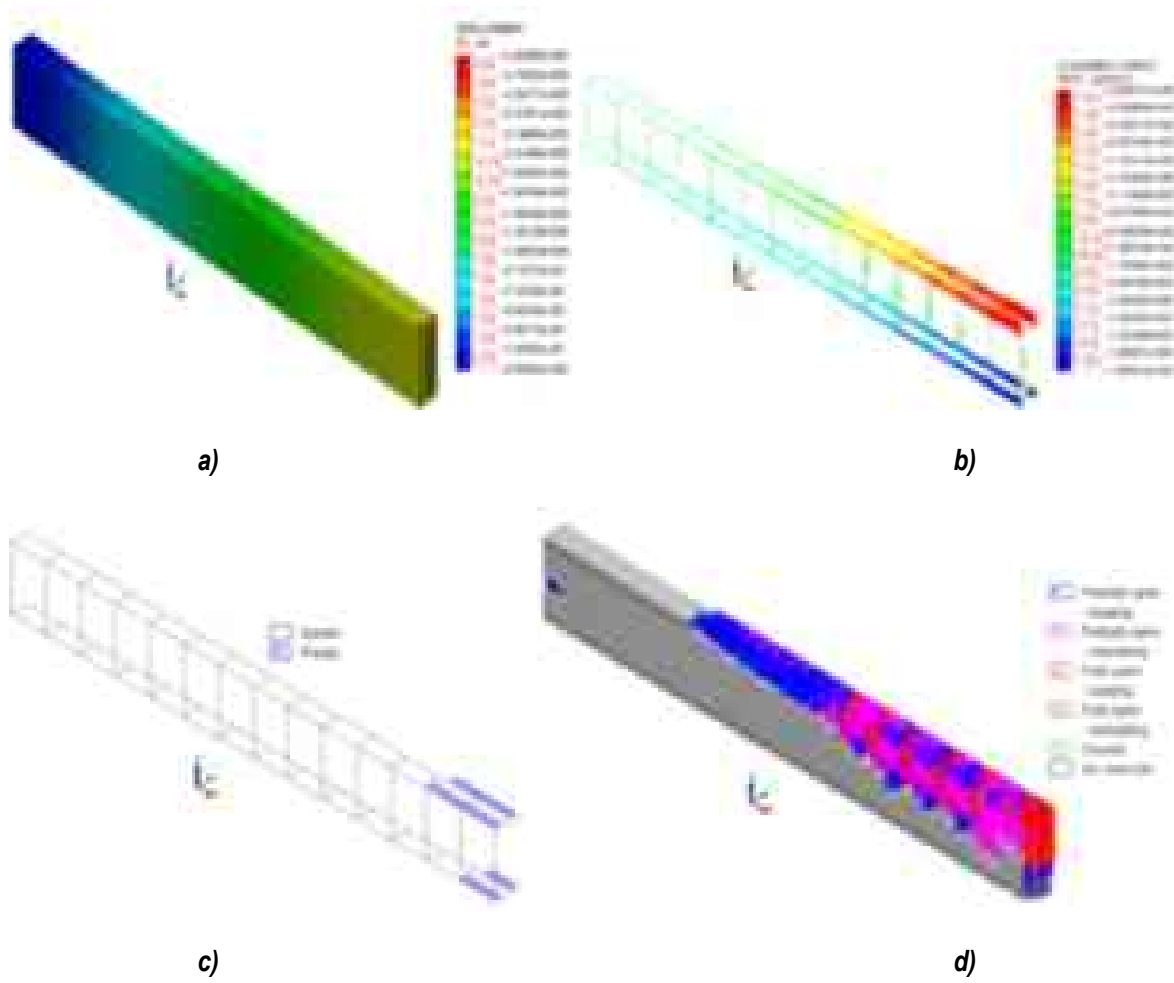
**Figura B. 67** Modelo V-3,  $0.65\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



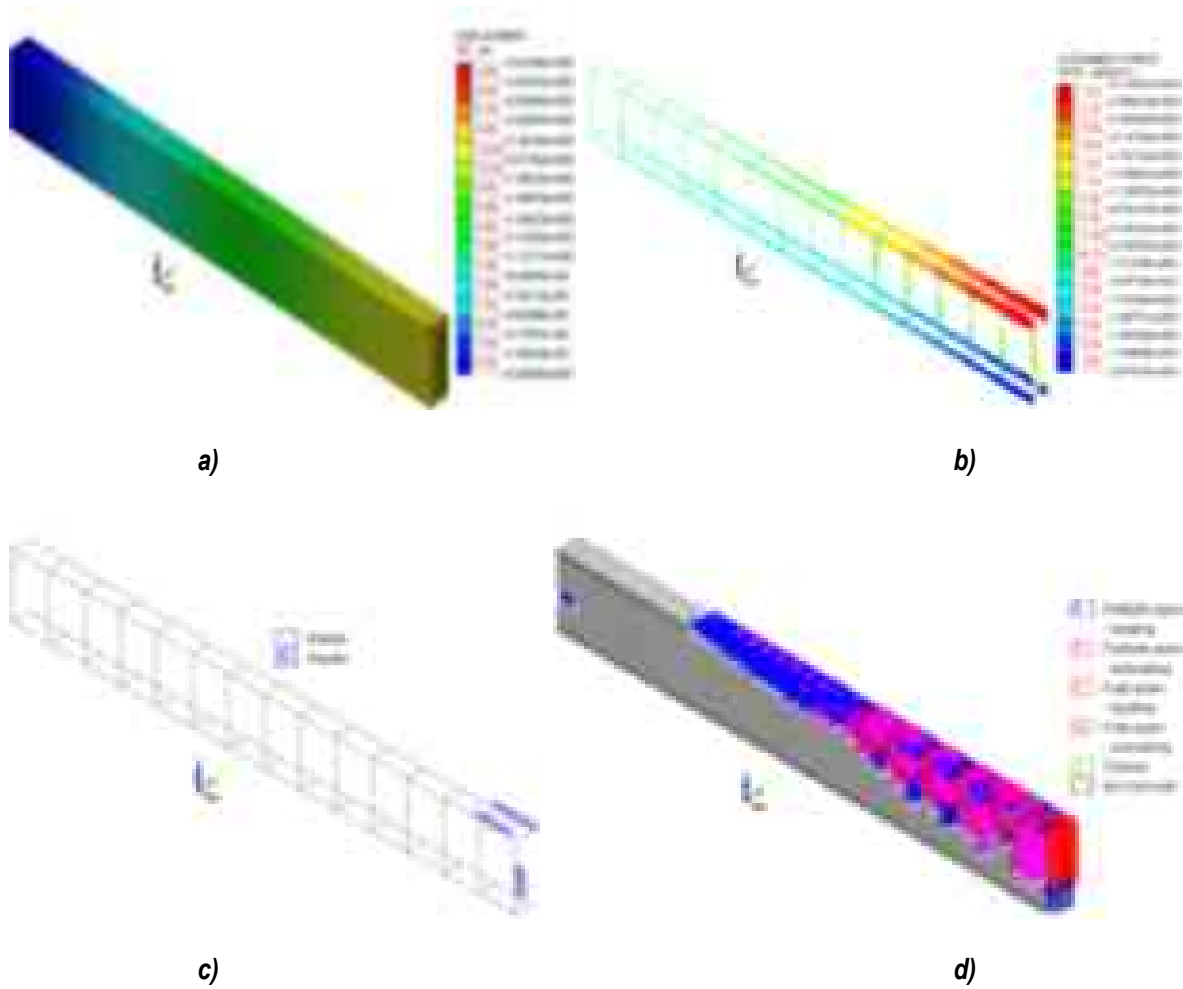
**Figura B. 68** Modelo V-3,  $0.65\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



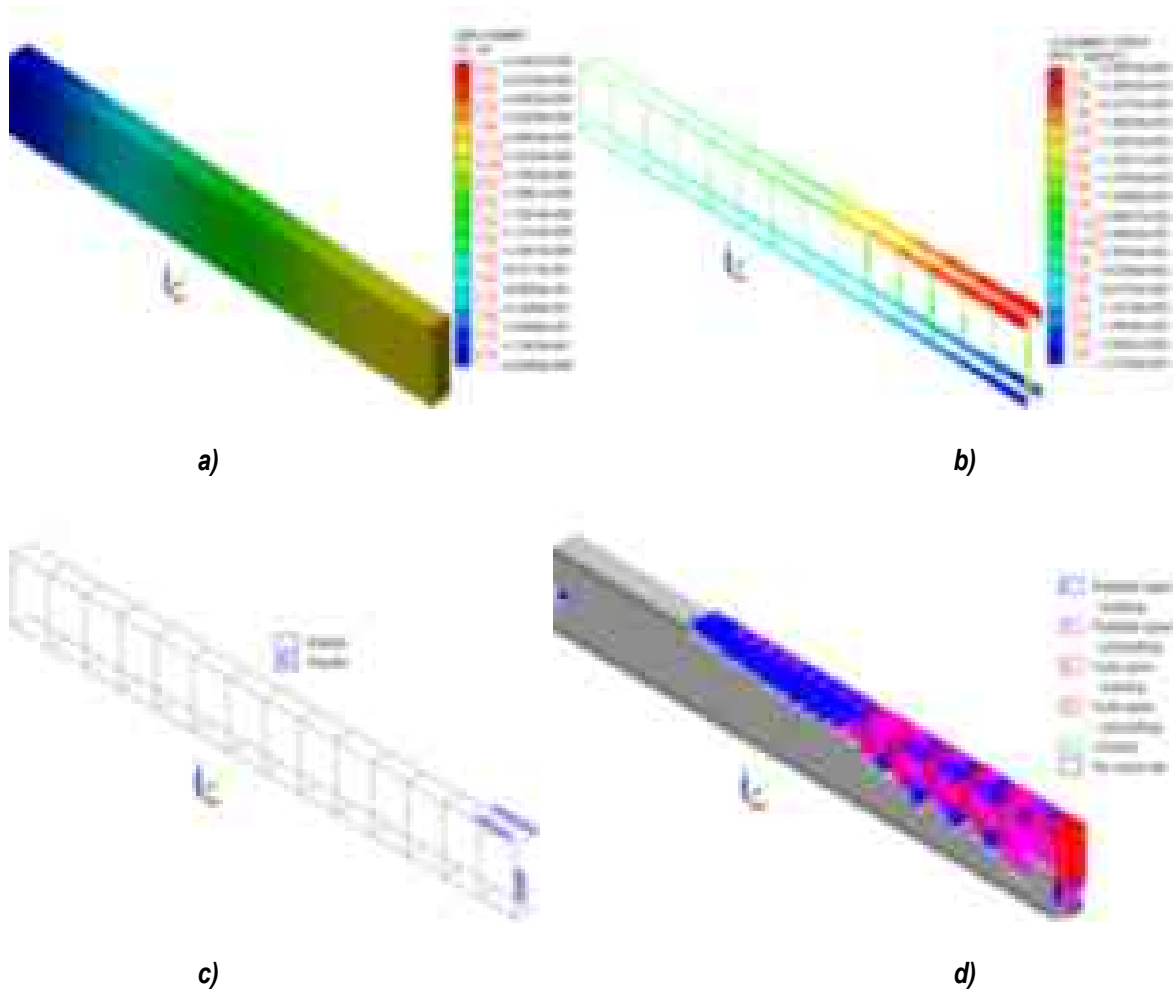
**Figura B. 69** Modelo V-3,  $0.65\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



**Figura B. 70** Modelo V-3,  $0.90\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



**Figura B. 71** Modelo V-3,  $0.90\rho_{bal}$  para  $\rho/\rho'=1.5$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento



**Figura B. 72** Modelo V-3,  $0.90p_{bal}$  para  $\rho/\rho'=2$ : a) desplazamientos verticales, b) esfuerzos desarrollados en el acero de refuerzo, c) plastificación en el acero y d) trayectorias de agrietamiento