UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

PROGRAMA INTEGRADO DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS ECONÓMICAS.

ANÁLISIS DE LOS INCENTIVOS QUE MOTIVAN A LOS JUGADORES A ELEGIR COOPERAR A PARTIR DE LA RACIONALIDAD INDIVIDUAL.

IDONEA COMUNICACIÓN DE RESULTADOS.

PRESENTA:

EDSON VALDÉS IGLESIAS

MATRICULA:2141801641

PARA OPTAR AL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS ECONÓMICAS.

ASESOR:

DR. JESÚS LECHUGA MONTENEGRO

Diciembre de 2015

Índice general

Introducción **1**

I Un juego no cooperativo **4**

1.1 Descripción del juego 4

1.2 Descripción de los jugadores: 5

1.3 Dinámica del juego 5

1.3.1 Las reglas del juego: 6

1.4 Solución del juego 7

II Un juego cooperativo **10**

2.1 Nuevas reglas del Juego 11

2.2 Solución del juego 12

III Un juego diferencial de maximización de beneficios de recolectores de basura **16**

Conclusiones **24**

A **26**

Referencias Bibliográficas **28**

Introducción

La teoría de juegos es un conjunto de herramientas para describir y analizar las interacciones sociales que surgen de las decisiones que toman los individuos a partir de un comportamiento racional. Este punto de vista como lo expone Gilles (2010) conduce a varias implicaciones importantes, a saber: En primer lugar, la teoría de juegos no es ni una sola teoría ni un cuerpo unificado de conocimiento. Más bien, es una colección de una variedad de subcampos, cada uno representando un enfoque fundamentalmente diferente. En segundo lugar, la noción de decisión sobre la interacción social sobre lo cual está definida la materia sujeto de la teoría de juegos, con lo que se determinan las bases de cada uno de estos subcampos. Por lo tanto, la toma de decisiones se realiza de manera individual y controlan de manera exclusiva ciertas decisiones dentro de una situación específica.

Las opciones potenciales relacionadas con estas decisiones se llaman acciones y quien las toma tiene solo el control sobre un conjunto de acciones múltiples para elegir en cada momento. Podemos argumentar que estas elecciones son interactivas en el sentido de que las acciones elegidas por los diferentes individuos determinan el resultado que emana dentro de la interacción social.

En el libro "Theory of games and economic behavior", Von Neumann & Morgenstern (2004) exponen cuál es el comportamiento de lo que se denomina comúnmente juegos cooperativos, basando su análisis en las diferentes relaciones que se suscitan entre los dos participantes del juego, existe la posibilidad de que se realicen coaliciones de n individuos, si bien este tipo de juegos son de suma cero y presentan ciertas características que permiten que exista una solución que puede ser esencial o no esencial, partiendo del axioma fundamental de racionalidad del comportamiento del individuo, el cual se materializa de acuerdo a Mas-Colell, Whiston & Green (1995:6-7) si se cumplen dos supuestos básicos sobre la relación de las preferencias a saber: el primero de ellos dice que el individuo tiene una preferencia bien definida entre dos alternativas posibles (completas) y el segundo señala que es imposible hacer frente a la toma de decisiones con una secuencia de opciones por parejas en la que sus preferencias tomen la forma de un ciclo (transitivas), de manera que los agentes saben que es lo que quieren y actúan con el objetivo obtenerlo.

Aunque la elección de una estrategia de comportamiento individual, como lo señala Morgenstern (1948), expresa las fluctuaciones de las ventajas y desventajas de la decisión del agente, el resultado final no solo va a depender de los actos efectivos ya ocurridos sino también de los comportamientos esperados por los agentes.

Este tipo de situaciones podemos definirlas como un juego de estrategias en donde el resultado no depende sólo, como en los juegos de azar o de causalidad de las decisiones individuales, sino que el comportamiento del jugador influye en las decisiones de los otros agentes, puesto que no domina el total de la variable sólo una parte de ella.

En los juegos de estrategia cada jugador desea ganar lo más posible y va a disponer de poca o nula información, además debe tener en cuenta que los otros jugadores van a elegir sus propias estrategias y van a tratar de descubrir las intenciones de los otros agentes, de los cuales podemos describir de manera axiomática cómo se estructuran sus decisiones: en primer lugar todos los agentes tienen una clasificación de sus necesidades con un orden riguroso y, en segundo lugar esta situación se puede representar al menos como una combinación de dos necesidades.

Las reglas que se establecen del juego determinan cuáles son las posibles acciones que toma cada jugador una vez terminado el juego, se puede decidir cuál es la magnitud del pago para cada agente y quien va a realizarlo, situación que se desprende de las decisiones tomadas de las estrategias establecidas con anterioridad.

En este sentido Rincón (1993) señala que los juegos cooperativos muestran cómo los jugadores coordinan sus estrategias a partir de la coalición y se muestra de manera evidente la utilidad que la coalición puede asegurar, independientemente del comportamiento del resto de los jugadores. Al poseer todos los agentes una racionalidad individual en su conducta económica buscan la maximización de su utilidad en términos de la relación de preferencias, por esta razón las decisiones que toman dependen de este axioma. En este trabajo se exponen las condiciones que motivarían a los agentes a coalicionarse como la mejor estrategia a elegir, y se muestra que, a través de la dinamización de las decisiones de los jugadores, su mejor respuesta será el coalicionarse para maximizar su utilidad.

CAPÍTULO I

Un juego no cooperativo

En este capítulo se establecen las condiciones necesarias para el desarrollo del juego no cooperativo estático y se establecen las pautas sobre el comportamiento de los agentes para la elección de la mejor estrategia disponible, ya que la posible elección que toma el agente surge, de acuerdo a Aumman (1989), de un plan completo de estrategias que dispone cada jugador en función de lo que observa durante el curso del juego y las posibles eventualidades que afectarían al mismo. Dada una estrategia para cada jugador, las reglas del juego determinan un resultado único, del cuál deriva el pago que obtiene cada jugador. Por lo tanto, cada jugador puede garantizar un empate, es decir, tiene sólo un perfil de pagos individualmente racional en el sentido de estrategia pura, a lo que se le denomina estrictamente determinado. En la siguiente sección se describe de manera puntual el juego y se muestra la alternativa de solución.

1.1. Descripción del juego

Las condiciones iniciales de este juego son:

- Sea una economía con tres agentes representativos (a,b,c).
- Existe la propiedad privada.
- No existe información completa; todos los agentes conoces su función de pago y no la de los otros agentes.
- Los agentes determinan su comportamiento a partir del axioma de racionalidad individual.

- Ningún agente puede perjudicar a cualquiera de los otros dos, es decir es juego de consentimiento.
- No se puede cambiar la fortuna de un jugador, a menos que sea parte de la acción, es decir se coopera con alguien o se le ignora.
- No se puede hacer daño de manera activa.
- La única amenaza por parte de intrusos contra una coalición lo representa el no pertenecer a ella.
- En particular, en este juego cada agente posee una dotación inicial de basura de la misma magnitud (g_a, g_b, g_c).

1.2. Descripción de los jugadores:

Todos los jugadores son iguales en la condición de "pepenadores", cada uno posee una dotación inicial (g_a, g_b, g_c) "basura" del mismo tamaño y con las mismas características, por lo que cada agente puede obtener utilidad con sus propias dotaciones iniciales (basura) y sus decisiones parten del axioma de racionalidad individual.

1.3. Dinámica del juego

Cada jugador debe tomar la decisión de quedarse con su basura o arrojarla en el espacio adjudicado a alguno de los otros dos jugadores, lo que podemos representar de la siguiente manera:

$$\text{Jugadores}\begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases} \qquad \text{Decisiones}\begin{cases} \textit{Arroja basura} \\ \textit{Conserva su basura} \end{cases}$$

1.3.1. Las reglas del juego:

1. Cada jugador tiene una unidad de basura $g_a(t) = 1$, $g_b(t) = 1$ y $g_c(t) = 1$

2. El jugador A tiene tres opciones:

    a) Tira su basura al jugador B

    b) Tira su basura al jugador C

    c) Se queda con su basura y obtiene una utilidad.

3. El jugador B (no conoce la decisión del Jugador C ni de A) tiene tres opciones:

    a) Tira su basura al jugador A

    b) Tira su basura al jugador C

    c) Se queda con su basura y obtiene una utilidad.

4. El jugador C (no conoce la decisión del Jugador B ni A) tiene tres opciones:

    a) Tira su basura al jugador A

    b) Tira su basura al jugador B

    c) Se queda con su basura y obtiene una utilidad.

5. Si A no arroja su basura existen tres posibilidades dadas las estrategias de los otros jugadores:

    a) Le arroja la basura el jugador B

    b) Le arroja la basura el jugador C

    c) No le arrojan nada

6. Si B no arroja su basura existen tres posibilidades dadas las estrategias de los otros jugadores:

    a) Le arroja la basura el jugador A

b) Le arroja la basura el jugador C

c) No le arrojan nada

7. Si C no arroja su basura existen tres posibilidades dadas las estrategias de los otros jugadores:

a) Le arroja la basura el jugador A

b) Le arroja la basura el jugador B

c) No le arrojan nada

Despues de establecer las reglas del juego podemos determinar las posibles estrategias que tomarán cada uno de los jugadores:

$$A \begin{cases} A_1 : \textsf{Arroja basura independientemente de si le arrojan basura} \\ A_2 : \textsf{Conserva basura} \end{cases}$$

$$B \begin{cases} B_1 : \textsf{Arroja basura independientemente de si le arrojan basura} \\ B_2 : \textsf{Conserva basura} \end{cases}$$

$$C \begin{cases} C_1 : \textsf{Arroja basura independientemente de si le arrojan basura} \\ C_2 : \textsf{Conserva basura} \end{cases}$$

1.4. Solución del juego

A partir de las estrategias de cada jugador podemos definir una matriz de pago para cada uno de ellos, de las reglas del juego se desprende el hecho de que el pago a repartir es de 3 unidades de basura (perciben una utilidad de la misma) y los jugadores desconocen la estrategia que puede elegir el otro jugador, por lo que para el caso de A su matriz de pago de acuerdo a sus estrategias se presenta en el Cuadro 1.1 :

Cuadro 1.1: Matriz de pago del jugador A

Estrategia de B y C / Estrategia de A	B_1	B_2	C_1	C_2	Pago Mínimo
A_1	1	0	1	0	0
A_2	2	1	2	1	1

Si el jugador A elije A_1, los posibles pagos que puede recibir de las decisiones de los otros dos jugadores se contienen en [1,0,1,0]; pero si eligiera A_2 podría obtener cualquiera de estos pagos : [2, 1, 2, 1]: De tal forma que la mejor decisión que puede elegir el jugador es tomar la estrategia A_2, ya que de acuerdo a Von Neumann & Morgenstern(2004:366-376) si utilizamos el $Max_A Min_A$ se elige el máximo de los mínimos de las filas; sin embargo este número no es un mínimo ni máximo absoluto pero, en la existencia de incertidumbre de la decisión de los demás jugadores es la mejor elección. Por lo tanto $Max_A Min_A A_2(A_{2i}) > Max_A Min_A A_1(A_1 j)$, situación por la cual se elige la estrategía A_2. De manera análoga se estudia el caso del jugador B y definimos su matriz de pago en el Cuadro 1.2.

Cuadro 1.2: Matriz de pago del jugador B

Estrategia de A y C / Estrategia de B	A_1	A_2	C_1	C_2	Pago Mínimo
B_1	1	0	1	0	0
B_2	2	1	2	1	1

Para el caso de B utilizamos de manera análoga el $Max_B Min_B$, por lo tanto $Max_B Min_B B_2(B_{2i}) > Max_B Min_B B_1(B_{1j})$, situación por la cual se elige la estrategia B_2. De manera similar se estudia el caso del jugador C y los pagos se presentan en el Cuadro 1.3

Cuadro 1.3: Matriz de pago del jugador C

Estrategia de A y B / Estrategia de C	A_1	A_2	B_1	B_2	Pago Minimo
C_1	1	0	1	0	0
C_2	2	1	2	1	1

A partir del cuadro presentado anteriormente podemos verificar que para C su mejor estrategia sería C_2. Con la mejor elección de estrategia de cada jugador podemos construir la matriz de pagos del juego en el Cuadro 1.4, en el que se observa que la mejor elección de todos los jugadores en ausencia de información sobre la decisión que toma cada jugador, es la diagonal principal por la existencia de racionalidad individual en las decisiones, por lo tanto no existen incentivos para elegir fuera de ésta.

Cuadro 1.4: Tabla de Pagos de Juegos

Arroja Basura / Conserva Basura	A	B	C
A	**(1,0)**	(2,0)	(2,0)
B	(2,0)	**(1,0)**	(2,0)
C	(2,0)	(2,0)	**(1,0)**

CAPÍTULO II

Un juego cooperativo

En el juego antes descrito se demuestra que si no se conocen las estrategias de los jugadores la mejor decisión se obtiene buscando el pago que será el máximo de los mínimos pagos de las posibles estrategias a seguir. Sin embargo, como señalan Peleg & Sudhölter (2007), si en el juego se pueden realizar coaliciones o estrategias los jugadores mediante las cuales pueden cooperar, este tipo de acuerdos son vinculantes sobre la distribución de beneficios o la elección de estrategias, incluso si no están especificados o implícitos en las reglas del juego.

Por su parte, Osborne & Rubinstein (1994) señalan que cuando en el juego se puede realizar una coalición, esta será una colección de acciones conjuntas que cada grupo de jugadores puede tomar independientemente de los jugadores restantes. Un resultado de este tipo de juegos es una especificación de la coalición que se forma y la acción conjunta que se necesita. Así, aunque las acciones son tomadas por las coaliciones, la teoría se basa en las preferencias de los individuos. Por lo tanto la solución para este tipo de juegos asigna un conjunto de resultados, de lo que se desprende como consecuencia natural de este razonamiento que exista un conjunto de disposiciones que sean estables en el sentido de que el resultado no sea alterado por un cierto tipo o por grupos de jugadores.

Por lo tanto, los valores que grupos o coaliciones de jugadores pueden generar o reclamar en alguna situación de decisión interactiva, se denomina como una función característica y reduce una situación de decisión interactiva a un mínimo los valores que pueden ser generados por los jugadores, con lo que se excluyen los aspectos del comportamiento y pone la forma de la función característica de un juego como el ámbito de la teoría de juegos cooperativos. En este sentido, el objetivo del análisis de la forma de función característica es identificar y formular un acuerdo vinculante que satisfaga a todos los jugadores y todas las coaliciones factibles (Gilles, 2010) .

En general, un juego cooperativo representa oportunidades para transferir una cierta cantidad de excedentes para el caso de juegos con utilidad transferible o un conjunto de vectores de servicios factibles, a través de algún conjunto no revelado de acciones coordinadas. La especificación completa de un juego incluye un conjunto de oportunidades de cooperación por la coalición de jugadores individuales que no se ven privados de poder estratégico, ya que pueden elegir entre las coaliciones potenciales, con lo que los posibles socios compiten por su colaboración con el fin de obtener una mayor proporción de los excedentes, exactamente como un monopolista que tiene un único producto que es deseado por varios compradores, lo que permite subir el precio hasta el punto donde pueden extraer el máximo excedente de los compradores potenciales. El conjunto de oportunidades de cooperación abiertas a una coalición específico de los jugadores se deriva de la propiedad subyacente o derecho sobre todos los recursos que son objeto de la cooperación (Moulin, 2002) .

Los juegos cooperativos parten del hecho que la unión de los diferentes agentes crea valor, por lo que se busca encontrar reglas de reparto que sean factibles económicamente y que cumplan con ciertos criterios deseables socialmente (Mas-Colell,1988), una vez establecido el sentido de los juegos cooperativos, a continuación se modifican las reglas planteadas anteriormente y analiza las posibles coaliciones que se puedan dar.

2.1. Nuevas reglas del Juego

Una vez introducidas las nuevas reglas de juego, se espera que los participantes modifiquen su conducta en algún sentido. La caracterización del nuevo escenario es la siguiente:

1. Cada jugador tiene una unidad de basura $g_a(t) = 1$, $g_b(t) = 1$ y $g_c(t) = 1$.

2. De su unidad de basura el jugador A puede reciclar el 60 %.

3. De su unidad de basura el jugador B puede reciclar el 90 %.

4. De su unidad de basura el jugador C puede reciclar el 75 %.

5. Solo el jugador A puede vender la basura reciclada pero necesita vender como mínimo una unidad.

6. Por cada (1/100) de basura se recibe un pago de \$1

7. Todos los jugadores conocen el valor de pago de las coaliciones.

2.2. Solución del juego

De acuerdo a las nuevas reglas establecidas del juego cada agente tiene la libertad de elegir si coopera o no con los otros agentes, en este sentido Borkotokey & Mesiar (2014) explican que la solución al juego cooperativo se basa en la noción de coalición, la cual se define como un grupo de agentes o jugadores que tienes diferentes posibilidades de cooperación. De ello se desprende que el modelo básico de un juego cooperativo se basa en la suposición de la existencia de un representanción universal y lineal de la utilidad, que se puede utilizar para la distribución de los beneficios totales de la coalición entre los miembros sin ninguna alteración del valor de utilidad.

Por lo tanto, cada coalición gana alguna utilidad que puede ser distribuido entre sus miembros con respecto a un acuerdo. A continución se presentan seis propiedades básicas, de las cuales las primeras cinco son necesarias para considerarse un juego coperativo y la sexta propiedad se utiliza para asignar los pagos de los jugadores para cada coalición.

Propiedad 1. Un juego es cooperativo si es un par (N, v) formado por un conjunto finito $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ y una función $v : 2^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada subconjunto S de N un número real $v(S)$ con la condición de que $v(\emptyset) = 0$. El número de jugadores en este juego es : $N = \{A, B, C\}$ y las posibles coaliciones que pueden existir son $v : 2^3 = 8$. En el Cuadro 2.1 se presentan las posibles coaliciones de este juego y los pagos que surgen de la función característica.

Cuadro 2.1: Función característica.

Coalición	Valor unidades monetarias
$\{A\}$	\$0
$\{B\}$	\$0
$\{C\}$	\$0
$\{AB\}$	\$150
$\{AC\}$	\$135
$\{BC\}$	\$0
$\{ABC\}$	\$225

Propiedad 2. Un juego cooperativo (N, v) es monótono si $v(S) \leq v(T)$ cuando $S \subseteq T$. El juego planteado es monotono y se muestra a continuación:

$$
\begin{array}{rclr}
v\{A\} & \leq & v\{AB\} & 0 < 150 \\
v\{B\} & \leq & v\{AB\} & 0 < 150 \\
v\{A\} & \leq & v\{AC\} & 0 < 135 \\
v\{C\} & \leq & v\{AC\} & 0 < 135 \\
v\{B\} & \leq & v\{BC\} & 0 \leq 0 \\
v\{C\} & \leq & v\{BC\} & 0 \leq 0 \\
v\{A\} & \leq & v\{ABC\} & 0 < 225 \\
v\{B\} & \leq & v\{ABC\} & 0 < 225 \\
v\{C\} & \leq & v\{ABC\} & 0 < 225
\end{array}
$$

Propiedad 3. Un juego cooperativo (N, v) es superaditivo si $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ cuando $S \cap T = \emptyset$. De las coaliciones descritas anteriormente el juego cumple con la propiedad de superaditividad y se muestra a continuación:

$$\begin{array}{lcll} v\{AB\} & \geq & v\{A\}+v\{B\} & 150 > 0 \\ v\{AC\} & \geq & v\{A\}+v\{C\} & 135 > 0 \\ v\{BC\} & \geq & v\{B\}+v\{C\} & 0 \geq 0 \\ v\{ABC\} & \geq & v\{A\}+v\{B\}+v\{C\} & 225 > 0 \end{array}$$

Propiedad 4. Un juego cooperativo es convexo (N, v) si $v(S)+v(T) \leq v(S \cup T)+v(S \cap T)$ para todo $S, T \subseteq N$. De acuerdo a la propiedad 2 y 3 podemos deducir que esto se cumple para el juego planteado.

Propiedad 5. Un juego cooperativo tiene un conjunto de imputaciones factibles denotadas como:

$$J(v) = \{x_i \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq v\{i\} \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)\}$$

Para este juego :
$J(v) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \wedge x_1 + x_2 + x_3 = 225 \wedge x_1 + x_2 = 150 \wedge x_1 + x_3 = 135\}$

Si resolvemos a partir de las condiciones impuestas para el conjunto de imputaciones factibles la terna que surge $(x_1, x_2, x_3) = (60, 90, 75)$ es la solución, la cual nos muestra que para este juego existe un núcleo no vacío.

Propiedad 6. (Shapley (1953).) El valor de Shapley (φ), asigna para cada juego $(N, v) \in G(N)$[1] y cada jugador $i \in N$ el valor:

$$\varphi(N, v) = \sum_{S \ni i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S) - v(S - \{i\})] \qquad \textit{donde: } s = \mid S \mid$$

[1]Es el conjunto de todos los juegos con transferencia de utilidad con un conjunto de N jugadores

Ahora se analiza el valor que se obtuvo para cada jugador:

$$\varphi(v_A) = (1/3)\cdot 0 + (1/6)\cdot 150 + (1/6)\cdot 135 + (1/3)\cdot 225 = 122.5 \tag{2.1}$$

$$\varphi(v_B) = (1/3)\cdot 0 + (1/6)\cdot 150 + (1/6)\cdot 0 + (1/3)\cdot 90 = 55 \tag{2.2}$$

$$\varphi(v_B) = (1/3)\cdot 0 + (1/6)\cdot 135 + (1/6)\cdot 0 + (1/3)\cdot 75 = 47.5 \tag{2.3}$$

El jugador A tiene el mayor valor en la coalición, por lo que tiene el mayor poder de negociación y los resultados obtenidos van a diferir de manera sustancial de los resultados presentados en el primer capítulo, en la que no existían incentivos para realizar coaliciones y al no conocer las decisiones de los otros jugadores la mejor elección era no actuar.

En este sentido Magaña (1996) expone que los juegos cooperativos se utilizan normalmente como modelos para analizar las coaliciones. Un concepto de solución para esta clase de juegos se llama también índice de poder y representa una medida abstracta del poder de cada jugador en la coalición que el juego describe.

Mas-Colell (1988) señala que si al asignar el valor de Shapley (1953) a cada jugador su contribución a las coaliciones a las que pertenece se cumple que el valor que se obtiene pertenece al núcleo y ademas se demuestra que es superaditivo el juego, la imputación será factible es un juego convexo.

Como este resultado no explica la manera en que se reparte el pago obtenido entre los miembros de la coalición, presenta un problema que se considera básico en la teoría de juegos cooperativos, ya que su resolución va a depender del criterio que se adoptó, para lo cual se presenta una posible solución en la siguiente sección, a partir de juegos diferenciales.

CAPÍTULO III

Un juego diferencial de maximización de beneficios de recolectores de basura

En este capítulo se presenta una propuesta para analizar el problema planteado en la sección anterior , ya que como enfatiza Nash(1951) la teoría juegos cooperativos presenta una contradicción, puesto que se basa en la ausencia de coaliciones porque asume que los participantes actúan independientemente sin la colaboración o comunicación con otros agentes, entendiendo esto como una noción de un punto de equilibrio.

Friesz (2010) señala que los modelos de teoría de juegos no cooperativos han sido exitosamente empleadas para estudiar una gran cantidad de fenómenos económicos, siendo una de las principales novedades la posibilidad de calcular los equilibrios en juegos estáticos como soluciones de desigualdades variacionales; sin embargo, esto tiene grandes limitaciones puesto que se deja de lado la dinámica del equilibrio y no se considera como el tiempo o las decisiones de los agentes pueden alterar la trayectoria hacia el equilibrio. Si bien la literatura conocida como teoría de juegos dinámica ha evolucionado a partir de la obra de Isaacs (1965) , los posteriores desarrollos hacen énfasis en la relación de este tipo de juegos con la programación dinámica y la ecuación diferencial parcial de Hamilton-Jacobi-Bellman.

El método de programación dinámica se basa en el principio de optimalidad que establece que una estrategia óptima tiene la propiedad de que, cualquiera que sea el estado inicial y el tiempo, todas las decisiones restantes de ese estado y del tiempo en adelante también constituyen una estrategia óptima. Una estrategia óptima dada es proporcionada por la noción de coherencia tiempo, lo que es válido no sólo para un solo jugador, sino también para N jugadores (Basar & Olsder,1995).

Por lo tanto esta metodología, como lo expone Martín-Herrán (2010), nos permite modelar los problemas dinámicos que surgen de conflictos y de la cooperación entre los agentes cuyos pagos son interdependientes. En el caso general, el pago de un jugador depende de su estrategia, de las estrategias de los otros agentes, el tiempo y el estado del sistema. Con lo que se puede describir la forma en la que el estado del sistema depende de periodos pasados y de las decisiones que toman todos los jugadores .

En este sentido en este trabajo se parte del supuesto de la necesidad de maximizar los beneficios de los jugadores y para conseguirlo será necesario establecer reglas sobre su comportamiento en un periodo de tiempo y modificar las condiciones iniciales de las que parte el juego. Para ello se toma como base los modelos propuestos por Clark(2013), Benchekroun & Van Long (2002), Martín-Herrán (2010) y Benchekroun & Taherkhani (2014), a fin de plantear el juego diferencial, en donde los jugadores enfrentan una función de la forma $\pi_i(x, F_i) = (p\Psi_i - c_i)lnF_i$ la cual expresa la manera en la que obtienen sus beneficios. A continuación se presenta a detalle el problema que enfrenta el agente:

$$W_i = \int_0^\infty [(p\Psi_i - c_i)lnF_i - \delta_i x]\, e^{-\rho t} \tag{3.1}$$

sujeto a:

$$\dot{x} = Kx - \sum_{i=1}^{n} \beta_i F_i \tag{3.2}$$

$$x(0) = x_0 > 0$$

donde:

p = Precio de la basura reciclada

Ψ_i = Coeficiente de reciclado de basura

c_i = Costo del esfuerzo de recolección

F_i = Tasa de esfuerzo de recolección

δ_i = Tasa de degradación de la basura (depende de donde elija el agente recolectar)

x = Cantidad de basura

Kx = Stock total de basura

β_i = Es un parámetro de transformación del esfuerzo de recolección

Para analizar si la solución cooperativa a este juego diferencial es la mejor estrategia para los jugadores utilizaremos las definiciones propuestas por Jørgensen, Martín-Herrán & Zaccour (2005), supondremos que todos los jugadores utilizan estrategias markovianas estacionarias, situación que es un supuesto que se utiliza regularmente en juegos diferenciales con horizonte de tiempo infinito y decisiones de los jugadores autónomas. Por el hecho de la estacionalidad de las estrategias de equilibrio y que las funciones de valor no dependen de manera explícita en t.

Denotaremos a la función de pago de los jugadores que cooperan como $V_i^c(x)$ y la función de pago de los jugadores que no cooperan como $V_i^{nc}(x)$ desde un instante y hasta el final del horizonte del jugador $i \in N$, por lo tanto podemos definir la solución para cualquier instante en el tiempo, cuestión que se muestra a continuación.

Definición 1. Una solución cooperativa es coherente temporalmente en (t_0, x_0) si en cualquier posición $(\tau, x^c(\tau))$ y para todo $\tau \in [t_0, \infty)$ se cumple que:

$$V_i^c(x^c(\tau)) \geq V_i^{nc}(x^c(\tau)), \qquad i \in N \tag{3.3}$$

donde $x^c \in N$ denota el estado de la trayectoria cooperativa optima.

En (3.3) se hace la comparación entre la función de pago cooperativo y no cooperativo a partir de un instante y hasta el final del horizonte, lo cual se realiza a lo largo de la trayectoria optima del estado cooperativo. Por lo tanto podemos suponer que los jugadores están implementando una estrategia cooperativa desde el instante inicial hasta el instante τ. La aplicación de la coherencia temporal ha sido utilizada en juegos diferenciales medioambientales, por ejemplo en Jørgensen & Zaccour (2001), Jørgensen, Martín-Herrán & Zaccour (2005) y Martín-Herrán (2010).

Definición 2.Una solución cooperativa es aceptable en (t_0, x_0) si para cualquier posición factible $(\tau, x(\tau))$ y para todo $\tau \in [t_0, \infty)$ se cumple que:

$$V_i^c(x(\tau)) \geq V_i^{nc}(x(\tau)), \qquad i \in N \tag{3.4}$$

En (3.4) se hace la comparación entre dos funciones de pago a lo largo de cualquier trayectoria factible, la aceptabilidad implica coherencia temporal. Se toma el criterio de aceptabilidad (sostenibilidad de la cooperación) propuesto por Kaitala & Pohjola (1990), dicho criterio señala que es necesario dar a los jugadores pagos más altos que los que pueden obtener si no cooperan, por lo tanto la solución cooperativa será sostenible durante todo el transcurso del juego para cualquier estado o tiempo.

La ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman[1] asociada al juego no cooperativo viene dada por:

$$\rho V_i^{nc}(x) = \max_{F_i \geq 0} \left\{ (p\Psi_i - c_i) lnF_i - \delta_i x + \nabla V^*(x,t) \left[Kx - \sum_{i=1}^{n} \beta_i F_i \right] \right\} \tag{3.5}$$

donde $V_i^{nc}(x)$ denota la función de valor no cooperativa del jugador i. Al maximizar el miembro de la derecha de (3.5) se obtiene la tasa de esfuerzo de recolección:

$$F_i^{nc} = \frac{(p\Psi_i - c_i)}{\beta_i \nabla V^*(x,t)}, \qquad i \in N \tag{3.6}$$

Sustituyendo (3.6) en (3.5) tenemos que:

$$\rho V_i^{nc}(x) = (p\Psi_i - c_i) ln \left(\frac{(p\Psi_i - c_i)}{\beta_i \nabla V^*(x,t)} \right) - \delta_i x + \nabla V^*(x,t) \left[Kx - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(\frac{(p\Psi_i - c_i)}{\beta_i \nabla V^*(x,t)} \right) \right] \tag{3.7}$$

Suponemos que la función de valor es lineal y tiene la forma $Vi^{nc}(x) = A_i^{nc} x + G_i^{nc}$, a partir de lo cual podemos calcular los coeficientes[2] tomando a (3.7) y tenemos que:

[1] A partir de (3.1) y (3.2)

[2] El procedimiento utilizado para la obtención de los coeficientes se presenta en el Apendice A.

$$A_i^{nc} = \frac{\delta_i}{(K-\rho)} \qquad G_i^{nc} = \frac{1}{\rho}\left[(p\Psi_i - c_i)ln\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)(K-\rho)}{\beta_i\delta_i}\right) - \delta_i \sum_{j\in N}\frac{(p\Psi_j - c_j)}{\delta_j}\right] \qquad \forall i \neq j \tag{3.8}$$

A partir de (3.6) y (3.8) obtenemos:

$$F_i^{nc} = \frac{(p\Psi_i - c_i)(K-\rho)}{\beta_i\delta_i} \qquad i \in N \tag{3.9}$$

La tasa de esfuerzo de recolección será constante, por lo tanto para el jugador i la tasa depende del precio que tenga la basura que recolecta, los costos que le genera el esfuerzo, el coeficiente de reciclado de basura, el stock total de basura que existe, el lugar que selecciona para recolectar la basura, el parámetro β_i y la tasa de descuento. Sustituyendo (3.9) en (3.2) y resolviendo obtenemos la trayectoria de equilibrio no cooperativo del stock de basura, la cual viene dada por:

$$x^{nc}(t) = \frac{(K-\rho)}{K}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)}{\delta_i}\right) + \left[x_0 - \frac{(K-\rho)}{K}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)}{\delta_i}\right)\right] e^{-Kt} \tag{3.10}$$

Para el caso del juego cooperativo supondremos que los jugadores están de acuerdo en maximizar la suma de sus funciones objetivo y no consideran ninguna ponderación (todos tienen el mismo peso en la coalición). Por lo tanto la tasa de esfuerzo de recolección que resulta es la que quieren implementar de manera conjunta. La ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman asociada a este juego es:

$$\rho V_i^c(x) = \max_{F_i \geq 0}\left\{\sum_{i\in N}[(p\Psi_i - c_i)lnF_i - \delta_i x] + \nabla V^*(x,t)\left[Kx - \sum_{i=1}^{n}\beta_i E_i\right]\right\} \tag{3.11}$$

donde $V_i^c(x)$ denota la función de valor cooperativa del jugador i, y maximizando el miembro de la derecha de (3.11) se obtiene la tasa de esfuerzo de recolección:

$$F_i^c = \frac{(p\Psi_i - c_i)}{\beta_i\nabla V^*(x,t)}, \qquad i \in N \tag{3.12}$$

Sustituyendo (3.12) en (3.11) tenemos que:

$$\rho V_i^c(x) = \sum_{i\in N}\left[(p\Psi_i - c_i)ln\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)}{\beta_i \nabla V^*(x,t)}\right) - \delta_i x\right] + \nabla V^*(x,t)\left[Kx - \sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)}{\beta_i\nabla V^*(x,t)}\right)\right] \tag{3.13}$$

De manera análoga suponemos la linealidad de la función de valor y por lo tanto la forma que toma es $Vi^c(x) = A_i^c x + G_i^c$, a partir de lo cual podemos calcular los coeficientes[3] tomando a (3.13) y tenemos que:

$$A_i^c = \sum_{i\in N}\frac{\delta_i}{(K-\rho)} \qquad G_i^c = \frac{1}{\rho}\sum_{i\in N}\left[(p\Psi_i - c_i)ln\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)(K-\rho)}{\beta_i \sum\limits_{j\in N}\delta_j}\right) - \delta_i\sum_{j\in N}\frac{(p\Psi_j - c_j)}{\sum\limits_{k\in N}\delta_k}\right] \qquad \forall i \neq j \tag{3.14}$$

Los subindices i y j denotan a los jugadores que pertenecen a la coalición y el subindice k se refiere a los jugadores que no pertencen a la coalición, a partir de (3.12) y (3.14) obtenemos la tasa de esfuerzo de recolección de basura cooperativa:

$$F_i^c = \frac{(p\Psi_i - c_i)(K-\rho)}{\beta_i\sum\limits_{j\in N}\delta_j}, \qquad \forall i \in N \tag{3.15}$$

Sustituyendo (3.15) en (3.2) y resolviendo obtenemos la trayectoria de óptima acción cooperativa para el stock de basura, la cual viene dada por:

$$x^c(t) = \frac{(K-\rho)}{K}\frac{1}{\sum\limits_{j\in N}\delta_j}\sum_{i\in N}(p\Psi_i - c_i) + \left[x_0 - \frac{(K-\rho)}{K}\frac{1}{\sum\limits_{j\in N}\delta_j}\sum_{i\in N}(p\Psi_i - c_i)\right]e^{-Kt} \tag{3.16}$$

A partir de (3.10) y (3.16) se puede comprobar fácilmente que $x^c(t) < x^{nc}(t), \forall t \in (0,\infty)$. La maximización conjunta suminstra un pago eficiente, sin embargo es necesario establecer una relación entre la sostenibilidad de la cooperación y un principio de asignación de pago igualitario entre los jugadores. Se utiliza la propuesta de Jørgensen, Martín-Herrán & Zaccour (2005) a partir de la cual se puede obtener el dividendo total de la cooperación desde cualquier

[3] El procedimiento utilizado para la obtención de los coeficientes se presenta en el Apendice A.

instante hasta el final del horizonte, el cual está dado por:

$$D(x) = V^c(x) - \sum_{i \in N} V_i^{nc}(x)$$

Sin embargo es necesario establecer una condición de coherencia temporal que sea aceptable para todos los jugadores, para ello se agrega el supuesto de la no existencia de algún pago colateral y que cada jugador tendrá un pago cooperativo en cualquier instante y hasta el final del horizonte dado por:

$$V_i^c(x) = A_i^c x + G_i^c$$

donde:

$$A_i^c = \frac{\delta_i}{(K-\rho)} \qquad G_i^c = \frac{1}{\rho}\left[(p\Psi_i - c_i)ln\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)(K-\rho)}{\beta_i \sum\limits_{j \in N}\delta_j}\right) - \delta_i \sum_{j \in N}\frac{(p\Psi_j - c_j)}{\sum\limits_{k \in N}\delta_k}\right] \qquad \forall i \neq j \tag{3.17}$$

De acuerdo a la primera definición para que exista coherencia temporal es necesario comprobar que:

$$\begin{aligned} V_i^c(x) &\geq V_i^{nc}(x) \\ A_i^c x + G_i^c &\geq A_i^{nc} x + G_i^{nc} \end{aligned}$$

a lo largo de toda la trayectoria cooperativa x^c, simplificando la desigualdad anterior tenemos que:

$$G_i^c - G_i^{nc} \geq 0$$

Sustituyendo (3.8) y (3.17) en la desigualdad anterior y reescribiendo se tiene :

$$(p\psi_i - c_i)ln\left(\frac{\delta_i}{\sum\limits_{j \in N}\delta_j}\right) + \delta_i \sum_{j \in N}(p\psi_j - c_j)\left[\frac{1}{\delta_j} - \frac{1}{\sum\limits_{k \in N}\delta_k}\right] \geq 0 \tag{3.18}$$

Al depender la solución del precio de la basura, los costos que le genera el esfuerzo de recolectarla, el coeficiente de reciclado de basura y el lugar que selecciona para recolectar la basura (tasa de degradación de la basura), se necesita agregar una regla para que los jugadores puedan determinar sus pagos individuales cooperativos desde un instante y hasta el final del horizonte dado por:

$$y_i^c(x) = V_i^{nc}(x) + \frac{D(x)}{n} \tag{3.19}$$

Esta regla le ofrece al jugador i en cualquier instante o hasta el final del horizonte el pago no cooperativo más $1/n$ del dividendo cooperativo. Puesto que $y_i^c(x) \geq V^{nc}(x)\ \forall x$, entonces los pagos individuales cooperativos desde este instante en adelante son factibles de aceptación si suman el total del pago cooperativo. Esto será cierto ya que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} y_i^c(x) &= \sum_{i=1}^{n}\left(V_i^{nc}(x) + \frac{D(x)}{n}\right) && (3.20)\\
&= \sum_{i=1}^{n} V_i^{nc}(x) + \left(V^c(x) - \sum_{i=1}^{n} V_i^{nc}(x)\right) && (3.21)\\
&= V^c(x) && (3.22)
\end{aligned}$$

Aplicar la regla (3.19) a la solución obtenida del juego diferencial proporciona el siguiente pago cooperativo individual desde un instante hasta el final del horizonte:

$$y_i(x) = \frac{1}{n}\left[\frac{\delta_i}{(K-\rho)}x + \frac{1}{\rho}\left[(p\Psi_i - c_i)ln\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)(K-\rho)}{\beta_i \sum\limits_{j\in N}\delta_j}\right) - \delta_i \sum_{j\in N}\frac{(p\Psi_j - c_j)}{\sum\limits_{k\in N}\delta_k}\right]\right] \tag{3.23}$$

La regla que se utilizó para resolver el problema de la distribución propuesta por Jørgensen, Martín-Herrán & Zaccour (2005) permite solucionar cualquier estructura de juego diferencial, sin embargo esto tiene una gran limitación que emana del hecho que es necesario que los jugadores estén de acuerdo en utilizar el principio igualitario para la repartición del dividendo; situación que se podría considerar restrictiva pero dadas las circunstancias planteadas en este trabajo y la existencia de la racionalidad individual en las decisiones, esta será la mejor estrategia que los jugadores pueden elegir, por lo tanto la cooperación siempre es aceptada para maximizar su pago.

Conclusiones

En el primer capítulo se mostraron las condiciones necesarias para el desarrollo del juego no cooperativo estático y se establecen las pautas sobre el comportamiento de los agentes para la elección de la mejor estrategia disponible, siendo la diagonal principal de la matriz de pago la mejor elección para cada jugador en ausencia de información sobre la decisión que toma cada agente, por lo tanto no existen incentivos para elegir fuera de ésta. En el juego descrito, si no se conocen las estrategias de los jugadores la mejor decisión se obtiene buscando el pago que será el máximo de los mínimos pagos de las posibles estrategias a seguir. Sin embargo, como señalan Peleg & Sudhölter (2007), si en el juego se pueden realizar coaliciones o estrategias mediante las cuales los jugadores pueden cooperar, este tipo de acuerdos son vinculantes sobre la distribución pagos o la elección de estrategias, incluso si no están especificados o implícitos en las reglas del juego.

En este sentido, en el segundo capítulo se demostró que al añadir nuevas reglas al juego y la libertad de elegir si coopera o no el jugador, para poder obtener una solución factible es necesario utilizar la noción de coalición ya que permite resolver este tipo de problemas. Aunque se obtuvo el resultado que se buscaba, esta metodología presenta una gran limitante en el hecho de la no existencia de una valoración para la distribución del pago que se puede utilizar para la repartición de los beneficios totales de la coalición entre los miembros, sin ninguna alteración del valor de utilidad.

En el último capítulo se presenta una propuesta que permitió realizar la repartición del pago obtenido entre los miembros de la coalición, partiendo de un modelo dinámico en el que los jugadores buscan maximizar sus beneficios en cualquier instante.Para la solución se abordo, por un lado la racionalidad individual a lo largo del tiempo y por el otro el hecho de la aceptabilidad que emana de la coherencia temporal. Para lo anterior fue necesario utilizar la regla para resolver el problema de la distribución propuesta Jørgensen, Martín-Herrán & Zaccour (2005) la cual permite solucionar cualquier estructura de juego diferencial. No obstante el criterio que se decidió utilizar presenta una gran limitación que surge del hecho de la necesidad de aceptación de los jugadores para realizar una repartición igualitaria del dividendo, situación que se podría considerar restrictiva; pero dadas las condiciones iniciales planteadas en esté trabajo y la existencia de la racionalidad individual en las decisiones, ésta será la mejor estrategia que pueden elegir, de donde la cooperación siempre es aceptada para maximizar el pago.

APÉNDICE A

A continución se presenta el procedimiento utilizado para obtener la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. En primer lugar se presenta el caso no cooperativo y partiendo de la ecuación (3.7) tenemos que:

$$\rho V_i^{nc}(x) = (p\Psi_i - c_i)ln\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)}{\beta_i \nabla V^*(x,t)}\right) - \delta_i x + \nabla V^*(x,t)\left[Kx - \sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)}{\beta_i \nabla V^*(x,t)}\right)\right]$$

Es necesario proponer una solución para poder aplicar el método de coeficientes indeterminados, por lo cual supondremos que la solución es lineal, ya que de acuerdo a Martín-Herrán (2010) si el juego es lineal en la variable de estado entonces la función de pago lo será tambien, lo que se puede definir de la siguiente manera: $V_i^{nc}(x) = A_i^{nc}x + G_i^{nc}$, sustituyendo en (3.5) tenemos:

$$\rho(A_i^{nc}x + G_i^{nc}) = (p\Psi_i - c_i)ln\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)}{\beta_i \nabla V^*(x,t)}\right) - \delta_i x + \nabla V^*(x,t)\left[Kx - \sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)}{\beta_i \nabla V^*(x,t)}\right)\right] \tag{1.1}$$

Derivando con respecto a la variable de estado en la solución propuesta y sustituyendo en (1.1), se tiene que:

$$\rho(A_i^{nc}x + G_i^{nc}) = (p\Psi_i - c_i)ln\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)}{\beta_i A_i^{nc}}\right) - \delta_i x + A_i^{nc}Kx - A_i^{nc}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)}{\beta_i A_i^{nc}}\right) \tag{1.2}$$

Reacomodando términos en (1.2) obtenemos los coeficientes, los cuales se presentan a continuación:

$$A_i^{nc} = \frac{\delta_i}{(K-\rho)} \qquad G_i^{nc} = \frac{1}{\rho}\left[(p\Psi_i - c_i)ln\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)(K-\rho)}{\beta_i \delta_i}\right) - \delta_i \sum_{j \in N}\frac{(p\Psi_j - c_j)}{\delta_j}\right] \qquad \forall i \neq j \tag{1.3}$$

Para el caso cooperativo se parte de la ecuación (3.13)

$$\rho V_i^c(x) = \sum_{i=1}^{n}(p\Psi_i - c_i)ln\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)}{\beta_i \nabla V^*(x,t)}\right) - \delta_i x + \nabla V^*(x,t)\left[Kx - \sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)}{\beta_i \nabla V^*(x,t)}\right)\right]$$

De manera análoga como para el caso cooperativo, se propone una solución lineal para la función valor de la forma $V_i^c(x) = A_i^c x + G_i^c$, que al sustituir en (3.13) se obtiene:

$$\rho(A_i^c x + G_i^c) = \sum_{i=1}^{n}(p\Psi_i - c_i)ln\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)}{\beta_i \nabla V^*(x,t)}\right) - \delta_i x + \nabla V^*(x,t)\left[Kx - \sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)}{\beta_i \nabla V^*(x,t)}\right)\right] \tag{1.4}$$

Derivando con respecto a la variable de estado en la solución propuesta y sustituyendo en (1.5), se tiene que:

$$\rho(A_i^c x + G_i^c) = \sum_{i=1}^{n}(p\Psi_i - c_i)ln\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)}{\beta_i A_i^c}\right) - \delta_i x + A_i^c\left[Kx - \sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)}{\beta_i A_i^c}\right)\right] \tag{1.5}$$

Reacomodando términos en (1.5) obtenemos los coeficientes dados por:

$$A_i^c = \sum_{i\in N}\frac{\delta_i}{(K-\rho)} \qquad G_i^c = \frac{1}{\rho}\sum_{i\in N}\left[(p\Psi_i - c_i)ln\left(\frac{(p\Psi_i - c_i)(K-\rho)}{\beta_i \sum\limits_{j\in N}\delta_j}\right) - \delta_i \sum_{j\in N}\frac{(p\Psi_j - c_j)}{\sum\limits_{k\in N}\delta_k}\right] \qquad \forall i \neq j \tag{1.6}$$

Referencias Bibliográficas

Aumann, R. (1989). En J. Eatwell, M. Milgate & P. Newman (Eds.),The New Palgrave (pp. 460–482).London: Macmillan.

Basar T. & Olsder, G. J. (1995). Dynamic noncooperative game theory (2 ed.). Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Benchekroun, H., & Taherkhani, F. (2014). Adaptation and the Allocation of Pollution Reduction Costs. Dynamic Games and Applications, 4(1), 32-57.

Benchekroun, H., & Van Long, N. (2002). Transboundary fishery: a differential game model. Economica, 69(274), 207-221.

Borkotokey, S., & Mesiar, R. (2014). The Shapley value of cooperative games under fuzzy settings: a survey. International Journal Of General Systems, 43(1), 75-95.

Clark, C. (2013). Restricted Access to Common-Property Fishery Resources: A Game-Theoretic Analysis. Dynamic Optimization and Mathematical Economics, 117.

Friesz, T. L. (2010). Dynamic optimization and differential games (Vol. 135). New York:Springer.

Gilles, R. P. (2010). the cooperative game theory of networks and Hierarchies (Vol. 44). Springer Science & Business Media.

Jørgensen, S., Martín-Herrán, G., & Zaccour, G. (2005). Sustainability of cooperation overtime in linear-quadratic differential games. International Game Theory Review, 7(04), 395-406.

Jørgensen, S. & Zaccour, G. (2001) “Time consistent side payments in a dynamic game of downstream pollution,” J. Economic Dynamics and Control 25, 1973–1987.

Kaitala, V., & Pohjola, M. (1990). Economic Development and Agreeable Redistribution in Capitalism: Efficient Game Equilibria in a Two-Class Neoclassical Growth Model. International Economic Review, 31(2), 421-438.

Martín-Herrán, G. (2010). Racionalidad individual dinámica en juegos diferenciales medioambientales. Rect@: Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA, (11), 55-84.

Isaacs, R. (1965). Differential Games. New York: Dover.

Magaña, A. (1996). Formación de coaliciones en los juegos cooperativos y juegos con múltiples alternativas (Tesis doctoral. Departamento de Matemàtica Aplicada II. Universidad Politècnica de Catalunya).

Mas-Colell, A. (1988). Algunos comentarios sobre la teoría cooperativa de los juegos. Cuadernos Economicos, 40, 143-161.

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., & Green, J. R. (1995). Microeconomic theory (Vol. 1). New York: Oxford university press.

Morgenstern, O. (1948)."Demand theory reconsidered ". Quarterly journal of economics, tomo LXII.

Moulin, H. (2002). An appraisal of cooperative game theory. En Schmidt, C. (Eds.). *Game Theory and Economic Analysis: A Quiet Revolution in Economics* (pp. 81-95). London: Routledge.

Nash, J. (1951)."Non-Cooperative Games". The annals of mathematics 2(54).286-295.

Osborne, M. J., & Rubinstein, A. (1994). A course in game theory. Massachusetts: MIT press.

Peleg, B., & Sudhölter, P. (2007). Introduction to the theory of cooperative games (Vol. 34). Springer Science & Business Media.

Rincón, P. (1993). Valor de Shapley de un juego capitalista. In Anales de Estudios Económicos y Empresariales (No. 8, pp. 129-138).

Shapley, L.S. (1953) A Value forn-person Games. Annals of Mathematics Study No. 28. Princeton University Press, Princeton, N.J., pp. 307-317.

Von Neumann, J. & Morgenstern, O.(2004). Theory of games anda economic behavior (4ª ed.).Princenton university Press:USA.