

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD AZCAPOTZALCO**

Licenciatura en Ingeniería Eléctrica

Proyecto de Investigación:

Implementación de un control escalar de velocidad para un motor de inducción trifásico modelado por elementos finitos utilizando co-simulación numérica.

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO ELECTRICISTA**

Presenta:

Abraham García Legorreta
2172001108
al2172001108@azc.uam.mx

Asesor:

Dr. Felipe de Jesús González Montañez
Profesor-investigador
Departamento de Energía
fjgm@azc.uam.mx

Co-Asesor:

Dr. Víctor Manuel Jiménez Mondragón
Profesor-investigador
Departamento de Energía
vmjm@azc.uam.mx

Septiembre 2022

Declaratoria

Yo, **Dr. Felipe de Jesús González Montañez**, declaro que aprobé el contenido del presente Reporte de Proyecto de Integración y doy mi autorización para su publicación en la Biblioteca Digital, así como en el Repositorio Institucional de UAM Azcapotzalco.

Yo, **Dr. Víctor Manuel Jiménez Mondragón**, declaro que aprobé el contenido del presente Reporte de Proyecto de Integración y doy mi autorización para su publicación en la Biblioteca Digital, así como en el Repositorio Institucional de UAM Azcapotzalco.

Yo, **Abraham García Legorreta**, doy mi autorización a la Coordinación de Servicios de Información de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, para publicar el presente documento en la Biblioteca Digital, así como en el Repositorio Institucional de UAM Azcapotzalco.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres, Felipe Heberto García Alonso y Beatriz Legorreta Reyes, por todo su apoyo, paciencia, comprensión y aliento para culminar mis estudios y estar siempre presentes en cada parte de mi vida. Quiero agradecer a mi hermana Mayra por su apoyo recibido, buenos deseos y palabras de aliento en mi vida universitaria.

Agradezco al Dr. Felipe de Jesús González Montañez y al Dr. Víctor Manuel Jiménez Mondragón por su confianza, apoyo, colaboración, compromiso, paciencia y tiempo depositados en mi para desarrollar y culminar este proyecto de investigación.

Agradezco a mis amigos y compañeros por su apoyo y motivación para poder sobreponerme a cada uno de los momentos difíciles en este camino.

Agradezco a cada uno de mis profesores por su ejemplo, enseñanza y motivación para obtener una formación académica profesional.

Finalmente gracias a la Universidad Autónoma Metropolitana por darme el privilegio de ingresar y culminar mi estudios de licenciatura en esta gran institución.

“Intenta no volverte un hombre de éxito, sino volverte un hombre de valor”

-Albert Einstein

Resumen

En este trabajo se presenta la co-simulación como una estrategia de solución a problemas complejos en ingeniería eléctrica, dónde gracias a los modelos computacionales se pueden superar estos importantes desafíos. Con todo esto, el problema a resolver fue el control escalar de velocidad a un motor de inducción trifásico de 10 HP modelado por el método de elementos finitos (MEF). El modelo computacional del motor de inducción se desarrolló en Altair Flux 2D® v2021, y realizando un acoplamiento entre Altair Flux 2D® y *Simulink*TM se creó un bloque de pruebas del motor de inducción llamado modelo circuito-campo, por otro lado, las señales eléctricas se implementaron con los bloques base de Matlab®/*Simulink*TMv2021, lo que permitió implementar el control escalar en lazo abierto a diferentes perfiles de velocidad con error de seguimiento del 3 % a un 179.7 % en bajas frecuencias y desde un 3 % a 0.1 % en altas frecuencias.

Abstract

In this paper, co-simulation is presented as a solution strategy to complex problems in electrical engineering, where computational models help to overcome this challenge. The problem of controlling the speed of a 10 HP three-phase induction motor modeled by the finite element method (FEM) has been solved. The computational model of the induction motor was developed in Altair Flux 2D® v2021, and making a coupling between Altair Flux 2D® and *Simulink*TM, a virtual test bench of the induction motor called the circuit-field model was created, on the other hand, the power supply signals to the motor were implemented with the base blocks of Matlab®/*Simulink*TM v2021, which allowed to implement open-loop scalar control at different speed profiles with tracking error from 3 % to 179.7 % at low frequencies and from 3 % to 0.1 % at high frequencies.

Índice del contenido

1. Introducción	13
1.1. Antecedentes	15
1.2. Justificación	16
1.3. Objetivo General	17
1.4. Objetivos Específicos	17
2. Motor de Inducción	18
2.1. Introducción	18
2.2. Teoría electromagnética del motor de inducción	19
2.2.1. Ecuaciones de Maxwell	19
2.2.2. Relaciones Constitutivas	21
2.2.3. Ley de Lorentz	22
2.2.4. Teorema de Ferraris	22
2.3. Funcionamiento del motor de inducción	24
2.4. Circuito equivalente del motor de inducción	25
2.4.1. Par inducido en el motor de inducción	26
3. Modelo del motor de inducción por MEF	28
3.1. Introducción	28
3.2. Ecuaciones diferenciales parciales	28
3.3. Difusión en un medio material	29
3.4. Modelo electromagnético	29

3.4.1.	Ecuación de difusión no lineal y ecuaciones de voltaje para los diferentes dominios	33
3.5.	Método de los Elementos Finitos (MEF)	41
3.5.1.	Problema con valor en la frontera	42
3.5.2.	Aproximación del potencial \mathbf{Az} por el método de los elementos finitos	44
3.6.	Método de residuos ponderados de Galerkin	46
3.7.	Metodo de los elementos finitos Galerkin para el modelo electromagnético	47
3.7.1.	Ecuación de difusión no lineal en su forma matricial para los diferentes dominios	50
4.	Modelo computacional en Altair Flux® - SimulinkTM	51
4.0.1.	Introducción	51
4.0.2.	Implementación del modelo computacional	52
4.0.3.	Acoplamiento del modelo en Altair Flux® a Simulink TM	56
5.	Control Escalar	57
5.1.	Introducción	57
5.2.	Proporcionalidad entre el Par, Voltaje , frecuencia y flujo magnético	58
5.2.1.	Relación $V - f\phi$	58
5.2.2.	Relación $\frac{V}{f} - \phi$	59
5.2.3.	Relación $\tau - \frac{V}{f}$	59
5.2.4.	Relación $\tau - \phi$	59
5.3.	Curvar par - velocidad	60
5.4.	Control Escalar a bloques en Matlab®-Simulink TM	63
5.4.1.	Código de Matlab	64
5.4.2.	Velocidad de referencia	65
5.4.3.	Frecuencia de control	65
5.4.4.	Voltajes de control	65
6.	Co-simulación, resultados y análisis del control escalar de velocidad	67
6.1.	Introducción	67

6.2. Validación del modelo	68
6.3. Implementación del control escalar de velocidad al modelo de elementos finitos	69
6.4. Resultados del control escalar al modelo de campo	70
6.4.1. Seguimiento de velocidad	70
6.4.2. Voltaje de control V/f	71
6.4.3. Corrientes en los devanados del estator I_{123}	72
6.4.4. Par inducido T_{ind} y par de carga T_m	73
6.5. Análisis de resultados del control escalar al modelo de campo	74
6.5.1. Seguimiento de velocidad	74
6.5.2. Voltaje de control V/f	75
6.5.3. Corrientes I_{123} , T_{ind} y T_m	76
7. Conclusiones	77

Índice de figuras

1.1. Control escalar de velocidad aplicado al motor de inducción en elementos finitos	14
2.1. Motor de inducción jaula de ardilla[Fitzgerald et al, 2014]	18
2.2. Fuerza electromotriz por un campo magnético variable.	19
2.3. Campo eléctrico por la densidad de carga ρ .	20
2.4. Campo magnético y sus dipolos magnéticos	20
2.5. Densidad de carga \mathbf{J} y el rotacional de la intensidad de campo \mathbf{H}	21
2.6. Fuerza magnética que siente la carga q	22
2.7. Fuerza magnetomotriz giratoria debido a la simetría en devanados y fuentes de alimentación[Stephen J.Chapman, 2012].	23
2.8. Alimentación trifásica del motor de inducción	24
2.9. Circuito Equivalente por fase de un motor de inducción [S.J.Chapman, 2012]	25
2.10. Circuito Equivalente simplificado [S.J.Chapman, 2012]	26
2.11. Equivalente de Thevenin [S.J.Chapman, 2012]	27
3.1. Densidad de campo \mathbf{B} , Densidad de corriente \mathbf{J} y potencial magnético \mathbf{A}	30
3.2. Conductor Sólido.	33
3.3. Conductor filamentario.	37
3.4. Motor de inducción y sus cabezales de los devanados del estator.	39
3.5. Voltajes de alimentación y modelo electromagnético	40
3.6. Modelo de impedancias inter barra en el rotor jaula de ardilla.	40
3.7. Discretización de un sistema continuo de forma puntual y sus elementos finitos.	41
3.8. Elementos finitos comúnmente utilizados en mallados: Lineal, cuadrático y cúbico [Bastos, sadowski, 2003].	42

3.9. Grafico (ϕ, x) para la solución de una ecuación diferencial parcial.	43
3.10. Potencial magnético vectorial definido en el subdominio de un elemento triangular	44
4.1. Motor de inducción a modelar[Altair Flux, 2018]	51
4.2. Geometría del modelo computacional del motor de inducción	52
4.3. Medios materiales del modelo computacional del motor de inducción	54
4.4. Mallado triangular para el motor de inducción	55
4.5. Mallado triangular de ensamble en la región de aire del entrehierro	55
4.6. Bloque de acoplamiento entre Altair Flux y Simulink	56
5.1. Bloque de acoplamiento entre Altair Flux y Simulink	60
5.2. Bloque de acoplamiento entre Altair Flux y Simulink	61
5.3. Gráfico V/f	63
5.4. Control Escalar en <i>SimulinkTM</i>	63
5.5. Velocidad de referencia n_r	65
5.6. Frecuencia de control en simulink	65
5.7. Tabla virtual V/f implementada en simulink	65
5.8. Bloque de Voltajes V_{abc} trifásicos de amplitud 1	66
6.1. Co-simulación para validar de modelo de elementos finitos en <i>SimulinkTM</i> a voltajes nominales	68
6.2. Corrientes en los devanados del motor en Altair Flux® y <i>SimulinkTM</i>	68
6.3. Modelo circuito-campo para realizar la Co-simulación	69
6.4. Seguimiento de velocidad desde 209.4 rpm a 1,452 rpm	70
6.5. Seguimiento de velocidad desde 1,452 a 2904 rpm	70
6.6. Voltaje de control aplicado al modelo de campo desde 209.4 rpm a 1,452 rpm	71
6.7. Voltaje de control aplicado al modelo de campo desde 1,452 a 2904 rpm	71
6.8. Corrientes en los devanados del estator desde 209.4 rpm a 1,452 rpm	72
6.9. Corrientes en los devanados del estator desde 1,452 a 2904 rpm	72
6.10. Par inducido y par de carga desde 209.4 rpm a 1,452 rpm	73

6.11. Par inducido y par de carga desde 1,452 a 2904 rpm	73
6.12. Error de seguimiento para 209.4 rpm a 1,452 rpm	74
6.13. Error de seguimiento para 1,452 rpm a 2,904 rpm	75

Índice de tablas

4.1. Parámetros geométricos del motor[CEDRAT, 2006].	53
4.2. Valores constantes del motor de inducción[Altair Flux Overlay, 2018].	53
4.3. Características a carga nominal de 24.72 N· m en estado estable [Altair Flux, 2018].	54
5.1. Parámetros del motor de inducción [Altair Flux Overlay, 2018]	60
5.2. Tabla V/f	62

Capítulo 1

Introducción

El motor de inducción es una máquina indispensable en la vida diaria de las personas, ya que facilitan el movimiento mecánico de cargas sin el esfuerzo humano, siendo utilizados tanto en actividades domésticas como industriales, tales como: máquinas y herramientas, bandas transportadoras, tornos, grúas, maquiladoras, ventiladores, bombas de agua [Fitzgerald et al, 2013] [Stephen C. et al, 2012].

En la mayoría de los casos se necesita controlar las variables del motor como lo son la corriente, velocidad, frecuencia y par, para satisfacer las características de operación, todo depende de la aplicación. Para realizar la implementación del controlador es necesario contar con un prototipo experimental que permita desarrollar las diferentes pruebas, sin embargo al utilizar prototipos experimentales tiene como desventaja principal poder llegar a dañar el motor. Por lo tanto, en la actualidad se ha optado por la creación de modelos computacionales para tener plataformas virtuales de prueba y así anticipar la respuesta del sistema [Jiří Klíma et al, 2015].

El control escalar de velocidad es el control en donde la tensión y frecuencia se mantienen en variaciones proporcionales, esto permite que el flujo magnético se comporte de manera estable, lo que tiende a mantener un par estable de carga [V. Jiménez et al, 2019]. Para implementar el control escalar de velocidad se puede desarrollar de dos maneras alternativas, dependiendo de la aplicación y de las especificaciones del cliente, se cuenta con el control escalar en lazo abierto y en lazo cerrado [Sompong S., et al, 2006]. El control escalar en lazo abierto es uno de los controladores más utilizados en la industria, debido a que se obtienen muy buenos

resultados, con un error de seguimiento en la velocidad entre 4 y 5 %, además que en la mayoría de las aplicaciones no se necesita alta precisión en el control del par - velocidad, sin embargo, si se necesitará una mayor precisión en el control, es necesario operar al motor en lazo cerrado [Barbara R. et al, 2014].

Es importante mencionar que al realizar el modelo computacional por el método de elementos finitos no se considera la parte del control, dicho análisis se trabajará de forma paralela utilizando una simulación cooperativa llamada "co-simulación", que ha sido de gran utilidad para la solución de problemas complejos en ingeniería eléctrica [Alfonso, 2011] [Altair Flux 2D, 2018].

En la Figura 1.1 se muestra el esquemático del control escalar de velocidad el cual tiene como variable de entrada la velocidad deseada o de referencia del motor de inducción y dada esta señal de referencia se deben ajustar las señales de voltaje y frecuencia que permitan establecer un seguimiento de velocidad mecánica respecto a la referencia.

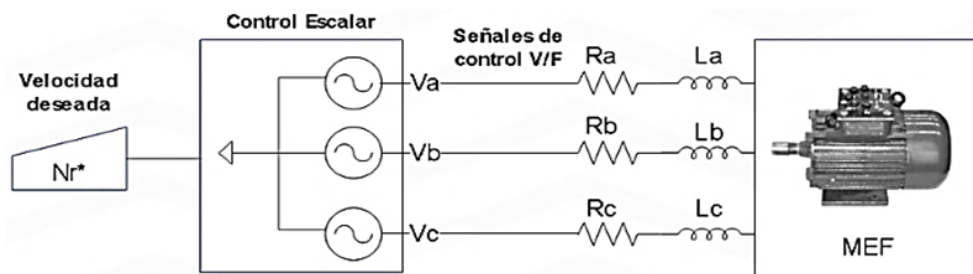


Figura 1.1: Control escalar de velocidad aplicado al motor de inducción en elementos finitos

En este trabajo se utilizó la co-simulación como una estrategia que facilita la implementación del control escalar en un motor de inducción, donde gracias a la no linealidad magnética establecida en el modelo por elementos finitos permite obtener resultados muy cercanos a la realidad, tal como si se utilizará una plataforma experimental, de esta manera se obtuvo un buen desempeño del controlador a velocidades no menores del 50 % de su velocidad nominal, por lo tanto, para velocidades mayores e iguales al 50 % de su velocidad nominal se tiene un error de seguimiento desde un 3 % a un 0.1 %.

1.1. Antecedentes

En los últimos años los sistemas eléctricos en ingeniería se han vuelto cada vez más complejos, sistemas que integran aspectos físicos y de simulación, donde el método del elemento finito (MEF) se ha convertido en una herramienta indispensable para el diseño, análisis, modelado y simulación de dichos sistemas. Sin embargo, el MEF no contempla la parte de control, es por ello que en la actualidad se propone como solución la co-simulación para superar estos importantes desafíos.

A continuación se presenta una revisión de algunos trabajos previos realizados en el estudio del MEF, co-simulación y sistemas de control aplicado al motor de inducción.

En 2013, Felipe González-Montáñez, et al, realizaron un modelo de un motor de inducción con su sistema de control por campo orientado usando el método de elemento finito por medio de co-simulación, con el objetivo de demostrar que se puede utilizar un modelo acoplado campo-circuito a través del acoplamiento débil para implementar el control de velocidad, así como la regulación de flujo por control de campo orientado o control vectorial. La simulación se desarrolló en los programas comerciales **Maxwell®** v15 y **Simplorer®** v10.

En 2015, Jiří Klíma, et al , realizaron un análisis de un motor de inducción trifásico, con el objetivo de comparar experimentalmente la velocidad, voltajes, eficiencia y pérdidas contra el modelo en elementos finitos mediante la herramienta de co-simulación utilizando los programas comerciales **Ansys/Maxwell®-Simplorer®**, llegando a la conclusión que la co-simulación y el método del elemento finito caracterizan de forma muy realista el comportamiento real de la máquina.

En 2019, J. Jiménez-Gonzalez, et al, implementaron un control escalar en lazo abierto para un motor de inducción trifásico de jaula de ardilla usando el modelo dinámico de la máquina, el objetivo de este trabajo fue discutir sus fundamentos, su alcance, las ventajas y desventajas presentes, así como la eficiencia en este tipo de control donde finalmente se demostró

que es posible lograr la entrega de torque nominal para una amplia gama de velocidades con menos del 5 % de error sin cambiar significativamente la eficiencia de la máquina y el flujo del entrehierro, donde si se requiere más precisión, este error se puede minimizar optando por un esquema de control en lazo cerrado. La simulación se desarrolló en el programa comercial de **Matlab®/SimulinkTM**.

Con esta breve sección de antecedentes se ha expuesto la importancia del método del elemento finito, el control de velocidad así como la co-simulación, para el análisis de máquinas eléctricas y en particular para el motor de inducción, donde la co-simulación es el medio de unión entre el modelo numérico y el controlador. En los últimos años se han generado nuevas herramientas de simulación, en donde los modelos computacionales han ganado terreno ya que son una excelente herramienta de diseño, además de evitar los prototipos experimentales, por tanto su estudio y análisis es de suma importancia en la actualidad.

1.2. Justificación

La motivación de utilizar un motor de inducción trifásico se debe a que es uno de los motores más importantes a nivel mundial, siendo un motor muy económico de construir debido a su rotor jaula de ardilla, además que en los últimos años los motores de inducción han tenido un profundo desarrollo en el control de velocidad debido a la evolución de la electrónica de potencia y control moderno, como lo es el control escalar.

La implementación de un controlador a un motor de inducción realizando pruebas experimentales, además de llegar a ser muy costosas, pueden llegar a dañar a la máquina, es por esto que la construcción de un modelo computacional solucionará este inconveniente, ya que permitirá realizar múltiples pruebas sin llegar a dañar al motor. Por otra parte la razón de analizar, estudiar e implementar un control escalar es debido a que es uno de los controladores más utilizados en la industria a causa de su bajo costo y simplicidad en su implementación, ya que no depende de demasiados parámetros de la máquina, únicamente del voltaje y frecuencia de alimentación.

La finalidad de utilizar la herramienta de co-simulación es que facilita la tarea de simulación, ya que acopla el sistema magnético y eléctrico por medio de una transferencia de información mutua en cada paso de simulación, dónde cada programa de cómputo trabaja de manera independiente, pero resolviendo el sistema global circuito-campo lo que converge en la solución del problema.

1.3. Objetivo General

- Implementar un control de velocidad mediante la estrategia de control escalar para un motor de inducción trifásico de 10 HP modelado por elementos finitos utilizando co-simulación numérica

1.4. Objetivos Específicos

- Obtener un modelo de elementos finitos en dos dimensiones del motor de inducción usando el programa **Altair Flux** [®]**2D**.
- Implementar en **Matlab**[®]/*Simulink*TM el controlador de velocidad del motor usando la técnica de control escalar.
- Realizar la co-simulación del sistema motor-controlador a distintos valores de velocidad y analizar el desempeño del controlador.

Capítulo 2

Motor de Inducción

2.1. Introducción

Un motor eléctrico es una máquina de transformación de energía eléctrica a mecánica, debido a la interacción electromagnética entre el estator - rotor. El estator es la parte estacionaria y externa de un motor construido principalmente por laminaciones de acero, comúnmente acero al silicio de alta permeabilidad, en él se contienen los devanados trifásicos de alimentación insertados en ranuras, por otra parte el rotor es la parte móvil sobre el eje axial del motor, también compuesto de laminaciones de acero con sus conductores colocados de manera similar al estator. El motor eléctrico se clasifica según la naturaleza de su corriente, existen los motores de corriente directa y alterna, siendo este último clasificado por su tipo de rotor: rotor devanado y rotor jaula de ardilla[Fitzgerald et al, 2014].

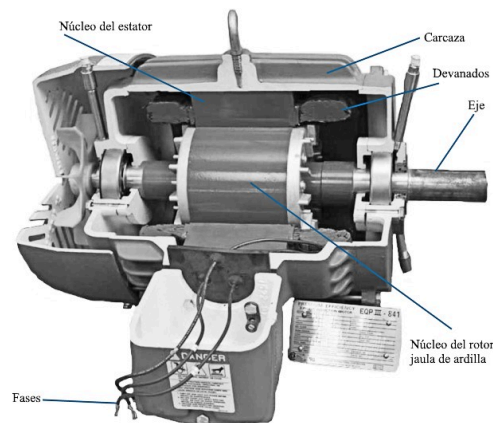


Figura 2.1: Motor de inducción jaula de ardilla[Fitzgerald et al, 2014]

2.2. Teoría electromagnética del motor de inducción

Para comprender el funcionamiento básico del motor de inducción es necesario establecer algunas de las ecuaciones y fenómenos fundamentales del electromagnetismo, entre ellos las ecuaciones de Maxwell, Teorema de Ferraris y Ley de Lorentz [Fitzgerald et al, 2014][David K. Cheng, 1998][Stephen J.Chapman, 2012].

2.2.1. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell ayudan a entender la relación que existe entre los campos magnéticos, eléctricos y el medio material. En un motor de inducción existe una relación electromagnética mutua y sirven para comprender su funcionamiento. Las ecuaciones de Maxwell son: Ley de Inducción de Faraday, Ley de Gauss - campo eléctrico, Ley de Gauss - campo magnético y finalmente la ley de Ampere.

1.-Ley de Inducción de Faraday

Michael Faraday descubrió en 1831 que si se somete un material conductor a un campo magnético variable, en las terminales de dicho conductor se induce una diferencia de potencial llamada fuerza electromotriz, y si se encuentra un camino cerrado provoca una circulación de corriente eléctrica inducida [David K. Cheng, 1998].

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1a)$$

$$e_{ind}(t) = \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -N \frac{d\phi}{dt} \quad (2.1b)$$

Siendo $\phi = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$, la cantidad de flujo magnético sobre S y N el número de vueltas del conductor.

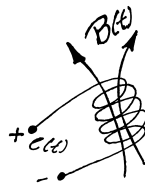


Figura 2.2: Fuerza electromotriz por un campo magnético variable.

2.-Ley de Gauss - Campo Eléctrico

La ley de Gauss para el campo eléctrico habla de cómo un campo eléctrico es originado por una fuente, llamada densidad carga eléctrica ρ , siendo las líneas de campo radiales a la densidad de carga, es decir, divergentes a la fuente [David K. Cheng, 1998].

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.2a)$$

$$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho \cdot dV \quad (2.2b)$$

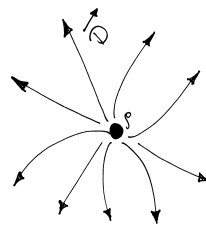


Figura 2.3: Campo eléctrico por la densidad de carga ρ .

3.-Ley de Gauss - Campo Magnético

La ley de Gauss para el campo magnético habla de cómo un campo magnético **no** es originado por una fuente aislada o monopolo, los campos magnéticos se originan por dipolos magnéticos (elemento puntual que produce un campo magnético), a gran escala normalmente llamados polos magnéticos(norte y sur), siendo las líneas de campo convergentes entre si [David K. Cheng, 1998].

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3a)$$

$$\phi = \oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2.3b)$$

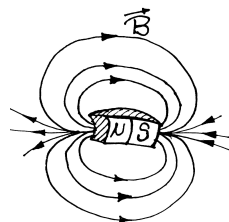


Figura 2.4: Campo magnético y sus dipolos magnéticos .

4.-Ley de Ampere

La ley de Ampere indica que si existe una corriente eléctrica estacionaria circulando en un camino cerrado, esta producirá una intensidad de campo magnético rotacional [David K. Cheng, 1998].

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.4a)$$

$$I = \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.4b)$$

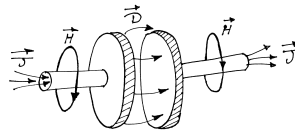


Figura 2.5: Densidad de carga \mathbf{J} y el rotacional de la intensidad de campo \mathbf{H} .

Donde:

E: Vector intensidad de campo eléctrico (V/m)

D: Vector densidad del flujo eléctrico (C/m^2)

H: Vector intensidad del campo magnético ($A \cdot m^{-1}$)

B: Vector densidad del flujo magnético (T)

J: Densidad de carga (A/m^2)

2.2.2. Relaciones Constitutivas

Los materiales por naturaleza cuentan con propiedades magnéticas y eléctricas, y sus características se ven modificadas bajo el efecto de campos eléctricos y magnéticos [David K. Cheng, 1998] [M.V.K. Chari, S.J. Salon, 1999]. Para un medio homogéneo, isotrópico y lineal, se tiene :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.5b)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.5c)$$

Donde:

μ : Pemeabilidad magnética del medio material ($T \cdot m \cdot A^{-1}$)

ϵ : Permitividad eléctrica del medio material ($F \cdot m^{-1}$)

σ : Conductivad eléctrica del medio material ($\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$)

2.2.3. Ley de Lorentz

La ley de Lorentz establece que si una carga q a una velocidad V se encuentra sumergida en una densidad de campo magnético B , se producirá una fuerza magnética F_m [David K. Cheng, 1998].

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.6)$$

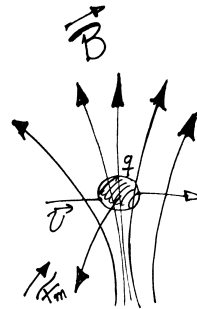


Figura 2.6: Fuerza magnética que siente la carga q .

2.2.4. Teorema de Ferraris

Nikola Tesla descubrió en 1882 el campo magnético rotatorio y por el teorema de Ferraris se sabe que si los devanados del estator se colocan con espaciamentos físicos simétricos a 120° y alimentados por una fuente trifásica sinusoidal a 120° eléctricos, producirá un campo magnético giratorio, este hecho permitió retirar las delgas colectoras del motor de Nikola Tesla [Stephen J.Chapman, 2012].

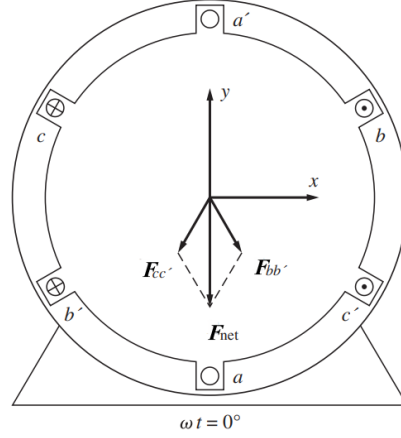


Figura 2.7: Fuerza magnetomotriz giratoria debido a la simetría en devanados y fuentes de alimentación[Stephen J.Chapman, 2012].

En la Figura 2.7 se tienen las corrientes eléctricas de alimentación las cuales quedan expresadas en función del tiempo como:

$$\begin{aligned}
 i_{aa'}(t) &= I_M \text{sen}(wt) \\
 i_{bb'}(t) &= I_M \text{sen}(wt - 120^\circ) \\
 i_{cc'}(t) &= I_M \text{sen}(wt + 120^\circ)
 \end{aligned}$$

En la Figura 2.7 se muestran las fuerzas magnetomotrices en forma vectorial en un determinado instante, además cabe mencionar que su magnitud y posición varía en forma sinusoidal, si se considera la velocidad de rotación constante, de esta manera se puede utilizar la notación fasorial, comúnmente llamada notación de vectores espaciales obteniendo así las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 F_{aa'}(t) &= F_M \text{sen}(wt) \angle 0^\circ \\
 F_{bb'}(t) &= F_M \text{sen}(wt - 120^\circ) \angle 120^\circ \\
 F_{cc'}(t) &= F_M \text{sen}(wt + 120^\circ) \angle -120^\circ
 \end{aligned}$$

Para $wt = 0$, se tiene que la amplitud de la fuerza magnetomotriz total es 1.5 veces el valor pico de la fuerza magnetomotriz generada por fase.

$$\begin{aligned}
 F_{total} &= F_{aa'}(0) \angle 0^\circ + F_{bb'}((-120^\circ) \angle 120^\circ + F_{cc'}(120^\circ) \angle -120^\circ \\
 F_{total} &= 1,5 F_M
 \end{aligned}$$

2.3. Funcionamiento del motor de inducción

Cuando a los devanados de un motor de inducción trifásico se le somete una excitación sinusoidal equilibrada trifásica, Figura 2.8, se producirá una densidad de campo magnético rotacional variante en el tiempo, este hecho hará que en las barras del rotor jaula de ardilla cortocircuitadas por anillos establezcan una inducción de corrientes, lo que provocará la aparición de un campo magnético variante en el tiempo en el rotor, por otro lado las cargas eléctricas de las barras del rotor sumergidas en el campo magnético sentirán una fuerza magnética, que en conjunto se observará como un par de carga electromagnético inducido, o lo que es lo mismo, el campo magnético del rotor intentará establecer un seguimiento respecto el campo magnético rotacional, es decir, el rotor comenzará a girar [Stephen J.Chapman, 2012][Fitzgerald et al, 2014][Jeús Fraile M, 2003].

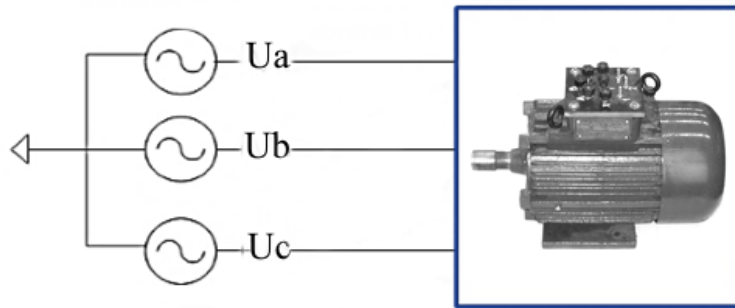


Figura 2.8: Alimentación trifásica del motor de inducción

Es importante mencionar que una de sus principales características del motor de inducción es que la velocidad del rotor no puede ni debe alcanzar la velocidad del campo magnético del estator, ya que su movimiento relativo genera la inducción de corrientes eléctricas lo que provoca el par electromagnético. La ecuación que establece dicho efecto, se define como:

$$n_m = (1 - s) \cdot n_s \quad (2.7a)$$

$$n_s = \frac{120 \cdot f}{P} \quad (2.7b)$$

Siendo s , el deslizamiento, un factor que define el desplazamiento relativo en por unidad que existe entre la velocidad del rotor y el campo magnético rotacional del estator.

2.4. Circuito equivalente del motor de inducción

El circuito equivalente del motor de inducción ayuda a caracterizar el comportamiento del motor en estado estable utilizando parámetros concentrados RL , el circuito se puede modelar por fase utilizando el circuito equivalente de un transformador ya que presentan el mismo comportamiento por ley de inducción de Faraday, con la diferencia de que los núcleos del lado primario y secundario se encuentran separados por un entrehierro de aire [Stephen J.Chapman, 2012].

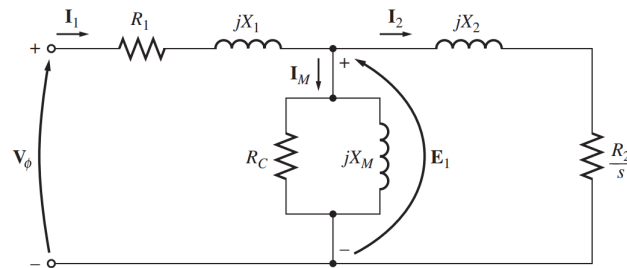


Figura 2.9: Circuito Equivalente por fase de un motor de inducción [S.J.Chapman, 2012]

El voltaje de entrada V_ϕ está definido por la expresión:

$$V_\phi = E_1 + I_1(R_1 + jX_1) \quad (2.8)$$

Siendo R_1 la resistencia del devanado por fase del estator, X_1 y X_2 caracterizan los flujos dispersos del lado primario y secundario, R_C la resistencia que caracteriza las pérdidas de potencia en el núcleo por efecto joule (corrientes parásitas) e histéresis, X_m la reactancia que caracteriza el flujo mutuo en el núcleo, y finalmente $(R_2/s + jx_2)$ trata los efectos debidos a la variación de velocidad en el rotor.

Suponiendo que el campo magnético con un ángulo mecánico θ varía de forma sinusoidal en el entrehierro:

$$B = B_m \cdot \cos(\omega t + \theta) \quad (2.9)$$

Por ley de inducción de Faraday, ecuación (2.1b), resulta:

$$e_{ind}(t) = N \cdot c \cdot \phi \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) = N \cdot c \cdot \phi \cdot (2\pi f) \cdot \cos(\omega t)$$

Donde c es una constante de construcción de la máquina. De esta manera el voltaje inducido en RMS es:

$$E_{RMS} = |E_1| = (N \cdot \sqrt{2} \cdot \phi \cdot c) \cdot \phi f = K \cdot \phi \cdot f \quad (2.10)$$

2.4.1. Par inducido en el motor de inducción

Observando la Figura 2.9 se puede obtener la potencia transferida a través del entrehierro que se suministra a una fase del motor, tal que:

$$P_{ag} = I^2 \frac{R_2}{s}$$

Para 3 fases, se tiene:

$$P_{ag} = 3I^2 \frac{R_2}{s} \quad (2.11)$$

Los motores eléctricos en la actualidad se diseñan de tal forma que presenten un comportamiento de alta permeabilidad magnética y conductividad con tendencia a cero, para evitar calentamientos y pérdidas en el núcleo P_c , es por esto que se asume que las pérdidas en el núcleo R_c son despreciables. De esta forma el circuito equivalente de la Figura 2.9 se puede reescribir como se muestra en la Figura 2.10.

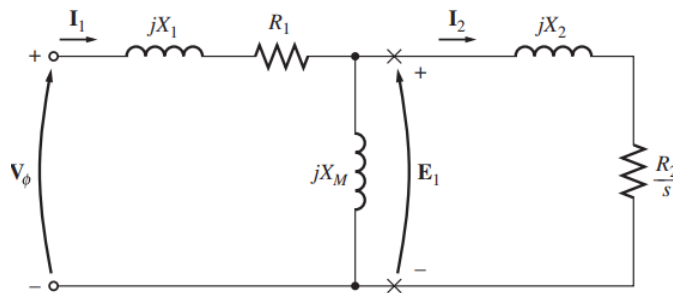


Figura 2.10: Circuito Equivalente simplificado [S.J.Chapman, 2012]

El par desarrollado esta dato por:

$$T_d = \frac{P_{ag}}{\omega_s} = \frac{3I_2^2 R_2}{\omega_s s} \quad (2.12)$$

Aplicando un circuito equivalente de Thévenin en las terminales de E_1 , se obtiene:

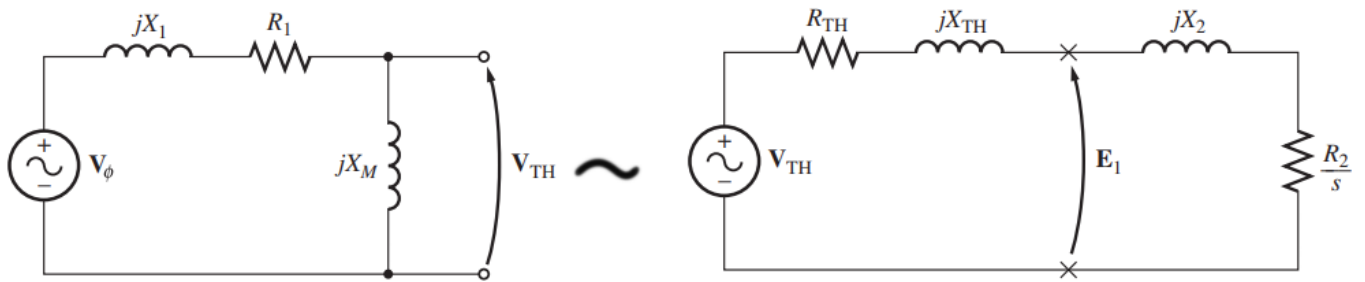


Figura 2.11: Equivalente de Thevenin [S.J.Chapman, 2012]

De la Figura 2.11 se observa que el voltaje V_{TH} , esta definido como :

$$V_{TH} = V_\phi \frac{X_M}{\sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_M)^2}} = K_1 \cdot V_\phi \quad (2.13)$$

Donde $k_1 = \frac{X_M}{\sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_M)^2}}$

Además, de la Figura 2.11 se puede obtener la magnitud de la corriente I_2 , tal que :

$$I_2 = \frac{V_{TH}}{\sqrt{(R_{TH} + \frac{R_2}{s})^2 + (X_{TH} + X_2)^2}} = \frac{V_{TH}}{|\hat{Z}_1|} \quad (2.14)$$

Donde $|\hat{Z}_1| = \sqrt{(R_{TH} + \frac{R_2}{s})^2 + (X_{TH} + X_2)^2}$

Sustituyendo la ecuación (2.14) en la ecuación (2.12), resulta en:

$$T_d = 3 \cdot \frac{R_2}{w_s \cdot s} \cdot \frac{V_{TH}^2}{|\hat{Z}_1|^2} \quad (2.15)$$

Capítulo 3

Modelo del motor de inducción por MEF

3.1. Introducción

El modelado del motor de inducción por estrategias convencionales como puede ser el circuito equivalente o el modelo dinámico del motor de inducción no caracterizan completamente el comportamiento del motor de inducción, ya que solo consideran ciertos parámetros concentrados y no la geometría ni el comportamiento electromagnético en su totalidad del mismo. Es por esto que en la actualidad es utilizado el Método de elementos finitos para solucionar este inconveniente, ya que considera la geometría del modelo, la no linealidad y el medio material.

3.2. Ecuaciones diferenciales parciales

Las ecuaciones diferenciales parciales con sus correspondientes condiciones iniciales y de contorno, ayudan a modelar procesos que suceden en la naturaleza y así inferir la respuesta del sistema por medio de su solución, en la mayoría de los casos estos sistemas se modelan con ecuaciones diferenciales parciales no lineales, como lo es la ley de enfriamiento de Newton, las leyes de Kepler o en nuestro caso modelar el comportamiento electromagnético del motor de inducción con ayuda de la ecuación de difusión no lineal, que se obtiene al manipular las ecuaciones de Maxwell [Teodoro Moore F et al, 2014].

3.3. Difusión en un medio material

La difusión es el movimiento de partículas en un medio material, para el caso del motor de inducción la difusión se realiza debido al movimiento de cargas por el medio conductor (devanados y barras de jaula de ardilla), caracterizado como una densidad de corriente \mathbf{J} , siendo \mathbf{J} directamente proporcional al campo eléctrico \mathbf{E} . Para establecer el modelo electromagnético del motor de inducción se hace uso de las ecuaciones de Maxwell utilizando la formulación del potencial magnético vectorial \mathbf{A} y el potencial eléctrico escalar V , ya que permite obtener la ecuación de difusión no lineal que relaciona los circuitos externos respecto a los campos magnéticos en sus diferentes regiones (de aire, núcleos magnéticos de estator y rotor, devanados del estator y jaula de ardilla del rotor), de esta manera se establece una relación entre la excitación o densidad de corriente, con el medio material ϵ , μ y σ del estator-rotor y sus campos electromagnéticos [J.Edwards et al][R. Escarela-Perez et al, 2015].

Es importante mencionar que la densidad de corriente, \mathbf{J} , se conforma de la densidad de corriente proveniente por una fuente externa \mathbf{J}_s y a la densidad de corriente de foucault \mathbf{J}_e generada dentro del conductor, de este modo se puede escribir que $\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_e$. Por otro lado, escribiendo la ley de Ampere en el dominio de la frecuencia se obtiene que $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}$, en donde la parte imaginaria que es la corriente de desplazamiento obtendrá relevancia en el sistema aproximadamente cuando la corriente de desplazamiento tenga la misma magnitud que la de conducción, es decir cuando $\omega = \sigma/\epsilon \approx 10^{19}$, de esta manera $\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + j\omega\epsilon\mathbf{E} = (1 + j)\sigma\mathbf{E}$, entonces, para bajas frecuencias, como lo son 50 o 60 hz, la corriente de desplazamiento puede ser despreciable [J.Edwards et al] [Alexis G., 2011].

3.4. Modelo electromagnético

El modelo electromagnético del motor de inducción se plantea en dos dimensiones, por lo que es importante mencionar que la densidad de campo magnético \mathbf{B} tendrá una dependencia en la dirección \mathbf{B}_{xy} , esto logrará que la formulación del potencial magnético vectorial este en una sola dirección, \mathbf{A}_z , lo que ayudará a simplificar el problema.

Para ello primero se establecerá la relación que existe entre \mathbf{B} y \mathbf{A} . Como se sabe por propiedades vectoriales la divergencia de un rotacional es cero, además por ley de Gauss se sabe que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, de esta manera \mathbf{B} puede ser expresado como el rotacional de un campo vectorial \mathbf{A} , es decir el potencial magnético vectorial, lo cual satisface la siguiente ecuación:

$$\mathbf{B}_{xy} = \nabla \times \mathbf{A}_z \quad (3.1)$$

Por otra parte, debido a las relaciones constitutivas, se sabe que $\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H}$, siendo \mathbf{H} directamente proporcional a \mathbf{B} , y además para bajas frecuencias $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$, con todo esto, para que ambos campos \mathbf{H} y \mathbf{B} tengan una dependencia direccional \mathbf{B}_{xy} y \mathbf{H}_{xy} , \mathbf{J} necesariamente debe ser perpendicular a ambos, es decir, \mathbf{J}_z .

Con todo esto se puede definir \mathbf{B}_{xy} , \mathbf{H}_{xy} , \mathbf{J}_z , \mathbf{A}_z como:

$$\mathbf{B}_{xy} = \mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y = B_1(x, y, z)\mathbf{i} + B_2(x, y, z)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{H}_{xy} = \mathbf{H}_x + \mathbf{H}_y = H_1(x, y, z)\mathbf{i} + H_2(x, y, z)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{A}_z = A_1(x, y, z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{J}_z = J_1(x, y, z)\mathbf{k}$$

En la Figura 3.1 se muestra la dirección de los campos vectoriales para el modelo electro-magnético en dos dimensiones.

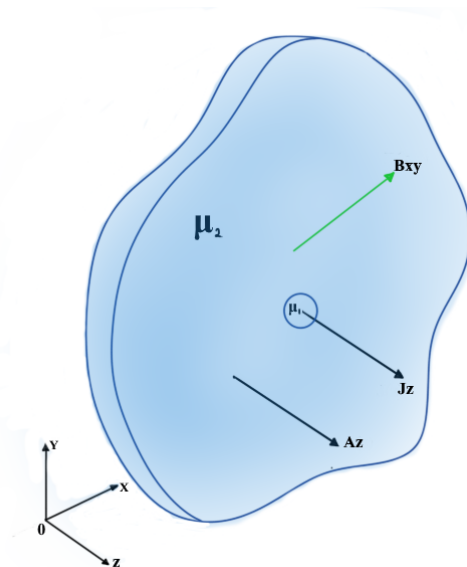


Figura 3.1: Densidad de campo \mathbf{B} , Densidad de corriente \mathbf{J} y potencial magnético \mathbf{A} .

El teorema de Helmholtz dice que para terminar de definir un campo vectorial, se debe definir tanto su rotacional como su divergencia, de esta forma para terminar de definir el campo magnético vectorial \mathbf{Az} , se establecerá la divergencia de \mathbf{Az} , para ello primero se utilizará la ley de inducción de Faraday en su forma local, ecuación (2.1a), y se desarrollará la relación que existe entre potencial eléctrico V y campo eléctrico \mathbf{E} [M.V.K. Chari, S.J. Salon, 1999]. De esta manera:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (3.1) en (2.1), se obtiene que:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{Az})}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{Az}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times (\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{Az}}{\partial t}) &= 0\end{aligned}$$

Por propiedades vectoriales, el rotacional del gradiente de un campo vectorial es cero, por tanto se puede definir el gradiente del potencial eléctrico escalar, tal que:

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{Az}}{\partial t}) = \nabla \times (-\nabla V) = 0$$

El vector de gradiente de potencial eléctrico escalar $-\nabla V$, indica la dirección de máxima variación de la función potencial eléctrico escalar en cualquier punto que se calcule, y su signo negativo indica la dirección del potencial eléctrico en la que el campo eléctrico aumenta. Con esto se establece la relación entre potencial eléctrico V y el campo eléctrico \mathbf{E} , tal que:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{Az}}{\partial t} \quad (3.2)$$

Usando la Transformación de Gauge para el potencial magnético vectorial, la transformación queda definida como[Ezequiel R. J. , 2006]:

$$\mathbf{Az}' = \mathbf{Az} + \nabla \phi$$

Siendo ϕ la función potencial escalar de Gauge.

Esta transformación no altera al cálculo de la densidad de campo magnético vectorial, esto se comprueba calculando $\nabla \times \mathbf{A}'$, lo que resulta en:

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\phi) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\phi = \nabla \times \mathbf{A}$$

Pero cabe mencionar que a pesar de no afectar al cálculo de la densidad de campo magnético, esta transformación si afecta al cálculo del campo eléctrico, esto se aprecia en la ecuación (3.2), ya que se agrega el término $-\frac{\partial \nabla\phi}{\partial t}$, para ello es necesario realizar una modificación al potencial eléctrico escalar V , tal que:

$$V' = V + f$$

Siendo f , una función escalar arbitraria, y al aplicar V' y \mathbf{A}' en la ecuación (3.2), resulta en :

$$\mathbf{E}' = -\nabla V' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla(V + f) - \frac{\partial(\mathbf{A} + \nabla\phi)}{\partial t} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla(f + \frac{\partial\phi}{\partial t})$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \nabla(f + \frac{\partial\phi}{\partial t})$$

De esta forma si se quiere que \mathbf{E} sea igual a \mathbf{E}' , el termino $-\nabla(f + \frac{\partial\phi}{\partial t})$ tiene que ser igual a cero, para ello $f + \frac{\partial\phi}{\partial t}$ tiene que ser una constante, considerando dicha constante como cero, se obtiene :

$$f = -\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

Con todo esto quedan definidas las Transformaciones de Gauge.

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\phi$$

$$V' = V - \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

Este hecho establece que existe un infinito conjunto de potenciales escalar V y vectorial \mathbf{A} que definen los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} . Por lo tanto se tiene la libertad de escoger dichos potenciales a conveniencia, de esta manera se escogerá el potencial magnético vectorial \mathbf{A} , tal que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, esta condición llamada norma de Gauge Coulomb ayudará simplificar algunas ecuaciones[Ezequiel R. J. , 2006].

3.4.1. Ecuación de difusión no lineal y ecuaciones de voltaje para los diferentes dominios

Conductores Sólidos

La ecuación de difusión no lineal para el dominio de conductores sólidos, como es el caso de las barras del rotor jaula de ardilla, se obtiene considerando la sección S_m y un conductor de longitud L , tal como se muestra en la Figura 3.2 [Bastos J., Sadowski, 2003].

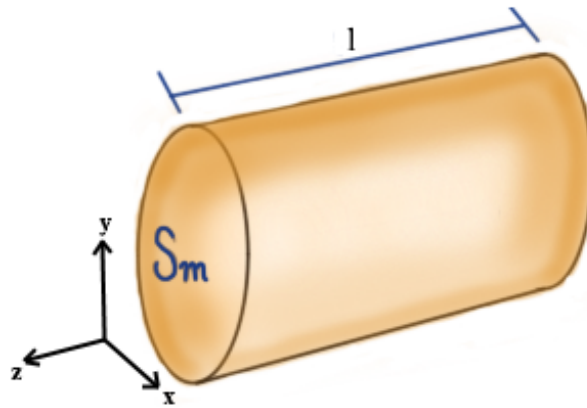


Figura 3.2: Conductor Sólido.

Por la ley de Ampere en baja frecuencia se tiene que $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$, y por propiedades vectoriales $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Sustituyendo la ecuación (3.2) en (2.5b), se obtiene que:

$$\mathbf{J} = \sigma \left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial t} \right) \quad (3.3)$$

Calculando la divergencia de \mathbf{J} y sustituyendo la ecuación (3.3), se obtiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \sigma \left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial t} \right) = 0$$

Por la norma de Gauge Coulomb, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, por lo tanto, $-\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A}_z)}{\partial t} = 0$.

$$\nabla \cdot \sigma (-\nabla V) = 0 \quad (3.4)$$

Por otra parte, debido a que \mathbf{J} cambia respecto a la dirección \mathbf{k} , de igual forma el ∇V debe cambiar únicamente en la dirección de \mathbf{k} , es decir, $\nabla V = \frac{\partial V \mathbf{z}}{\partial z} = \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} \mathbf{k}$, de esta forma la ecuación (3.4) queda redefinida como:

$$\sigma \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.5)$$

Se aprecia que $V(x,y,z)$, puede ser definido como:

$$V(z) = V_1 z + V_0$$

Lo cual indica que V únicamente depende de la variable z , siendo V_1 y V_0 constantes, cumpliendo con la ecuación (3.5), ya que $-\frac{\partial V}{\partial z} = V_1 = cte$ y al aplicar la segunda derivada el resultado es cero.

Si se calcula la integral usando $-\frac{\partial V}{\partial z} = V_1$, desde 0 hasta l del conductor, siendo U_m la diferencia de potencial en los extremos del conductor, tal que:

$$U_m = -\int_0^l V_1 \cdot dz = -V_1 \cdot l$$

Despejando V_1 , se tiene la ecuación:

$$V_1 = -\frac{U_m}{l} \quad (3.6)$$

De esta manera queda definido ∇V , tal que:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} = V_1 \mathbf{k} = -\frac{U_m}{l} \mathbf{k}$$

Además, la intensidad de corriente eléctrica a través del conductor sólido se define como la integral de la densidad de carga \mathbf{J} , respecto a la superficie transversal del conductor S_m , tal que:

$$I_m = \iint_{S_m} \mathbf{J} \cdot d\hat{s} \quad (3.7)$$

Siendo $d\hat{s} = ds \cdot \mathbf{k}$

Sustituyendo la ecuación (3.3) en la ecuación (3.7), se encuentra :

$$I_m = \iint_{S_m} \sigma(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{z}}{\partial t}) \cdot d\hat{s}$$

$$I_m = \iint_{S_m} \sigma(\frac{U_m}{l} \mathbf{k} - \frac{\partial A}{\partial t} \mathbf{k}) \cdot d\hat{s}$$

$$I_m = \iint_{S_m} \sigma(\frac{U_m}{l} - \frac{\partial A}{\partial t}) \cdot ds$$

$$I_m = \sigma \frac{U_m}{l} S_m - \iint_{S_m} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \cdot ds \quad (3.8)$$

Además la resistencia DC del conductor está definida como:

$$R_m = \frac{l}{\sigma S_m}$$

$$L = R_m \sigma S_m$$

Sustituyendo l en la ecuación (3.8), resulta en:

$$I_m = \frac{U_m}{R_m} - \iint_{S_m} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \cdot ds$$

Despejando U_m , se obtiene que:

$$U_m = R_m I_m + R_m \iint_{S_m} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \cdot ds \quad (3.9)$$

Esta ecuación plantea como la caída de tensión sobre un conductor sólido y está directamente relacionada con la caída de tensión por la resistencia en corriente directa del conductor ($R_m I_m$) y la caída de tensión por corrientes inducidas ($R_m \iint_{S_m} \sigma \frac{\partial A}{\partial t}$).

Por otra parte, por ley de Ampere se tiene que:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \sigma(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{z}}{\partial t})$$

Sustituyendo $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A} \mathbf{z})$, se tiene que:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A} \mathbf{z}) = \sigma(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{z}}{\partial t})$$

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A} \mathbf{z}) = \sigma(\frac{U_m}{l} \mathbf{k} - \frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{z}}{\partial t})$$

Sustituyendo $\mathbf{Uz}_m = U_m \mathbf{k}$, se obtiene la ecuación de difusión no lineal para conductores sólidos:

$$\begin{aligned}\nabla \times \frac{1}{\mu}(\nabla \times \mathbf{Az}) &= \sigma \left(\frac{\mathbf{Uz}_m}{l} - \frac{\partial \mathbf{Az}}{\partial t} \right) \\ \nabla \times \frac{1}{\mu}(\nabla \times \mathbf{Az}) &= \sigma \frac{\mathbf{Uz}_m}{l} - \sigma \frac{\partial \mathbf{Az}}{\partial t}\end{aligned}\tag{3.10}$$

Otra forma de escribir la ecuación de difusión no lineal, es utilizando las propiedades vectoriales, en donde:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{Az} \right) = \frac{1}{\mu} (\nabla (\nabla \cdot \mathbf{Az}) - \nabla \cdot (\nabla \mathbf{Az}))$$

Por la norma de Gauge Coulomb, $\nabla \cdot \mathbf{Az} = 0$, se tiene:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{Az} \right) = \frac{1}{\mu} (-\nabla \cdot (\nabla \mathbf{Az})) = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{Az} \right)$$

Con todo esto, se puede reescribir la ecuación de difusión no lineal para conductores sólidos, tal que:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{Az} \right) = -\sigma \frac{\mathbf{Uz}_m}{l} + \sigma \frac{\partial \mathbf{Az}}{\partial t}\tag{3.11}$$

Como el modelo electromagnético es en dos dimensiones, se escribirá la ecuación (3.11) en términos de las variables cartesianas x, y , tal que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{Az}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{Az}}{\partial y} \right) = -\sigma \frac{\mathbf{Uz}_m}{l} + \sigma \frac{\partial \mathbf{Az}}{\partial t}\tag{3.12}$$

Conductores delgados o filamentosarios

La ecuación de difusión no lineal para el dominio de conductores filamentosarios, como es el caso de los devanados del estator de un motor jaula de ardilla, se obtiene considerando N conductores delgados, de longitud L en la sección transversal S de los conductores, tal como se muestra en la Figura 3.3 [Bastos J., Sadowsk,2003].

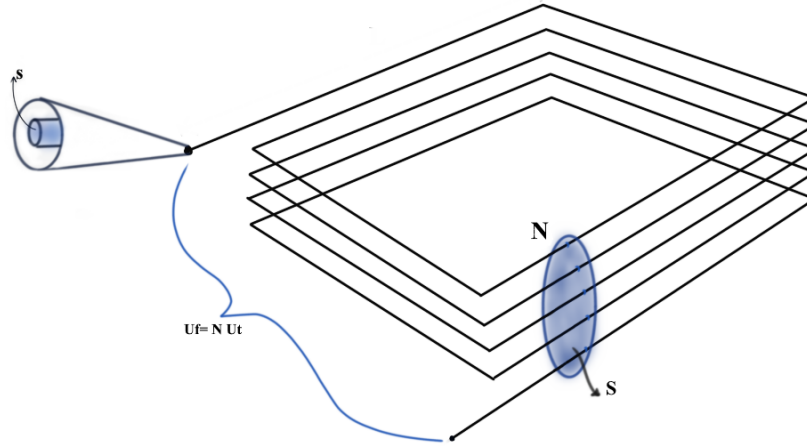


Figura 3.3: Conductor filamentosario.

Debido a que el cálculo de la ecuación de difusión no lineal para el conductores filamentosarios es análogo al caso anterior, se procede únicamente a renombrar las variables de la ecuación (3.10) , (3.11) y (3.12) respectivamente, y realizando algunas consideraciones particularidades.

Siendo ahora $\mathbf{U}_{z_f} = U_f \mathbf{k}$ la diferencia de potencial en las terminales de la bobina, R_f la resistencia en corriente directa e I_f la corriente que atraviesa el conductor, de esta manera se obtiene:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{A}_{z_f} \right) = -\sigma \frac{\mathbf{U}_{z_f}}{l} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}_{z_f}}{\partial t} \quad (3.13)$$

$$U_f = R_f I_f + R_f \iint_S \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \cdot ds \quad (3.14)$$

Sustituyendo la ecuación (3.14) en (3.13), se obtiene:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{A}_{z_f} \right) = \frac{-\sigma}{l} (R_f I_f + R_f \iint_S \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \cdot ds) \mathbf{k} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}_{z_f}}{\partial t} \quad (3.15)$$

Siendo $l = R_f \sigma S$, sustituyendo l en la ecuación (3.15).

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{A} \mathbf{z} \right) + \frac{\sigma}{R_f \sigma s} (R_f I_f + R_f \iint_s \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \cdot ds) \mathbf{k} - \sigma \frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{z}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{A} \mathbf{z} \right) - \sigma \frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{z}}{\partial t} + \frac{I_f}{s} \mathbf{k} + \left(\frac{1}{s} \iint_s \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \cdot ds \right) \mathbf{k} &= 0 \end{aligned}$$

Donde $\mathbf{I} \mathbf{z}_f = I_f \mathbf{k}$, sustituyendo resulta en:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{A} \mathbf{z} \right) - \sigma \frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{z}}{\partial t} + \frac{\mathbf{I} \mathbf{z}_f}{s} + \frac{1}{s} \iint_s \sigma \frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{z}}{\partial t} \cdot ds = 0 \quad (3.16)$$

Ya que el conductor es muy delgado, la densidad de corriente $\sigma \frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{z}}{\partial t}$, se puede considerar uniforme en la sección transversal S , por lo que:

$$\frac{1}{s} \iint_s \sigma \frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{z}}{\partial t} \cdot ds \approx \left(\frac{1}{s} \iint_s \cdot ds \right) \sigma \frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{z}}{\partial t} = \sigma \frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{z}}{\partial t}$$

Con esta consideración la ecuación (3.16) se simplifica, de esta manera se tiene:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{A} \mathbf{z} \right) = - \frac{\mathbf{I} \mathbf{z}_f}{s} \quad (3.17)$$

En dos dimensiones se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{z}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{z}}{\partial y} \right) = - \frac{\mathbf{I} \mathbf{z}_f}{s}$$

Además considerando que $S = sN$ es la superficie total de la bobina para los N conductores, Figura 3.3, lo que resulta en:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{z}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A} \mathbf{z}}{\partial y} \right) = - \frac{N}{S} \mathbf{I} \mathbf{z}_f \quad (3.18)$$

Por otra parte, U_f de la ecuación (3.14) pueden describirse respecto a las terminales del conductor, de esta forma $U_f = N \cdot U_t$.

$$U_f = N \cdot U_t = N \cdot (R_t I_t + R_t \iint_s \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \cdot ds)$$

Siendo $R_f = NR_t$, $I_f = I_t$ y $R_t = \frac{l}{\sigma s}$

$$U_f = N \cdot (R_t I_f + \left(\frac{l}{\sigma s} \right) \sigma s \frac{\partial A}{\partial t})$$

$$U_f = R_f I_f + N \cdot l \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3.19)$$

No conductores

En la ecuación (3.20) se muestra la ecuación de difusión no lineal en dos dimensiones, para una región no conductora, como lo pueden ser los núcleos ferromagnéticos, el aire y aislamientos.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{Az}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{Az}}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.20)$$

Ecuación de difusión no lineal general y sus ecuaciones de voltaje para los diferentes conductores

La ecuación de difusión no lineal general así como los voltajes U_m y U_f para conductores sólidos y delgados se describe en las ecuaciones (3.21a), (3.21b) y (3.21c)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{Az}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{Az}}{\partial y} \right) = -\sigma \frac{\mathbf{Uz}}{l} + \sigma \frac{\partial \mathbf{Az}}{\partial t} \quad (3.21a)$$

$$U_m = R_m I_m + R_m \iint_{S_m} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \cdot ds \quad (3.21b)$$

$$U_f = R_f I_f + L \cdot \frac{dI_f}{dt} + N \cdot l \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3.21c)$$

El termino, $L \cdot \frac{dI_f}{dt}$, toma en cuenta el efecto por los flujos de dispersión en los cabezales de los devanados, Figura 3.4.

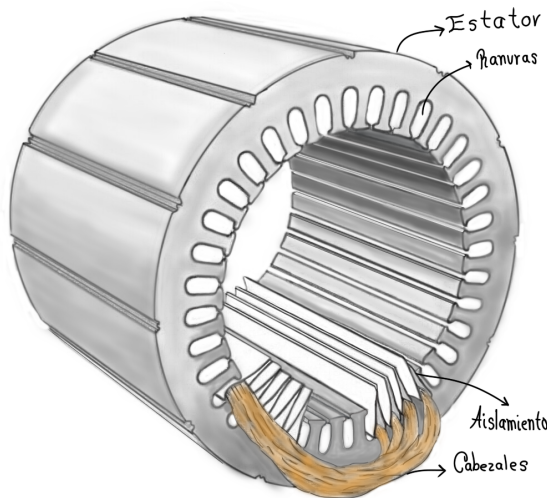


Figura 3.4: Motor de inducción y sus cabezales de los devanados del estator.

Acoplamiento de los voltajes de alimentación y el modelo electromagnético

Las ecuaciones (3.22a), (3.22b) y (3.22c) son las expresiones de voltaje en cada una de las fases del motor de inducción alimentado por una fuente de voltaje balanceada, donde el voltaje inducido en la bobina queda expresado en términos del potencial magnético vectorial [Aragón, 2015].

$$U_{fa} = U_a = R_{fa}I_{fa} + L_a \cdot \frac{dI_{fa}}{dt} + N_a \cdot l \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3.22a)$$

$$U_{fb} = U_b = R_{fb}I_{fb} + L_b \cdot \frac{dI_{fb}}{dt} + N_b \cdot l \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3.22b)$$

$$U_{fc} = U_c = R_{fc}I_{fc} + L_c \cdot \frac{dI_{fc}}{dt} + N_c \cdot l \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3.22c)$$

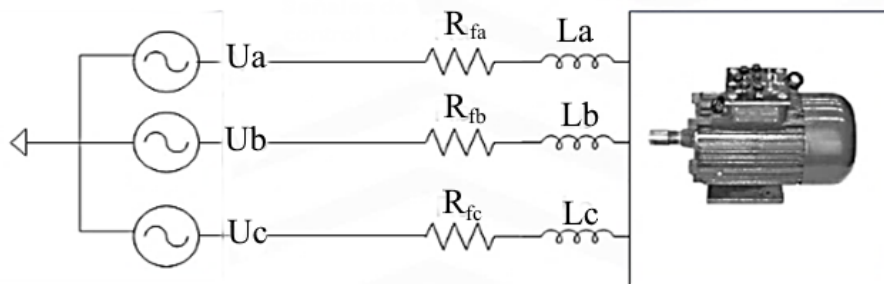


Figura 3.5: Voltajes de alimentación y modelo electromagnético .

Rotor y su conexión interna

Los conductores o barras del rotor se interconectan por anillo cortocircuitados, estos se modelan como una interconexión de impedancias finitas, es decir, impedancias inter barra RL , tal y como se muestra en la Figura 3.6, siendo las líneas paralelas las barras del rotor

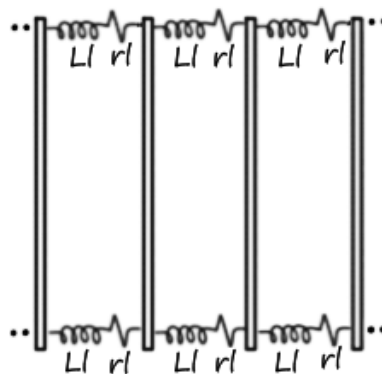


Figura 3.6: Modelo de impedancias inter barra en el rotor jaula de ardilla.

3.5. Método de los Elementos Finitos (MEF)

El Método de los Elementos Finitos, tiene un gran contenido histórico, su desarrollo comenzó en los años 40 con estudios de elasticidad de estructuras, y en 1950 llamo la atención de muchos investigadores debido a su aplicación principalmente en aeronaves. En años posteriores, se comenzó a desarrollar en el área estructural de la ingeniería civil y en años recientes se comenzó a aplicar a los sistemas electromecánicos de Ingeniería Eléctrica.

Debido a lo sumamente complejos que son los sistemas en ingeniería en la actualidad, y la dificultad que existe en captar el comportamiento del sistema en un modelo global que es resolver la ecuación diferencial parcial que modela al sistema. Es por esto que el Método de los Elementos Finitos permitió a los científicos e ingenieros, caracterizar los complejos modelos por medio de una discretización física y matemática, es decir, calculando un conjunto de puntos distribuidos convencionalmente dentro del dominio y usando una separación del sistema en elementos finitos interconectados por estos puntos nodales, ya que son la unión de los elementos adyacentes con cierto número de grados de libertad, estos elementos en su conjunto forman una malla, Figura 3.7. Con esto se puede analizar de forma particular cada elemento, en donde las incógnitas del problema dejan de ser las funciones matemáticas, para proceder a ser los valores de dichas funciones en los nodos del elemento, esto debido a que todo queda completamente definido en el elemento al aplicar en los valores de aproximación nodal las funciones de forma o de interpolación[Bastos J., Sadowsk,2003].

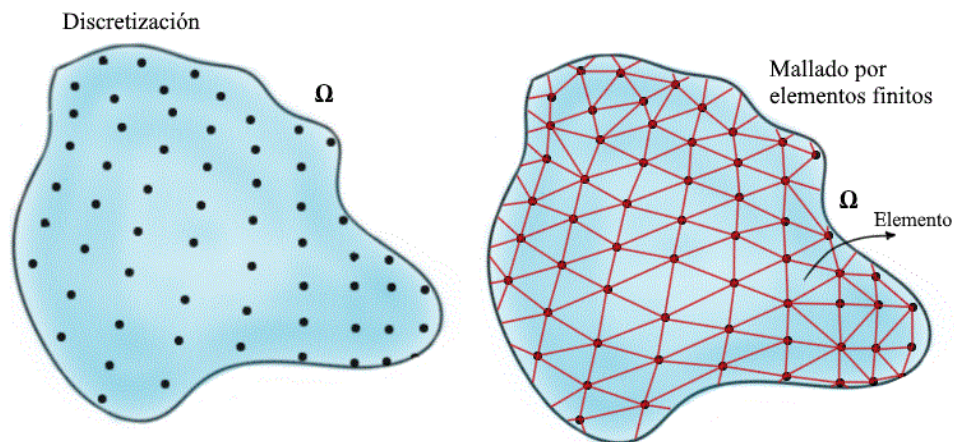


Figura 3.7: Discretización de un sistema continuo de forma puntual y sus elementos finitos.

Se puede apreciar en la Figura 3.7 que existen elementos adyacentes, donde necesariamente los nodos deben ser comunes entre si, ya que la información del modelo se transmite mediante los nodos, de esta manera, si los nodos no son comunes entre elementos o no se relacionan, por lo tanto no habrá transferencia de información. Los elementos finitos, se pueden representar de diferentes formas, dependiendo de la conveniencia geométrica del modelo, por ejemplo en la Figura 3.7, los elementos en el dominio convenientemente se escogieron como triangulares. Por otra parte, los elementos se clasifican respecto a su orden, todo en relación a su número de nodos, siendo los elementos de mayor orden o de alta precisión los elementos de segundo y tercer orden, Figura 3.8. [Alejandro G., 2011] [Seegerlind, 1991] [Bastos J., Sadowsk,2003].

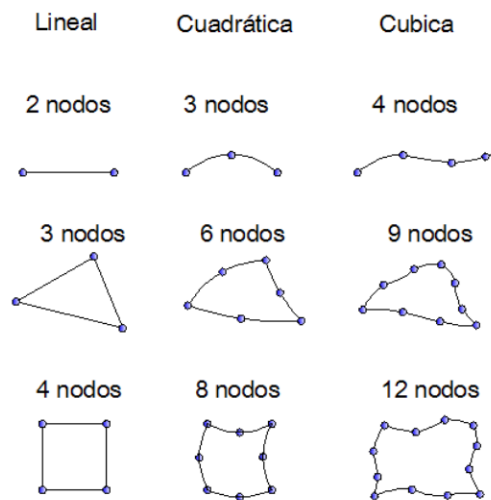


Figura 3.8: Elementos finitos comúnmente utilizados en mallados: Lineal, cuadrático y cúbico [Bastos, sadowski, 2003].

3.5.1. Problema con valor en la frontera

Un problema de condición de borde, contorno o valor de frontera es un problema en el cual se tiene una ecuación diferencia parcial, tal que:

$$\mathcal{L}\phi = f \tag{3.23}$$

Definida en un dominio Ω , en donde se conocen valores de contorno en Γ , siendo f la excitación y ϕ la incógnita.

Residuo de una ecuación diferencial

Debido a la complejidad que existen en encontrar la solución de una ecuación diferencial parcial, comúnmente se utilizan funciones de aproximación. Suponiendo que $\tilde{\phi}$, es la solución aproximada de la ecuación diferencial en un punto P y sustituyendo $\tilde{\phi}(p)$ en la ecuación (3.23), se obtiene el residuo R , tal que:

$$R = \mathcal{L}\tilde{\phi}(p) - f \neq 0 \quad (3.24)$$

Para considerar los n puntos del dominio Ω discretizado, se procede a integrar el residuo R en el dominio de la ecuación diferencial parcial, lo que permitirá compensar los espacios que existen entre la evaluación de puntos discretos, como se observa en la Figura 3.9.

$$\mathbf{R} = \int_{\Omega} R \cdot d\Omega \quad (3.25)$$

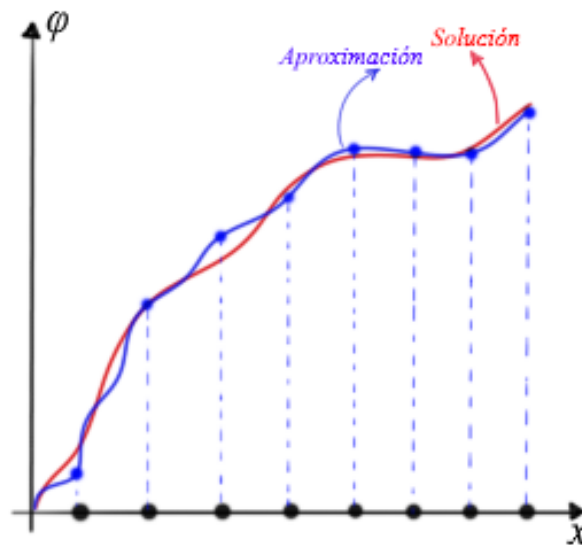


Figura 3.9: Gráfico (ϕ, x) para la solución de una ecuación diferencial parcial.

Puede apreciarse que la mejor aproximación de $\tilde{\phi}$ será aquella la cual haga que el residuo \mathbf{R} sea muy cercano a cero en cada uno de los puntos del dominio Ω .

3.5.2. Aproximación del potencial A_z por el método de los elementos finitos

Utilizando un elemento triangular de primer orden (2D)

Si se quiere expresar el potencial magnético vectorial como una función de aproximación, $\tilde{\mathbf{A}}_Z$, por medio de las funciones de forma para resolver la ecuación diferencial parcial de difusión no lineal utilizando el Método de los Elementos Finitos[Bastos J., Sadowsk,2003][M.V.K. Chari, S. J. Salon, 1999] .Para un elemento se tiene:

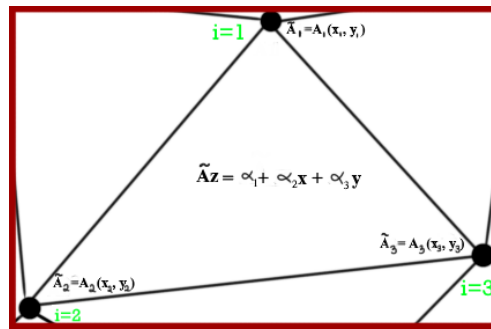


Figura 3.10: Potencial magnético vectorial definido en el subdominio de un elemento triangular

La variación del potencial magnético vectorial en la región triangular, es:

$$\tilde{\mathbf{A}}_Z = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \quad (3.26)$$

Reescribiendo en forma matricial:

$$\tilde{\mathbf{A}}_Z = [1, x, y] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Siendo la ecuación (3.26) la ecuación que define a un plano. Por otra parte, en los nodos 1, 2 y 3 el potencial magnético vectorial es dependiente de la posición geometría, tal que:

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1; \quad (3.28a)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2; \quad (3.28b)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3; \quad (3.28c)$$

En forma matricial se tiene:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_1 \\ \tilde{\mathbf{A}}_2 \\ \tilde{\mathbf{A}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Encontrando los valores de α_1 , α_2 y α_3 por inversión de matriz, resulta en:

$$[\alpha] = [K]^{-1} \cdot [\mathbf{A}] \quad (3.29)$$

Siendo $[K]^{-1}$, igual a:

$$[K]^{-1} = \frac{1}{\det([K])} \cdot \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det([K])} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Donde el $\det([K]) = 2\Delta$, es decir, el doble del área del elemento triangular. Con todo esto, ya se conoce el vector $[\alpha]$ de la ecuación (3.29), tal que:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1 \tilde{\mathbf{A}}_1 + a_2 \tilde{\mathbf{A}}_2 + a_3 \tilde{\mathbf{A}}_3}{2\Delta} \\ \frac{b_1 \tilde{\mathbf{A}}_1 + b_2 \tilde{\mathbf{A}}_2 + b_3 \tilde{\mathbf{A}}_3}{2\Delta} \\ \frac{c_1 \tilde{\mathbf{A}}_1 + c_2 \tilde{\mathbf{A}}_2 + c_3 \tilde{\mathbf{A}}_3}{2\Delta} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Sustituyendo la ecuación (3.30) en la ecuación (3.27), simplificando y factorizando x, y , resulta:

$$\tilde{\mathbf{A}}_Z = \frac{a_1 + b_1 x + c_1 y}{2\Delta} \tilde{\mathbf{A}}_1 + \frac{a_2 + b_2 x + c_2 y}{2\Delta} \tilde{\mathbf{A}}_2 + \frac{a_3 + b_3 x + c_3 y}{2\Delta} \tilde{\mathbf{A}}_3$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_Z = N_1 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_1 + N_2 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_2 + N_3 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_3 = \sum_{i=1}^{n=3} N_i \cdot \tilde{\mathbf{A}}_i \quad (3.31)$$

Donde:

$\tilde{\mathbf{A}}_i$: Potencial magnético vectorial asociado al nodo i

N_i : Función de interpolación o de forma asociada al nodo i

n: Número de nodos del elemento

3.6. Método de residuos ponderados de Galerkin

El método de Galerkin o de residuos ponderados, es un método de solución de ecuaciones diferenciales parciales que trabaja directamente con la ecuación diferencial parcial que necesita ser resuelta, y utilizando el concepto de minimizar el valor residual (acercarlo a cero) de forma integral, es decir, por formulación débil ya que se soluciona el problema por métodos del algebra lineal, para ello se hace uso de la ecuación (3.25), donde se fuerza esta condición (igualar a cero) por medio de una ponderación de funciones W_i , y al ser aplicada a la ecuación (3.25) se obtiene así la ecuación (3.32), tal que:

$$\int_{\Omega} W_i R \cdot d\Omega = \int_{\Omega} W_i (\mathcal{L}\tilde{\phi} - f) \cdot d\Omega = 0 \quad (3.32)$$

En este método se desea que la función peso valga más en los puntos discretos del sistema y que decaiga su valor conforme se aleja de ellos. Es por esto que se utiliza una función peso construida con la suma de funciones peso locales definidas en la vecindad de los puntos, es decir, valen cero en el resto del dominio. De esta misma forma se construye la función de aproximación $\tilde{\phi}$, sumando funciones que aproximen el comportamiento de la función original en los puntos discretos del sistema, por ejemplo, una sumatoria de polinomios, tal que:

$$\tilde{\phi} = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + \dots + c_nx^M$$

Por otro lado, si la función de aproximación es exactamente la misma que la función de peso, a esto se le conoce como el método de residuos ponderados Galerkin. Observar en la ecuación (3.32) que por cada función peso W_i , se integrará en el dominio Ω , o lo que es lo mismo, se realizarán i integrales, haciendo variar i desde 1 hasta M , de esta manera se obtendrán i ecuaciones algebraicas linealmente independientes, y al resolver dicho sistema de ecuaciones, se encontrarán los coeficientes $c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_n$. que caracterizan a la función de aproximación $\tilde{\phi}$ [Bastos J., Sadowsk, 2003].

3.7. Metodo de los elementos finitos Galerkin para el modelo electromagnético

Al aplicar el modelo de residuos ponderados a la ecuación de difusión no lineal para una función de aproximación, $\tilde{\mathbf{A}}_Z$, se obtiene un sistema de ecuaciones matriciales definidas en el dominio Ω (2D) para todos los elementos del sistema, que con su solución permitirá caracterizar de forma muy precisa el comportamiento del motor de inducción[M.V.K. Chari, S. J. Salon, 1999].

La ecuación de difusión no lineal, (3.21a), se define como:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{A}_Z \right) = -\sigma \frac{\mathbf{U}_Z}{l} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}_Z}{\partial t}$$

Sustituyendo la función de aproximación de la ecuación (3.31), $\tilde{\mathbf{A}}_Z$, en la ecuación de difusión no lineal, resulta:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \tilde{\mathbf{A}}_Z \right) = -\sigma \frac{\mathbf{U}_Z}{l} + \sigma \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}_Z}{\partial t} \quad (3.33)$$

Aplicando residuos ponderados para **un elemento**, siendo W_i un vector peso, tal que $W_i = \mathbf{N}_i = N_i \mathbf{k}$, se tiene:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_i R \cdot d\Omega = 0 \quad (3.34)$$

Siendo R igual a:

$$R = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \tilde{\mathbf{A}}_Z \right) + \sigma \frac{\mathbf{U}_Z}{l} - \sigma \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}_Z}{\partial t}$$

Sustituyendo R en la ecuación (3.34), se obtiene:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_i \left[\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \tilde{\mathbf{A}}_Z \right) + \sigma \frac{\mathbf{U}_Z}{l} - \sigma \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}_Z}{\partial t} \right] \cdot d\Omega = 0$$

Por otro lado la función de aproximación se define como $\tilde{\mathbf{A}}_Z = \sum_{j=1}^{n=3} N_j \cdot \tilde{\mathbf{A}}_j(t)$, sustituyendo resulta en:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_i \left[\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \left(\sum_{j=1}^{n=3} [N_j \cdot \tilde{\mathbf{A}}_j] \right) \right) + \sigma \frac{\mathbf{U}_Z}{l} - \sigma \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^{n=3} [N_j \cdot \tilde{\mathbf{A}}_j] \right)}{\partial t} \right] \cdot d\Omega = 0$$

Debido a que $\tilde{\mathbf{A}}_j(t)$, cambia respecto al tiempo no respecto a la posición, se considera como constante para el primer término y variable para el último (derivada parcial), por otro lado para este último término N_j no depende del tiempo, de esta manera se tiene :

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_i \left\{ \sum_{j=1}^{n=3} \left[\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla (N_j \cdot \tilde{\mathbf{A}}_j) \right) \right] + \sigma \frac{\mathbf{Uz}}{l} - \sigma \left(\sum_{j=1}^{n=3} \left[\frac{\partial (N_j \cdot \tilde{\mathbf{A}}_j)}{\partial t} \right] \right) \right\} \cdot d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_i \left\{ \sum_{j=1}^{n=3} \left[\tilde{\mathbf{A}}_j \left(\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla N_j \right) \right) \right] + \sigma \frac{\mathbf{Uz}}{l} - \sigma \left(\sum_{j=1}^{n=3} \left[N_j \frac{\partial (\tilde{\mathbf{A}}_j)}{\partial t} \right] \right) \right\} \cdot d\Omega = 0$$

Para simplificar la notación se considera que $f_j = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla N_j \right)$, tal que:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_i \left\{ \sum_{j=1}^{n=3} \left[\tilde{\mathbf{A}}_j f_j \right] + \sigma \frac{\mathbf{Uz}}{l} - \sigma \left(\sum_{j=1}^{n=3} \left[N_j \frac{\partial (\tilde{\mathbf{A}}_j)}{\partial t} \right] \right) \right\} \cdot d\Omega = 0$$

Por otra parte, debido a que N_i no depende de j , se puede colocar dentro del sumatorio:

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{j=1}^{n=3} \left[\tilde{\mathbf{A}}_j \mathbf{N}_i f_j \right] + \sigma \frac{\mathbf{Uz}}{l} \mathbf{N}_i - \sigma \left(\sum_{j=1}^{n=3} \left[\mathbf{N}_i N_j \frac{\partial (\tilde{\mathbf{A}}_j)}{\partial t} \right] \right) \right\} \cdot d\Omega = 0$$

Aplicando la integral a cada término de la ecuación, se tiene:

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{n=3} \left[\tilde{\mathbf{A}}_j \mathbf{N}_i f_j \right] \right) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \left(\sigma \frac{\mathbf{Uz}}{l} \mathbf{N}_i \right) \cdot d\Omega - \int_{\Omega} \sigma \left(\sum_{j=1}^{n=3} \left[\mathbf{N}_i N_j \frac{\partial (\tilde{\mathbf{A}}_j)}{\partial t} \right] \right) \cdot d\Omega = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n=3} \left[\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{A}}_j \mathbf{N}_i f_j \cdot d\Omega \right] + \sigma \frac{\mathbf{Uz}}{l} \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot d\Omega \right) - \sigma \sum_{j=1}^{n=3} \left[\int_{\Omega} \mathbf{N}_i N_j \frac{\partial (\tilde{\mathbf{A}}_j)}{\partial t} \cdot d\Omega \right] = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n=3} \left[\left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_i f_j \cdot d\Omega \right) \tilde{\mathbf{A}}_j \right] + \sigma \frac{\mathbf{Uz}}{l} \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot d\Omega \right) - \sigma \sum_{j=1}^{n=3} \left[\left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_i N_j \cdot d\Omega \right) \frac{\partial (\tilde{\mathbf{A}}_j)}{\partial t} \right] = 0$$

Para simplificar la notación se considera que:

$$\mathbf{S}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i f_j \cdot d\Omega$$

$$\mathbf{Q}_i = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot d\Omega$$

$$\mathbf{T}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i N_j \cdot d\Omega$$

Observar que el termino $\mathbf{N}_i f_j$, de la integral \mathbf{S}_{ij} , se puede reescribir usando una identidad vectorial, tal que:

$$\mathbf{N}_i f_j = \mathbf{N}_i \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla N_j \right) = \nabla \cdot \left(\mathbf{N}_i \frac{1}{\mu} \nabla N_j \right) - \frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{N}_i \cdot \nabla N_j \quad (3.35)$$

Sustituyendo la ecuación (3.35) en la integral \mathbf{S}_{ij} se obtiene:

$$\mathbf{S}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i f_j \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \left(\nabla \cdot \left(\mathbf{N}_i \frac{1}{\mu} \nabla N_j \right) - \frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{N}_i \cdot \nabla N_j \right) \cdot d\Omega$$

$$\mathbf{S}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i f_j \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\mathbf{N}_i \frac{1}{\mu} \nabla N_j \right) \cdot d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{N}_i \cdot \nabla N_j \cdot d\Omega$$

Donde la integral, $\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{N}_i \frac{1}{\mu} \nabla N_j) \cdot d\Omega$, se puede simplificar al aplicar el Teorema de la divergencia, tal que:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{N}_i \frac{1}{\mu} \nabla N_j) \cdot d\Omega = \oint_{\Gamma} \mathbf{N}_i \frac{1}{\mu} \nabla N_j \cdot d\Gamma$$

Con esto la integral \mathbf{S}_{ij} resulta en la siguiente ecuación:

$$\mathbf{S}_{ij} = \oint_{\Gamma} \mathbf{N}_i \frac{1}{\mu} \nabla N_j \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{N}_i \cdot \nabla N_j \cdot d\Omega \quad (3.36)$$

Si se consideran las condiciones de frontera de Dirichlet, en donde los valores nodales en la frontera son conocidos, por simplicidad asignados como cero, lo que significa que el campo magnético no cruza esta frontera, por lo tanto, los valores nodales asociados a las funciones de forma sobre la frontera valen cero, de esta manera la integral de línea vale cero en la frontera Γ . Por lo que se puede reescribir la ecuación (3.36), como:

$$\mathbf{S}_{ij} = - \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{N}_i \cdot \nabla N_j \cdot d\Omega \quad (3.37)$$

De esta manera se tiene la ecuación de residuos ponderados para un elemento finito con 3 nodos, tal que:

$$\sum_{j=1}^{n=3} [\mathbf{S}_{ij} \tilde{\mathbf{A}}_j] + \sigma \sum_{j=1}^{n=3} \left[\mathbf{T}_{ij} \frac{\partial(\tilde{\mathbf{A}}_j)}{\partial t} \right] = \sum_{j=1}^{n=3} \left[\sigma \frac{\mathbf{U}_z}{l} \mathbf{Q}_i \right] \quad (3.38)$$

Reescribiendo la ecuación (3.38) en forma matricial para un elemento:

$$[\mathbf{S}(\mathbf{t})]_e [\mathbf{A}(\mathbf{t})]_e + \sigma [\mathbf{T}]_e \frac{\partial([\mathbf{A}(\mathbf{t})]_e)}{\partial t} = \sigma \frac{\mathbf{U}_z}{l} [\mathbf{Q}]_e \quad (3.39)$$

Donde $[S(t)]_e$, es una matriz que cambia en cada instante de tiempo t .

Generalizando la ecuación (3.39) para N elementos de la malla del sistema, resulta en:

$$\sum_{e=1}^N ([\mathbf{S}(\mathbf{t})]_e [\mathbf{A}(\mathbf{t})]_e + \sigma [\mathbf{T}]_e \frac{\partial([\mathbf{A}(\mathbf{t})]_e)}{\partial t}) = \sum_{e=1}^N (\sigma \frac{\mathbf{U}_z}{l} [\mathbf{Q}]_e) \quad (3.40)$$

$$[\mathbf{S}][\mathbf{A}(\mathbf{t})] + \sigma [\mathbf{T}] \frac{\partial([\mathbf{A}(\mathbf{t})])}{\partial t} = \sigma \frac{\mathbf{U}_z}{l} [\mathbf{Q}] \quad (3.41)$$

3.7.1. Ecuación de difusión no lineal en su forma matricial para los diferentes dominios

La ecuación (3.41) ayuda a establecer las ecuaciones matriciales para los diferentes dominios.

Para las barras del rotor

$$[\mathbf{S}_m][\mathbf{A}(t)] + \sigma[\mathbf{T}_m] \frac{\partial([\mathbf{A}(t)])}{\partial t} = \sigma \frac{\mathbf{Uz}_m}{l} [\mathbf{Q}_m] \quad (3.42)$$

Con \mathbf{Uz}_m como la caída de tensión en cada barra del rotor, ecuación (3.9).

Para los devanados del estator

$$[\mathbf{S}_f][\mathbf{A}(t)] + \sigma[\mathbf{T}_f] \frac{\partial([\mathbf{A}(t)])}{\partial t} = \sigma \frac{\mathbf{Uz}_f}{l} [\mathbf{Q}_f] \quad (3.43)$$

Con \mathbf{Uz}_f como la respectiva fuente de alimentación para cada fase del motor, es decir, para las ecuaciones (3.22a), (3.22b) y (3.22c). También podemos escribir la ecuación(3.43) en términos de la corriente, tal que:

$$[\mathbf{S}_f][\mathbf{A}(t)] + \sigma[\mathbf{T}_f] \frac{\partial([\mathbf{A}(t)])}{\partial t} = \frac{N}{S} \mathbf{Iz}_f [\mathbf{Q}_f] \quad (3.44)$$

Para los núcleos magnéticos y zonas no conductoras

$$[\mathbf{S}_{nc}][\mathbf{A}(t)] = 0 \quad (3.45)$$

Para todo el dominio

Uniendo las ecuaciones (3.42), (3.44), (3.45) para todo el dominio Ω , se tiene:

$$[\mathbf{S}][\mathbf{A}(t)] + \sigma[\mathbf{T}] \frac{\partial([\mathbf{A}(t)])}{\partial t} - \frac{N}{S} \mathbf{Iz}_f [\mathbf{Q}_f] - \sigma \frac{\mathbf{Uz}_m}{l} [\mathbf{Q}_m] = 0 \quad (3.46)$$

Capítulo 4

Modelo computacional en Altair Flux®

- SimulinkTM

4.0.1. Introducción

En la Figura 4.1 se presenta el motor de inducción a modelar y controlar en este trabajo. Es un motor de inducción trifásico de doble jaula de ardilla, conectado en estrella en el devanado del estator, cuenta con 1 par de polos, una potencia de 10 HP, un voltaje de 380 V_{Ln} y una frecuencia de 50 Hz.

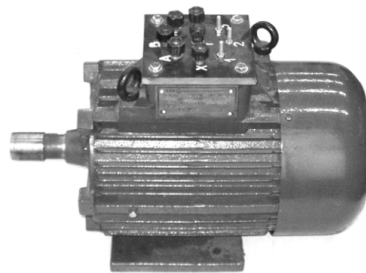


Figura 4.1: Motor de inducción a modelar[Altair Flux, 2018]

Es importante establecer ciertas hipótesis que permitan caracterizar correctamente el modelo:

1. Se utiliza un modelo en dos dimensiones, en el cual se pueden implementar los efectos en tres dimensiones incorporando los valores resistivos e inductivos en las ecuaciones eléctricas.
2. Se desprecia la corriente de desplazamiento en baja frecuencia.
3. Los materiales magnéticos son no lineales e isotrópicos.

4. Los medios dieléctricos y conductores son lineales (Permitividad $\epsilon = cte$ y Resistividad $\rho = cte$).
5. Periodicidad
6. Condiciones de frontera tipo Dirichlet.

4.0.2. Implementación del modelo computacional

Para realizar la implementación del modelo computacional se utilizó el software comercial de Altair Flux®2D v2021, así como una guía punto a punto que se ofrece en la documentación del programa [CEDRAT, 2006] [Altair Flux Overlay, 2018]. A continuación se presentan las características más relevantes para obtener el modelo.

Parámetros geométricos

En la Figura 4.2 se presenta la nomenclatura utilizada en las diferentes longitudes para la construcción geométrica del modelo, y en la Tabla 4.1 se presentan sus valores así como sus respectivas descripciones.

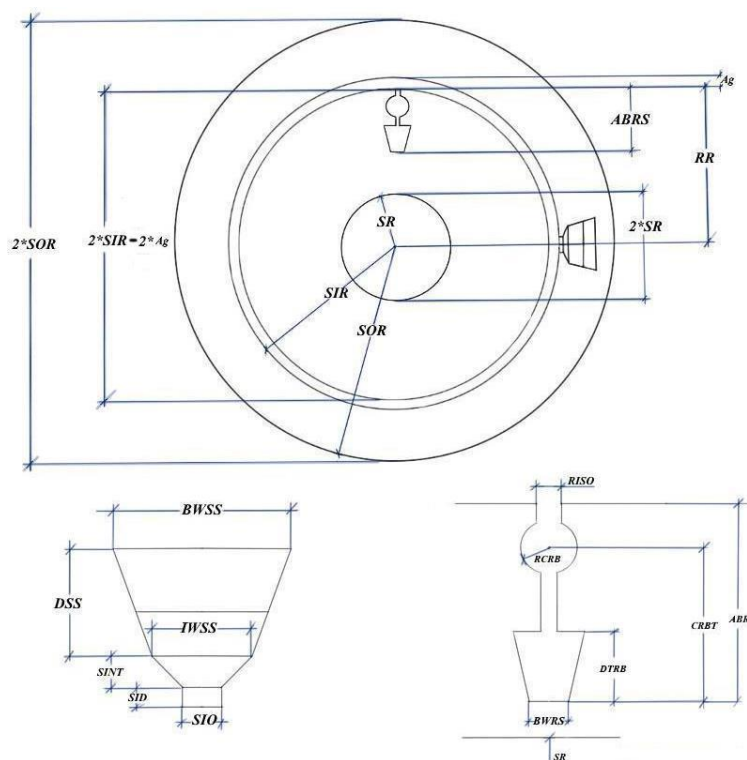


Figura 4.2: Geometría del modelo computacional del motor de inducción

Tabla 4.1: Parámetros geométricos del motor[CEDRAT, 2006].

<i>Parámetro</i>	<i>Longitud (mm)</i>	<i>Descripción</i>
SR	20	Radio del eje del motor.
RR	59.5	Radio del rotor
BWRS	5.9	Ancho inferior de la ranura del rotor
OWRS	9.6	Ancho exterior de la ranura del rotor
DTRB	11.4	Profundidad de la barra trapezoidal del rotor
RISO	1	Apertura del istmo del rotor
RCRB	2.8	Radio de la parte circular de la barra del rotor
ABRS	21.5	Distancia desde el aire al trapecio de la barra
CRBT	17.8	Distancia desde el centro circular al trapecio de la barra
SIR	60	Radio interior del rotor
SOR	106	Radio exterior del rotor
SIO	2.5	Apertura del itsmo de la ranura del estator
SID	0.75	Profundidad del itsmo de la ranura del estator
SINT	0.75	Espesor del aislamiento de la ranura del estator
IWSS	9.77	Ancho interior de la ranura del estator
BWSS	13.5	Ancho exterior de la ranura del estator
DSS	14.3	Profundidad de la ranura del estator

Características nominales y valores constantes del motor de inducción

En las Tabla 4.2 se muestran los valores constantes a los que trabaja la máquina, estos valores ayudarán a parametrizar al motor de inducción en su modelo computacional.

Tabla 4.2: Valores constantes del motor de inducción[Altair Flux Overlay, 2018].

<i>Notación</i>	<i>Valor</i>	<i>Descripción</i>
V_{an}, V_{bn}, V_{cn}	380 V	Voltaje nominal de fase a neutro de las fases <i>a, b y c</i> .
τ_L	24.72 N m	Par nominal de carga
f	50 Hz	Frecuencia nominal
P	2	Número de polos
J	0.034 Kg m ²	Momento de inercia del rotor
N_f	208	Número de vueltas por fase
N_b	10	Número de barras del rotor
R_f	1.54 Ω	Resistencia de los devanados del estator@155 ° C
r_l	1.39x10 ⁻⁶ Ω	Resistencia Inter barra del rotor@155 ° C
L_l	1.06x10 ⁻⁸ H	Inductancia Inter barra del rotor
L_f	4.04 mH	Inductancia de los devanados del estator

Por otro lado, en la Tabla 4.3 se presentan las características a carga nominal en estado estable para un par de carga nominal de 24.72 Nm, que ayudarán a validar el comportamiento del modelo computacional.

Tabla 4.3: Características a carga nominal de 24.72 N· m en estado estable [Altair Flux, 2018].

Notación	Valor	Descripción
P_n	7.5 kW	Potencia nominal
I_n	8.48 A	Corriente nominal
n_r	2904 rpm	Velocidad nominal del motor
s	0.032	Deslizamiento

Medio material

-Barras del rotor

Las barras de la jaula de ardilla del rotor son de Aluminio, con una propiedad eléctrica definida por una resistividad isotrópica $\rho_{@155^{\circ}C} = 0,048 \times 10^{-6} \Omega m$, siendo los 155 ° C la temperatura nominal del motor. Por otro lado, su propiedad magnética esta definida por una permeabilidad relativa lineal $\mu_r = 1$, Figura 4.3.

-Núcleos magnéticos del rotor y estator

Los núcleos magnéticos del rotor y estator son de Acero, con una propiedad magnética definida por una curva no lineal con una saturación de 2.2 T, Figura 4.3.

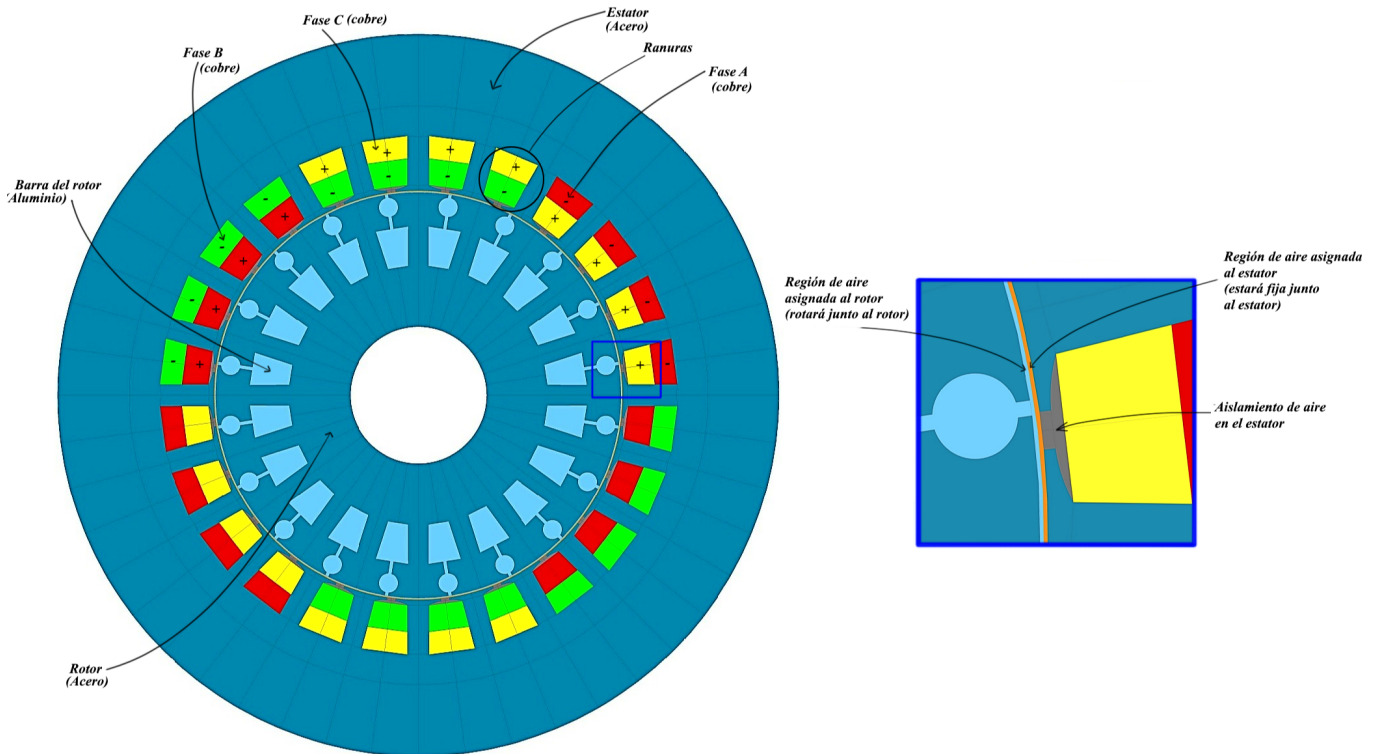


Figura 4.3: Medios materiales del modelo computacional del motor de inducción

Mallado

Se realizó un mallado automático de alta calidad del 93.58 % de elementos triangulares, obteniendo así un total de 46,605 nodos. Por otra parte, se creó un ensamble en el entrehierro para las mallas de aire del rotor y estator, con esto se consigue que se mantenga el dominio con su medio material, además de evitar deformaciones por desplazamiento, ya que al realizar la simulación del modelo, el dominio del rotor comenzará a girar y si la región de aire del entrehierro entre rotor y estator permanecen unidas, se obtendrá un desplazamiento de malla, lo que generará un modelo y cálculo incorrecto de los valores del potencial magnético. En la Figura 4.4 y 4.5 se muestra el mallado de alta calidad.

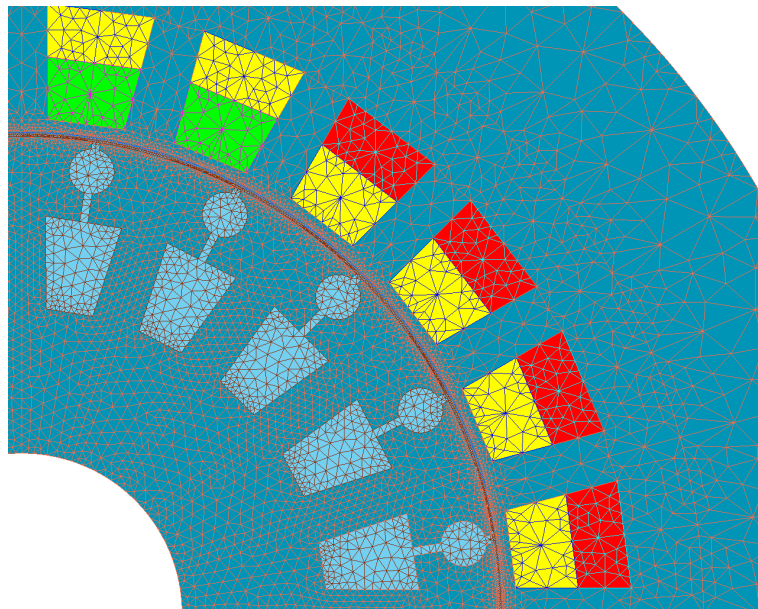


Figura 4.4: Mallado triangular para el motor de inducción

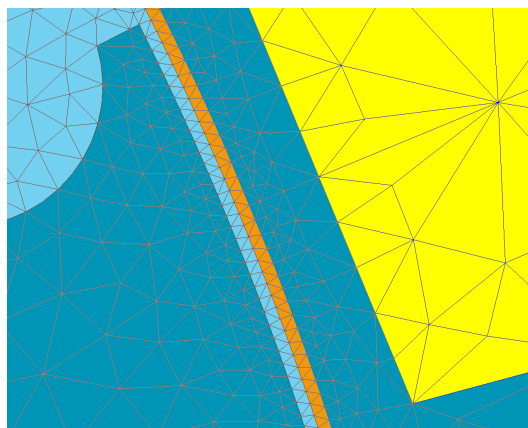


Figura 4.5: Mallado triangular de ensamble en la región de aire del entrehierro

4.0.3. Acoplamiento del modelo en Altair Flux® a Simulink™

Es necesario crear un acoplamiento del modelo computacional entre los programas Altair Flux ®2D y Matlab®/Simulink™, generando un bloque de pruebas (modelo de campo) en la instancia de trabajo de Simulink™, ya que de esta forma se podrán manipular las entradas y salidas del sistema, lo que permitirá implementar el control de velocidad. Para ello es conveniente realizar la siguiente metodología:

-En Altair Flux ®2D

1. Abrir el modelo del motor de inducción creado previamente .
2. Colocar la aplicación del programa como transitoria en 2D.
3. Definir los parámetros que serán la entrada al bloque como cero y las salidas mediante su correspondiente parámetro físico que genera el programa.
4. Generar el acoplamiento para Matlab®/Simulink™, colocando las entradas- salidas que tendrá el bloque y nombrar adecuadamente al proyecto.
5. Abrir Matlab® desde el menú del Altair Flux.

-En Matlab®/Simulink™

6. Ya abierto Matlab®, ahora se procede a abrir Simulink™ y se coloca el bloque Sfunction de la librería de Flux.
7. Se guarda el archivo .slx en la misma carpeta donde se creó el modelo de Altair Flux.
8. Ya en Simulink, se abre el bloque de flux, y se coloca el nombre del archivo que se le dio al momento de realizar el acoplamiento, estos archivos tienen la extensión .F2MS .

Con todos estos pasos, el modelo acoplado en el ambiente de simulación de Simulink ya estaría listo para funcionar, como se muestra en la Figura 4.6.

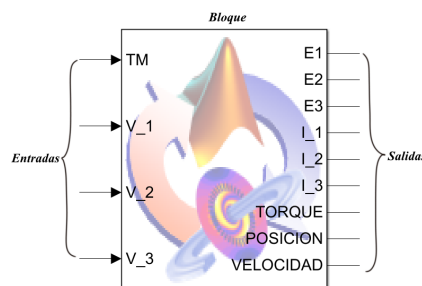


Figura 4.6: Bloque de acoplamiento entre Altair Flux y Simulink

Capítulo 5

Control Escalar

5.1. Introducción

El control escalar es una estrategia de control de velocidad basado en el comportamiento del motor de inducción en estado estable, por lo que sus expresiones matemáticas se basan en este hecho, ya que en dichas condiciones, el voltaje inducido en el rotor es aproximadamente igual al voltaje de alimentación en las terminales del estator, esto se cumple siempre y cuando el flujo magnético en el entrehierro sea aproximadamente constante, para ello es necesario mantener la relación voltaje y frecuencia de forma proporcional. Además de que con esta técnica de control se ajusta únicamente la magnitud y frecuencia de los vectores espaciales presentes en el motor de inducción, sin preocuparse en régimen permanente ni en su etapa transitoria de la posición espacial (fase) de las cantidades vectoriales. El control escalar en lazo abierto es adecuado en aplicaciones en donde no se requiera alta precisión ni rigurosidad en el control de par-velocidad, como lo son: bombas de agua, tornos, compresoras y ventiladores. Una de las principales ventajas de controlar la velocidad por medio de la estrategia del control escalar es que es muy económico y relativamente simple de implementar, pero por otro lado, cuenta con cierta inestabilidad en el acoplamiento flujo y par, por ejemplo, en bajas velocidades (<10 Hz) la caída de tensión en el estator afecta significativamente la corriente que establece el flujo magnético en el entrehierro, esto genera un deficiente control en el torque lo que limita el control escalar, por lo que comúnmente se utiliza una compensación de voltaje.

De manera general, si se necesita mejorar el rendimiento en la dinámica y el control par-velocidad, se recomienda en primera instancia utilizar el control escalar con una retroalimentación en lazo cerrado por compensación del deslizamiento, ya que mejora significativamente el desempeño del controlador, pero si esto no es suficiente, se recomienda utilizar otras estrategias de control como lo es el control de campo orientado o control vectorial [Roger Andrade et al, 2021][V. M. Jimenez-Mondragon, 2019].

5.2. Proporcionalidad entre el Par, Voltaje , frecuencia y flujo magnético

Para establecer la relación que existe entre el par (τ), voltaje (V) y frecuencia(f) con el flujo del entrehierro (ϕ) del motor de inducción, es necesario considerar el circuito equivalente simplificado del motor de inducción en régimen permanente de la Figura 2.10 [V. M. Jimenez-Mondragon et al, 2019].

5.2.1. Relación $V - f\phi$

La relación del voltaje, frecuencia y flujo magnético se basa en considerar que las caídas de tensión en el estator son despreciables, es decir $R_1 = 0$ ya que en estado estable, el voltaje inducido en el rotor y el voltaje en aplicado en las terminales del estator tienen aproximadamente el mismo valor, de esta manera la ecuación (2.8), se puede reescribir como:

$$V_\phi \cong E_1 = K f \phi \quad (5.1)$$

En la ecuación (5.1) se aprecia como V es directamente proporcional a $f\phi$, obteniendo así las relaciones siguientes :

$$E_1 \propto V_\phi \quad (5.2)$$

$$V_\phi \propto f \phi \quad (5.3)$$

5.2.2. Relación $\frac{V}{f} - \phi$

Además en la ecuación (5.1) se puede observar la relación $\frac{V}{f}$, que intentará establecer un flujo aproximadamente constante en el entrehierro, lo que genera la relación:

$$\frac{V_\phi}{f} \propto \phi \quad (5.4)$$

5.2.3. Relación $\tau - \frac{V}{f}$

Por otra parte, para la relación par y flujo magnético, la caída de tensión en R_1 despreciable en el estator ocasiona que la ecuación (2.13), además considerando que $X_M \gg X_1$, se puede reescribir como:

$$V_{TH} = V_\phi \frac{X_M}{\sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_M)^2}} \cong V_\phi \quad (5.5)$$

Sustituyendo la ecuación (5.5) en la ecuación (2.15), se tiene:

$$T_d = 3 \cdot \frac{R_2}{w_s \cdot s} \cdot \frac{V_\phi^2}{|\hat{Z}_1|^2} = 3 \cdot \frac{R_2}{2\pi f \cdot s} \cdot \frac{V_\phi^2}{|\hat{Z}_1|^2} = C \cdot \frac{V_\phi^2}{f} \quad (5.6)$$

En estado estable el deslizamiento s se puede considerar como constante, por lo que $C = 3 \frac{R_2}{2\pi f \cdot s \cdot |\hat{Z}_1|^2} = cte$. En la ecuación (5.6) se observa la proporcionalidad que existe entre T_d y $\frac{V}{f}$, con esto se obtiene la siguiente relación:

$$T_d \propto \frac{V_\phi}{f} \quad (5.7)$$

5.2.4. Relación $\tau - \phi$

De la ecuación (5.4) y (5.7) se puede concluir que el par T_d tiene una relación directamente proporcional al flujo magnético ϕ , tal que:

$$T_d \propto \phi \quad (5.8)$$

5.3. Curvar par - velocidad

Para apreciar el comportamiento del par electromagnético ante las relaciones antes mostradas, se hará uso de los parámetros del circuito equivalente del motor de inducción de 10HP en la ecuación (2.15), los cuales se muestran en la Tabla 5.1 [Altair Flux Overlay, 2018].

Tabla 5.1: Parámetros del motor de inducción [Altair Flux Overlay, 2018]

$R_1[\Omega]$	$R_2[\Omega]$	$L_1[mH]$	$L_2[\Omega]$	$R_m[k\Omega]$	$L_m[mH]$
1.54	2.836	10.31	24.92m	4.598	326

Para esto se continúa despreciando el valor de R_1 . En la Figura 5.1 se muestra el gráfico para una variación de frecuencia desde un valor de 5Hz hasta 100 Hz, respecto a la ecuación (5.7), donde en los primeros 50 Hz se mantuvo de forma proporcional la relación voltaje - frecuencia, y en los siguientes 50 Hz se mantuvo constante el voltaje de 380 V_{Ln} (para evitar exceder la potencia nominal) ya que se aumentó la frecuencia por encima de sus valores nominales. Además en la Figura 5.1 se aprecia el decaimiento del par máximo conforme la frecuencia va en aumento, debido a que la frecuencia es inversamente proporcional al par electromagnético, ecuación (5.7), o lo que es lo mismo se debilita el flujo magnético y ocasiona que el par decaiga , ecuación (5.7) y (5.8).

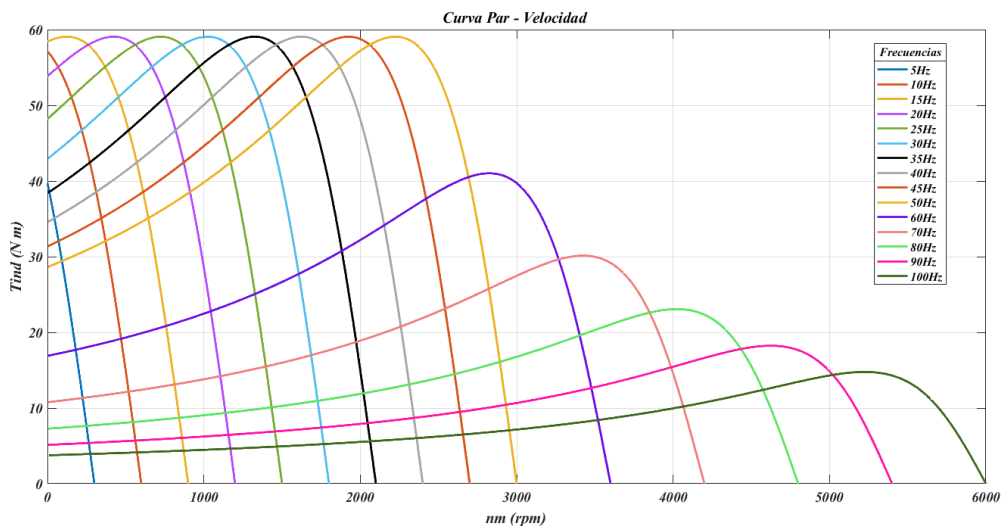


Figura 5.1: Bloque de acoplamiento entre Altair Flux y Simulink

Posteriormente se mantuvo constante la frecuencia nominal del motor, y se varió el voltaje hasta su valor nominal, de la ecuación (5.7) se observa que el voltaje es directamente proporcional al par, por lo que si el voltaje aumenta también lo hará el par, tal como se muestra en la Figura 5.2.

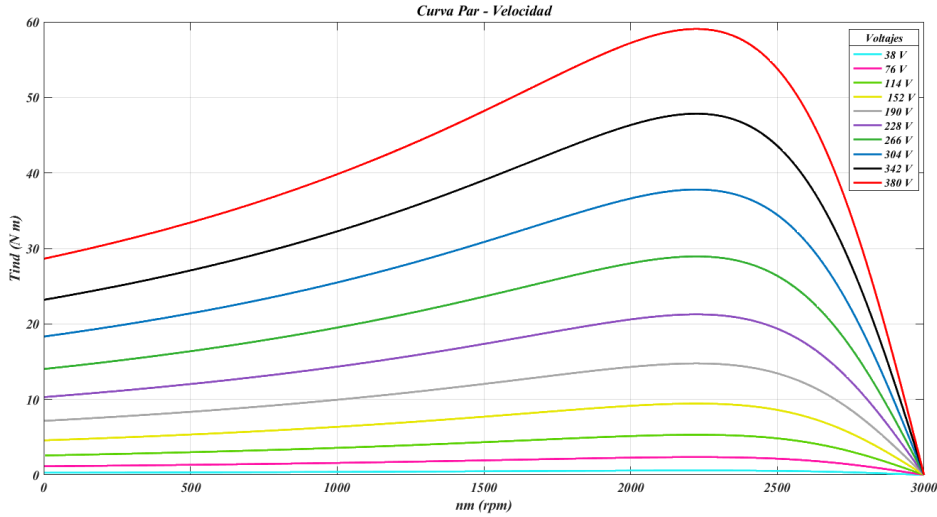


Figura 5.2: Bloque de acoplamiento entre Altair Flux y Simulink

Con esto se demuestra la importancia de mantener constante la relación voltaje-frecuencia, para que el par electromagnético se mantenga aproximadamente constante, como fue el caso de los primeros 50 Hz de la Figura 5.1.

Con estas condiciones se puede establecer la ecuación que caracteriza al control escalar. Dividiendo la ecuación (5.3) por la relación a valores nominales $V_R \propto \phi_R f_R$, se obtiene así la siguiente expresión:

$$\frac{V_\phi}{V_R} = \left(\frac{f}{f_R}\right) \cdot \left(\frac{\phi}{\phi_R}\right) \quad (5.9)$$

Para valores proporcionales de voltaje y frecuencia el flujo magnético es aproximadamente constante, por lo que se puede considerar que $\phi = \phi_R$, con esto se tiene:

$$\frac{V_\phi}{f} = \frac{V_R}{f_R} \quad (5.10)$$

Despejando V_ϕ , resulta en:

$$V_\phi = \left(\frac{V_R}{f_R}\right)f \quad (5.11)$$

Es importante considerar los límites de operación en el rango de valores de voltaje y frecuencia nominales, ya que para bajas frecuencias el voltaje aplicado V_ϕ será muy pequeño, siendo incapaz de superar la caída de tensión en el devanado del estator, lo que provocará grandes aumentos de corriente para intentar mantener el flujo magnético constante en el entrehierro y así establecer un par electromagnético constante. Al valor mínimo de frecuencia y voltaje capaz de realizar una correcta operación de control, se denotan como f_{min} y V_b , siendo este último conocido como la tensión de ruptura. De esta manera, se definen los límites de operación que permitirán la correcta operación del control escalar, tal que:

$$V_{control} = \begin{cases} V_b & f < f_{min} \\ \left(\frac{V_R}{f_R}\right) \cdot f_{control} & f_{min} \leq f < f_R \\ V_R & f \geq f_R \end{cases} \quad (5.12)$$

En este trabajo se considera que: $f_{min}=5$ Hz, $f_R=50$ Hz, $V_b=38 V_{Ln}$ y $V_R=380 V_{Ln}$.

Sustituyendo n_s de la ecuación (2.7a) en (2.7b), se tiene la $f_{control}$, tal que:

$$f_{control} = \frac{n_r}{1-s} \cdot \frac{P}{120} \quad (5.13)$$

De esta forma, para un rango de valores de velocidad deseada en el rotor de 290.4 a 2904 rpm, se obtiene la Tabla 5.2 que caracteriza al control escalar:

Tabla 5.2: Tabla V/f

n_s [rpm]	n_r [rpm]	$f_{control}$ [Hz]	$V_{control}$ [V]
300	290.4	5	38
600	580.8	10	276
900	871.2	15	114
1200	1161.6	20	152
1500	1452	25	190
1800	1742.4	30	228
2100	2032.8	35	266
2400	2323.2	40	304
2700	2613.6	45	342
3000	2904	50	380

Obteniendo así la curva V/f de la Figura 5.3

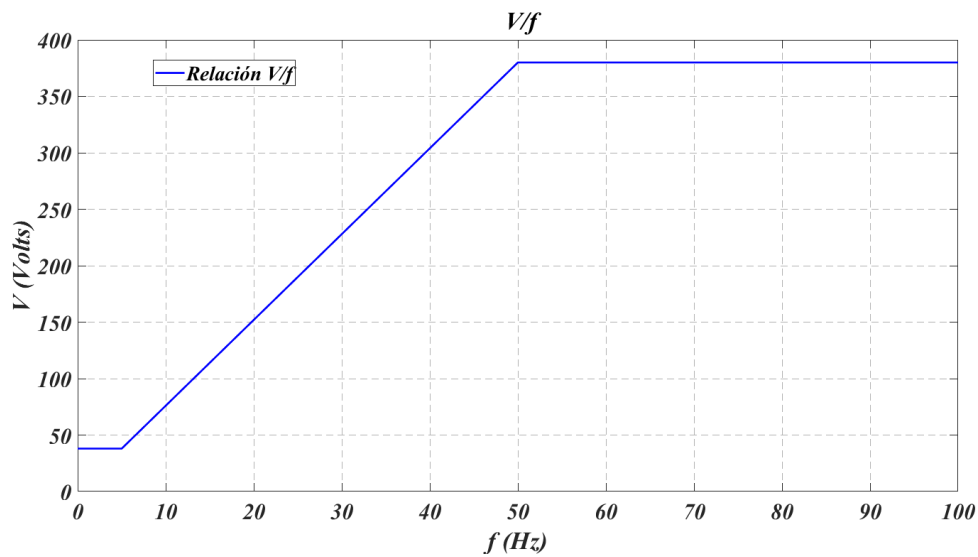


Figura 5.3: Gráfico V/f

5.4. Control Escalar a bloques en Matlab®-Simulink™

El programa de Matlab®/Simulink™, es una plataforma interactiva y visual que facilita la realización de proyectos de control gracias a su vasta librería a bloques. La implementación del control escalar de velocidad se obtiene haciendo uso de los bloques base de Simulink™ para realizar una tabla virtual de voltajes en función de la frecuencia, como se muestra en la Tabla 5.2 y Figura 5.3. El control escalar de velocidad en el ambiente de simulación de Simulink™ se muestra en la Figura 5.4.

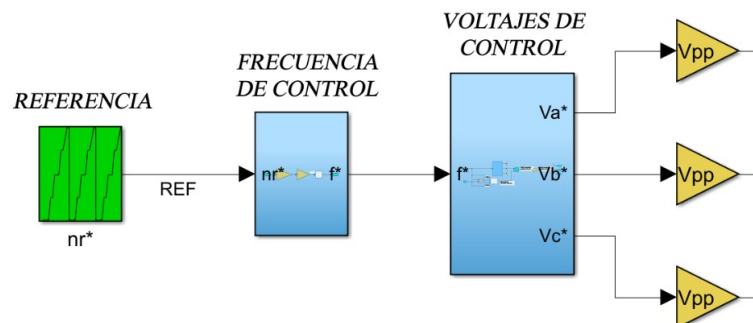


Figura 5.4: Control Escalar en Simulink™

5.4.1. Código de Matlab

```
1  %====PARAMETROS DE LA MAQUINA====
2
3  TL=24.72;%Par de carga
4  f=50;%Frecuencia
5  P=2;%Numero de polos
6  s=0.032;%Deslizamiento
7  Vpp=380*sqrt(2);%Amplitud
8
9  %====VELOCIDAD REFERENCIA====
10
11 SIM=1;%Se escoge la simulacion
12
13 if SIM=1
14 %SIMULACION 1 de 290.4 rpm a 1452 rpm:
15
16 nr=[290.4,290.4,580.8,580.8,871.2,871.2,1161.6,1161.6,1452,1452];
17 time=[0,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4,4.5,5];
18 else
19 %SIMULACION 2 de 1452 rpm a 2904 rpm:
20
21 nr=[1452,1452,1742.4,1742.4,2032.8,2032.8,2323.2,2323.2,...
22 2613.6,2613.6,2904,2904];
23 time=[0,0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4,4.5,5,5.5];
24
25 end
```

5.4.2. Velocidad de referencia

Para el bloque de velocidad de referencia de la Figura 5.4, tiene como parámetros el vector n_r y $time$ del código de Matlab para cada simulación.

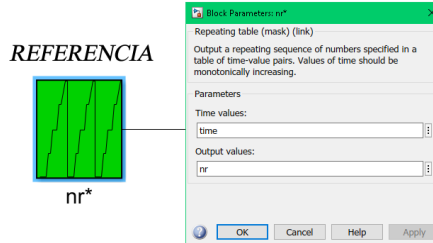


Figura 5.5: Velocidad de referencia n_r

5.4.3. Frecuencia de control

Para el bloque de frecuencia de control se necesita establecer la ecuación (5.13) por medio de los bloques base de simulink, tal que:

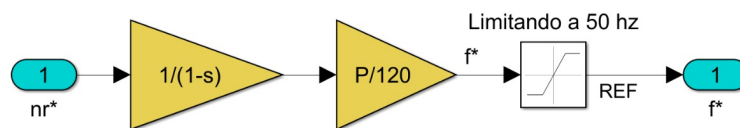


Figura 5.6: Frecuencia de control en simulink

5.4.4. Voltajes de control

Para el bloque de voltajes de control se programó con los bloques base de simulink la relación V/f para establecer el control escalar, que se muestra Tabla 5.2 y Figura 5.3.

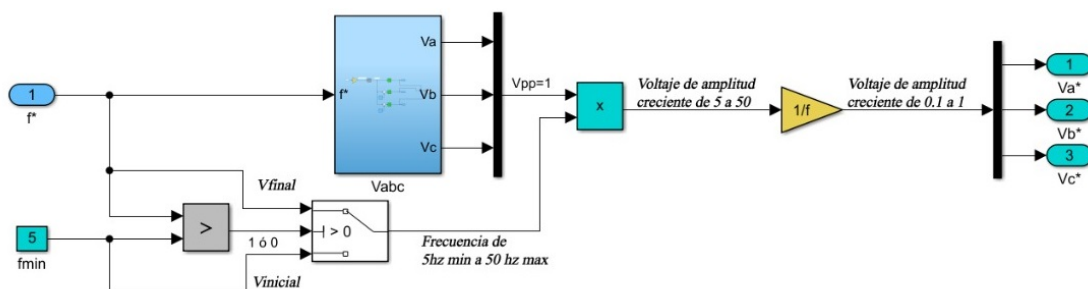


Figura 5.7: Tabla virtual V/f implementada en simulink

El bloque V_{abc} de la Figura 5.8 se utiliza para establecer los voltajes de control respecto a la frecuencia de control, lo que resulta en voltajes trifásicos de amplitud 1.

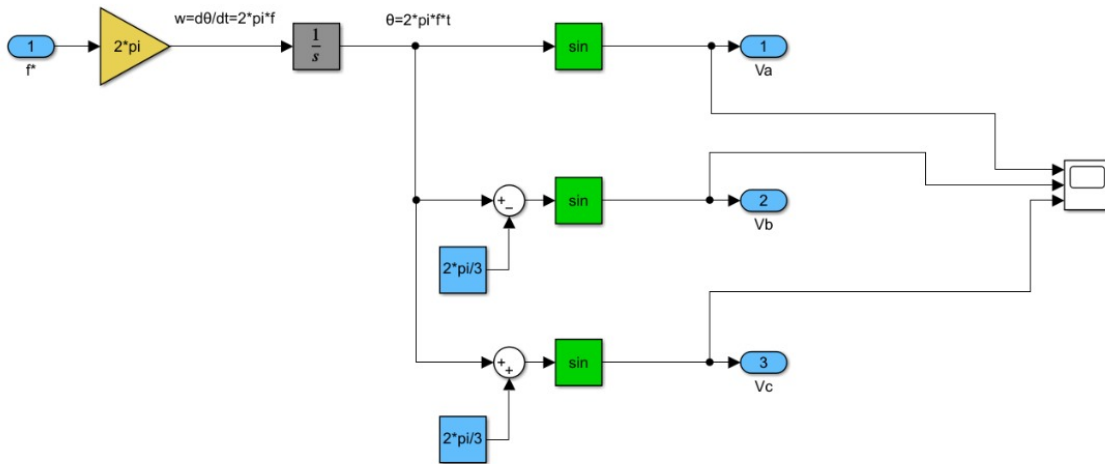


Figura 5.8: Bloque de Voltajes V_{abc} trifásicos de amplitud 1

Por otra parte de la Figura 5.7 se observa como la frecuencia varia desde 5 a 50 Hz, y para establecer una proporcionalidad con el voltaje, es necesario modificar la amplitud de los voltajes de control realizando el producto $V_{amp=1} \cdot f_{control}$, lo que permitirá obtener voltajes trifásicos crecientes con amplitud de 5 a 50, $V_{amp=5-50}$, para posteriormente ser divididos por la frecuencia nominal, lo que resulta en voltajes variantes con amplitud de 0.1 a 1, $V_{amp=0,1-1}$. Finalmente al aplicar las ganancias V_{pp} del código de Matlab, que se muestran en la Figura 5.4, se obtiene una variación de voltaje de 38 a 380 V_{Ln} , $V_{amp=38-380} = V_{control}$, es decir, se programó la ecuación (5.12).

Capítulo 6

Co-simulación, resultados y análisis del control escalar de velocidad

6.1. Introducción

La co-simulación es un método de simulación que trabaja con el solucionador de 2 o mas programas computacionales al mismo tiempo y en la misma instancia de trabajo, logrando compartir información mutua en cada paso de simulación, esto debido a que muchas veces un programa no es capaz de contener tantas funciones en sí mismo, como por ejemplo: modelado geométrico, medios materiales, control, circuitos eléctricos, etc. Es por esto que es necesario acoplar programas computacionales con sus propias herramientas y características, para que de esta manera trabajen en conjunto y en un mismo ambiente de simulación, en donde cada uno realice sus cálculos numéricos correspondientes y característicos a cada programa, para así converger en la solución del problema. Por ejemplo, Altair Flux® , no cuenta con las herramientas para modelar sistemas control como lo hace Matlab®/SimulinkTM, es por ello que la co-simulación permite solucionar los complejos desafíos que se presentan al momento de diseñar sistemas tan complejos en ingeniería, como en este trabajo, donde se requiere implementar el control escalar de velocidad a un motor de inducción trifásico de 10 HP modelado por el método de los elementos finitos .

6.2. Validación del modelo

Es necesario comprobar por medio de una co-simulación en la instancia de trabajo de *SimulinkTM*, que el modelo de prueba que se describió en el Capítulo 4, donde se realizó el acoplamiento entre Altair Flux® y *SimulinkTM*, obtenga los mismos resultados que al ser simulado en Altair Flux®, para ello se implementó el esquema de la Figura 6.1, con fuentes de alimentación como entrada a $380 V_{Ln}$.

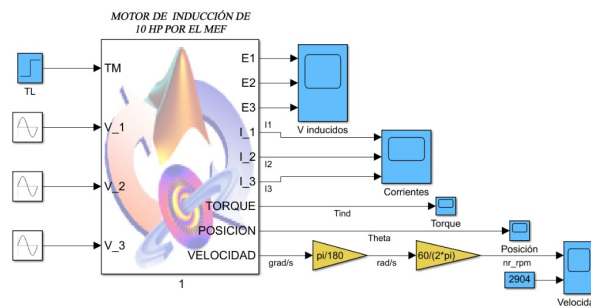


Figura 6.1: Co-simulación para validar de modelo de elementos finitos en *SimulinkTM* a voltajes nominales

En la Figura 6.1 se observan 5 almacenadores de datos (del inglés "scopes") a la salida del modelo de campo, donde por simplicidad únicamente se analizarán las corrientes para validar el modelo. Por otro lado, en las Figura 6.2 se muestran las corrientes en pasos de 0.1 s obtenidas en Matlab *SimulinkTM* y Altair Flux®, que son las corrientes en los devanados del estator al aplicarle un par escalón unitario a los 0.4s de 0 a 24.72 Nm al modelo computacional de Altair Flux® y al bloque de pruebas de *SimulinkTM*.

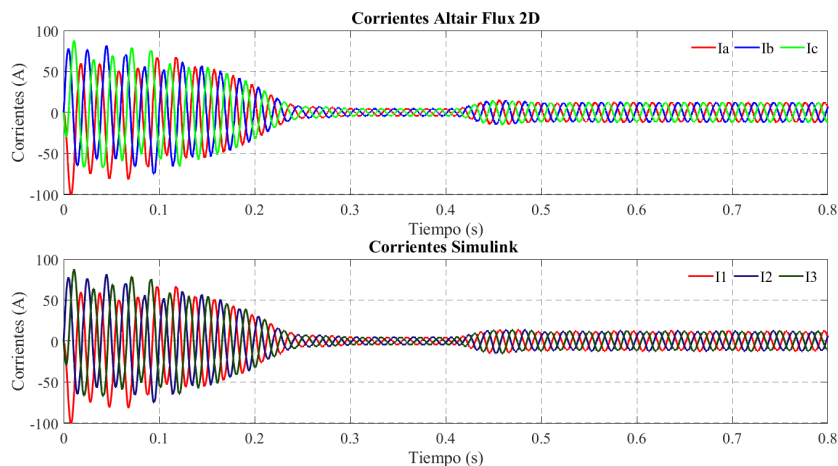


Figura 6.2: Corrientes en los devanados del motor en Altair Flux® y *SimulinkTM*

Se obtuvo una corriente eficaz de 8.30 A, desde el intervalo de 0.5 s a 0.8 s, dicha corriente es muy cercana a la corriente en estado estacionario, tal como se muestra en la Tabla 4.3, de esta manera y por simetría al realizar la comparación de la figura 6a respecto a 6b se valida el modelo computacional de la Figura 6.1. Este hecho permite tener la seguridad que el modelo funciona correctamente en el ambiente de simulación de *Simulink*TM para así implementar el control escalar al modelo de elementos finitos.

6.3. Implementación del control escalar de velocidad al modelo de elementos finitos

Para realizar el control de velocidad de un motor de inducción utilizando un modelo computacional, es común utilizar la estrategia del acoplamiento circuito-campo, que es un problema que se resuelve por medio de la co-simulación. El modelo de campos magnéticos se acopla con los circuitos eléctricos externos que ingresan señales de alimentación, en este caso el circuito eléctrico se modela por medio de los bloques base de *Simulink*TM, como se muestra en la Figura 6.3 [F.González et al, 2013]

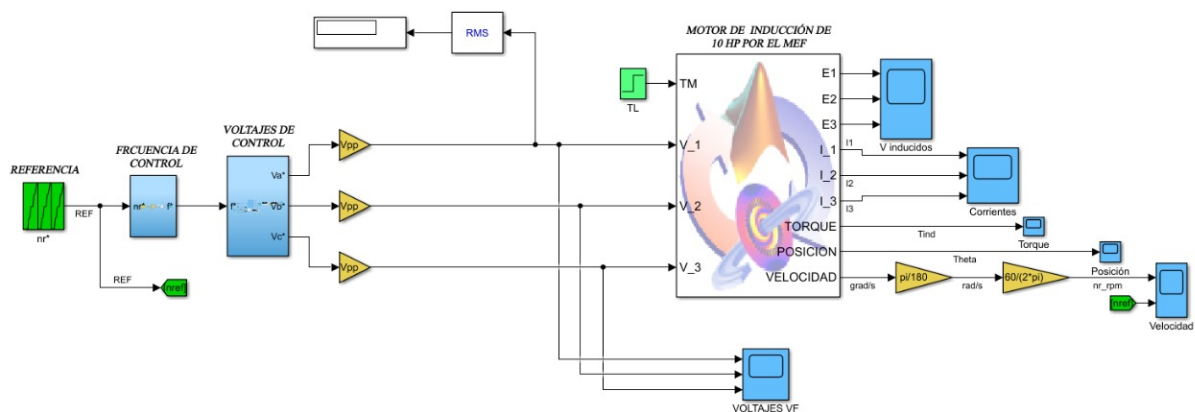


Figura 6.3: Modelo circuito-campo para realizar la Co-simulación

En la Figura 6.3 se muestra el control escalar aplicado al modelo computacional acoplado en *Simulink*TM, dónde además de almacenar las variables de entrada y salida, se aplica un par de carga nominal de 27.42 Nm a las 0.8 s. Es importante mencionar que se realizaron 2 co-simulaciones a 5 s, con un paso de 2×10^{-3} , obteniendo muy buenos resultados.

6.4. Resultados del control escalar al modelo de campo

6.4.1. Seguimiento de velocidad

En la Figura 6.4 se muestra el seguimiento de velocidad para el rango de velocidades de 290.4 a 1452 rpm, mientras que en la Figura 6.5 se muestra el seguimiento de velocidad para el rango de 1452 rpm a 2904 rpm.

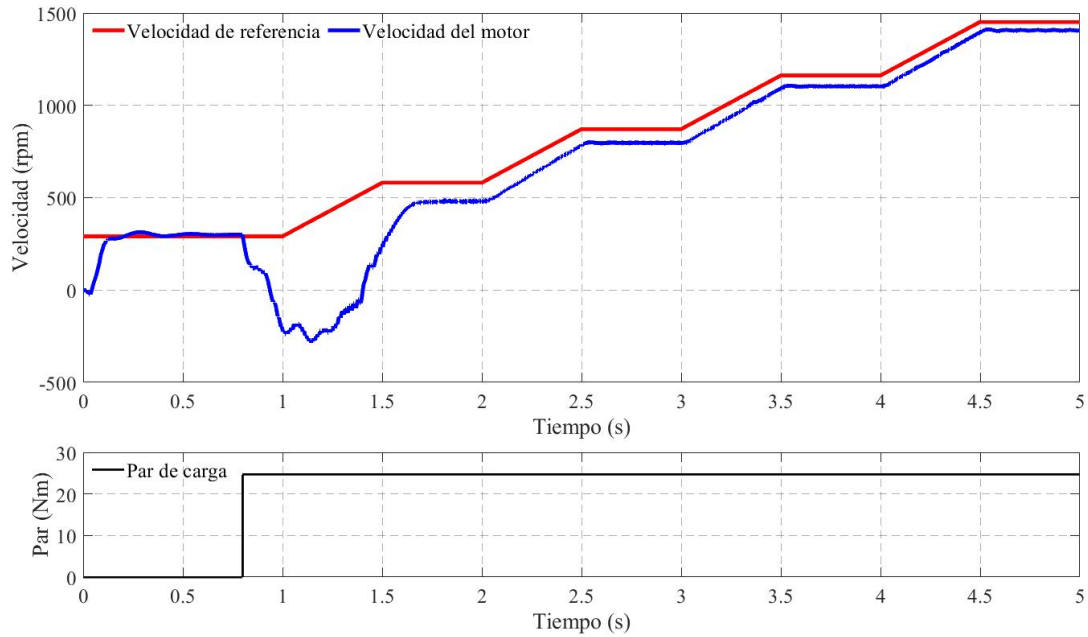


Figura 6.4: Seguimiento de velocidad desde 209.4 rpm a 1,452 rpm

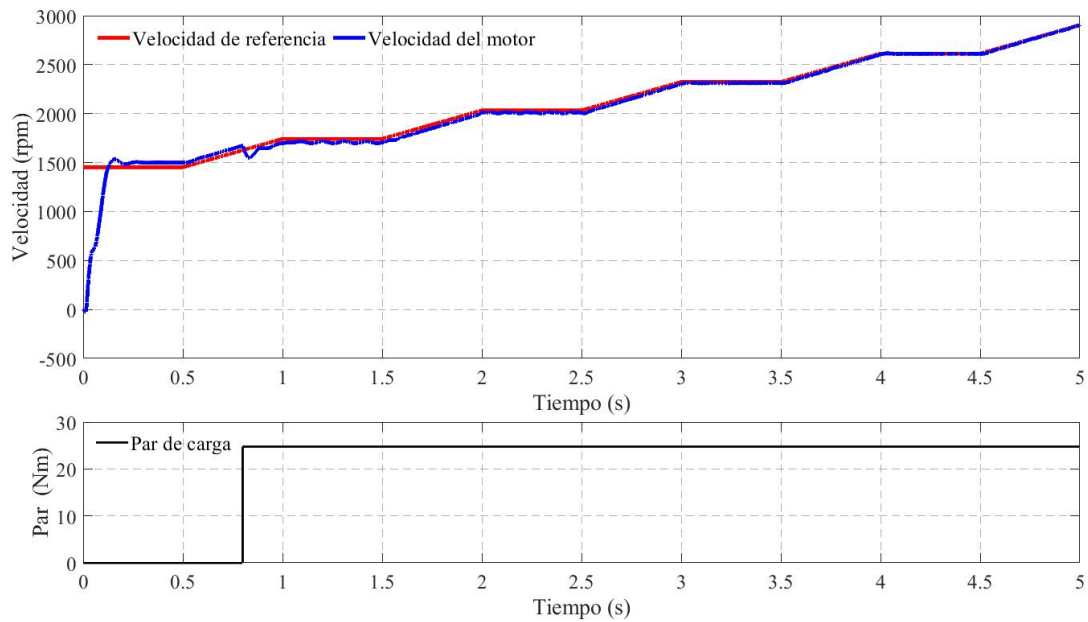


Figura 6.5: Seguimiento de velocidad desde 1,452 a 2904 rpm

6.4.2. Voltaje de control V/f

En la Figura 6.6 se muestra el voltaje de control para el rango de velocidades de 290.4 a 1452 rpm, mientras que en la Figura 6.7 se muestra el voltaje de control para el rango de 1452 rpm a 2904 rpm.

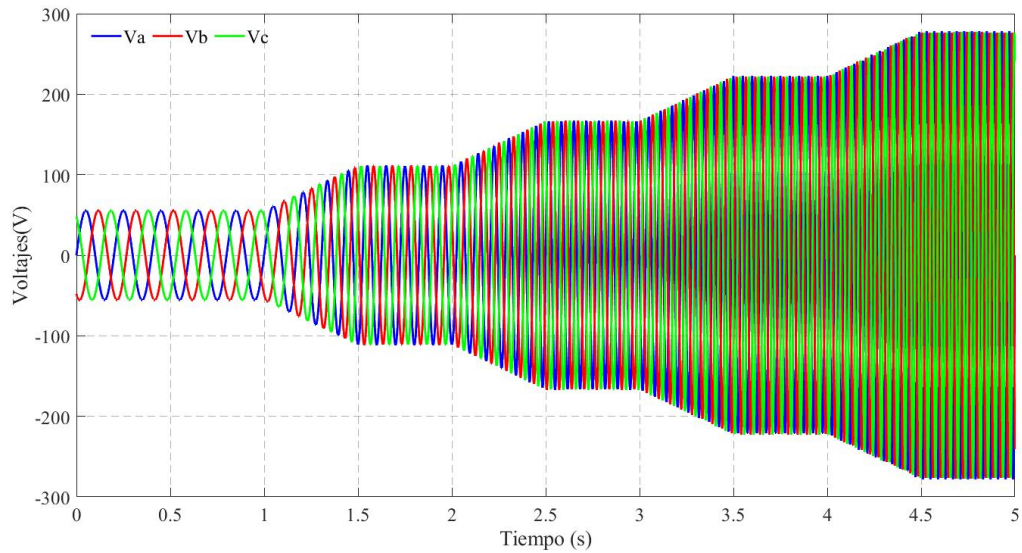


Figura 6.6: Voltaje de control aplicado al modelo de campo desde 209.4 rpm a 1,452 rpm

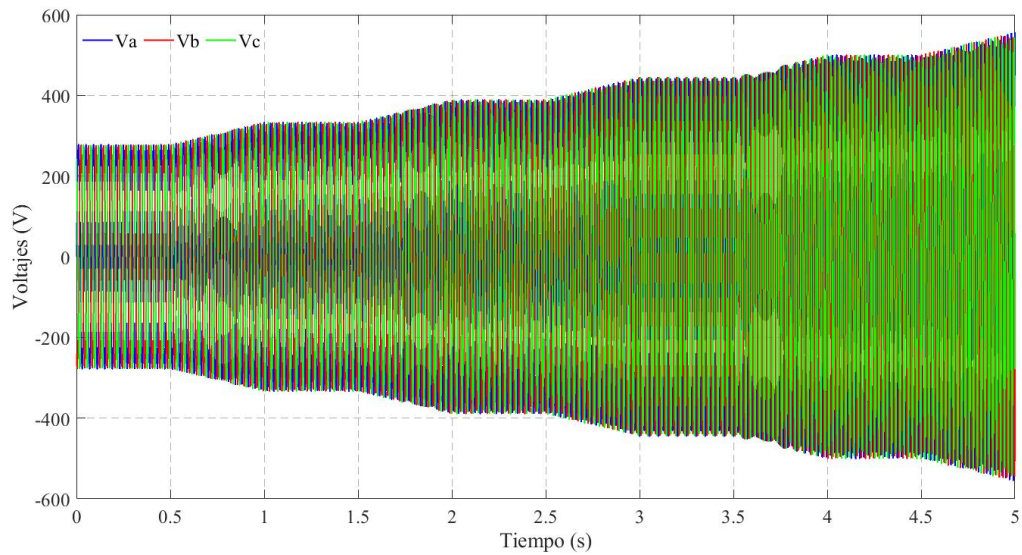


Figura 6.7: Voltaje de control aplicado al modelo de campo desde 1,452 a 2904 rpm

6.4.3. Corrientes en los devanados del estator I_{123}

En la Figura 6.8 se muestran las corrientes en los devanados del estator para el rango de velocidades de 290.4 a 1452 rpm, mientras que en la Figura 6.9 se muestran las corrientes en los devanados del estator para el rango de 1452 rpm a 2904 rpm.

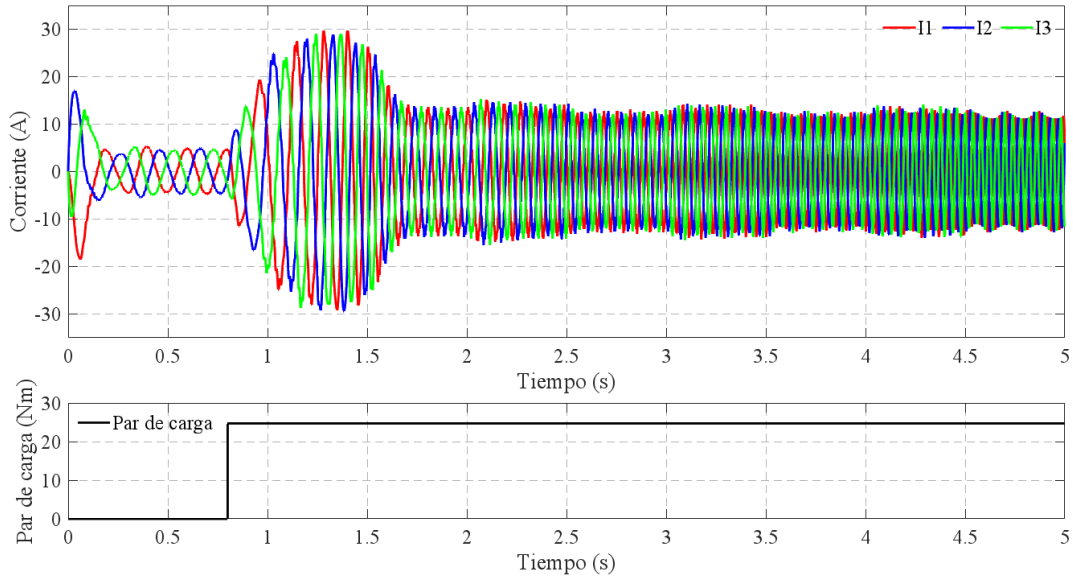


Figura 6.8: Corrientes en los devanados del estator desde 209.4 rpm a 1,452 rpm

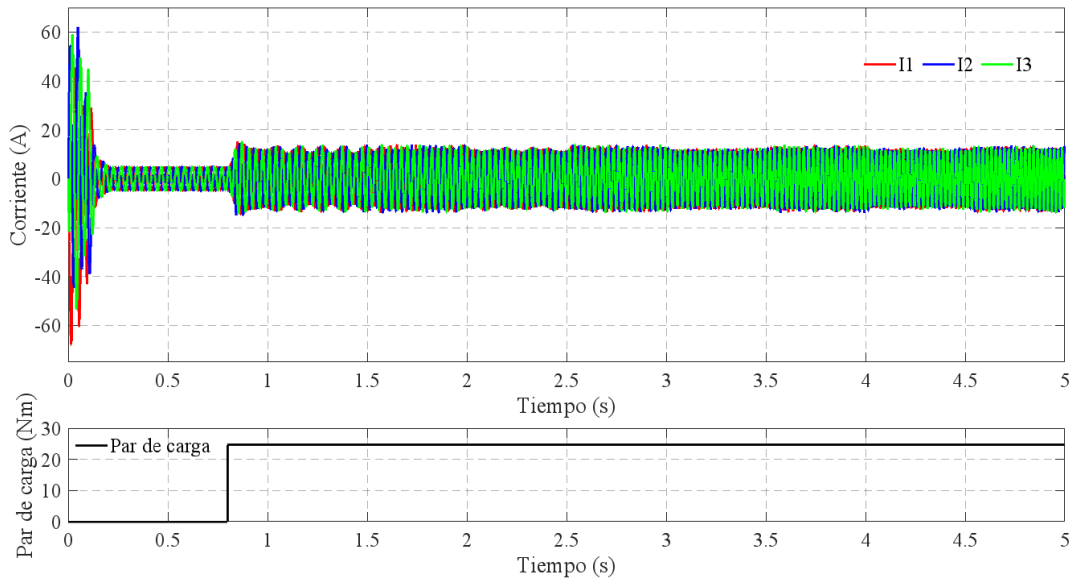


Figura 6.9: Corrientes en los devanados del estator desde 1,452 a 2904 rpm

6.4.4. Par inducido T_{ind} y par de carga T_m

En la Figura 6.10 se muestran el par inducido y par de carga en el rango de velocidades de 290.4 a 1452 rpm, mientras que en la Figura 6.11 se muestran el par inducido y par de carga para el rango de 1452 rpm a 2904 rpm.

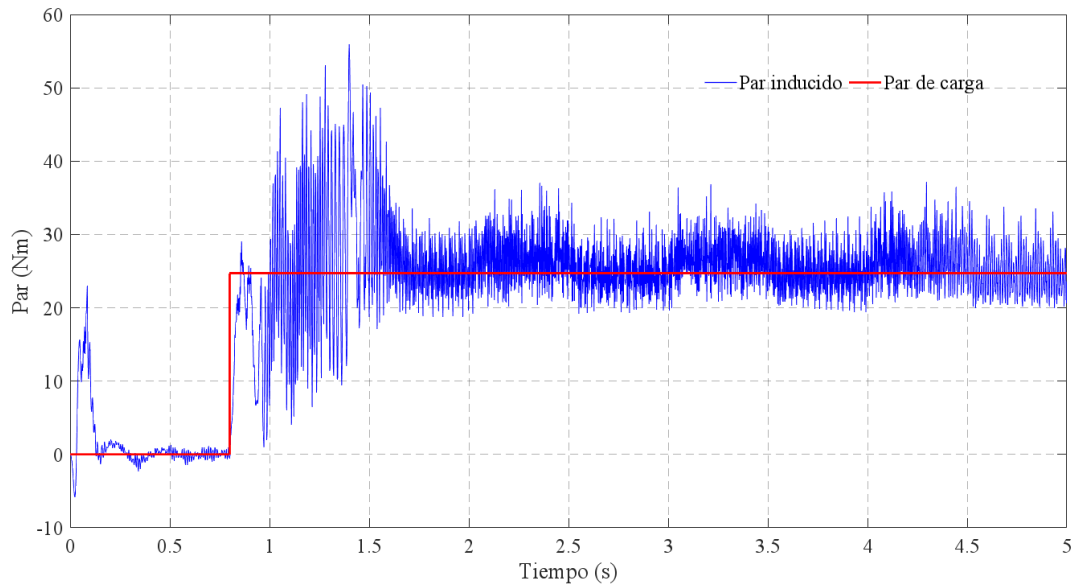


Figura 6.10: Par inducido y par de carga desde 209.4 rpm a 1,452 rpm

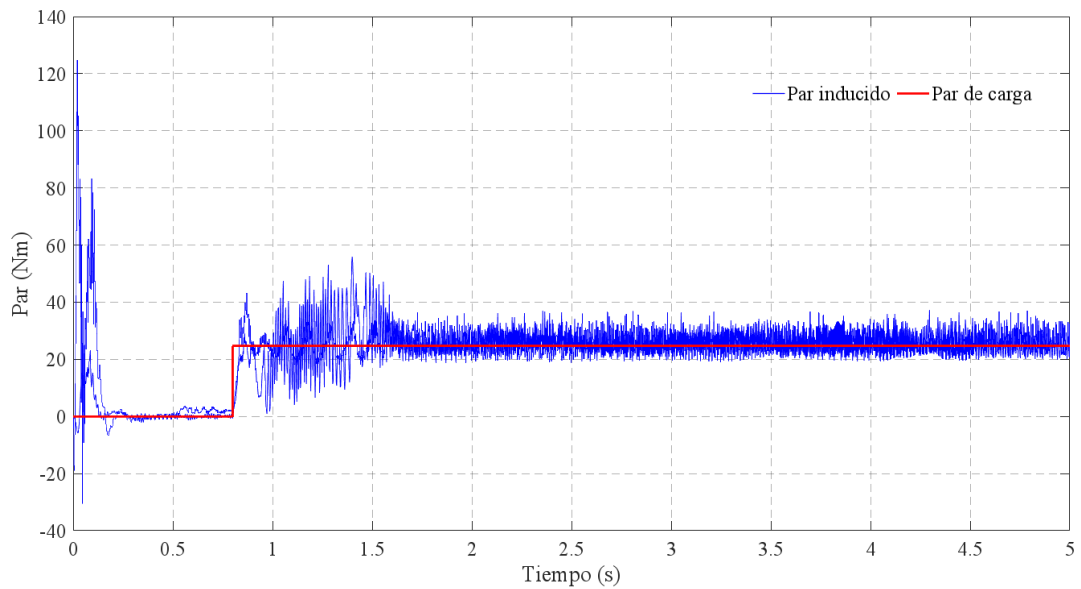


Figura 6.11: Par inducido y par de carga desde 1,452 a 2904 rpm

6.5. Análisis de resultados del control escalar al modelo de campo

6.5.1. Seguimiento de velocidad

Analizando la Figura 5.1 se aprecia como para los primeros 0.8 s el motor se establece rápida y eficientemente a su velocidad de referencia, pero justo en el momento de aplicar el par de carga la velocidad del motor se desvía respecto a la referencia, y poco a poco se va ajustando la velocidad del motor, siendo cada vez menor la diferencia entre ambas velocidades. Por otro lado, para la Figura 5.2 se observa como la diferencia de velocidades de establecimiento entre el motor y la velocidad de referencia, antes y después del par de carga es imperceptible, ya que conforme la velocidad del motor se acerca a su velocidad nominal, no existe prácticamente diferencia entre ambas velocidades.

Analizando el error existente entre la velocidad del motor y su referencia utilizando la siguiente ecuación:

$$Error(\%) = \frac{|Velocidad\ de\ referencia - Velocidad\ del\ motor|}{Velocidad\ de\ referencia} \cdot 100\ \% \quad (6.1)$$

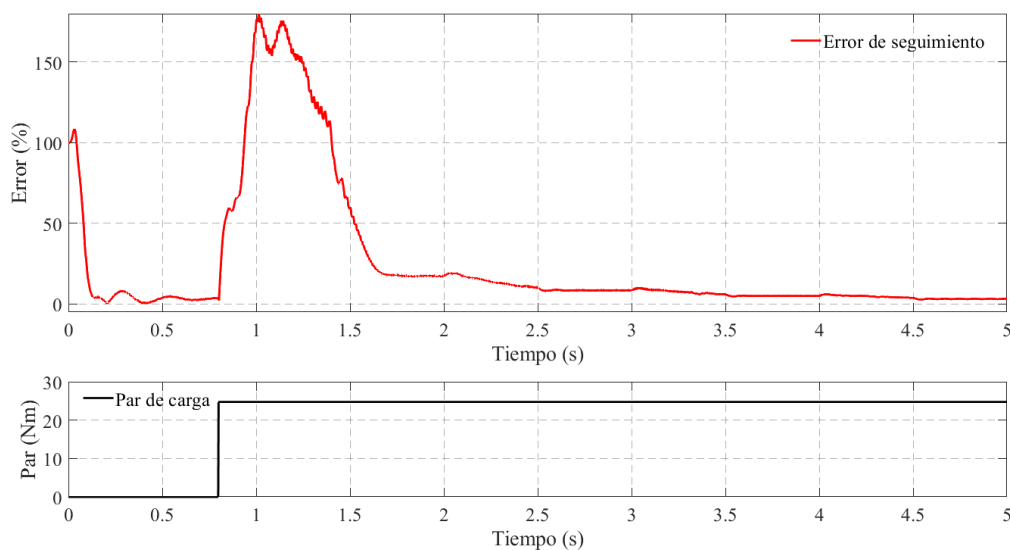


Figura 6.12: Error de seguimiento para 209.4 rpm a 1,452 rpm

En la Figura 6.12 se puede observar que conforme la velocidad aumenta, el controlador es más eficiente, ya que se tiene un error del 3.6 % para una velocidad de 209.4 rpm sin par de carga, y un error 179.7 % al aplicar el par de carga a los 0.8 s para la misma velocidad, además para una velocidad de 1452 rpm el error decae a un 3 % .

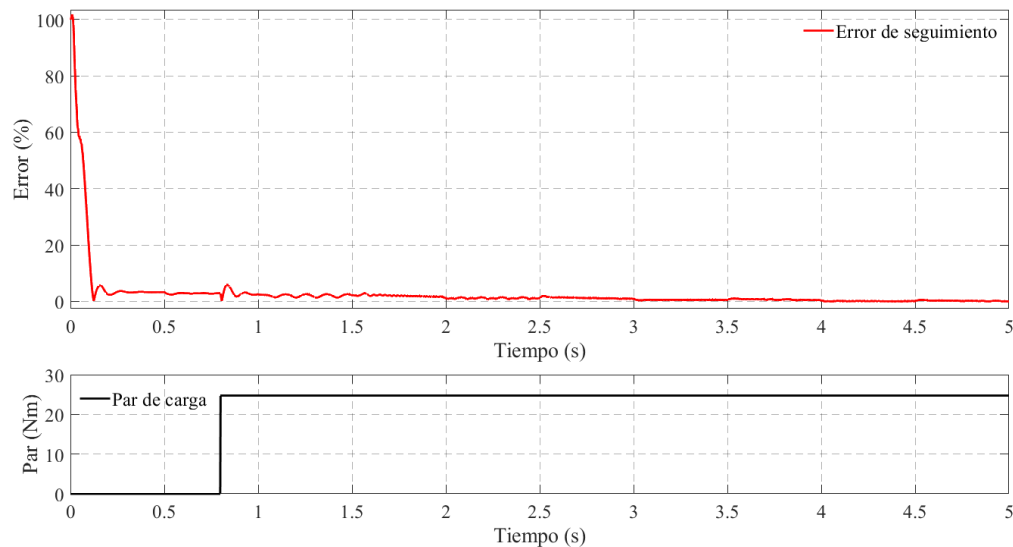


Figura 6.13: Error de seguimiento para 1,452 rpm a 2,904 rpm

Para la Figura 6.13 el desempeño del controlador mejora aún mas, ya que al aplicarle el par de carga en 0.8 segundos a una velocidad de 1452 rpm, el motor se establece rápidamente a su velocidad de referencia con un error del 5.8 %, y conforme la velocidad se acerca a la nominal el error tiende a cero, en donde para la velocidad de 2904 rpm se tiene un error de 0.1 %. De manera general, todo esto habla de una inestabilidad del control escalar a bajas velocidades, o lo que es lo mismo a bajas frecuencias.

6.5.2. Voltaje de control V/f

Los resultados de las Figuras 6.6 y 6.7 muestran una variación proporcional constante de voltaje y frecuencia, ya que por cada 0.5 s la amplitud de voltaje aumenta conforme lo hace la frecuencia, es decir las señales de voltaje se pliegan cada vez más conforme su amplitud crece, todo esto debido a los cambios de velocidad en relación a la velocidad de referencia.

6.5.3. Corrientes I_{123} , T_{ind} y T_m

Para la Figura 6.8 se aprecia como para una velocidad de 290.4 y al aplicar el par de carga a los 0.8 s, la corriente tiende a aumentar lo suficiente para intentar establecer un flujo magnético constante y debido a su proporcionalidad con el par, este se intentará mantener aproximadamente en 24.72 Nm, Figura 6.10, además se observa que conforme la velocidad va en aumento existen pequeños periodos en donde la corriente aumenta su amplitud, con la finalidad de que el flujo y par inducido no decaigan, por otro lado, las Figuras 6.8 y 6.9 muestran que desde 1452 a 2904 rpm, los periodos de aumento en la amplitud son prácticamente imperceptibles, lo que indica que conforme aumenta la velocidad, no es necesario demandar más corriente, es decir, el motor tiene mayor facilidad de establecer un flujo magnético constante, así como un par inducido a aproximadamente 24.72 Nm, como se aprecia en las Figuras 6.10 y 6.11, donde para velocidades mayores a 1452 rpm las variaciones del par inducido respecto al par de carga se reducen significativamente en comparación con las velocidades inferiores a 1452 rpm,

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo se utilizó la simulación como medio de comunicación entre el modelo de campo de Altair Flux 2D® y Matlab®/SimulinkTM, dónde en cada paso de simulación que fue de $2e-3$, se transmitieron las señales eléctricas de entrada para conseguir el control de velocidad. La co-simulación como estrategia de solución al problema de control de velocidad del motor de inducción, tiene la ventaja de considerar todo el fenómeno electromagnético del motor de inducción, a través de su modelo de elementos finitos, por lo que los resultados son muy cercanos a la realidad.

En este trabajo se obtuvo un buen desempeño del controlador para el seguimiento de velocidad, el cual mejora conforme se acerca a la velocidad nominal, además, se recomienda utilizarlo a velocidades no menores del 50 % de su velocidad nominal, ya que el error a velocidades inferiores de este valor tiende a aumentar, que para el caso de este trabajo aumento desde un 3 % a un 179.7 %, mientras para velocidades mayores al 50 % de su velocidad nominal disminuyó de un 3 % a 0.1 %. Además, para velocidades inferiores al 50 % de su valor nominal las variaciones en el par electromagnético tienden a aumentar, mientras para velocidades mayores al 50 % de su velocidad nominal, las variaciones decaen y se mantienen aproximadamente constantes. De manera general, si se necesita controlar la velocidad con un par electromagnético que no necesita buen desempeño en su operación, es útil operar al motor a velocidades inferiores del 50 % de su velocidad nominal, por otro lado si se necesita controlar la velocidad y mantener un par electromagnético cercano al par de carga nominal, se recomienda utilizar al controlador por encima del 50 % de su velocidad nominal.

Bibliografía

- [1] *A. E. Fitzgerald, Charles Kingsley, Jr. y Stephen D. Umanss*, **Máquinas eléctricas**, Libro, McGraw-Hill, 6ta ed, 2013
- [2] *Alfonso Álzate, Duberney Murillo Yarce, Marcela González Valencia*, «**Control de velocidad mediante relación voltaje frecuencia** », Artículo, Ciencia y Técnica Año XVI, No 49, Diciembre de 2011. Universidad Tecnológica de Pereira. ISSN 0122-1701.
- [3] *Alejandro García Alavez*, «**Análisis transitorio de un motor de inducción utilizando el método del elemento finito**», Tesis de Maestría, Univesidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, México, D.F, 2011.
- [4] *Altair Flux Engineering Overlay*, «**Tutorial de motor de inducción-Ejemplo técnico 2D**», Tutorial, 2018. Disponible en: <https://forum.altair.com/applications/core/interface/file/attachment.php?id=31389>.
- [5] *Bárbara Ramírez G., Joaquín Eloy-García Carrasco*, «**Diseño y desarrollo experimental del control en tiempo real en máquinas síncronas-control Escalar**», Proyecto Fin de Carrera, Página 43, Universidad Carlos III de Madrid, Mayo 5, 2014.
- [6] *CEDRAT*, « **Tutorial de motor de inducción Ejemplo técnico 2D**», Tutorial, 2006.
- [7] *David K. Cheng*, **Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería**, Libro, Pearson, Addison Wesley, 1ra ed, 1998.

- [8] *David Antonio Aragón Verduzco*, «**Análisis de una Máquina de Inducción en el dominio de la frecuencia usando el Método De Elementos Finitos** », Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, México, D.F, Octubre 2015.
- [9] *Ezequiel Rodríguez Jáuregui* , «**Invariancia de norma y modos colectivos en mecánica cuántica**», Tesis de maestría, CINVESTAV, IPN-Unidad Mérida, Abril, 2006.
- [10] *Jesús Fraile Mora*, **Máquinas eléctricas**, Libro, McGraw-Hill, 8va ed, 2003.
- [11] *João Pedro A. Bastos, Nelson Sadowski*, **Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods**, Libro, CRC Press, 2003.
- [12] *Jiří Klíma, Martin Mach, Ondřej Vitek*, «**Análisis de un motor de inducción jaula de ardilla de alta velocidad**», Artículo, IEEE 2015-15th International Conference on Environment and Electrical Engineering (EEEIC) - Rome, Italy (2015.6.10-2015.6.13).
- [13] *J. Jimenez-Gonzalez, J. M. Delgado-Quintero, C. A. Perez-Gomez, I. Lopez-Garcia, V. M. Jimenez-Mondragon y E. Campero-Littlewood*, «**Control escalar de motores de inducción de jaula de ardilla: fundamentos y alcance**», Artículo, IEEE Reunión Internacional de Otoño sobre Energía, Electrónica y Computación (ROPEC), Ixtapa, Mexico, 2019.
- [14] *J. Edwards , T.K Saha*, «**Difusión de corriente dentro de conductores**», Artículo, Queensland University of Technology.
- [15] *M.V.K. Chari, S. J. Salon.* , **Numerical Methods in Electromagnetism** , Libro, Academic Press, 1ra ed, 1999.
- [16] *R. Escarela-Perez, V. M. Jimenez-Mondragon, D. Aragón, Juan Olivares, José Hernandez y F. Gonzalez-Montanez*, «**Análisis de una máquina de inducción en el dominio de la frecuencia usando el método de elementos finitos para determinar su desempeño con carga**», Artículo, Revista Aplicaciones de la Ingeniería, Junio 2015, UAM-AZC, México.

- [17] Rogger Andrade-Cedeno, Jesús Alberto Perez-Rodriguez, «**Análisis del control V/f con SVM en un accionamiento de velocidad variable**», Artículo, Dominio de las Ciencias, Departamento de Electricidad y Electrónica, Universidad Técnica de Manabí, Octubre, 2021.
- [18] Stephen J. Chapman, **Máquinas eléctricas**, Libro, McGraw-Hill, 5ta ed, 2012.
- [19] Segerlind Larry J., **Applied Finite Element Analysis**, Libro, McGraw-Hill, 2da ed, 2000.
- [20] Sompong S., Satean T. y Tianchai S., «**Implementación de un control escalar a un motor de inducción**», SICE-ICASE Conferencia Conjunta Internacional 2006, Oct. 18-21, 2006 in Bexco, Busan, Korea
- [21] Teodoro Moore F., Milton Merciales C.G., «**Existencia y unicidad de solución de una ecuación de difusión no lineal del tipo parabólico**», Artículo, Sciendo, Ciencia para el desarrollo, Universidad Nacional Del Santa,Chimbote, Perú, 2018.
- [22] Víctor M. Jiménez-Mondragón, Felipe González-Montánez, Rafael Escarela-Pérez, Eduardo Campero-Littlewood, Irvin López-García, Juan C. Olivares-Galván, «**Modelado de un Motor de Inducción con su Sistema de Control usando el Método de Elemento Finito**», Artículo, Congreso Nacional de Control Automático 2013 Ensenada, Baja California, Mexico, Octubre 16-18, 2013.
- [23] V. M. Jimenez-Mondragon, I. Lopez-Garcia, R. Escarela-Perez,H. Mujica-Ortega y F. Gonzalez-Montanez, «**Análisis transitorio de un motor de inducción y su sistema de control mediante cosimulación**», Artículo, IEEE Reunión Internacional de Otoño sobre Energía, Electrónica y Computación (ROPEC 2019). Ixtapa, México.