



Universidad Autónoma Metropolitana
Programa Integrado de Maestría y Doctorado en Ciencias Económicas

Modelos Dinámicos de Oligopolio: un análisis de sus resultados mediante simulaciones.

Idónea comunicación de resultados

presenta

José Leonel Larios Ferrer

bajo la dirección de

Dr. Miguel Ángel Sámano Rodríguez

Ciudad de México, Noviembre 21 del 2014.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Resumen | 3 |
| Objetivos | 4 |
| 1. Introducción | 5 |
| 2. Oligopolios: Modelos de precios pegajosos. | 7 |
| 2.1. Mercados imperfectos | 7 |
| 2.2. Juegos Dinámicos | 12 |
| 2.3. Modelos Dinámicos de Oligopolio | 14 |
| 2.3.1. Costos asociados con la velocidad en el nivel de producción en un modelo de duopolio (Modelo Driskill-McCafferty (MDM)) | 14 |
| 2.3.2. Precios pegajosos en un modelo de duopolio (Modelo Fershtman-Kamien (MFK)) | 18 |
| 2.3.3. Precios pegajosos y concentración de la industria en un modelo de oligopolio (Modelo de Esfahani (ME)) | 21 |
| 3. Análisis de los modelos: simulaciones cuantitativas. | 27 |
| 3.1. Precio de equilibrio en el MDM | 27 |
| 3.2. Precio de equilibrio en el MFK | 28 |
| 3.3. Precio de equilibrio en el ME | 30 |
| 4. Conclusiones | 37 |
| 5. Anexos | 39 |

Resumen

En el presente trabajo se discuten tres modelos dinámicos de oligopolio y se hacen simulaciones de los precios en los diferentes equilibrios. En un primer modelo se caracteriza la influencia que tienen los costos al incorporar en ellos la velocidad con la que las firmas ajustan sus niveles de producción. En un segundo y tercer modelo se toman en cuenta los precios pegajosos bajo diferentes estructuras de información y el estudio de una concentración dentro del oligopolio en el último de ellos. Las simulaciones de los precios en estado estable con respecto a ciertos parámetros llevan a concluir que cuando las empresas usan estrategias previstas obtienen un mejor panorama en la mayoría de los casos que cuando usan estrategias retroalimentadas. Sin embargo cuando hay una concentración en el oligopolio los resultados son mejores con estrategias retroalimentadas.

Objetivos

Al final del trabajo se desea cumplir con los siguientes objetivos:

General:

- Evaluar la capacidad explicativa de tres modelos de oligopolio a través de simulaciones.

Particulares:

- Revisar tres modelos de oligopolio enfocados en los costos que incorporan la “velocidad” de ajuste de producción y de los precios “pegajosos” (sticky prices) mediante la teoría de juegos dinámicos.
- Hacer un análisis comparativo de los resultados principales de dichos modelos.
- Hacer simulaciones con casos particulares de la dinámica que siguen los modelos con el fin de visualizar en forma más clara sus resultados.
- Establecer líneas de investigación futuras a partir del análisis crítico de los modelos presentados.

Capítulo 1

Introducción

Se sabe que en la realidad en muchas de las industrias no se cumple con la competencia perfecta tan manejada en la teoría económica. Por ello surge la necesidad de estudiar las estructuras imperfectas de mercado, pues es a través de ellas que se puede saber algo más apegado a la realidad económica.

Una de las formas por las que se caracterizan los diferentes tipos de mercados es por el número de empresas (por el lado de la oferta) y por el número de compradores (por el lado de la demanda) (Friedman (1983)). El oligopolio es solo una de estas formas por el lado de la oferta y donde intervienen dos o más empresas pero no *infinitas* como en competencia perfecta.

Lo que distingue a los oligopolios de la competencia perfecta y de los monopolios es que las empresas que están en los primeros están relacionados por medio de las estrategias que usa cualquiera de esas firmas, es decir, las políticas adoptadas por una firma dependerán de las políticas adoptadas por las demás.

El estudio de la teoría oligopolista es de suma importancia pues es a través de ella que se trata de comprender la interacción entre esas estrategias y estudiar los diferentes equilibrios a los que se puede llegar. También es importante estudiar a través de ella la eficiencia económica a la que se llega por medio de esta forma de mercado (Friedman (1983)).

Un tema común que existe entre los precursores de la teoría del oligopolio es la cuestión de si los precios están determinados cuando hay interacción en las estrategias de las firmas. Como se sabe, se le atribuye a Cournot como uno de los fundadores de la teoría moderna del oligopolio, quién presentó una forma de obtener precios de equilibrio en un mercado con un número reducido de competidores. Sin embargo, hubo otros pioneros como Edgeworth quienes no aceptaban que para mercados pequeños se tuviera un precio de equilibrio determinado (Vives (2001)).

En esta teoría se ha ido teniendo la necesidad de contar con herramientas más poderosas como lo es la teoría de juegos y en particular los juegos dinámicos. Con ello se llega a equi-

brios un poco más realistas, aunque muchas veces el análisis se complica.

En el presente trabajo se hace una discusión de tres modelos dinámicos de oligopolio y de los cuales se hace un análisis y comparación de sus principales resultados.

Dicho análisis se hace a través de simulaciones de los precios en estado estable con el propósito de tener un mejor panorama de la dinámica de los resultados de cada modelo. Se espera que con estas simulaciones se puedan deducir algunas recomendaciones hacia las empresas y ver bajo que condiciones un tipo de estrategia adoptada es más recomendable que otra. Algunos de los principales resultados es que cuando las empresas usan estrategias previstas la mayoría de la veces obtienen una situación mejor que cuando usan estrategias retroalimentadas. Sin embargo, cuando las empresas se concentran generan mejores resultados con estas últimas.

Para llegar al análisis antes mencionado se discute primero lo referente a mercados imperfectos donde se presentan los modelos básicos estáticos de oligopolio.

Después se da a conocer de forma general lo que son los juegos dinámicos y donde se discuten algunas definiciones básicas usadas a lo largo del documento.

Luego se discuten tres modelos dinámicos de oligopolio. El primero de ellos es el modelo de Driskill y McCafferty (1989) donde se toma en cuenta una forma particular de la función de costos pues en ella se toma en cuenta la velocidad con que las empresas ajustan sus niveles de producción; se hace la comparación del precio de equilibrio al que se llega a este modelo con el de competencia perfecta y el del equilibrio *á la Cournot*.

Con el modelo de Fershtman y Kamien (1987) retomado por Long (2010: 137) se discute la dinámica de los precios *pegajosos* y como es que afecta al nivel de producción, al precio y al beneficio de las empresas bajo una estructura de estrategias previstas y estrategias retroalimentadas (no previstas) para el caso de un oligopolio con dos empresas.

Enseguida, a través del modelo de Esfahani (2011) se presenta el caso general del trabajo de Fershtman y Kamien (1987) para n empresas y se hace el estudio de los efectos que trae una concentración dentro del oligopolio bajo las estructuras de información de estrategias previstas y no previstas.

Por último se hace la discusión pertinente con ayuda de las simulaciones ya mencionadas y se dan las conclusiones con los resultados más importantes y con la agenda futura de trabajo.

Oligopolios: Modelos de precios pegajosos.

Existe una gran variedad de modelos donde se estudia la conducta de los oligopolios que, a diferencia del monopolio y de la competencia perfecta, son abordados desde diferentes perspectivas para su estudio¹. Los modelos de oligopolio se abordan ya sea desde un enfoque estático o ya sea desde un enfoque dinámico; el primero de ellos por lo regular más sencillo de analizar pero carente muchas veces de la realidad; el segundo de ellos en su mayoría más complejos en su análisis pero que por su incorporación de herramientas como la teoría de juegos es más realista en sus resultados. Algunas especificaciones de modelos de oligopolio son: modelos que incorporan precios no lineales, modelos con precios de reventa, modelos que toman en cuenta el tamaño de las economías, modelos enfocados en los incentivos a la concentración, modelos dinámicos con diferentes estructuras de información, entre otras.

En este capítulo se da a conocer de manera general lo concerniente a la teoría de los mercados imperfectos, así como una pequeña revisión de los juegos dinámicos.

2.1. Mercados imperfectos

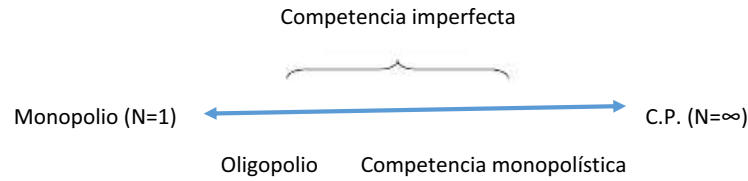
Dentro de la teoría económica convencional se discute a profundidad el supuesto de competencia perfecta, sin embargo, este supuesto muchas veces no se cumple y es donde cabe lugar para discutir mediante teoría de mercados imperfectos la existencia de oligopolios, cuyos participantes deciden mediante diferentes variables el nivel del precio y la cantidad de producción de los bienes a producir.

Un oligopolio es aquella estructura de mercado donde existen por lo regular algunos competidores, pero no tantos como para poder afirmar que cada uno de ellos tiene un efecto despreciable sobre el precio (Varian (1999: 481)). Con la teoría estática del oligopolio se puede dar una predicción de la conducta de las empresas a corto plazo, tomando como dados sus stocks de capital y sus funciones de costos (Shapiro (1989: 333)). De acuerdo al número de

¹Existe una gran variedad de modelos de oligopolio que se pueden encontrar en revistas como: the American Economic Review, Economic Journal, International Journal of Industrial Organization, Journal of International Economics, entre otras.

empresas en una industria se distingue la división mostrada en la Figura 2.1.

Figura 2.1: División de tipos de competencia en el mercado de acuerdo al número de empresas participantes. C.P. : competencia perfecta.



Fuente: Elaboración propia.

La empresa busca maximizar el beneficio: $\Pi(Q_j) = I(Q_j) - C(Q_j)$, donde I representa sus ingresos y C sus costos, ambos dependientes de su cantidad de producción Q_j .

El oligopolio presenta los rasgos siguientes:

- Existe un número reducido de empresas cuya interacción mutua ha de ser considerada cuando se modeliza el comportamiento del mercado.
- Las empresas producen bienes que son sustitutivos perfectos o cercanos imperfectos entre sí.
- No existe, por lo general libre entrada y salida de empresas en la industria (hay exigencia de elevados stocks de capital por ejemplo).

Dentro de la competencia oligopólica las empresas pueden adoptar un comportamiento competitivo (relacionado con juegos no cooperativos) o cooperativo (relacionado con juegos cooperativos). A continuación se presentan brevemente los tres modelos básicos de oligopolio: el modelo de Cournot, el de Bertrand y el de Stackelberg para el caso particular donde el CMg es nulo (por simplicidad) y que para estudios más completos se pueden encontrar en libros de microeconomía como los de Varian (1998, 1999) o en otros textos como el de Vives (2001) o el de Friedman (1983).

El modelo de Cournot.

Comportamiento empresarial: cada empresa fija cantidades a producir de manera simultánea sin saber la cantidad fijada por su rival; el precio es entonces fijado por el mercado dadas esas cantidades (Ahlersten (2008: 98)). A continuación se dan las características de un oligopolio con dos empresas², estas se definen de manera análoga en el caso general de n empresas³.

²Este análisis se hace también en el libro de Microeconomía intermedia de Hal R. Varian (Varian (1999: 492-495)) y de una manera más formal en su libro de Análisis microeconómico (Varian (1998: 335-340)).

³Varian hace un análisis del caso general (Varian (1999: 495-496)) y de manera más formal en su libro de Análisis microeconómico (Varian (1998: 340-341)).

Función de oferta: $P = a - b(Q_1 + Q_2)$; con $a > 0$, $b > 0$.

Función de demanda: $P = a - b(\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2)$; con $a > 0$, $b > 0$.

Función de costos: $C = F$; $F \geq 0$; por simplicidad supóngase $CMg = 0$.

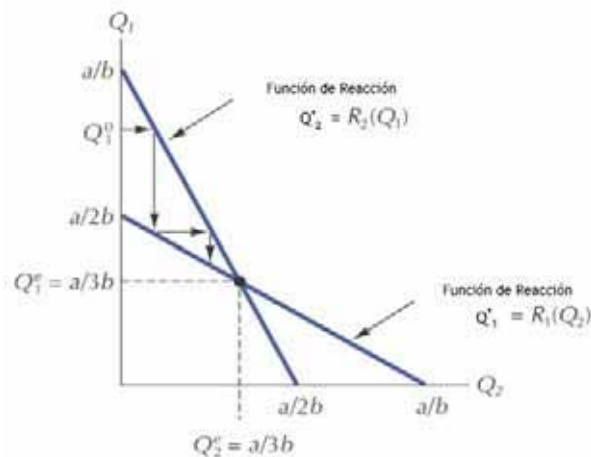
El problema de la maximización de la función de beneficio de cada empresa viene de la condición $IMg_i = CMg_i$ y da como resultado:

$$\begin{aligned} Q_1^C &= (a - bQ_2)/2b \equiv R_1(Q_2) \\ Q_2^C &= (a - bQ_1)/2b \equiv R_2(Q_1) \end{aligned}$$

A las funciones anteriores se les denomina funciones de reacción, las cuales muestran como reaccionarán estas empresas dadas sus diferentes expectativas sobre la elección de su rival (Varian (1998: 336)).

El equilibrio de mercado se corresponde con la intersección de ambas funciones de reacción (Varian (1998: 337)), cuya cantidad de equilibrio es: $Q_1^C = Q_2^C = a/3b$ trayendo consigo una cantidad total de producción $Q^C = 2(a/3b)$ (ver Figura 2.2).

Figura 2.2: Funciones de reacción en el modelo de duopolio de Cournot.



Fuente: Zoffo (2007: 5).

Con lo anterior se da lugar al precio de equilibrio $P_C = a/3$ y el beneficio máximo $\Pi_C = a^2/9b$. Un monopolista con condiciones iguales de demanda y oferta obtendría $Q^M = a/2b (< Q^C)$, $P_M = a/2 (> P_C)$ y $\Pi_M = a^2/4b (> \Pi_C)$, por lo que se puede traducir en términos sociales que existe una mejor situación de bienestar *á la Cournot* que con el monopolio al obtenerse un precio menor en el primero de estos.

El modelo de Bertrand.

Comportamiento empresarial: cada empresa asume que los precios de sus rivales no dependen de sus propias decisiones, si no que hay un nivel de interdependencia, pues las decisiones influyen en el comportamiento del rival vía mercado⁴. Se mantienen las mismas funciones de oferta, demanda y de costos que en el caso Cournot.

Dado el precio de la empresa 1 (P_1), la empresa 2 puede fijar un precio P_2 mayor que P_1 , en cuyo caso esta última se queda sin demanda; igual que P_1 , en cuyo caso la situación no cambia; y menor que P_1 , en cuyo caso acapara todo el mercado (Shapiro (1989: 344)). Esta última opción de reducir marginalmente el precio será la adoptada, y como reacción, la empresa 1 seguirá la misma estrategia. Al tratarse de situaciones simétricas, el proceso dinámico de ajuste continuará hasta que se alcance la condición de máximo beneficio ($P = CMg$).

Puesto que el modelo de Bertrand es una *guerra* de precios y el modelo de Cournot es una *guerra* de cantidades se espera que el equilibrio sea diferente. Ambos modelos son útiles para ilustrar la interdependencia entre empresas oligopolísticas, sin embargo, su simpleza trae consigo carencia de realismo; para mejorar esto último es útil la teoría de juegos.

El modelo de Stackelberg

Comportamiento empresarial: En este modelo una de las firmas, la *lider*, decide con anterioridad la cantidad a producir con respecto a su rival, la *seguidora*⁵ (Ahlersten (2008: 99-100)). Se consideran las mismas funciones de oferta y de costos que en los modelos anteriores. Para saber las cantidades óptimas se supone que la empresa 1 sabe que la función de reacción de su rival es la que se obtiene a partir de la condición de primer orden del máximo beneficio á la Cournot, i.e.

$$Q_2^* = (a - bQ_1)/2b \equiv R_2(Q_1)$$

Que puede sustituirla en su propia función de reacción maximizadora del beneficio, obteniendo la siguiente función de demanda:

$$P = a - b[Q_1 + R_2(Q_1)] = a - b \left(Q_1 - \frac{a - bQ_1}{2b} \right) = \frac{a - bQ_1}{2},$$

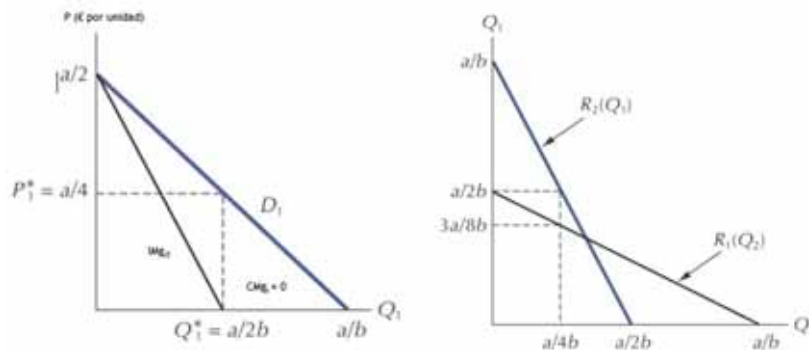
cuyo equilibrio y curvas de reacción se presentan en la Figura 2.3.

En este modelo, la empresa que anticipa el comportamiento del rival constituye la empresa lider, mientras que la otra es la empresa seguidora. La empresa 1 (la lider) fija una cantidad a producir $Q_1 = a/2b$ gracias a su anticipacion a la empresa 2 (la seguidora), mientras que esta última le quedará producir $Q_2 = a/4b$ (que es una cantidad menor de producción que la

⁴Este modelo se discute también en Varian (1999: 496-497).

⁵Este modelo se discute de manera más amplia en Varian (1999: 482-488).

Figura 2.3: Equilibrio en el modelo de duopolio de Stackelberg (lado izquierdo) y sus curvas de reacción (lado derecho).



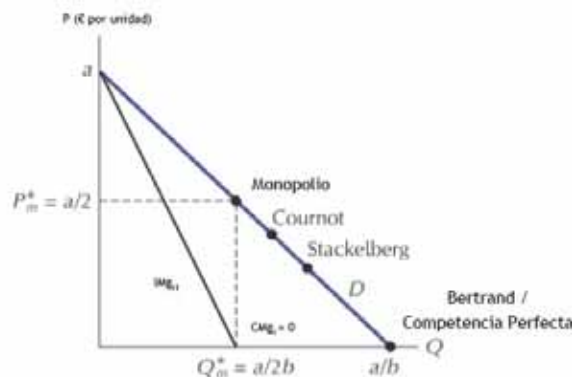
Fuente: Zofío (2007: 8-9).

que produce la empresa líder). Luego, la empresa líder no volverá a reajustar su producción de acuerdo a $Q_2 = a/4b$ produciendo $Q_1 = 3a/8b$ (que aumentaría su beneficio), porque esto llevaría a una reacción de la empresa seguidora que, de seguir así, se desembocaría en una espiral (intercambio de reacciones) que llevaría al equilibrio de Cournot.

La situación de equilibrio inicial lleva a que los beneficios de la empresa líder son lo doble que los de la empresa seguidora: $\Pi_1 = pQ_1 = a^2/8b > \Pi_2 = pQ_2 = a^2/16b = \frac{\Pi_1}{2}$.

Frente a los modelos de Cournot y Bertrand, el modelo de Stackelberg es más realista pues permite incorporar el comportamiento estratégico de al menos una de las empresas; si las dos pudiesen anticipar el conocimiento del rival, el equilibrio final se correspondería con el de Bertrand. La representación de los equilibrios de estos modelos son representados de manera conjunta en la Figura 2.4.

Figura 2.4: Representación conjunta de los equilibrios de los modelos de duopolio (caso donde el CMg es nulo).



Fuente: Zofío (2007: 10).

Estos tres modelos representan un marco analítico en el que los comportamientos estratégicos de las empresas tanto desde el punto de vista estático como dinámico, es difícil

de analizar. El desarrollo de la teoría de juegos ofrece un marco analítico más potente para estudiar los incentivos a competir o cooperar por parte de los oligopolistas.

2.2. Juegos Dinámicos

Los Juegos dinámicos fueron introducidos a la economía por Roos (1925, 1927) y a lo largo del tiempo se han convertido en una herramienta estándar de análisis económico. Una de las tendencias emergentes en la relación entre la expansión de la teoría de juegos y la economía es la aplicación de juegos dinámicos y estocásticos en una variedad de entornos. Los juegos dinámicos incluyen juegos diferenciales (juegos en tiempo continuo), juegos que incluyen ecuaciones en diferencia (juegos en tiempo discreto) y juegos sincronizados (Long (2010)).

En economía se han usado los juegos dinámicos para analizar tópicos en: economía ambiental, economía de los recursos naturales, economía internacional, desarrollo económico, organización industrial, economía pública y macroeconomía, entre otras. Autores como Van Long (2010) presentan este tipo de estudios y ofrecen una nueva perspectiva de problemas ya existentes con el uso de juegos dinámicos.

Un juego dinámico puede desarrollarse a lo largo de un horizonte de tiempo (finito o infinito) y normalmente muestra las siguientes propiedades:

- los jugadores pueden recibir pagos en cada periodo (o en cada punto del tiempo en caso continuo);
- el pago total de un jugador es la suma (o integral) de sus beneficios reducidos en el horizonte de tiempo, posiblemente más algunos pagos terminales;
- el pago que un jugador recibe puede depender tanto de las medidas adoptadas y del “estado del sistema” (que depende de una o varias “variables de estado”) para cada periodo de estudio;
- el estado del sistema cambia con el tiempo, y la tasa de cambio de las variables de estado puede depender de las acciones de los jugadores, representada por sus “variables de control”; y
- la tasa de cambio de una variable de estado se describe por una ecuación en diferencia o una ecuación diferencial, suele llamársele la “ecuación de transición” o “ecuación dinámica”.

Una de las distinciones más importantes de juegos dinámicos es que se pueden tener “estrategias de bucle abierto” (o estrategias previstas) y “estrategias perfectas de Markov” (o estrategias retroalimentadas). Una estrategia de bucle abierto (OL) ⁶ de un jugador está representada por una trayectoria prevista de sus acciones y una “estrategia de bucle cerrado”

⁶Por su abreviación en inglés: *Open Loop*

(CL)⁷ o estrategia retroalimentada (FB)⁸ tendrá también su propia trayectoria.

Un Equilibrio de Nash de Estrategias Previstas (ENEP) es un perfil de estrategias de bucle abierto (uno para cada jugador) de tal manera que la estrategia de bucle abierto de cada jugador maximiza su pago, una vez que son dadas las estrategias de bucle abierto de otros jugadores. Análogamente, un Equilibrio de Nash de Estrategias Retroalimentadas (ENER) es aquel que se obtiene mediante estrategias retroalimentadas (perfectas de Markov).

Un ENEP es consistente con el tiempo, pues en la trayectoria de equilibrio ningún jugador tiene incentivos para desviarse de su plan inicial, en otras palabras un ENEP no es robusto a perturbaciones. Por el contrario un ENER se dice inconsistente con el tiempo o que es robusto a perturbaciones, pues no importa el estado o tiempo en que se comience, la función objetivo de un jugador será maximizada dadas las estrategias de Markov de los otros jugadores. Acerca de esta división de estructuras de equilibrio Reinganum y Stokey (1985) describen:

“Two approaches have been adopted. One is to model the players as choosing path strategies and to look at Nash equilibria; the other is to model them as choosing decision rule strategies and to look at subgame perfect Nash equilibria. These two formulations correspond to extreme assumptions about players’ abilities to make commitments about their future actions. The use of path strategies corresponds to the assumption that commitments extend over the entire future horizon; the use of decision rule strategies corresponds to the assumption that no commitment at all is possible. Both approaches have been used in the industrial organization literature.” (Reinganum y Stokey (1985: 161)).

Claramente los autores ponen en claro la diferencia que tienen los dos tipos de equilibrios de Nash: uno proveniente de un subjuego perfecto (estrategias no previstas) y otro donde no hay tal subjuego perfecto (estrategias previstas). Dichos autores hacen una distinción entre estrategias tipo OL y tipo FB, usando términos como “estrategias de trayectoria” y “estrategias de reglas de decisión” señalando que en algunas ocasiones son más apropiadas unas que otras⁹.

Los economistas han ido incrementando sus preferencias de un ENER sobre un ENEP.

⁷Por su abreviación en inglés: *Closed Loop*

⁸Por su abreviación en inglés: *Feed Back*

⁹En su estudio sobre extracción de recursos concluyen que cuando la longitud (z) de cierto *periodo de compromiso* por parte de las empresas (el periodo donde se mantienen las estrategias previstas) es igual al periodo total considerado (T), i.e. $z = T$ (existen estrategias de trayectoria), se estaría llegando a un estado perfectamente eficiente y que sería independiente del número de empresas que tuvieran acceso al mercado común de extracción. En el caso extremo: $z = 0$ (estrategias de reglas de decisión), conlleva a la extracción instantánea de los recursos. Resultados intermedios les permiten dar resultados más plausibles y menos extremos como los anteriores.

2.3. Modelos Dinámicos de Oligopolio

Una vez presentado los modelos básicos de mercados imperfectos y algunas definiciones básicas de juegos dinámicos, se procede a discutir tres modelos de oligopolio usando este tipo de juegos, para después comparar sus resultados. El primero de ellos (desarrollado por Driskill y McCafferty (1989)) se aborda por el hecho de considerarse una función muy particular de costos (que depende de la *velocidad* con la que las firmas cambian su nivel de producción) y los dos modelos siguientes (desarrollados por Fershtman y Kamien (1987) y por Esfahani (2011), respectivamente) porque abordan los *precios pegajosos* y una posible concentración de la industria, respectivamente.

2.3.1. Costos asociados con la velocidad en el nivel de producción en un modelo de duopolio (Modelo Driskill-McCafferty (MDM))

Este primer modelo es desarrollado por Driskill y McCafferty (1989) y se referirá a él en adelante como Modelo Driskill-McCafferty (MDM). En él se aborda un modelo de oligopolio con dos empresas (duopolio), cuya estructura es parecida a los dos modelos posteriores. Se trata de un modelo de juego diferencial de duopolio, en el que las empresas incurren en costos asociados con la rapidez con que cambian su nivel de producción.

La estructura de este modelo consiste en una especificación estándar de la demanda, especificaciones de costos para cada empresa, y el supuesto de comportamiento que cada empresa maximiza el valor presente descontado de los beneficios, dado el conocimiento acertado de la estrategia de su rival. Se supone que los costos no dependen únicamente del nivel de producción, sino también de la *velocidad* de la producción, lo que refleja los costos asociados con el cambio repentino en el nivel de producción. Por otra parte, se supone que es infinitamente costoso cambiar repentinamente una producción infinita; lo anterior asegura que los niveles de producción son siempre variables de estado. Luego, las empresas eligen una tasa de cambio en el nivel de producción.

Sea P el precio, u_i la cantidad de producción de la i -ésima firma, C_i el costo de la i -ésima firma y δ la tasa de descuento en el tiempo. Así, el problema a resolver para cada firma i es:

$$\text{Max}_{x_i} J^i = \int_0^{\infty} \{P(u_1, u_2)u_i - C_i(u_i, x_i)\}e^{-\delta t} dt,$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= x_i & \dot{u}_j &= x_j(u_i, u_j) \\ u_i(0) &= u_{i0}, & u_j(0) &= u_{j0}, \quad i, j = 1, 2, i \neq j. \end{aligned}$$

En este modelo se trabaja solo con una estructura de información tipo CL, i.e. donde las

firmas usan estrategias no previstas (retroalimentadas)¹⁰.

Se muestran algunas definiciones que Driskill y McCafferty (1989) hacen en su trabajo para dar paso después a la solución del problema de cada empresa.

Definición 2.1. Driskill y McCafferty (1989: 327) definen al espacio de estrategias no previstas (tipo CL o FB) para cada jugador i como el conjunto

$$S_i = \{x_i(u_i, u_j, t) \mid x_i(u_i, u_j, t) \text{ es continua y diferenciable en } (u_i, u_j, t)\},$$

donde x_i es la derivada de u_i con respecto al tiempo.

En pocas palabras, las funciones que definen al espacio S_i deben ser bien comportadas con respecto a cantidades de producción y al tiempo.

Definición 2.2. En Driskill y McCafferty (1989: 327) se define a un *equilibrio de Nash de estrategias retroalimentadas* (ENER) como un par de estrategias tipo CL $(x_1^*, x_2^*) \in S_1 \times S_2$ tal que para cada condición inicial $(u_1(0), u_2(0), t_0)$ se cumple que $J^i(x_i^*, x_j^*) \geq J^i(x_i, x_j^*)$, para todo $x_i \in S_i$ ($i, j = 1, 2, i \neq j$).

Esta definición de equilibrio pone en claro que cada firma obtendrá su mejor beneficio posible. Luego, el Hamiltoniano formulado para cada empresa i es

$$H_i^* = P(u_1, u_2)u_i - C_i(u_i, x_i) + \lambda_{i1}x_i + \lambda_{i2}x_j, \quad i, j = 1, 2, i \neq j \quad (2.3.1)$$

donde λ_{i1} y λ_{i2} son variables de *coestado*. Las condiciones necesarias generales para un equilibrio se pueden consultar en el trabajo de Driskill y McCafferty (1989: 327) y las cuales se presentan a continuación para un caso particular.

La siguiente es una definición de equilibrio con estrategias previstas a la manera de Driskill y McCafferty (1989: 328):

Definición 2.3. Una estrategia prevista (tipo OL)¹¹ para el jugador i es

$$S_i^{OL} = \{x_i(t) \mid x_i(t) \text{ es una función continua a trozos}\}$$

Definición 2.4. Driskill y McCafferty (1989: 328) definen a un *equilibrio de Nash de estrategias previstas* (ENEP) como un par de estrategias tipo OL $(x_1^*, x_2^*) \in S_1^{OL} \times S_2^{OL}$ tal que para cada $x_i \in S_i^{OL}$ se cumple que $J^i(x_i^*, x_j^*) \geq J^i(x_i, x_j^*)$, ($i, j = 1, 2, i \neq j$).

¹⁰Driskill y McCafferty mencionan que existen otros tipos de equilibrio que incorporan aspectos históricos pero que sin embargo no influyen directamente en el pago de las firmas.

¹¹De la palabra en inglés *open loop*

Ahora se explica como resolver el juego antes mencionado para un caso particular donde la demanda toma la forma lineal y una función de costos cuadrática. Así, la función de demanda es

$$P = a - (u_1 + u_2)$$

y la función de costos de cada firma es

$$C_i = cu_i + \frac{b}{2}u_i^2 + \frac{A}{2}u_i^2 \quad (2.3.2)$$

Las estrategias $x_i = x_i(u_1, u_2)$ se desarrollan en el espacio de estrategias tipo CL. Un ENER para este juego es aquel par de estrategias que satisface para cada condición inicial posible, las condiciones necesarias de Pontryagin:

$$\begin{aligned} \lambda_{i1} &= Ax_i \quad i = 1, 2 \\ \dot{\lambda}_{i1} &= c - a + 2u_i + u_j + bu_i - \lambda_{i2} \frac{\partial x_j}{\partial u_i} + \delta \lambda_{i1}, \quad i = 1, 2 \\ \dot{\lambda}_{i2} &= u_i - \lambda_{i2} \frac{\partial x_j}{\partial u_j} + \delta \lambda_{i2}, \quad i, j = 1, 2, i \neq j \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} \lambda_{ij}(t) &= 0, \quad i, j = 1, 2, i \neq j. \end{aligned}$$

Se construye ahora un equilibrio asintóticamente estable de estrategias retroalimentadas. Un equilibrio asintóticamente estable es aquel donde las cantidades de producción de equilibrio u_1 y u_2 convergen a los niveles estacionarios finitos para cada condición inicial factible. El teorema muestra la existencia de tal equilibrio.

Teorema 2.5. *Sea*

$$\begin{aligned} x_1^* &= K^* + k_1^* u_1 + k_2^* u_2 \\ x_2^* &= K^* + k_2^* u_1 + k_1^* u_2 \end{aligned}$$

donde K^* , k_1^* y k_2^* son la única solución de:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{-Ak_2^2[3k_1 - 2\delta] + (2+b)(k_1 - \delta)}{A(k_1 - \delta)[2k_1 - \delta] + Ak_2^2 - (2+b)} \\ k_2 &= \frac{-Ak_1k_2[3k_1 - 2\delta] + (2k_1 - \delta)}{A(k_1 - \delta)[2k_1 - \delta] + Ak_2^2 - (2+b)} \\ k_1 &< 0 \\ 0 &< k_1^2 - k_2^2 \\ K &= \frac{K\{Ak_2(2k_1 - \delta) - 1 + Ak_2(k_1 - \delta)\} + (a-c)(k_1 - \delta)}{A(k_1 - \delta)[2k_1 - \delta] + Ak_2^2 - (2+b)}. \end{aligned}$$

Luego, el par $x_1^*(u_1, u_2)$ y $x_2^*(u_1, u_2)$ es un ENER estable para el juego dinámico anterior.

Cabe mencionar que existen otros pares (k_1, k_2) que satisfacen el teorema excepto las condiciones de Routh-Hurwicz para la estabilidad, $k_1 < 0$ y $0 < k_1^2 - k_2^2$

Teorema 2.6. *El estado estable de producción de la industria para el equilibrio de Nash de estrategias retroalimentadas está entre el nivel de producción industrial dada por un duopolio estático simétrico y el dado por la competencia perfecta, dadas las funciones de demanda y de costos como antes.*

En contraste con estos resultados, muchos modelos dinámicos de oligopolio tienen equilibrios los cuales tienen un comportamiento colusorio¹². La diferencia entre esos resultados y los que presentan los autores en este modelo radica en la dependencia de la historia por parte de los otros modelos y de la dependencia de estrategias (retroalimentadas) en este caso.

A continuación se da un caso especial del juego anterior cuando A , el coeficiente ajustado de costos, tiende a cero. Nótese que en este caso cuando se hace $A = 0$ al principio del problema, no se consigue una interacción dinámica de las estrategias, y el estado estable es idéntico que para el caso del duopolio estático de Cournot.

Teorema 2.7. *Conforme el coeficiente ajustado de costos A tiende a cero en el juego dinámico anterior, el nivel de producción en estado estable para un equilibrio de Nash de estrategias retroalimentadas se encuentra estrictamente entre los equilibrios de Cournot y de competencia perfecta.*

El siguiente teorema trata de lo que pasa cuando el parámetro δ tiende a crecer; lo que se esperaría es que en el equilibrio se comportara como un juego *normal*, dado que $\delta \rightarrow \infty$ significa que solo importa el presente (por definición de tasa de descuento)¹³.

Teorema 2.8. *Conforme la tasa de descuento δ tiende infinito, el equilibrio del nivel de producción en estado estable tiende al equilibrio estático de Cournot.*

Este último resultado prueba la diferenciación más fuerte de los resultados del trabajo de Driskill y McCafferty (1989) y de otros resultados como los de Fershtman y Kamien (1987).

Para las pruebas de estos teoremas véase el anexo en Driskill y McCafferty (1989).

¹²Generalmente se le dice así al comportamiento para designar o calificar los acuerdos interempresariales cuya finalidad es la de aumentar los beneficios de las empresas intervinientes, a costa de restringir la competencia y en perjuicio, por tanto, de los consumidores. La colusión es una práctica competitiva desleal.

¹³Recuérdese la definición de tasa de descuento (d) que es una medida financiera que se aplica para determinar el valor actual de un pago futuro; se relaciona con el pago futuro (F) y con el pago presente (P) mediante la fórmula: $F = P/(1 - d)$. Existe además una relación de d con la tasa de interés (r) dada por: $d = r/(1 + r)$

2.3.2. Precios pegajosos en un modelo de duopolio (Modelo Fershtman-Kamien (MFK))

Para este y el tercer modelo, a diferencia del MDM, se trata de dar énfasis ya no en la forma de los costos, sino en la forma de cómo es que se comportan los precios en el modelo dinámico de oligopolio.

Este modelo es desarrollado por Fershtman y Kamien (1987), retomado en el libro de Long (2010: 137) y al cual se refiere en adelante como modelo Fershtman-Kamien (MFK). En este modelo se aborda el problema de los *sticky prices* o *precios pegajosos*¹⁴ y el cual se generaliza en el tercer apartado para el caso de un oligopolio de n participantes. En este modelo se considera un duopolio donde se produce el mismo bien homogéneo, denotado por $q_i(t)$, donde $i = 1, 2$ ¹⁵. Así, la oferta del mercado esta dada por $S(t) = q_1(t) + q_2(t)$ y dado un precio $p(t)$, la demanda del mercado es $D(t) = a - p(t)$. Ahora, se hace el supuesto de que existe un retardo en el ajuste del precio del mercado ($p(t)$) al precio en tiempo real (efecto “sticky prices”) y se asume que la tasa de cambio en el precio es proporcional al exceso de demanda, i.e.

$$\dot{p} = \theta[D(t) - S(t)] = \theta[a - p(t) - q_1(t) - q_2(t)] \quad (2.3.3)$$

El costo de producción de las empresas está dado por la relación $C_i(q_i) = c_i q_i - \frac{1}{2} q_i^2$. Así, cada empresa se rige por el ajuste de precios dado por (2.3.3) y se propone maximizar el total de sus beneficios descontados por una tasa r de descuento, lo cual se representa por la siguiente integral:

$$J_i \equiv \text{Max}_{q_i} \int_0^{\infty} e^{-rt} \Pi_i(t) dt, \quad i = 1, 2 \quad (2.3.4)$$

donde $\Pi_i(t)$ representa el beneficio total de la empresa i para $i = 1, 2$. Si ambas firmas usan estrategias previstas (tipo “open-loop” (OL)), entonces la firma i considera dada la trayectoria de producción de la firma j ($q_j^{OL}(t)$) y elige su trayectoria óptima de producción ($q_i(t)$) de acuerdo al siguiente problema de optimización:

$$J_i \equiv \text{Max}_{q_i} \int_0^{\infty} e^{-rt} [p(t)q_i(t) - C_i(q_i(t))] dt, \quad i = 1, 2,$$

sujeto a

$$\dot{p} = \theta[a - p(t) - q_i(t) - q_j^{OL}(t)], \quad p(0) = p_0 \quad (2.3.5)$$

¹⁴El adjetivo pegajoso se puede vincular con el hecho de que el precio actual y el dado por la demanda se van rezagando uno con respecto con el otro y que solo en un caso particular son el mismo.

¹⁵Para un estudio completo de este primer modelo, además de otros modelos de oligopolio, puede consultarse el capítulo cinco del libro de Long (2010).

En este caso la variable de estado es el precio p y la variable de control es la cantidad de producción q_i .

Un equilibrio de Nash de estrategias previstas (ENEP) es aquel par de trayectorias de producción en el tiempo $\{\tilde{q}_1^{OL}(\cdot), \tilde{q}_2^{OL}(\cdot)\}$, las cuales son las mejores respuestas, una a la otra, de cada firma y por tanto se cumple que:

$$\begin{aligned} J_1\{\tilde{q}_1^{OL}(\cdot), \tilde{q}_2^{OL}(\cdot)\} &\geq J_1\{q_1^{OL}(\cdot), \tilde{q}_2^{OL}(\cdot)\}, & \forall q_1^{OL}(\cdot) \neq \tilde{q}_1^{OL}(\cdot) \\ J_2\{\tilde{q}_1^{OL}(\cdot), \tilde{q}_2^{OL}(\cdot)\} &\geq J_2\{\tilde{q}_1^{OL}(\cdot), q_2^{OL}(\cdot)\}, & \forall q_2^{OL}(\cdot) \neq \tilde{q}_2^{OL}(\cdot) \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

El planteamiento del problema cambia cuando se toma en cuenta que las firmas adquieren estrategias que se retroalimentan (tipo *feed-back*). En este caso cada firma i formula una decisión en cada instante t en lo que respecta a su nivel de producción esto de acuerdo al nivel observado en ese tiempo de la variable de estado. Así se tiene que:

$$q_i(t) = \psi_i^{FB}(p(t)), \quad i = 1, 2.$$

Después, dada la regla de decisión del rival $\psi_j^{FB}(p)$, el problema de optimización de la firma i es un problema de control óptimo autónomo:

$$J_i \equiv \text{Max}_{q_i} \int_0^{\infty} e^{-rt} [p(t)q_i(t) - C_i(q_i(t))] dt, \quad i = 1, 2,$$

sujeto a

$$\dot{p} = \theta[a - p(t) - q_i(t) - \psi_j^{FB}(p)], \quad p(0) = p_0 \quad (2.3.7)$$

Como en el caso de estrategias previstas, el par $\{\tilde{\psi}_1^{FB}(\cdot), \tilde{\psi}_2^{FB}(\cdot)\}$ será un equilibrio de Nash de estrategias retroalimentadas (ENER) si se cumplen las condiciones:

$$\begin{aligned} J_1\{\tilde{\psi}_1^{FB}(\cdot), \tilde{\psi}_2^{FB}(\cdot)\} &\geq J_1\{\psi_1^{FB}(\cdot), \tilde{\psi}_2^{FB}(\cdot)\}, & \forall \psi_1^{FB}(\cdot) \neq \tilde{\psi}_1^{FB}(\cdot) \\ J_2\{\tilde{\psi}_1^{FB}(\cdot), \tilde{\psi}_2^{FB}(\cdot)\} &\geq J_2\{\tilde{\psi}_1^{FB}(\cdot), \psi_2^{FB}(\cdot)\}, & \forall \psi_2^{FB}(\cdot) \neq \tilde{\psi}_2^{FB}(\cdot) \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

las cuales reflejan las mejores respuestas unas de otras, pero que a diferencia de las condiciones (2.3.6) los argumentos de estas funciones es el precio p , no t .

Por simplicidad se supone que las firmas son simétricas, esto es, $C_1 = C_2 = C$.

Se puede demostrar que un equilibrio tipo OL existe y que a lo largo de la trayectoria de equilibrio, la variable de estado p converge al valor de estado estable

$$p_{\infty}^{OL} = \frac{a(2\theta + r) + 2c(r + \theta)}{3r + 4\theta}$$

Notar que si $r \rightarrow 0$ o $\theta \rightarrow \infty$, el valor de estado estable p_∞^{OL} será el mismo que el precio estático de equilibrio de Cournot,

$$p^c = \frac{a+c}{2}$$

En el caso opuesto cuando $r \rightarrow \infty$ o $\theta \rightarrow 0$, el valor de estado estable p_∞^{OL} será el mismo que el precio en competencia perfecta.

Ahora, para el caso donde se usa estrategias tipo FB y donde se usa una función lineal, se tiene que

$$q_i = \psi_i^{FB}(p) = \alpha_i p + \beta_i$$

donde α_i y β_i serán determinadas.

Equilibrios

Por simplicidad se asume que $C_1 = C_2 = C$. Se puede demostrar que en el equilibrio las firmas usan la misma estrategia lineal de retroalimentación, con

$$\begin{aligned}\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha &= (1 - \theta K) > 0 \\ \beta_1 = \beta_2 = \beta &= \theta E - c < 0\end{aligned}$$

donde

$$K = \frac{r + 6\theta - \sqrt{(r + 6\theta)^2 - 12\theta^2}}{6\theta^2} > 0$$

y

$$E = \frac{c - a\theta K - 2\theta c K}{r - 3\theta^2 K + 3\theta}$$

Dado que $\alpha > 0$, entonces las reglas de decisión tipo FB les indica a las firmas que deben producir más si observan un precio más alto. Esto sugiere que en el equilibrio las firmas son más competitivas que en el equilibrio tipo OL. Para verificar esto, se tiene primero que en el estado estable el precio bajo estrategias tipo FB es:

$$p_\infty^{FB} = \frac{a + 2c - 2\theta E}{3 - 2\theta K}$$

Luego, cuando $r \rightarrow \infty$ o $\theta \rightarrow \infty$, se puede ver que $p_\infty^{FB} < (a+c)/2 = p_\infty^{OL}$ (donde este último precio es igual al precio de Cournot). La razón de esto es que si cada firma espera

que su rival produzca cuando el precio es más alto entonces existe un pequeño incentivo para restringir la producción.

Tsutsui y Mino (1990) muestran la existencia de un equilibrio tipo FB donde el duopolista usa estrategias no lineales.

2.3.3. Precios pegajosos y concentración de la industria en un modelo de oligopolio (Modelo de Esfahani (ME))

Este modelo es desarrollado por Esfahani (2011) y se refiere a él de aquí en adelante como modelo de Esfahani (ME). En este modelo se considera la dinámica de un oligopolio como en el MFK pero para el caso de n firmas con cantidades de producción $q_i(t) \geq 0$, $i \in 1, 2, \dots, n$ del mismo bien homogéneo y asumiendo como antes funciones cuadráticas de costos¹⁶:

$$C_i(t) = cq_i(t) + \frac{1}{2}q_i^2(t), \quad c > 0.$$

Ahora, el precio está dado por la función de demanda inversa siguiente

$$\hat{p} = A - \sum_{i=1}^n q_i(t)$$

Dado que el precio no se ajusta al instante, el precio actual de mercado no se ajusta instantáneamente al precio dado por la función de demanda, se tiene que el precio actual ($p(t)$) está dado por

$$\frac{dp(t)}{dt} \equiv \dot{p}(t) = s[\hat{p} - p(t)] \quad (2.3.9)$$

donde $s \in [0, \infty]$ es una constante que determina la rapidez del ajuste de precios; si el valor de s es muy pequeño entonces aumenta el grado de ajuste; si el valor de s tiende a infinito el precio se ajusta al instante y por tanto no existen precios pegajosos. La función de beneficio instantáneo de la firma i es

$$\Pi_i(t) = q_i(t) \left[p(t) - c - \frac{1}{2}q_i(t) \right].$$

Así, el problema de optimización es

$$J_i \equiv \text{Max}_{q_i} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} q_i(t) \left[p(t) - c - \frac{1}{2}q_i(t) \right] dt, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3.10)$$

¹⁶El desarrollo completo para este segundo modelo puede verse en el trabajo de Esfahani (2011).

sujeta a (2.3.9), junto con la condición $p(0) = p_0$ y $p(t) \geq 0$, $\forall t \in [0, \infty)$. El factor $e^{-\rho t}$ es el conocido factor de descuento del beneficio futuro, con ρ la tasa de descuento en el tiempo.

Se resuelve el juego diferencial usando las estructuras de información ya conocidas: estrategias previstas (tipo OL) y estrategias retroalimentadas (tipo FB o CL).

De acuerdo a Cellini y Lambertini (2004) el precio, la cantidad y el beneficio en el equilibrio de Nash con estrategias tipo OL (antes ENEP) están dados por las ecuaciones siguientes:

$$p^{OL} = A - nq^{OL}; \quad q^{OL} = \frac{(A - c)(\rho + s)}{(1 + n)\rho + (2 + n)s}; \quad \Pi^{OL} = \frac{(A - c)^2(\rho + s)(\rho + 3s)}{2[(1 + n)\rho + (2 + n)s]^2}$$

y para el caso de estrategias tipo CL (antes ENER), se tienen:

$$p^{CL} = A - nq^{CL}; \quad q^{CL} = \frac{(A - c)(\rho + ns)}{s + (1 + n)(\rho + ns)}; \quad \Pi^{CL} = \frac{(A - c)^2(\rho + ns)(\rho + (2 + n)s)}{2[s + (1 + n)(\rho + ns)]^2}$$

Enseguida se discute la parte central de este artículo donde se hace énfasis en el tamaño de la concentración dentro de un oligopolio. Primero, para conocer el equilibrio en la concentración del oligopolio se considera una concentración horizontal de m firmas ($1 < m \leq n$), donde n sigue siendo el tamaño del oligopolio y por tanto son $n - m$ firmas las que se mantienen fuera de la concentración. Dada una función convexa de costos, el objetivo es buscar un óptimo para producir con las m empresas y no concentrar la producción en una sola firma. Así, el juego diferencial a resolver es:

$$J_i \equiv \text{Max}_{\bar{q}_i} \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[(p(t) - c) \sum_{i=1}^m \bar{q}_i(t) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \bar{q}_i^2(t) \right] dt, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.3.11)$$

$$J_j \equiv \text{Max}_{q_j(t)} \int_0^\infty e^{-\rho t} q_j(t) \left[p(t) - c - \frac{1}{2} q_j(t) \right] dt, \quad j = m + 1, \dots, n \quad (2.3.12)$$

sujeto a

$$\frac{dp(t)}{dt} \equiv \dot{p}(t) = s \left\{ A - \sum_{i=1}^m \bar{q}_i(t) - \sum_{j=m+1}^n q_j(t) - p(t) \right\} \quad (2.3.13)$$

y a la condición inicial $p(0) = p_0$ y $p(t) \geq 0$. Se tiene que la ecuación (2.3.11) engloba a las firmas que pertenecen a la concentración y la ecuación (2.3.12) hace lo propio con las firmas que no pertenecen a ella. Obsérvese que la ecuación de transición (2.3.13) es análoga a la ecuación (2.3.9) presentada al inicio de este apartado. En adelante, $\bar{q}_i(t) \geq 0$, $i \in 1, 2, \dots, m$ y $q_j(t) \geq 0$, $j \in m + 1, \dots, n$ representan el nivel de producción de las firmas que están en el interior y en el exterior de la concentración, respectivamente.

Luego, de acuerdo a las tres últimas ecuaciones se pueden formular las siguientes funciones Hamiltonianas:

$$\begin{aligned}
H^M(t) &= e^{-\rho t} \left\{ (p(t) - c) \sum_{i=1}^m \bar{q}_i(t) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \bar{q}_i^2(t) \right. \\
&\quad \left. + \bar{\lambda}_i(t) s \left[A - \sum_{i=1}^m \bar{q}_i(t) - \sum_{j=m+1}^n q_j(t) - p(t) \right] \right\} \quad (2.3.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_j(t) &= e^{-\rho t} \left\{ q_j(t) \left[p(t) - c - \frac{1}{2} q_j(t) \right] \right. \\
&\quad \left. + \lambda_j(t) s \left[A - \sum_{i=1}^m \bar{q}_i(t) - \sum_{j=m+1}^n q_j(t) - p(t) \right] \right\} \quad (2.3.15)
\end{aligned}$$

donde $\lambda_j(t) = \mu_j(t)e^{\rho t}$ y $\bar{\lambda}_i(t) = \bar{\mu}_i(t)e^{\rho t}$, con $\mu_j(t)$ y $\bar{\mu}_i(t)$ las variables de co-estado asociadas con $p(t)$. El Hamiltoniano (2.3.14) corresponde a las firmas dentro de la concentración, al igual que (2.3.15) lo representa para las empresas fuera de ella.

Equilibrios

Después de la concentración, en el ENEP, los niveles de estado estable en los precios, cantidades de producción, tanto de las firmas dentro de la concentración como las que están fuera de ella, son:

$$p_d^{OL} = A - q_M^{OL} - (n - m)q_O^{OL} \quad (2.3.16)$$

$$q_M^{OL} = \alpha m(\rho + 2s); \quad q_O^{OL} = \alpha(\rho + s + ms) \quad (2.3.17)$$

donde el coeficiente α está dado por:

$$\alpha = \frac{(A - c)(\rho + s)}{(n + 1)\rho^2 + [2n + m(n - m + 2) + 3]\rho s + [n + m(n - m + 3) + 2]s^2}$$

Así, los beneficios en el estado estable son:

$$\begin{aligned}
\Pi_M^{OL} &= \frac{\alpha^2 m(\rho + 2s)^2(\rho + s + 2ms)}{2(\rho + s)} \\
\Pi_O^{OL} &= \frac{\alpha^2(\rho + 3s)(\rho + s + ms)^2}{2(\rho + s)}
\end{aligned}$$

Bajo estrategias tipo CL, es decir, en el ENER se puede encontrar las siguientes cantidades de equilibrio:

$$p_d^{CL} = A - q_M^{CL} - (n - m)q_O^{CL} \quad (2.3.18)$$

$$q_M^{CL} = \beta m(\rho + (n - m + 1)s)(\rho + (m^2 - m + n + 1)s) \quad (2.3.19)$$

$$q_O^{CL} = \beta(\rho + s(n + 1))(\rho + (m^2 - m + n)s) \quad (2.3.20)$$

donde el valor de β esta dado por

$$\beta = \frac{A - c}{(n + 1)\rho^2 + (n(m^2 - m + 2n + 3) + 2)\rho s + [(n + 1)(m^2 n - mn + n^2 + n + 1) - m^4 + m^3]s^2}$$

lo cual en dicho estado estable da como beneficios (tanto a firmas dentro de la concentración como fuera de ella) los siguientes:

$$\Pi_M^{CL} = \frac{1}{2}\beta^2 m(\rho + (n - m + 1)s)(\rho + (n + m + 1)s)[\rho + (m^2 - m + n + 1)s]^2$$

$$\Pi_O^{CL} = \frac{1}{2}\beta^2 [\rho + s(n + 1)]^2 (\rho + (m^2 - m + n)s)(\rho + (m^2 - m + n + 2)s)$$

Para una prueba rigurosa de estos resultados puede verse el trabajo de Esfahani (2011)¹⁷.

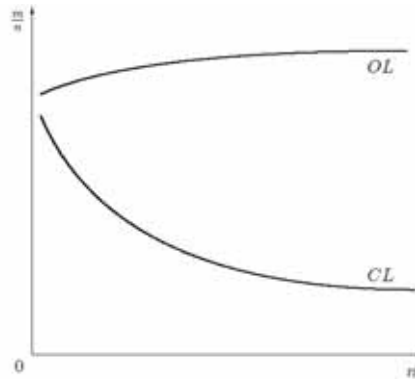
Después de encontrar los equilibrios post-concentración se hace un estudio de la rentabilidad de una concentración horizontal con dinámica en los precios en un enfoque de Cournot. En el trabajo de Esfahani (2010) se analiza primero el porcentaje mínimo de miembros de la concentración el cual es requerido para hacer que la concentración sea rentable en el caso de un ajuste instantáneo de precios. Después evalúan la rentabilidad de la concentración en el espacio $(m, s/\rho)$ para un número inicial de firmas las cuales perciben el rol de los precios pegajosos como un estímulo para la concentración.

Para lo anterior se considera la diferencia entre la ganancia de la post-concentración de una firma dentro de ella y la suma de las ganancias individuales de las mismas antes de entrar a la concentración; dicha diferencia debe de ser positiva como una condición para tener rentabilidad en la concentración. Esto es en una industria de n firmas, m firmas se concentraran sí y solo si la condición de ganancia de concentración $\Pi_M^{OL} - m\Pi^{OL} > 0$ o $\Pi_M^{CL} - m\Pi^{CL} > 0$ se cumple.

En la Figura 2.5 se muestra que es mucho más fácil mantener colusión a través de los que estan dentro de la concentración en el equilibrio con estrategias tipo CL que en el equilibrio de estrategias tipo OL. El comportamiento de la Figura 2.5 se debe a que si bien en ambos casos cada quien opera bajo información completa, bajo información de una estructura tipo CL las firmas incorporan explícitamente la interacción de estrategias en las ecuaciones de co-estado, mientras que bajo la estructura tipo OL no es así.

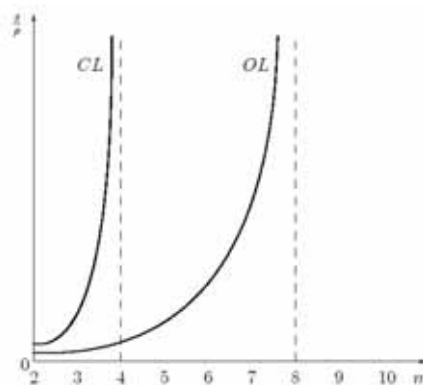
¹⁷Más adelante en la discusión de este trabajo se hacen algunas simulaciones de estos equilibrios para tener de forma más clara su dinámica con respecto a ciertos parámetros.

Figura 2.5: Diferencia del tamaño de la concentración de acuerdo a las dos estructuras de información: tipo OL y tipo CL.



Fuente: Esfahani (2011: 10).

En la Figura 2.6 se representa la región de parámetros s y ρ para los cuales la concentración de m firmas es rentable bajo un equilibrio tipo OL y uno tipo CL en una industria de tamaño diez. Esta gráfica muestra que en casos donde el precio es muy pegajoso la concentración traerá beneficios a las firmas que pertenezcan a ella aún cuando su tamaño de mercado es pequeño. Se puede ver además que en el equilibrio OL cuando la velocidad de ajuste de precios (s) tiende a infinito, la concentración deberá tomar en cuenta al menos ocho miembros de la concentración para ser rentable. Autores como Fershtman y Kamien (1987) coinciden en este caso cuando el valor de s tiende a infinito el equilibrio OL coincide con el equilibrio estático de Nash a la Cournot y se sabe que en el modelo estático de Cournot la concentración es desventajosa para las firmas que esten en ellas al menos que ocupen entre todas al menos el 80% del mercado total. Lo anterior no se da para un equilibrio de Nash tipo CL, como se muestra en la Figura 2.6.

Figura 2.6: Rentabilidad en la concentración en el espacio $(m, s/\rho)$ para $n = 10$. Fuente: Esfahani (2011)

Fuente: Esfahani (2011: 11).

Para una tasa de descuento dada, conforme el número de empresas dentro de la concentración decrece, la velocidad de ajuste de precios debe reducir para tener una concentración rentable; es decir los incentivos a la concentración son más grandes cuando la velocidad de

ajuste de precios es baja.

Así por tanto, en el trabajo de Esfahani (2011) se concluye que para una tasa de interés dada, los incentivos a la concentración son grandes cuando el mecanismo gubernamental de ajuste de precios es muy lento. Sus resultados sugieren que el número relativo de firmas que es requerido para que la concentración sea rentable tiene dos posibles direcciones: bajo estructuras tipo OL y bajo estructuras tipo CL, pues bajo estrategias retroalimentadas, es una función decreciente del número de firmas en la industria mientras que con estrategias previstas la función es creciente.

Análisis de los modelos: simulaciones cuantitativas.

Para contribuir a la discusión de los modelos aquí presentados se muestran enseguida algunas simulaciones de los precios de equilibrio obtenidos, esto con el objetivo de tener más clara la dinámica de los precios de acuerdo a ciertos parámetros como son la velocidad de ajuste de precios s y la tasa de descuento en el tiempo ρ .

La elección de los parámetros para las simulaciones se hicieron de la siguiente manera: tomando como referencia el ME¹ se procuró valores pequeños para la tasa de descuento ρ (una valoración considerable al presente) e igual valores menores para el parámetro relacionado con el ajuste de precios s pues en general se observó innecesario poner altos valores de este parámetro para cambios considerables en los precios. En relación al coeficiente de la ecuación de costos (coeficiente c) y del coeficiente de la ecuación de la demanda inversa (coeficiente A) se fijaron cantidades siempre y cuando se cumpliera la condición $A > c$ como en el caso de juegos dinámicos discretos (Bischi (2010: 26-27)).

3.1. Precio de equilibrio en el MDM

Se puede relacionar el primer modelo (MDM) con el MFK haciendo las adecuaciones necesarias en la notación de ambos modelos y haciendo en la ecuación (2.3.2) $b = 1$ y $A = 0$. Como se puede ver en el Anexo 1, con estos valores de los coeficientes b y A no se cumple con una de las condiciones de Routh-Hurwicz y por tanto el equilibrio no es estable, al menos que la tasa de descuento sea negativa.

La existencia de tasas de descuento negativas es un poco irreal² y queda por resolver que tales tasas existan y bajo que condiciones lo hacen.

¹Para los otros modelos puede cambiar el nombre de los coeficientes.

²Lo que si puede haber es una tasa de interés real negativa, la cual se genera cuando la tasa de inflación es más grande que la tasa nominal de interés.

Ahora, aceptando dicha condición³ y dado que lo que se busca es hacer simulaciones para ver la validez de los modelos y de hacer una comparación entre ellos, se puede demostrar (ver Anexo 1) que las cantidades en estado estable son:

$$u = u_1 = u_2 = (c - a)/2; \quad p = 2a - c; \quad x = 0.$$

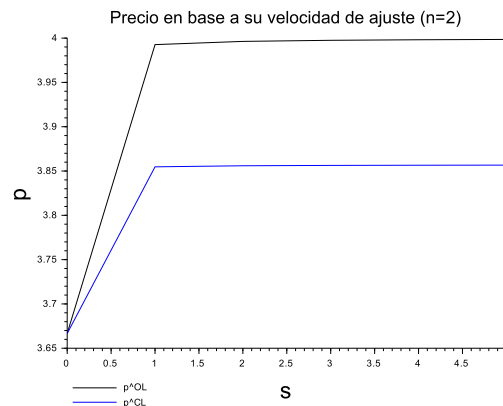
Así, se puede observar que el precio en estado estable no depende de la tasa de descuento (δ)⁴ y por tanto no es posible realizar simulaciones en relación a este parámetro.

Entonces, bajo estas condiciones particulares en una primera instancia no se puede hacer conexión con el segundo modelo (MFK), es decir, no existe por el momento una economía que siga ambos modelos (el MDM y el MFK).

3.2. Precio de equilibrio en el MFK

En la Figura 3.1 se puede ver que de acuerdo al parámetro de velocidad de ajuste de los precios, esto es s , el precio de equilibrio (p) tiende a aumentar conforme s lo hace. Lo anterior indica que para que una empresa pueda obtener un precio mayor en el duopolio del MFK, se necesita que ajuste de manera rápida sus precios, de otra manera obtendrá un precio inferior. Como bien se mencionó en el desarrollo de los modelos, cuando s tiende a infinito el precio tiende a estabilizarse.

Figura 3.1: Precio en el MFK en base a su velocidad de ajuste para un duopolio ($n = 2$).



Notas: p^{OL} y p^{CL} son los precios con estrategias previstas y no previstas, respectivamente. Parámetros usados: $A = 5$, $c = 3$, $r = \rho = 3\%$.

Fuente: Elaboración propia.

³Esto tiene que ver, por ejemplo, con los costos de depósitos en Alemania; en dicho país las rentas por inversión (intereses acumulados en cuentas de ahorro) son gravadas con impuestos para sus residentes. Fuente: <https://www.deutscheskonto.org/es/apertura-cuenta-bancaria-alemania/>. Fecha de consulta: 05/11/2014.

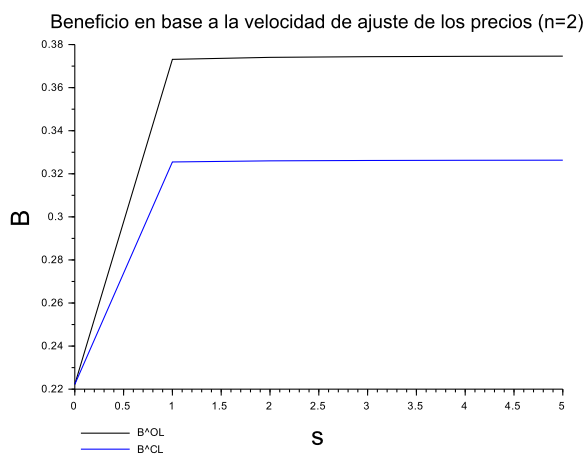
⁴Esto concuerda con lo que se menciona en el trabajo de Driskill y McCafferty (1989: 330) pues al fijar $A = 0$ desde un principio no habrá interacción en la dinámica de las estrategias de las firmas y se tendrá un estado estable estático.

Se pudo observar un mayor crecimiento del precio en una estructura de información con estrategias previstas (OL). Ello puede deberse a que una firma que sigue este tipo de estrategia incorpora menos información en sus decisiones que con estrategias tipo CL y en consecuencia no es capaz de bajar lo suficiente el nivel de precios mediante su velocidad de ajuste.

Con los parámetros particulares usados se puede verificar que por la forma del precio en ambas estructuras⁵ dado un valor de r para valores pequeños de s ($s < 1$) el valor de p en cada caso crece mucho pero para valores grandes ($s \geq 1$) el valor de p es casi constante en gran medida a la forma del denominador en el cociente involucrado en cada precio. Por tanto, con lo que se observa en la Figura 3.1, no se necesita de una alta velocidad de ajuste por parte de las empresas (basta con una velocidad de $s = 1$) para obtener precios altos. Esto se podría interpretar como una buena eficiencia por parte de los empresarios para administrar los precios.

Con todo lo anterior se puede decir que a las firmas les ayuda tener un buen sistema de ajuste de precios, pues incrementa el precio de sus bienes y a la vez repercute de forma directa en sus beneficios que son graficados en la Figura 3.2⁶. Dicho beneficio aumentará más en aquellas firmas donde manejen estrategias tipo OL y que a la vez perjudicará más a los consumidores al ser los precios más altos.

Figura 3.2: Beneficio en el MFK en base a su velocidad de ajuste para un duopolio ($n = 2$).



Notas: B^{OL} y B^{CL} son los beneficios con estrategias previstas y no previstas, respectivamente. Parámetros usados: $A = 5$, $c = 3$, $r = \rho = 3\%$.

Fuente: Elaboración propia.

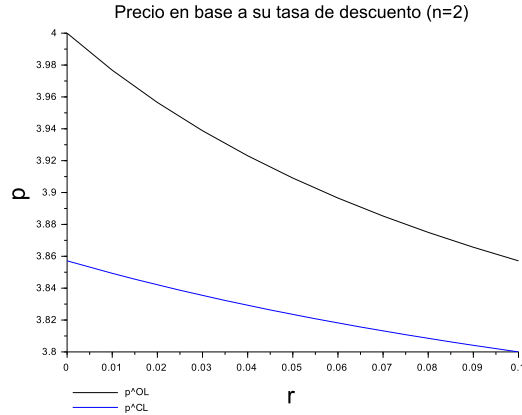
En lo que respecta a la tasa de descuento en el tiempo ($r = \rho$) se observa una relación inversa entre ella y el precio de equilibrio. Este resultado muestra que la tasa de descuento baja actúa como un incentivo para que las empresas incrementen sus precios. Es decir, si disminuye la tasa de descuento las empresas duopolistas tienen como respuesta una decisión

⁵Los precios quedan de la siguiente forma: $p^{OL} = 5 - 4 \frac{r+s}{3r+4s}$ y $p^{CL} = 5 - 4 \frac{r+2s}{3r+7s}$.

⁶A menos que sea necesario se grafica la función de beneficios en lo que sigue, de otra forma se omite al ser una función directa de los precios y cuyo comportamiento es análogo a la gráfica de los precios.

de incrementar el precio de equilibrio para de esa forma no afectar sus beneficios. Lo anterior se puede ver en la Figura 3.3.

Figura 3.3: Precio en el MFK en base a su tasa de descuento para un duopolio ($n = 2$).



Notas: p^{OL} y p^{CL} son los precios con estrategias previstas y no previstas, respectivamente. Parámetros usados: $A = 5$, $c = 3$, $s = 0.1$.

Fuente: Elaboración propia.

Con el uso de estrategias no previstas o retroalimentadas (tipo CL) un precio menor es observado con respecto a estrategias previstas. Esto se puede explicar puesto que con una estructura de información tipo CL la firma tiene un mayor conocimiento de lo que pasa en cada periodo y dado el nivel de una tasa de descuento no tiene porque afectar demasiado al precio para mantener sus niveles de beneficio.

Se concluye que a las empresas les conviene que las tasas de descuento sean bajas pues les lleva a incrementar el precio de sus bienes y de forma simultánea sus beneficios, los cuales serán mayores en aquellas firmas que manejen estrategias tipo OL, aunque con una estructura tipo CL pudiera tener más aceptación por parte de los consumidores al no tener precios demasiado altos.

3.3. Precio de equilibrio en el ME

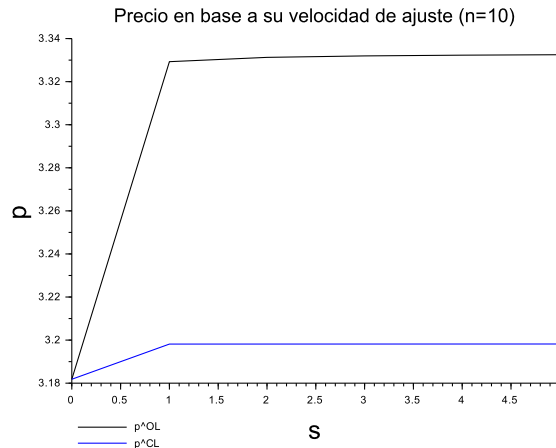
Se hace un análisis de lo que sucede antes y después de la concentración del oligopolio, así como una comparación entre estos dos panoramas.

a) Antes de la concentración:

En la Figura 3.4 se observa algo análogo a la Figura 3.1 con respecto a la velocidad de ajuste de los precios (s), pues el precio de equilibrio (p) aumenta conforme s lo hace, sin embargo a diferencia del MFK (duopolio), en esta primera parte del modelo de oligopolio (ME) con diez participantes el precio disminuye un poco, tanto en una estructura de información con estrategias previstas, como no previstas. Lo anterior indicaría una mejor situación para

el consumidor que la que se tiene con el duopolio. Las empresas necesitan ajustar de manera rápida sus precios para no obtener un precio inferior.

Figura 3.4: Precio en el ME en base a su velocidad de ajuste para un oligopolio ($n = 10$).



Notas: p^{OL} y p^{CL} son los precios con estrategias previstas y no previstas, respectivamente. Parámetros usados: $A = 5$, $c = 3$, $r = \rho = 3\%$.

Fuente: Elaboración propia.

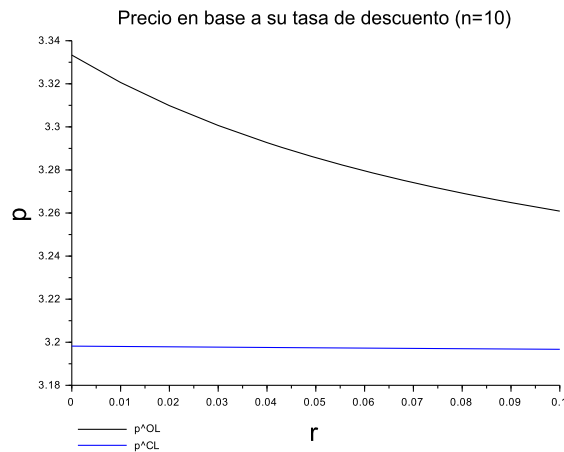
Nuevamente se puede observar un precio menor en una estructura de información con estrategias no previstas (tipo CL) como en el caso del duopolio pero esta vez la diferencia de precios es más marcada entre ambas estructuras. Esto se puede deber a que las firmas que siguen estrategia tipo CL incorporan más información de más empresas en sus decisiones que con estrategias tipo OL y en consecuencia son capaces de bajar el nivel de precios (más que en el duopolio) mediante su velocidad de ajuste.

La forma de los precios de ambas estructuras en base a los parámetros particulares usados pueden calcularse⁷ y observar que, para un valor de r dado, para valores $s < 1$ el valor de p crece en cada caso pero que para valores ($s \geq 1$) el valor de p es casi constante (por la forma del cociente involucrado en los precios). Así, como en el caso duopolista no se necesita de una alta velocidad de ajuste por parte de las firmas (basta con $s = 1$) para obtener un precio alto.

Como en el MFK, a las firmas oligopolistas les beneficia tener un buen sistema de ajuste de precios, ya que aumenta el precio de sus bienes e incrementa sus beneficios. El beneficio aumenta más en las firmas que sigan estrategias tipo OL.

Con respecto a la tasa de descuento en el tiempo ($r = \rho$) se pudo observar un comportamiento análogo al caso duopolista (MFK) pero con un precio de equilibrio menor en ambos tipos de estructura de información, OL y CL. Una tasa de descuento baja sigue actuando como incentivo para que las empresas oligopolistas aumenten sus precios y así no verse afectadas en sus ganancias. Lo anterior se muestra en la Figura 3.5.

⁷Los precios son de la siguiente forma: $p^{OL} = 5 - 20 \frac{r+s}{11r+12s}$ y $p^{CL} = 5 - 20 \frac{r+10s}{11r+111s}$.

Figura 3.5: Precio en el ME en base a su tasa de descuento para un oligopolio ($n = 10$).

Notas: p^{OL} y p^{CL} son los precios con estrategias previstas y no previstas, respectivamente. Parámetros usados: $A = 5$, $c = 3$, $s = 0.1$.

Fuente: Elaboración propia.

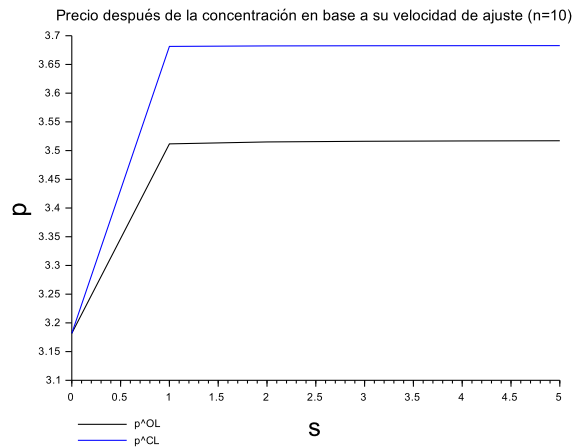
Con el uso de estrategias no previstas (tipo CL) se observa un precio menor a comparación del precio con estrategias tipo OL y un efecto casi nulo de la tasa de descuento sobre el nivel de precios. Este resultado es interesante puesto que se diría que si las firmas actúan con información tipo CL estas, al tener una mayor incorporación de información, cualquier nivel en la tasa de descuento trae como resultado casi el mismo precio y sus beneficios no se ven afectados de manera grave. Este tipo de empresas serían indiferentes al nivel de la tasa de descuento, no así para las empresas que usen estrategias tipo OL.

Con lo anterior, a las empresas les ayuda el que las tasas de descuento sean bajas siempre y cuando manejen estrategias tipo OL y ni les beneficia o les perjudica cuando usan estrategias tipo CL. A los consumidores les convendría, en cualquier caso, que existieran tasas de descuento altas para tener precios bajos.

b) Después de la concentración:

Después de la concentración de un 60% del oligopolio se pudo observar que los precios de acuerdo a las estructuras de información tipo OL y tipo CL se incrementan si se compara con el oligopolio antes de la concentración. Lo anterior puede justificarse por la forma de los precios a la que se llegó en el ME y que al concentrarse un número de empresas disminuya en cierta manera la competencia en el mercado y por ello aumenten los precios (recuérdese que en el caso duopolista del MFK los precios eran mayores).

Algo interesante es que antes de la concentración $p^{OL} > p^{CL}$ y después de la concentración del oligopolio dicha desigualdad se invierte ($p^{OL} < p^{CL}$). Esto puede ser porque con estrategias retroalimentadas (tipo CL) se aprovecha más la información de las empresas que se concentran y sacan mejor provecho de tal situación. Véase la Figura 3.6.

Figura 3.6: Precio en el ME después de la concentración en base a su velocidad de ajuste para un oligopolio ($n = 10$).

Notas: p^{OL} y p^{CL} son los precios con estrategias previstas y no previstas, respectivamente. Parámetros usados: $A = 5$, $c = 3$, $r = \rho = 3\%$, $m = 6$.

Fuente: Elaboración propia.

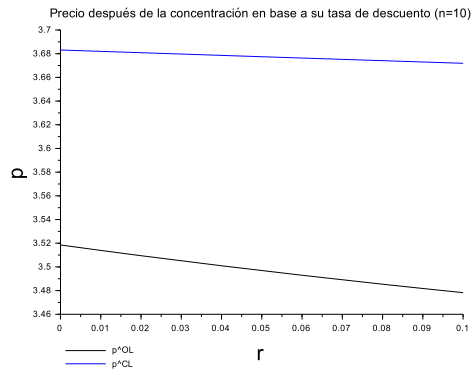
El cambio repentino en los precios en $s = 1$ puede justificarse de manera análoga a como se hizo en el MFK⁸. Como antes de la concentración, no es necesaria una alta velocidad de ajuste por parte de las firmas para obtener un precio alto.

A las firmas oligopolistas les conviene pertenecer a una concentración además de contar con un buen ajuste de precios. Con la concentración se benefician mucho más aquellas firmas que en un inicio (antes de la concentración) usan estrategias tipo CL. Es decir, si se sabe a priori que nuestra empresa en un cierto oligopolio puede pertenecer a alguna concentración, conviene usar estrategias tipo CL, obteniendo un precio menor que las firmas con estrategias tipo OL pero que con la concentración dicha situación se revertirá.

Cuando hay una concentración del 60% del oligopolio la dinámica de los precios con respecto a la tasa de descuento cambia con respecto al oligopolio sin concentración, pues con ella suben los precios. Al igual que el caso anterior esta subida en los precios puede justificarse por una reducción en la competencia. Esto se presenta en la Figura 3.7

Se observa que antes de la concentración $p^{OL} > p^{CL}$ y después de ella dicha desigualdad cambia ($p^{OL} < p^{CL}$). Ello puede deberse de nuevo a la mejor información de las empresas que se concentran con estrategias retroalimentadas (tipo CL). Ahora se ve un cambio moderado del precio en ambas estructuras de información con respecto a r (ya no solo en p^{OL} como pasaba antes de la concentración). Así, con la concentración, una vez asimilado el cambio en los precios se *relaja* el papel que la tasa de descuento ejerce sobre ellos.

⁸Se pueden sustituir los valores de los parámetros, dejar a los precios en términos de r y s y ver los valores que toman para s una vez fijando el valor de r .

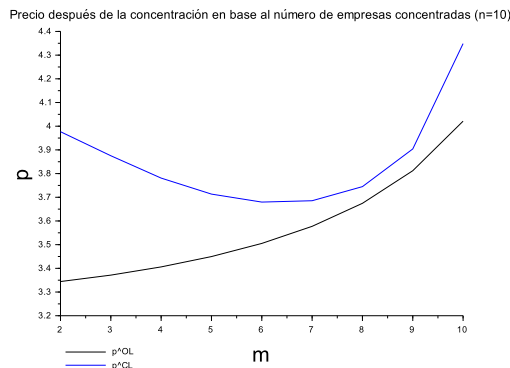
Figura 3.7: Precio en el ME después de la concentración en base a su tasa de descuento para un oligopolio ($n = 10$).

Notas: p^{OL} y p^{CL} son los precios con estrategias previstas y no previstas, respectivamente. Parámetros usados: $A = 5$, $c = 3$, $s = 0.5\%$, $m = 6$.

Fuente: Elaboración propia.

En base a lo anterior a las empresas oligopolistas les conviene ser parte de una concentración y les beneficia en menor medida que las tasas de descuento sean bajas. Mediante la concentración se benefician en mayor medida aquellas firmas que en un principio usan estrategias tipo CL antes de la concentración, como sucede en la dinámica del precio con respecto a s .

Con respecto a la dinámica de los precios en relación al número de empresas concentradas se ve que con las estrategias tipo CL habrá una disminución del precio hasta que el número de empresas sea igual a ocho (80% de la industria), una vez que pase de este número el precio tenderá a subir. Sin embargo, cuando se trata de estrategias tipo OL no importa el tamaño de la concentración (siempre y cuando sea mayor o igual que dos) pues el precio siempre irá en ascenso (Figura 3.8).

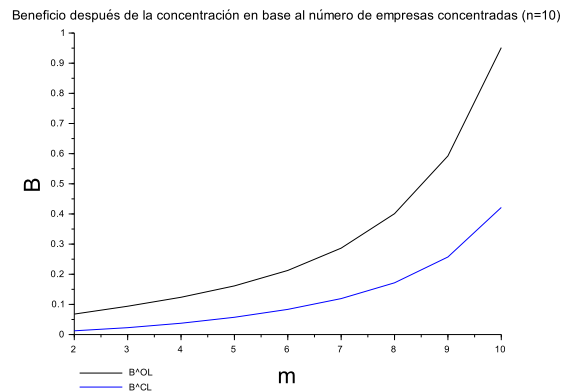
Figura 3.8: Precio en el ME después de la concentración en base al número de empresas concentradas para un oligopolio ($n = 10$).

Notas: p^{OL} y p^{CL} son los precios con estrategias previstas y no previstas, respectivamente. Parámetros usados: $A = 5$, $c = 3$, $r = \rho = 3\%$, $s = 0.5$.

Fuente: Elaboración propia.

Lo anterior no se debe confundir con los resultados de Esfahani (2011) pues en ellos se presenta el tamaño de la concentración (valor de m) tal que dicha concentración sea rentable. En este caso con los parámetros usados se tiene que los beneficios se comportan como en la Figura 3.9.

Figura 3.9: Beneficio en el ME después de la concentración en base al número de empresas concentradas para un oligopolio ($n = 10$).



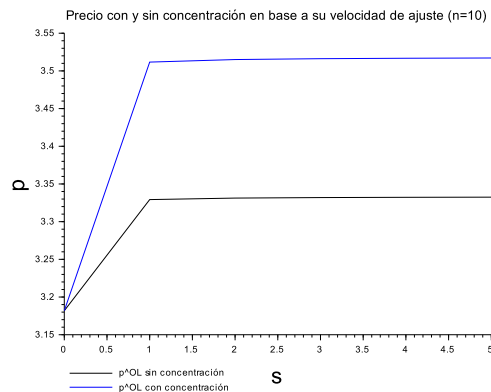
Notas: B^{OL} y B^{CL} son los beneficios para cada empresa con estrategias previstas y no previstas, respectivamente. Parámetros usados: $A = 5$, $c = 3$, $r = \rho = 3\%$, $s = 0.5$.

Fuente: elaboración propia.

c) Comparación antes y después de la concentración.

Cuando se usa una estructura de información tipo OL el precio es mayor cuando existe concentración en el oligopolio que cuando no existe, esto con respecto del parámetro de ajuste de precios (s). El porqué del cambio del precio en $s = 1$ ya fue explicado previamente. Dicha comparación se muestra en la Figura 3.10.

Figura 3.10: Precio en el ME antes y después de la concentración en base a su velocidad de ajuste para un oligopolio ($n = 10$) y estructura tipo OL.

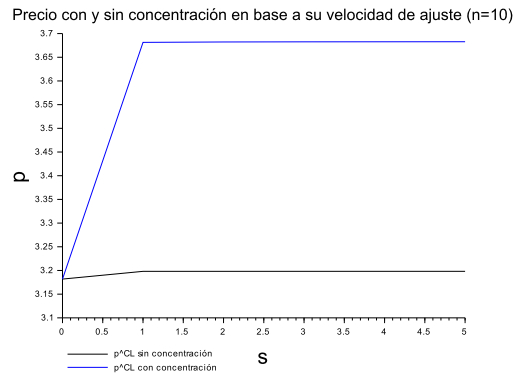


Nota: p^{OL} es el precio con estrategias previstas. Parámetros usados: $A = 5$, $c = 3$, $r = \rho = 3\%$, $m = 6$.

Fuente: Elaboración propia.

Para el caso de las estrategias tipo CL se notó una diferencia más pronunciada en el nivel de precios, manteniéndose la misma relación con respecto a la concentración que en el caso de la estructura tipo OL. Esto se observa en la Figura 3.11.

Figura 3.11: Precio en el ME antes y después de la concentración en base a su velocidad de ajuste para un oligopolio ($n = 10$) y estructura tipo CL.



Nota: p^{CL} es el precio con estrategias no previstas. Parámetros usados: $A = 5$, $c = 3$, $r = \rho = 3\%$, $m = 6$.
Fuente: Elaboración propia.

Este análisis realizado empleando simulaciones cuantitativas, permite tener un mejor conocimiento del alcance explicativo de los modelos evaluados. Se establecen condiciones bajo las cuales se presentan diversos escenarios y sus implicaciones en materia económica.

Conclusiones

Es importante contar con modelos que discutan las distintas formas de organización industrial existentes. Modelos dinámicos de oligopolio como los discutidos en este trabajo permiten conocer la dinámica de los precios a los que se llega en los diferentes tipos de equilibrio.

Se pudo ver en el primero de ellos (MDM) la influencia que tienen los costos (incorporando en ellos la velocidad con la que la firma ajusta sus niveles de producción) en el nivel de precios de los bienes. Mediante este modelo se observó que bajo ciertas condiciones (cuando el coeficiente de costos tiende a cero o la tasa de descuento tiende a infinito) el equilibrio de dicho modelo se sitúa entre el precio de equilibrio en competencia perfecta y el precio de equilibrio á la Cournot.

En el MFK la dinámica observada fue la siguiente: el comportamiento de los precios pegajosos, mediante un parámetro de ajuste de precios, afecta el nivel de producto y de beneficio para las empresas bajo la estructura de estrategias previstas y estrategias retroalimentadas para el caso de un oligopolio con dos empresas.

En el ME se presentó el caso general del segundo modelo (MFK), esto es, el caso para n empresas y además se hizo la separación entre empresas pertenecientes a una concentración dentro del oligopolio como a las que están fuera de ella y se estudió sus diferentes equilibrios bajo las estructuras de estrategias previstas y no previstas. Se vió además el incentivo que tienen las empresas para formar parte de la concentración y que consiste en tener una institución gubernamental que ajuste los precios de una manera lenta, dado el nivel de una tasa de interés.

Una discusión más a fondo de casos particulares de los dos últimos modelos (MFK y ME) mediante simulaciones del precio con respecto a parámetros como la velocidad de ajuste de precios (s) y de la tasa de descuento (r) permite decir que las firmas les beneficia tener un buen sistema de ajuste de precios, pues incrementa el precio de sus bienes y a la vez repercute de forma directa en sus beneficios tanto para un dupolio como un oligopolio.

Además, la tasa de descuento baja actúa como un incentivo para que las empresas incre-

menten sus precios en el oligopolio. Las firmas que usen estrategias tipo CL serán indiferentes al nivel de la tasa de descuento, no así para las empresas que usen estrategias tipo OL.

Por otro lado, las firmas oligopolistas se benefician a medida que la concentración se incrementa, sumado a contar con un buen ajuste de precios, el beneficio se incrementa para aquellas firmas que en un inicio (antes de la concentración) usan estrategias tipo CL.

También, a las empresas oligopolistas les conviene ser parte de una concentración y les beneficia, aunque en menor medida, que las tasas de descuento sean bajas. El beneficio será mayor en aquellas empresas donde en un principio (antes de concentrarse) usen estrategias tipo CL.

Con los parámetros usados se vio que con las estrategias tipo CL hay una disminución del precio hasta que el número de empresas es igual a ocho (80 % de la industria); para el caso de las estrategias tipo OL el precio siempre crece.

Cuando se usa una estructura de información tipo OL el precio es mayor cuando existe concentración en el oligopolio que cuando no existe (con respecto del parámetro de ajuste de precios (s)); con estrategias tipo CL es más pronunciada esta diferencia.

A todo lo anterior se puede concluir que cuando las empresas usan estrategias previstas obtienen un panorama mejor en la mayoría de los casos, sin embargo, cuando existe una concentración de empresas en el oligopolio los resultados son mejores con estrategias retroalimentadas. Esto puede deberse a que con concentración y estrategias retroalimentadas se incorpora más información en cada periodo de decisión de las empresas y por tanto tienen una mayor ventaja sobre aquellas que usan estrategias previstas.

Cabe mencionar que modelos como los aquí abordados son útiles para aquellas industrias donde es posible *adoptar* los supuestos hechos en cada uno de ellos y que es discutible, como todo modelo, aceptar el planteamiento y los resultados que de ellos emerjan.

Por otra parte, cuando se hacen simulaciones es imposible presentar todos los diferentes resultados que se pueden obtener al hacer distintas corridas y así ver en cada una de ellas las mejoras que se obtienen.

Como agenda de investigación futura se podría hacer una síntesis de modelos teóricos de oligopolio que analicen precios pegajosos y proponer un modelo propio; en lo que hasta ahora se ha hecho no se ha podido vincular directamente el modelo de Driskill y McCafferty (1989) con los modelos de Fershtman y Kamien (1987) y de Esfahani (2011) pero que se espera hacer un estudio más a fondo y tener resultados positivos. Otra posibilidad de investigación es realizar una serie de simulaciones que incorporen datos reales de las empresas y llevar a cabo un trabajo de campo para averiguar la velocidad de ajuste de precios en una determinada industria.

Anexos

Anexo 1: caso particular del MDM

En este apartado se expone un caso particular del equilibrio al que se llega en el primer teorema del modelo desarrollado por Driskill y McCafferty (1989) (MDM) donde la demanda toma una forma lineal y una función de costos cuadrática. Lo anterior se hace con el fin de conectar con el modelo de Fershtman y Kamien (1987) y el caso particular del modelo de Esfahani (2011) para el caso de un duopolio y el uso de estrategias retroalimentadas (tipo CL).

Como se observó en el MDM la función demanda y de costos son de la forma

$$\begin{aligned} P &= a - (u_1 + u_2) \\ C_i &= cu_i + \frac{b}{2}u_i^2 + \frac{A}{2}\dot{u}_i^2 \end{aligned}$$

y las condiciones

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= x_i & \dot{u}_j &= x_j(u_i, u_j) \\ u_i(0) &= u_{i0}, & u_j(0) &= u_{j0}, \quad i, j = 1, 2, i \neq j. \end{aligned}$$

Para que exista conexión entre el MDM con los otros dos se debe tener que $A = 0$,¹ y $b = 1$. Con estas especificaciones se llegó a las siguientes condiciones enunciadas en el Teorema 2.5 del MDM:

¹Se debe tener cuidado con la notación usada en los modelos; en este caso se maneja al término independiente de la función demanda como a y no como A para no confundir con el coeficiente ajustado de precios.

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{3(k_1 - \delta)}{-3} \\
k_2 &= \frac{2k_1 - \delta}{-3} \\
k_1 &< 0 \\
0 &< k_1^2 - k_2^2 \\
K &= \frac{-K + (a - c)(k_1 - \delta)}{-3}.
\end{aligned}$$

Resolviendo se tiene:

$$k_1 = \frac{\delta}{2}; \quad k_2 = 0; \quad K = \frac{a - c}{4}\delta.$$

Sin embargo para que se cumplan las condiciones de Routh-Hurwicz de estabilidad, se debe tener que $\delta < 0$.

Aceptando tasas de descuento negativas, con las condiciones arriba descritas sobre x_i y u_i y con la suposición de simetría en cantidades de producción, se puede llegar a la siguiente ecuación diferencial ordinaria (EDO) en $u_i = u$:

$$\frac{du}{dt} - \frac{\delta}{2}u = \frac{a - c}{4}\delta$$

La anterior es una EDO lineal no homogénea que se puede resolver usando las técnicas que se presentan en libros de EDO como Zill (1997: 52-56), dando como resultado:

$$u(t) = e^{(\delta/2)t} \left[\frac{c - a}{2} e^{-(\delta/2)t} + \bar{c} \right]$$

donde \bar{c} es una constante. Con las condiciones iniciales se obtiene

$$u(t) = \frac{c - a}{2} + (u_0 - \frac{c - a}{2})e^{(\delta/2)t}$$

Ahora, en estado estable (i.e. cuando $t \rightarrow \infty$) dado que $\delta < 0$ se tiene que:

$$u^* = u_1^* = u_2^* = (c - a)/2; \quad p^* = 2a - c$$

y por tanto

$$x^* = x_1^* = x_2^* = 0.$$

Anexo 2: simulaciones

En este apartado se muestran las simulaciones realizadas en el programa de interfaz matemático *scilab-5.5.1*. En algunas de ellas (como la primera) se ponen comentarios (con la instrucción: `//`) sobre instrucciones para hacer otra gráfica con la misma simulación.

Figura 3.1 y 3.2:

```
0001 //SEGUNDO MODELO (MFK): ESTRATEGIAS TIPO OL Y CL
0002 //p vs s; n=2
0003
0004 close
0005 n=2;//Número de empresas en el oligopolio
0006 A=5;//Precio max por consumo min
0007 c=3;//CF de producción
0008 r=0.03;//Tasa de descuento
0009 s=(0:1:5)';//Velocidad de ajuste de precios
0010
0011 ds=size(s,1)//Tamaño de vector s
0012 q_ol=zeros(ds);//Reserva de memoria
0013 p_ol=zeros(ds);
0014 b_ol=zeros(ds);
0015 q_cl=zeros(ds);
0016 p_cl=zeros(ds);
0017 b_cl=zeros(ds);
0018 for j = 1:ds
0019   q_ol(j)=(A-c)*(r+s(j))/((1+n)*r+(2+n)*s(j));//cantidades en eq. (en estado estable)
0020   p_ol(j)=A-n*q_ol(j);//Precios en eq.
0021   b_ol(j)=q_ol(j)*(p_ol(j)-c-0.5*q_ol(j)); //Beneficio en eq.
0022
0023   q_cl(j)=(A-c)*(r+n*s(j))/(s(j)+(1+n)*(r+n*s(j)));//cantidades en eq.
0024   p_cl(j)=A-n*q_cl(j);//Precios en eq.
0025   b_cl(j)=q_cl(j)*(p_cl(j)-c-0.5*q_cl(j)); //Beneficio en eq.
0026 end
0027 plot2d(s, [p_ol p_cl], leg="p^OL@p^CL")
0028 xtitle("Precio en base a su velocidad de ajuste (n=2)", "s", "p")
0029 //plot2d(s, [b_ol b_cl], leg="B^OL@B^CL")
0030 //xtitle("Beneficio en base a la velocidad de ajuste de los precios (n=2)", "s", "B")
```

Figura 3.3:

```
0001 //SEGUNDO MODELO (MFK): ESTRATEGIAS TIPO OL Y CL
0002 //p vs r; n=2
0003 close
0004 n=2;//Número de empresas en el oligopolio
0005 A=5;//Precio max por consumo min
0006 c=3;//CF de producción
0007 r=(0:0.01:0.1)';//Tasa de descuento de 0 a 10%
0008 s=0.1;//Velocidad de ajuste de precios
0009
0010 dr=size(r,1)
0011 q_ol=zeros(dr);
0012 p_ol=zeros(dr);
0013 q_cl=zeros(dr);
0014 p_cl=zeros(dr);
0015 for j = 1:dr
0016   q_ol(j)=(A-c)*(r(j)+s)/((1+n)*r(j)+(2+n)*s);//cantidades en eq.
0017   p_ol(j)=A-n*q_ol(j);//Precios en eq.
0018   q_cl(j)=(A-c)*(r(j)+n*s)/(s+(1+n)*(r(j)+n*s));//cantidades en eq.
0019   p_cl(j)=A-n*q_cl(j);//Precios en eq.
0020 end
0021 plot2d(r, [p_ol p_cl], leg="p^OL@p^CL")
0022 xtitle("Precio en base a su tasa de descuento (n=2)", "r", "p")
```

Figura 3.4:

```

0001 //TERCER MODELO (ME): ESTRATEGIAS TIPO OL Y CL
0002 //Antes de la concentración (M2 general)
0003 //p vs s; n=10
0004
0005 close
0006 n=10; //Número de empresas en el oligopolio
0007 A=5; //Precio max por consumo min
0008 c=3; //CF de producción
0009 r=0.03; //Tasa de descuento de 3%
0010 s=(0:1:5)'; //Velocidad de ajuste de precios
0011
0012 ds=size(s,1)
0013 q_ol=zeros(ds);
0014 p_ol=zeros(ds);
0015 q_cl=zeros(ds);
0016 p_cl=zeros(ds);
0017 for j = 1:ds
0018   q_ol(j)=(A-c)*(r+s(j))/((1+n)*r+(2+n)*s(j)); //cantidades en eq.
0019   p_ol(j)=A-n*q_ol(j); //Precios en eq.
0020   q_cl(j)=(A-c)*(r+n*s(j))/(s(j)+(1+n)*(r+n*s(j))); //cantidades en eq.
0021   p_cl(j)=A-n*q_cl(j); //Precios en eq.
0022 end
0023 plot2d(s, [p_ol p_cl], leg="p^OL@p^CL")
0024 xtitle("Precio en base a su velocidad de ajuste (n=10)", "s", "p")

```

Figura 3.5:

```

0001 //TERCER MODELO (ME): ESTRATEGIAS TIPO OL Y CL
0002 //Antes de la concentración (M2 general)
0003 //p vs r; n=10
0004 close
0005 n=10; //Número de empresas en el oligopolio
0006 A=5; //Precio max por consumo min
0007 c=3; //CF de producción
0008 r=(0:0.01:0.1)'; //Tasa de descuento de 0 a 10%
0009 s=0.1; //Velocidad de ajuste de precios
0010
0011 dr=size(r,1)
0012 q_ol=zeros(dr);
0013 p_ol=zeros(dr);
0014 q_cl=zeros(dr);
0015 p_cl=zeros(dr);
0016 for j = 1:dr
0017   q_ol(j)=(A-c)*(r(j)+s)/((1+n)*r(j)+(2+n)*s); //cantidades en eq.
0018   p_ol(j)=A-n*q_ol(j); //Precios en eq.
0019   q_cl(j)=(A-c)*(r(j)+n*s)/(s+(1+n)*(r(j)+n*s)); //cantidades en eq.
0020   p_cl(j)=A-n*q_cl(j); //Precios en eq.
0021 end
0022 plot2d(r, [p_ol p_cl], leg="p^OL@p^CL")
0023 xtitle("Precio en base a su tasa de descuento (n=10)", "r", "p")

```

Figura 3.6:

```

0001 //TERCER MODELO (ME): ESTRATEGIAS TIPO OL
0002 //DESPUÉS DE CONCENTRACIÓN
0003 //p vs s; n=10
0004
0005 close
0006 n=10;//Número de empresas en la industria (en el oligopolio)
0007 m=6;//Número de empresas concentradas
0008 A=5;//Precio max por consumo min
0009 c=3;//CF de producción
0010 r=0.03;//Tasa de descuento
0011 s=(0:1:5)';//Velocidad de ajuste de precios
0012
0013 ds=size(s,1)
0014 a=zeros(ds);//a:alfa
0015 b=zeros(ds);//b:beta
0016 qm_ol=zeros(ds);
0017 qo_ol=zeros(ds);
0018 p_ol=zeros(ds);
0019 qm_cl=zeros(ds);
0020 qo_cl=zeros(ds);
0021 p_cl=zeros(ds);
0022 for j = 1:ds//OJO: ESPECIAL EN ESPACIOS!!! Y= X!!! Y=X OK
0023 a(j)=(A-c)*(r+s(j))/((n+1)*r^2+(2*n+m*(n-m+2)+3)*r*s(j)+(n+m*(n-m+2)+2)*s(j)^2);
0024 qm_ol(j)=a(j)*m*(r+2*s(j));//cantidades en eq. que estan dentro (m)
0025 qo_ol(j)=a(j)*(r+s(j)+m*s(j));//cantidades en eq. que estan fuera (o)
0026 p_ol(j)=A-qm_ol(j)-(n-m)*qo_ol(j);//Precios en eq.
0027
0028 b(j)=(A-c)/((n+1)*r^2+(n*(m^2-m+2*n+3)+2)*r*s(j)+(n+1)*(m^2*n-m*n+n^2+n+1)-m^4+m^3)*s(j)^2);
0029 qm_cl(j)=b(j)*m*(r+(n-m+1)*s(j))*(r+(m^2-m+n+1)*s(j));//cantidades en eq. que estan dentro (m)
0030 qo_cl(j)=b(j)*(r+s(j)*(n+1))*(r+(m^2-m+n)*s(j));//cantidades en eq. que estan fuera (o)
0031 p_cl(j)=A-qm_cl(j)-(n-m)*qo_cl(j);//Precios en eq.
0032 end
0033 plot2d(s, [p_ol p_cl], leg="p^OL@p^CL")
0034 xtitle("Precio después de la concentración en base a su velocidad de ajuste (n=10)", "s", "p")

```

Figura 3.7:

```

0001 //TERCER MODELO (ME): ESTRATEGIAS TIPO OL
0002 //DESPUÉS DE CONCENTRACIÓN
0003 //p vs r; n=10
0004
0005 close
0006 n=10;//Número de empresas en la industria (en el oligopolio)
0007 m=6;//Número de empresas concentradas
0008 A=5;//Precio max por consumo min
0009 c=3;//CF de producción
0010 r=(0:0.01:0.1)';//Tasa de descuento
0011 s=0.5;//Velocidad de ajuste de precios
0012
0013 dr=size(r,1)
0014 a=zeros(dr);//a:alfa
0015 b=zeros(dr);//b:beta
0016 qm_ol=zeros(dr);
0017 qo_ol=zeros(dr);
0018 p_ol=zeros(dr);
0019 qm_cl=zeros(dr);
0020 qo_cl=zeros(dr);
0021 p_cl=zeros(dr);
0022 for j = 1:dr//OJO: ESPECIAL EN ESPACIOS!!! Y= X!!! Y=X OK
0023 a(j)=(A-c)*(r(j)+s)/((n+1)*r(j)^2+(2*n+m*(n-m+2)+3)*r(j)*s+(n+m*(n-m+2)+2)*s^2);
0024 qm_ol(j)=a(j)*m*(r(j)+2*s);//cantidades en eq. que estan dentro (m)
0025 qo_ol(j)=a(j)*(r(j)+s+m*s);//cantidades en eq. que estan fuera (o)
0026 p_ol(j)=A-qm_ol(j)-(n-m)*qo_ol(j);//Precios en eq.
0027
0028 b(j)=(A-c)/((n+1)*r(j)^2+(n*(m^2-m+2*n+3)+2)*r(j)*s+(n+1)*(m^2*n-m*n+n^2+n+1)-m^4+m^3)*s^2);
0029 qm_cl(j)=b(j)*m*(r(j)+(n-m+1)*s)*(r(j)+(m^2-m+n+1)*s);//cantidades en eq. que estan dentro (m)
0030 qo_cl(j)=b(j)*(r(j)+s*(n+1))*(r(j)+(m^2-m+n)*s);//cantidades en eq. que estan fuera (o)
0031 p_cl(j)=A-qm_cl(j)-(n-m)*qo_cl(j);//Precios en eq.
0032 end
0033 plot2d(r, [p_ol p_cl], leg="p^OL@p^CL")
0034 xtitle("Precio después de la concentración en base a su tasa de descuento (n=10)", "r", "p")

```

Figura 3.8 y 3.9:

```

0001 //TERCER MODELO (ME): ESTRATEGIAS TIPO OL
0002 //DESPUÉS DE CONCENTRACIÓN
0003 //p vs m; n=10
0004
0005 close
0006 n=10;//Número de empresas en la industria (en el oligopolio)
0007 m=(2:1:n)';//Número de empresas concentradas (1<m<=n)
0008 A=5;//Precio max por consumo min
0009 c=3;//CF de producción
0010 r=0.03;//Tasa de descuento 3%
0011 s=0.5;//Velocidad de ajuste de precios
0012
0013 dm=size(m,1)
0014 a=zeros(dm) ;//a:alfa
0015 b=zeros(dm) ;//b:beta
0016 qm_ol=zeros(dm) ;
0017 qo_ol=zeros(dm) ;
0018 p_ol=zeros(dm) ;
0019 b_ol=zeros(dm) ;
0020 qm_cl=zeros(dm) ;
0021 qo_cl=zeros(dm) ;
0022 p_cl=zeros(dm) ;
0023 b_cl=zeros(dm) ;
0024 for j=1:dm//ojo: j=1... m(l)=2
0025 a(j)=(A-c)*(r+s)/((n+1)*r^(2+(2*n+m(j))*(n-m(j)+2)+3)*r*s+(n+m(j))*(n-m(j)+3)+2)*s^2);
0026 qm_ol(j)=a(j)*m(j)*(r+2*s);//cantidades en eq. que estan dentro (m)
0027 qo_ol(j)=a(j)*(r+s+m(j)*s);//cantidades en eq. que estan fuera (o)
0028 p_ol(j)=A-qm_ol(j)-(n-m(j))*qo_ol(j);//Precios en eq.
0029 b_ol(j)=(a(j)^2*m(j)*(r+2*s)^2*(r+s+2*m(j)*s))/(2*(r+s));//Beneficio de cada empresa dentro de
    la concentración
0030
0031
0032 b(j)=(A-c)/((n+1)*r^(2+(n*(m(j))^2-m(j)+2*n+3)+2)*r*s+((n+1)*(m(j))^2*n-m(j)*n+n^2+n^2+n+1)-m(j)^4+m(j)^3)*s^2);
    qm_cl(j)=b(j)*m(j)*(r+(n-m(j)+1)*s)*(r+(m(j))^2-m(j)+n+1)*s;//cantidades en eq. que estan dentro
    (m)
0033 qo_cl(j)=b(j)*(r+s*(n+1))*(r+(m(j))^2-m(j)+n)*s;//cantidades en eq. que estan fuera (o)
0034 p_cl(j)=A-qm_cl(j)-(n-m(j))*qo_cl(j);//Precios en eq.
0035 b_cl(j)=0.5*b(j)^2*m(j)*(r+(n-m(j)+1)*s)*(r+(n+m(j)+1)*s)*(r+(m(j))^2-m(j)+n+1)*s^2;//Beneficio
    de cada empresa dentro de la concentración
0036 end
0037 plot2d(m, [p_ol p_cl], leg="p^OL@p^CL");//m comienza en 2 y p comienza en 1
0038 xtitle("Precio después de la concentración en base al número de empresas concentradas
    (n=10)", "m", "p")
0039 //plot2d(m, [b_ol b_cl], leg="B^OL@B^CL");//m comienza en 2 y p comienza en 1
0040 xtitle("Beneficio después de la concentración en base al número de empresas concentradas
    (n=10)", "m", "B")

```

Figura 3.10:

```

0001 //TERCER MODELO (ME): ESTRATEGIAS TIPO OL
0002 //Comparación de p con y sin concentración (M2 vs M3)
0003 //p vs s; n=10
0004
0005 close
0006 n=10;//Número de empresas en la industria (en el oligopolio)
0007 m=6;//Número de empresas concentradas
0008 A=5;//Precio max por consumo min
0009 c=3;//CF de producción
0010 r=0.03;//Tasa de descuento
0011 s=(0:1:5)';//Velocidad de ajuste de precios
0012
0013 ds=size(s,1)
0014 a=zeros(ds);//a:alfa
0015 q_ol=zeros(ds);
0016 qm_ol=zeros(ds);
0017 qo_ol=zeros(ds);
0018 p_ol=zeros(ds);//Precio sin concentración
0019 pd_ol=zeros(ds);//Precio con concentración
0020
0021 for j = 1:ds//OJO: ESPECIAL EN ESPACIOS!!! Y= X!!! Y=X OK
0022 //Antes de concentrar
0023 q_ol(j)=(A-c)*(r+s(j))/(1+n)*r+(2+n)*s(j);//cantidades en eq.
0024 p_ol(j)=A-n*q_ol(j);//Precios en eq.
0025
0026 //Después de concentrar
0027 a(j)=(A-c)*(r+s(j))/(1+n)*r^2+(2*n+m*(n-m+2)+3)*r*s(j)+(n+m*(n-m+3)+2)*s(j)^2;
0028 qm_ol(j)=a(j)*m*(r+2*s(j));//cantidades en eq. que estan dentro (m)
0029 qo_ol(j)=a(j)*(r+s(j)+m*s(j));//cantidades en eq. que estan fuera (o)
0030 pd_ol(j)=A-qm_ol(j)-(n-m)*qo_ol(j);//Precios en eq.
0031 end
0032 plot2d(s, [p_ol pd_ol], leg="p^OL sin concentración@p^OL con concentración")
0033 xtitle("Precio con y sin concentración en base a su velocidad de ajuste (n=10)", "s", "p")

```

Figura 3.11:

```

0001 //TERCER MODELO (ME): ESTRATEGIAS TIPO CL
0002 //Comparación de p antes y después de la conc. (M2 vs M3)
0003 //p vs s; n=10
0004
0005 close
0006 n=10;//Número de empresas en la industria (en el oligopolio)
0007 m=6;//Número de empresas concentradas
0008 A=5;//Precio max por consumo min
0009 c=3;//CF de producción
0010 r=0.03;//Tasa de descuento
0011 s=(0:1:5)';//Velocidad de ajuste de precios
0012
0013 ds=size(s,1)
0014 b=zeros(ds);//b:beta
0015 q_cl=zeros(ds);
0016 qm_cl=zeros(ds);
0017 qo_cl=zeros(ds);
0018 p_cl=zeros(ds);//Precio sin concentración
0019 pd_cl=zeros(ds);//Precio con concentración
0020 for j = 1:ds//OJO: ESPECIAL EN ESPACIOS!!! Y= X!!! Y=X OK
0021 //Antes de concentrar
0022 q_cl(j)=(A-c)*(r+n*s(j))/(s(j)+(1+n)*(r+n*s(j)));//cantidades en eq.
0023 p_cl(j)=A-n*q_cl(j);//Precios en eq
0024
0025 //Después de concentrar
0026 b(j)=(A-c)/((n+1)*r^2+(n*(m^2-m+2*n+3)+2)*r*s(j)+((n+1)*(m^2*n-m*n^2+n^2+n+1)-m^4+m^3)*s(j)^2);
0027 qm_cl(j)=b(j)*m*(r+(n-m+1)*s(j))*(r+(m^2-m+n+1)*s(j));//cantidades en eq. que estan dentro (m)
0028 qo_cl(j)=b(j)*(r+s(j)*(n+1))*(r+(m^2-m+n)*s(j));//cantidades en eq. que estan fuera (o)
0029 pd_cl(j)=A-qm_cl(j)-(n-m)*qo_cl(j);//Precios en eq.
0030 end
0031 plot2d(s, [p_cl pd_cl], leg="p^CL sin concentración@p^CL con concentración")
0032 xtitle("Precio con y sin concentración en base a su velocidad de ajuste (n=10)", "s", "p")

```

Bibliografía

- [1] AHLERSTEN, K. (2008). *Microeconomics*, Krister Ahlersten and Ventus Publishing ApS.
- [2] BISCHI, G. I., ET. AL. (2010), *Nonlinear Oligopolies: Stability and Bifurcations*, first edicion, Springer, New York.
- [3] DRISKILL, R. A. y MCCAFFERTY, S. (1989). Dynamic Duopoly with Adjustment Costs: A Differential Game Approach, *Journal of Economic Theory*, **49**, págs. 324–338.
- [4] ESFAHANI, H. (2011). Profitability of Horizontal Mergers in the Presence of Price Stickiness, *Working Paper DSE number 747*, **8** (29), págs. 1–13.
- [5] FRIEDMAN, J. W. (1983). *Oligopoly Theory*, primera edición, Antoni Bosch editor, España.
- [6] LONG, N.V. (2010). *A Survey of Dynamic Games in Economics*, first edicion, World Scientific, Singapore.
- [7] REINGANUM, J. F. y STOKEY, N. L. (1985). Oligopoly Extraction of a Common Property Natural Resource: The Importance of the Period of Commitment in Dynamic Games, *International Economic Review*, **1** (26), págs. 161–173.
- [8] SHAPIRO, C. (1989). *Industrial Organization, Volume I*, Elsevier Science Publishers B.V.
- [9] VARIAN, H. R. (1998). *Análisis Microeconómico*, tercera edición, Antoni Bosch editor, España.
- [10] VARIAN, H. R. (1999). *Microeconomía intermedia: un enfoque actual*, quinta edición, Antoni Bosch editor, España.
- [11] VIVES, X. (2001). *Precios y oligopolio*, primera edición, Antoni Bosch editor, España.
- [12] ZILL, D. G. (1997). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, sexta edición, International Thomson Editores, México.
- [13] ZOFÍO, J.L. (2007). Microeconomía II, *Documento pedagógico en línea*, págs. 1–18. Liga: http://www.uam.es/personal_pdi/economicas/jlzofiop/ade/Micro2-ADE-T4.pdf. Fecha de consulta: 20/09/2014.