



Universidad Autónoma Metropolitana  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Posgrado en Ingeniería de Procesos

**Un Enfoque de Descomposición Lagrangiana Para  
Problemas de Planeación, Secuenciamiento y Control**

Tesis para obtener el grado de Maestro en Ingeniería de Procesos

Presenta:  
Dante Mora Mariano

Ciudad de México, 2018

---

# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Introducción</b>   | <b>6</b>  |
| 1.1. Estado del Arte . . . . .   | 8         |
| 1.1.1. Planeación y Secuenciamiento . . . . .                                  | 8         |
| 1.1.2. Secuenciamiento y Control . . . . .                                     | 10        |
| 1.1.3. Planeación, Secuenciamiento y Control . . . . .                         | 11        |
| 1.2. Planteamiento del Problema . . . . .                                      | 11        |
| 1.3. Justificación . . . . .   | 12        |
| 1.4. Objetivos . . . . .   | 14        |
| 1.4.1. Objetivo General . . . . .  | 14        |
| 1.4.2. Objetivos Particulares . . . . .  | 14        |
| 1.5. Hipótesis . . . . .   | 15        |
| 1.6. Procedimiento Teórico . . . . .   | 15        |
| <b>2. Marco Teórico</b>  | <b>16</b> |
| 2.1. Jerarquía de Optimización en las Plantas de Proceso . . . . .             | 16        |
| 2.2. Planeación, Secuenciamiento y Control . . . . .                           | 18        |
| 2.3. Estrategias de Descomposición . . . . .                                   | 21        |
| 2.3.1. Descomposición Generalizada de Benders . . . . .                        | 22        |
| 2.3.2. Descomposición Lagrangiana . . . . .                                    | 24        |
| <b>3. Caso de Estudio</b>  | <b>29</b> |
| 3.1. Definición del Problema . . . . .   | 29        |
| 3.1.1. CSTR con múltiples estados estacionarios . . . . .                      | 30        |
| 3.2. Modelo de Optimización de Planeación, Secuenciamiento y Control . . . . . | 33        |
| 3.2.1. Función objetivo . . . . .  | 34        |
| 3.2.2. Restricciones . . . . .   | 35        |
| 3.2.3. Descomposición Lagrangiana para PSC . . . . .                           | 44        |

|                               |           |
|-------------------------------|-----------|
| <b>4. Resultados</b>          | <b>49</b> |
| <b>5. Conclusiones</b>        | <b>69</b> |
| 5.1. Trabajo Futuro . . . . . | 70        |

# Índice de figuras

|   |    |
|---|----|
| 1.1. Enfoque a) secuencial y b) simultáneo para abordar problemas de planeación, secuenciamiento y control. . . . .   | 14 |
| 2.1. Niveles de integración de procesos basados en planificación, secuenciamiento, optimización, control y monitoreo. . . . .   | 18 |
| 2.2. Estructura de decisión jerárquica para el problema de planeación, secuenciamiento y control. . . . .   | 21 |
| 3.1. Horizontes de tiempo empleados para las operaciones de planeación, secuenciamiento y control donde $N_p$ es el número periodos y $N_s$ es el número de slots dentro de cada periodo. . . . . | 31 |
| 3.2. Múltiples estados estacionarios para el modelo de Hicks y Ray (- solución estable, - - solución inestable). . . . .  | 33 |
| 3.3. Algoritmo de descomposición Lagrangiana para la solución del problema simultáneo de planeación, secuenciamiento y control  | 48 |
| 4.1. Convergencia de los límites inferior y superior durante la descomposición Lagrangiana para tres periodos. . . . .  | 52 |

---

|   |    |
|---|----|
| 4.2. Evolución de los límites inferior y superior durante la descomposición Lagrangiana para cuatro periodos. . . . . | 55 |
| 4.3. Perfiles de transición dinámica para los slots 1-4 para 4 periodos de producción. . . . .                        | 58 |
| 4.4. Evolución de los límites inferior y superior durante la descomposición Lagrangiana para ocho periodos. . . . .   | 60 |
| 4.5. Límites inferior y superior durante la descomposición Lagrangiana para doce periodos. . . . .                    | 62 |
| 4.6. Límites inferior y superior durante la descomposición Lagrangiana para dieciséis periodos de producción. . . . . | 66 |

# Índice de tablas

|  |    |
|--|----|
| 3.1. Parámetros para el caso de estudio . . . . .  | 32 |
| 3.2. Condiciones de operación del caso de estudio . . . . .  | 32 |
| 3.3. Costos de operación y transición (costo de inventario 0.026) . . . . .  | 32 |
| 4.1. Solución directa y con descomposición Lagrangiana para tres periodos de producción. . . . .                   | 51 |
| 4.2. Resultados para cuatro periodos de producción, profit = 19 687 329.0046, CPU = 280 s . . . . .                | 54 |
| 4.3. Descomposición Lagrangiana para PSC y ocho periodos profit = 40 855 246.8094, CPU = 9 min 59 s . . . . .      | 59 |
| 4.4. Descomposición Lagrangiana para PSC, doce periodos profit = 62 667 768.3655, CPU = 12 min 20 s . . . . .      | 63 |
| 4.5. Descomposición Lagrangiana para PSC, dieciséis periodos profit = 84 994 138.3047, CPU = 14 min 38 s . . . . . | 65 |
| 4.6. Tamaño del problema directo y con descomposición . . . . .  | 68 |

# Capítulo 1

## Introducción

En muchos sectores industriales tales como la industria petroquímica [1], farmacéutica [2] y en la producción de polímeros [3], [1] se requiere de la elaboración de múltiples productos que tienen naturaleza similar y además emplean el mismo conjunto de equipos para su producción. A estos se les conoce como procesos multiproductos y son muy empleados debido a su versatilidad y conveniencia [4]. Estas industrias enfrentan mas desafíos que antes debido al constante crecimiento del mercado, al aumento del costo de materia prima y/o mano de obra, la creciente complejidad del proceso de producción, la expansión de cadenas de suministro, las tendencias cambiantes del mercado, la fluctuación de las demandas de los clientes y el endurecimiento de las condiciones de seguridad operacional y protección ambiental [5, 6]. Para afrontar estos retos y prevalecer altamente competitivas en el mercado global, una industria de procesos necesita innovar tecnológicamente para optimizar sus operaciones y así pueda lograr un alto rendimiento económico [6].

Uno de los objetivos principales de este tipo de industrias es integrar y opti-

mizar los diferentes niveles de operación del proceso, incluyendo planeación, secuenciamiento y control (PSC) [7], y debido a las escalas de tiempo en las que se encuentran, tradicionalmente se resuelven mediante un enfoque secuencial. Desafortunadamente aunque este enfoque reduce sustancialmente la complejidad del problema de optimización de toda la planta, muchas de las compañías han optado por no continuar empleándolo ya que resolver el problema etapa por etapa regularmente genera soluciones inconsistentes. Para poder optimizar las diferentes etapas del proceso de producción se debe realizar de manera simultánea mediante la integración de los niveles de operación tomando en cuenta las interacciones que existen entre estos [7]. Se ha demostrado que la integración de las decisiones de operación genera una producción rentable y un uso eficiente de los recursos [8,9]. Sin embargo llevar a cabo la integración de las decisiones es un tarea difícil debido a que el problema de optimización se convierte en un problema de gran tamaño y su solución puede tomar demasiado tiempo. Afortunadamente los recientes enfoques mediante estrategias de descomposición pueden reducir el tiempo de resolución para la optimización de problemas integrados [9–13].

En la presente investigación, se propone el empleo de la descomposición Lagrangiana para abordar el problema de optimización simultánea de las operaciones de planeación, secuenciamiento y control. El problema de PSC se dividió en dos subproblemas, uno es un problema de programación mixta entera no lineal (MINLP, por sus siglas en inglés Mixed Integer Nonlinear Programming) que contempla la parte de planeación y secuenciamiento y el otro es un problema de programación no lineal (NLP, por sus siglas en inglés Nonlinear Programming) en el que se determinan y estabilizan las trayecto-



rias de transición entre productos mediante un esquema de control predictivo no lineal. Se analizaron, el tamaño de los problemas, el tiempo para alcanzar la solución óptima así como también se comparó la eficiencia de la técnica de descomposición contra la solución directa del problema, es decir sin emplear la estrategia de descomposición.

## 1.1. Estado del Arte

En esta sección se mencionarán algunos trabajos de investigación más representativos en los que se han empleado estrategias de descomposición para la resolución de problemas de planeación, secuenciamiento y control. En diversos estudios se ha considerado la solución simultánea de problemas de planeación y secuenciamiento, o secuenciamiento y control, en su mayoría enfocados en procesos por lotes, en su solución secuencial y en esquemas de descomposición bi-nivel. Mientras que la solución simultánea del problema integrado de planeación, secuenciamiento y control no ha sido ampliamente estudiada.

### 1.1.1. Planeación y Secuenciamiento

En el caso de planeación y secuenciamiento, Bassett et al. [14] propusieron un esquema de descomposición para plantas tipo batch multiproducto, en el que primero resolvieron el problema de planeación con el cual obtuvieron un límite superior para la función objetivo y posteriormente un nivel inferior, donde para cada periodo de producción se llevó a cabo la resolución del problema de secuenciamiento. Emplearon técnicas heurísticas que reali-

zan el desplazamiento de operaciones, para superar las infactibilidades que ocurren en el problema de secuenciamiento. Sin embargo en el modelo de secuenciamiento no se consideraron los costos y tiempos de transición para los productos. Subrahmanyam et al. [15] propusieron un algoritmo de descomposición para la solución del problema de planeación y secuenciamiento de plantas tipo batch, donde el problema de planeación se actualiza en cada iteración mediante la eliminación de las restricciones agregadas para todos los subproblemas de secuenciamiento infactibles dentro del problema de planeación. El inconveniente de este procedimiento es que el algoritmo requiere explorar en todos los niveles de descomposición para hallar un valor óptimo, lo cual requiere de mayor tiempo de computo. Erdirik y Grossman [16] desarrollaron un método de descomposición para resolver el problema simultáneo de planeación y secuenciamiento óptimos para plantas continuas multiproducto. El método que propusieron es un algoritmo de descomposición bi-nivel que aprovecha la estructura jerárquica del modelo de planeación y secuenciamiento, en el que el problema original se descompone en dos subproblemas, un problema de límite superior en el que se determinan los productos que se deben de elaborar en cada periodo de producción, los niveles de producción y los inventarios de cada producto; en el segundo problema se resuelve el problema original excluyendo los productos que no fueron seleccionados en el problema de nivel superior, y mediante un procedimiento iterativo entre ambos subproblemas se alcanza la solución del problema completo, con lo que disminuyeron la dificultad computacional del problema además de que el algoritmo es capaz de manipular grandes horizontes de planeación.

### 1.1.2. Secuenciamiento y Control

Mientras que para el estudio de la solución de problemas de secuenciamiento y control óptimos, Chu y You [11–13] trabajaron el problema de integración simultánea de secuenciamiento y optimización dinámica de procesos batch y CSTRs multiproducto, empleando la descomposición de Benders desarrollaron un método de descomposición con el objetivo de disminuir la complejidad computacional del problema. El método separa el modelo dinámico del modelo de secuenciamiento mediante la ruptura de las ecuaciones que vinculan los tiempos de procesamiento, costos de producción y los tamaños de los lotes. El problema primal incluye una serie de problemas de optimización dinámicos separables, mientras que el problema maestro es el problema de secuenciamiento con los cortes de Benders. Con el método propuesto lograron disminuir el tiempo de cómputo para alcanzar la solución óptima del problema. En 2008 Terrazas-Moreno et al. [17] aplicaron la estrategia de descomposición Lagrangiana al problema de optimización simultánea de secuenciamiento y control para procesos continuos con la cual redujeron el tiempo para llegar a la solución, además de que en algunos de los casos de estudio mostrados el valor de la función objetivo mejoró en comparación con la solución directa del problema (sin descomposición). Zhuge e Irapetritou [18] propusieron una estrategia de descomposición para la solución del problema simultáneo de secuenciamiento y optimización dinámica, en la que el problema original se dividió en dos subproblemas. Uno es un problema MINLP en el que se determina la secuencia de producción y los perfiles de transición dinámicos, mientras que el otro es un problema NLP en el que se encuentran los tiempos de producción para cada uno de los productos

considerando las demandas. Esta estrategia mostró una reducción de tiempo significativa para hallar la solución, además de que no necesita realizar un procedimiento iterativo.

### 1.1.3. Planeación, Secuenciamiento y Control

En 2014 Guitiérrez-Limón et al. [19, 20], propusieron una estrategia simultánea para resolver el problema de planeación, secuenciamiento y control (PSC) de procesos continuos. La idea principal fue explotar la interacción que existe entre las tres actividades permitiendo determinar mejores soluciones con respecto a las obtenidas de resolver el problema de forma secuencial en el que tales interacciones no se toman en cuenta. El modelo integrado de planeación, secuenciamiento y control se formuló como un problema de optimización mixto entero dinámico (MIDO, por sus siglas en inglés Mixed-Integer Dynamic Optimization ), por otra parte emplearon un esquema de control predictivo no lineal para estabilizar las trayectorias de transición entre productos. Sin embargo sólo se enfocaron en la solución del problema de PSC para períodos de producción cortos, además de que también reportaron que el tiempo de cómputo para alcanzar la solución del problema se incrementa exponencialmente conforme aumenta el número de períodos de producción.

## 1.2. Planteamiento del Problema

Actualmente para que una industria sea competitiva requiere de operar sus sistemas lo más cercano a las condiciones óptimas del proceso, de tal

manera que pueda elaborar sus productos de manera eficiente y bajo ciertas restricciones ambientales, de seguridad y especificaciones del producto [5]. Sin embargo llevar a cabo la toma de decisiones en una planta y en particular obtener una solución para problemas óptimos de planeación, secuenciamiento y control puede ser difícil, ya que estos comúnmente son problemas de gran escala que requieren de un alto costo computacional debido al gran número de variables a determinar y ecuaciones a resolver. Por otra parte la mayoría de las industrias químicas han invertido en sistemas informáticos dedicados a la solución de problemas de optimización de gran tamaño [21]. No obstante un enfoque por el cual se pueden abordar los problemas de gran tamaño es empleando estrategias de descomposición, una de estas, es la descomposición Lagrangiana la cual es una opción para resolver problemas de optimización MINLP que aprovecha la estructura y mantiene los detalles del modelo de optimización original para disminuir su dificultad computacional. Por lo que emplear esta técnica en la solución del problema de optimización de PSC se podrán contemplar períodos de producción más grandes tal y como se requiere en la práctica.

### 1.3. Justificación

Los modelos que representan los problemas de optimización tanto de planeación y secuenciamiento, secuenciamiento y control y, planeación, secuenciamiento y control suelen ser complicados debido a los horizontes de tiempo en los que se llevan a cabo dichas actividades. Debido a esto es más fácil emplear un enfoque secuencial para su solución, ya que las soluciones se ob-

tienen rápidamente. En éste, la resolución del problema de optimización se basa en el enfoque jerárquico de las operaciones, en el que primero se resuelve el problema de planeación, posteriormente de acuerdo a las decisiones de planeación se programan las operaciones principales del proceso y finalmente se toman las acciones de control. Sin embargo se ha mostrado que este método ignora las interacciones que existen entre planeación, secuenciamiento y control, lo cual tiene efectos significativos en la solución del problema [22]. Por lo que la solución generada de forma secuencial puede ser subóptima y en algunos casos puede ser infactible dando lugar a secuencias de producción erróneas. Otro enfoque es el simultáneo en el que la planificación, el secuenciamiento y control se optimizan de manera simultánea (Ver figura 1.3 ).

Por otro lado en los trabajos mencionados se ha mostrado que los esquemas de descomposición aportan buenas aproximaciones a la solución de los problemas simultáneos y en poco tiempo, por lo que emplear una estrategia de descomposición para el problema de optimización de planeación, secuenciamiento y control, se reducirá la dificultad computacional del modelo, como también se podrán encontrar soluciones factibles para periodos de producción amplios.

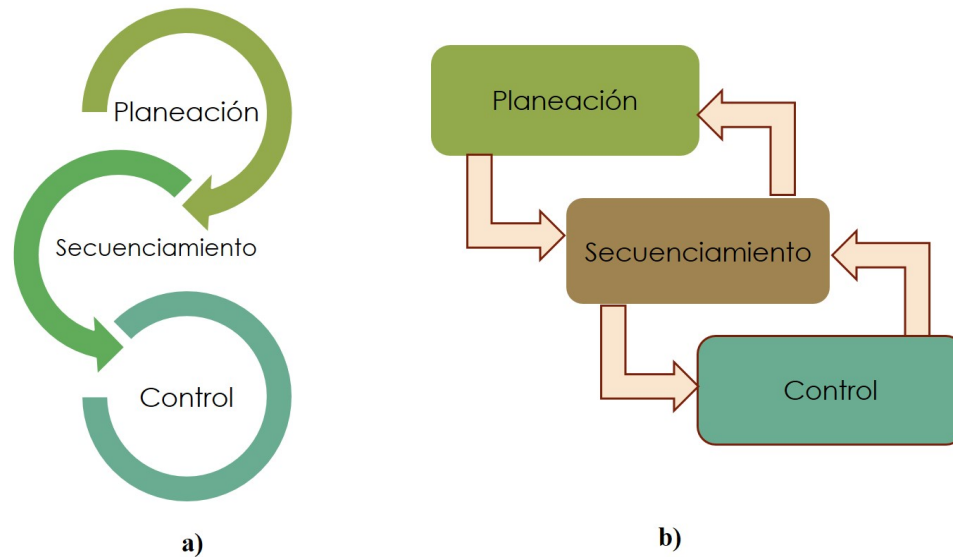


Figura 1.1: Enfoque a) secuencial y b) simultáneo para abordar problemas de planeación, secuenciamiento y control.

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Objetivo General

Resolver problemas de planeación, secuenciamiento y control empleando la estrategia de descomposición Lagrangiana.

### 1.4.2. Objetivos Particulares

- Analizar y formular el modelo matemático de un caso de estudio para su resolución.
- Implementar el algoritmo de descomposición Lagrangiana en el software GAMS.

## 1.5. Hipótesis

Aplicar el método de descomposición Lagrangiana a problemas de optimización gran tamaño, facilitará su resolución así como también disminuirá el tiempo de cómputo para la misma.

## 1.6. Procedimiento Teórico

El procedimiento teórico a seguir en el proyecto:

- Formulación y modelamiento del caso de estudio.
- Programación del algoritmo de descomposición en GAMS.
- Resolución del modelo obtenido para el caso de estudio.
- Comparación de los resultados con los obtenidos sin recurrir a la estrategia de descomposición.



# Capítulo 2

## Marco Teórico

En este capítulo se hablará acerca de la optimización de las operaciones en las plantas de proceso y en particular se abordará el problema de optimización de planeación, secuenciamiento y control. Se describirán las estrategias de descomposición más empleadas en la resolución de los modelos de optimización de gran tamaño.

### 2.1. Jerarquía de Optimización en las Plantas de Proceso

La operación de una planta de procesamiento es una tarea difícil que involucra diferentes aspectos que van desde el control de un solo equipo de la planta y/o unidades de procesamiento hasta el manejo de toda la planta o fábrica incluyendo las relaciones con otras plantas o proveedores [23].

Tradicionalmente las actividades que se llevan a cabo en la planta se organizan en niveles, colocando al último aquellas operaciones que están relacio-

nadas con el proceso en físico y en la parte superior las relacionadas con la administración de la planta, tal y como se ilustra en la figura 2.1. La información clave sobre la jerarquía de decisiones en la planta son los datos de la empresa, que principalmente consisten en información comercial y financiera así como también datos de la planta, que usualmente incluye valores de un gran número de variables de proceso. En el primer nivel se encuentran la planeación en la que se establecen los objetivos de producción que deben de satisfacer ciertas restricciones de suministro y logística. Mientras que en el segundo nivel (secuenciamiento) se abordan variaciones de tiempo y se toman decisiones para el empleo de personal y equipos. Estas dos actividades regularmente se llevan a cabo en periodos de tiempo relativamente largos, además de que tienden a estar estrechamente relacionadas debido al flujo de información y análisis que ocurre en los niveles más bajos en la jerarquía de actividades. La escala de tiempo para la toma de decisiones de planeación es del orden de meses, mientras que en los niveles más bajos de interacción con el proceso, por ejemplo, el control de este, es de fracciones de horas e inclusive segundos. La administración y optimización de toda la planta en el nivel 3 coordina la red de unidades de proceso mediante optimización en tiempo real. En el nivel de manejo y control de equipos, se encarga del control del proceso y respuestas a emergencias, mientras que en el nivel 5 (monitoreo y análisis del proceso) se recolectan datos relacionados con la operación del proceso así como la detección de fallas. Idealmente el modelamiento y optimización de los niveles se debe de realizar de forma simultánea, sin embargo esto implica que los modelos empleados sean robustos y difíciles de resolver. Sin embargo en la práctica el flujo de decisiones se realiza del nivel superior al inferior,

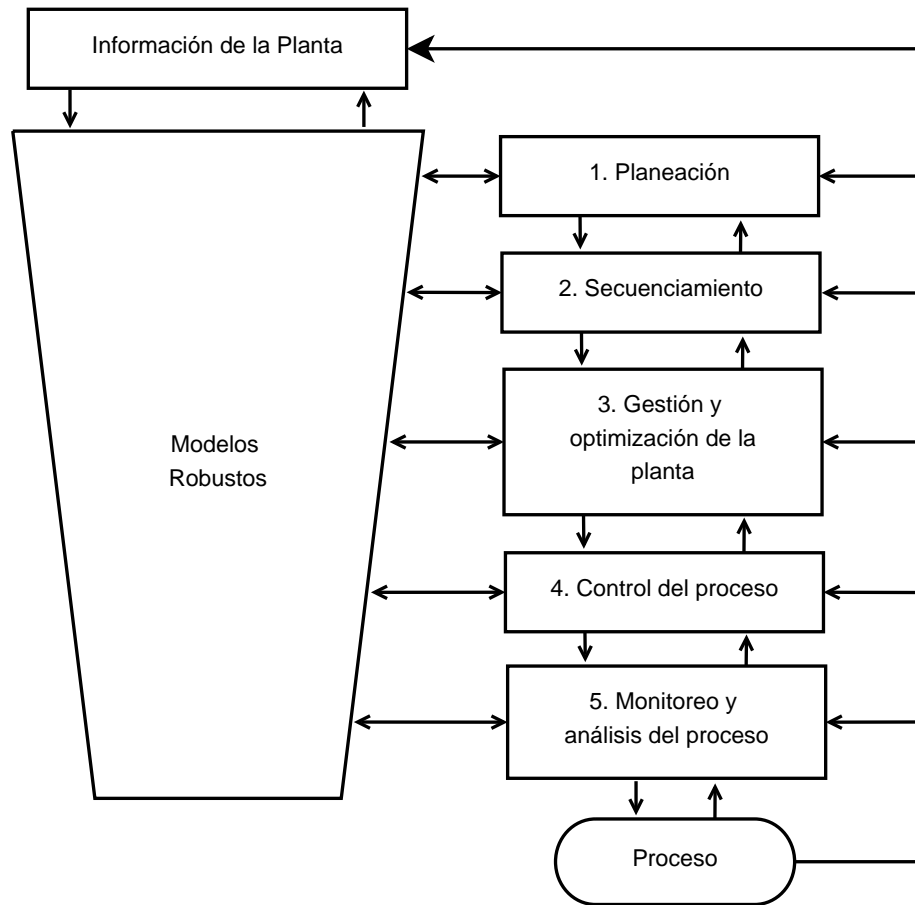


Figura 2.1: Niveles de integración de procesos basados en planificación, secuenciamiento, optimización, control y monitoreo.

dando lugar a perturbaciones entre los objetivos y su ejecución [4].

## 2.2. Planeación, Secuenciamiento y Control

Como se mencionó en la sección anterior, la toma de decisiones en las plantas de proceso se realiza de forma jerárquica, esto debido a que involucra la toma de decisiones estratégicas, tácticas y operacionales en siste-

mas dinámicos, además de que las operaciones dinámicas están presentes en procesos por lotes y en procesos continuos. Para estos últimos es necesario encontrar transiciones óptimas para manejar los cambios de grado de especificación del producto, por lo que las unidades relacionadas con la elaboración del producto requieren de integrarse en un ciclo de operación que interactúa con otras operaciones de la planta que se llevan a cabo en escalas de tiempo más amplias, como lo son la planeación, el secuenciamiento y control. Estas son tareas estrechamente relacionadas con la operación global y eficiente del proceso. Normalmente la optimización de estas actividades se lleva a cabo de manera secuencial, es decir, primero se determinan los objetivos de producción mediante la resolución del problema de planeación, después para lograr estos objetivos se resuelve el problema de secuenciamiento; es en esta etapa que para el caso de una planta de polimerización donde se elaboran productos con diferente grado de especificación, se establece la secuencia o el orden en que se deben de producir (Figura 2.2). Finalmente se determinan las acciones de control para producir cada producto y de esta manera no hay interacción entre los tres niveles de decisión [19]. Sin embargo este enfoque de solución presenta algunas desventajas, las decisiones obtenidas en el problema de planeación pueden generar problemas de secuenciamiento infactibles, esto debido a que en este nivel no se contemplan los efectos de los cambios diarios en inventarios, los cuales tienden a generar estimados de óptimos que no se pueden realizar en el nivel de secuenciamiento, por ejemplo una solución determinada en el problema de planeación estrictamente no debe generar secuencias óptimas de producción. Además la solución del problema de planeación no puede garantizarse ya que en este nivel no puede proporcionar

---

con gran precisión los costos de producción del proceso, los cuales se calculan a partir de las secuencias de producción determinadas en el problema de secuenciamiento [16, 24]. Por lo que para considerar las interacciones que existen entre los tres niveles de producción se han desarrollado trabajos para integrar estas actividades llevar a cabo su resolución de manera simultánea. La idea principal detrás del enfoque simultáneo consiste en aprovechar las interacciones que existen entre las decisiones de planeación, secuenciamiento y control, permitiendo que se mejore la búsqueda de soluciones óptimas con respecto a las obtenidas de forma secuencial [19]. Por otro lado la desventaja principal del enfoque simultáneo radica en que se requiere de resolver un problema complejo de programación mixta entera dinámica (MIDO) o un problema mixto entero no lineal (MINLP) de gran escala después de haber discretizado los modelos dinámicos lo cual puede volver intratable el problema ya que se requiere de un excesivo esfuerzo computacional [12, 20]. Para superar esta dificultad el empleo de técnicas de descomposición pueden volver manejable problemas de optimización complejos y de gran escala.

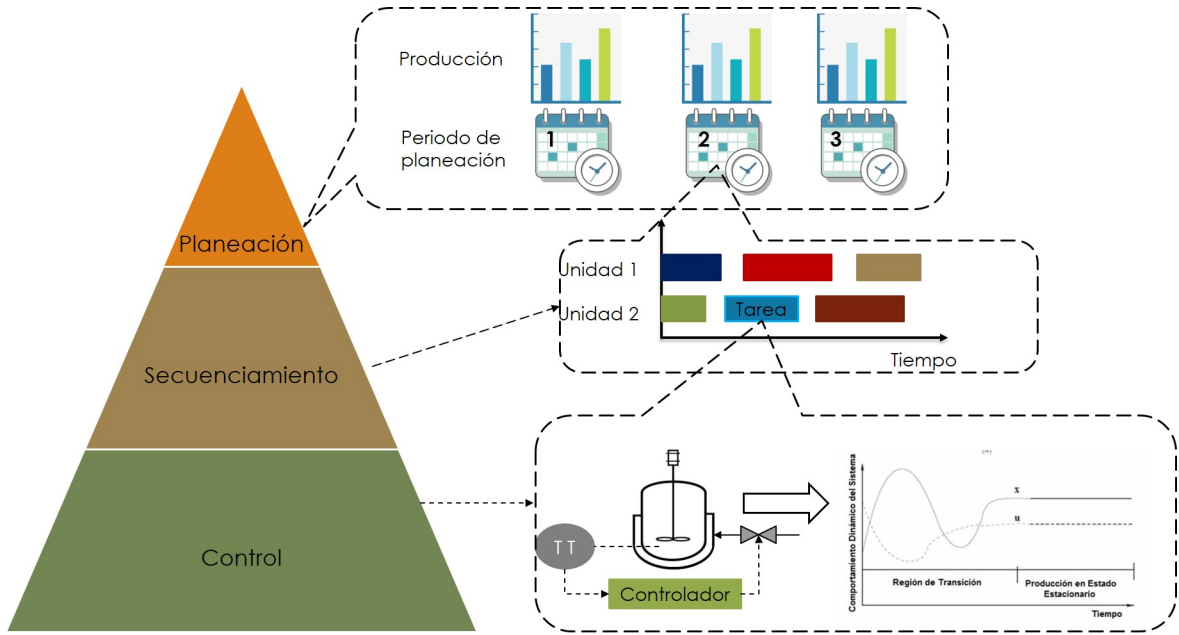


Figura 2.2: Estructura de decisión jerárquica para el problema de planeación, secuenciamiento y control.

### 2.3. Estrategias de Descomposición

Como se explicó en la sección anterior encontrar una solución al modelo de optimización para PSC es complicado debido al gran tamaño del problema, por lo que las técnicas de descomposición son una herramienta útil para reducir de manera significativa la dificultad computacional del problema, mientras que la solución obtenida sigue siendo aún mejor que la determinada de manera secuencial [6]. Entre los métodos de descomposición más útiles para abordar problemas MINLP de gran escala se encuentran la descomposición generalizada de Benders y la descomposición Lagrangiana, estas se describirán en las siguientes secciones.

### 2.3.1. Descomposición Generalizada de Benders

La estrategia de descomposición de Benders es un método por el cual un problema complicado de optimización se puede separar y simplificar su solución resolviendo un problema maestro y un subproblema. Geoffrion [25] propuso el método de descomposición de Benders para explotar la estructura de problemas de optimización MILP y MINLP, en el que la idea básica es separar todas las variables *complicadas* en un problema y el resto de las variables en otro, esta división induce a un algoritmo iterativo en el que ambos problemas se resuelven consecutivamente. En particular para un problema MINLP

$$\begin{aligned} f &= \text{mín } cx + dy & (2.1) \\ \text{s.a} \\ Ax + By &= b \\ x &\geq 0 \\ y &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Dónde  $y$  es un vector de variables binarias consideradas como complicadas, cuando se fijan las variables en algún valor  $\bar{y}$  de prueba se obtiene el siguiente

subproblema

$$\begin{aligned} f &= \text{mín } cx + \theta & (2.2) \\ \text{s.a} \\ Ax &= b - B\bar{y} \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Sí el problema anterior es factible con solución óptima  $\bar{f}$ , entonces su solución dual,  $\bar{u}(B - b\bar{y}) + d\bar{y}$  también es igual a  $\bar{f}$ , a partir de la teoría de dualidad el valor de cualquier solución factible del problema dual representa un límite inferior al valor óptimo de 2.1, por lo que

$$f \geq u(b - By) + dy \quad (2.3)$$

para cualquier valor de  $y$ . Si el subproblema es infactible entonces entonces su dual no esta acotado. Por lo tanto, una solución no factible se puede excluir mediante un corte de Benders de la forma:

$$u(b - By) \leq 0 \quad (2.4)$$

Cada vez que se resuelve el subproblema para un conjunto de valores  $\bar{y}$  de prueba, se añade un corte de la forma 2.3 ó 2.4 para obtener el siguiente problema maestro:



$$\begin{aligned}
 & \text{mín } f && (2.5) \\
 & \text{s.a} \\
 & f \geq dy + (u^k)(b - By), k \in K \\
 & (u^k)(b - By) \leq 0, k \in L \\
 & x \geq 0
 \end{aligned}$$

Dónde el conjunto  $K$  contiene todas las iteraciones en las que el subproblema es factible y aquella que no son factibles se encuentran en el conjunto  $L$ . El algoritmo de descomposición de Benders termina cuando la solución de los problemas 2.2 y 2.5 son idénticas o iguales a una tolerancia establecida.

Sin embargo este método es comúnmente empleado en problemas estocásticos y que tiene una estructura bietapa, aunque también se puede emplear en problemas determinísticos [26].

### 2.3.2. Descomposición Lagrangiana

La descomposición Lagrangiana es una técnica de optimización muy útil para problemas que contienen variables complicadas. La idea principal de esta es duplicar las variables complicadas e igualarlas y así obtener un nuevo conjunto de restricciones complicadas las cuales se añadirán a la función objetivo mediante relajación Lagrangiana, dando como resultado un problema separable con dos o más subconjuntos de restricciones [27, 28]. Para mostrar como funciona la técnica consideremos el siguiente problema de programación

matemática (P):

$$Z^P = \text{máx } cx \quad (\text{P})$$

*s.a*

$$Ax \leq b$$

$$Cx \leq d$$

$$x \in \{0, 1\}$$

Si reformulamos el modelo anterior creando una copia idéntica de la variable  $x$  para obtener el modelo (RP):

$$Z^{RP} = \text{máx } cx \quad (\text{RP})$$

*s.a*

$$Ay \leq b$$

$$Bx \leq d$$

$$x = y$$

$$x \in \{0, 1\}$$

$$y \in R$$

Dualizando la restricción  $y = x$  obtenemos un problema separable (LD):

$$Z^{LD} = \text{máx } cx + \lambda(y - x) \quad (\text{LD})$$

*s.a*

$$Ay \leq b$$

$$Bx \leq d$$

$$x \in \{0, 1\}$$

$$y \in Y$$

Dónde  $\lambda$ , es un término de penalización no negativo que se conoce como multiplicador de Lagrange. Entonces el modelo (LD) se puede separar en dos subproblemas (LD1) y (LD2):

$$Z^{LD1} = \text{máx}(c - \lambda)x \quad (\text{LD1})$$

*s.a*

$$Bx \leq d$$

$$x \in \{0, 1\}$$

$$Z^{LD2} = \text{máx } \lambda y \quad (\text{LD2})$$

*s.a*

$$Ay \leq b$$

$$y \in Y$$

Cuando todas las restricciones del problema son convexas y todas las

variables son continuas, el valor óptimo del problema original se obtiene mediante la solución del Lagrangiano dual:

$$Z^D = \min_{\lambda} Z_{LD} \quad (D)$$

Sin embargo en presencia de variables enteras y otras no convexidades existe una brecha de dualidad, lo cual significa que la solución óptima del problema dual será estrictamente más grande que la solución óptima de (P) [27, 29, 30]. Resolver el problema (D) suele ser difícil de implementar además de que el tiempo de cómputo es elevado, aunque Fisher [31] reportó algunos algoritmos para su solución. Para resolver el problema dual regularmente se emplea una aproximación heurística e iterativa en la que  $Z^{LD}$  se soluciona para generar una cota superior a (P), mientras que la heurística consiste en generar soluciones factibles de (P) las cuales se conocen como cotas inferiores [28, 31].

En cuanto al cálculo de los multiplicadores,  $\lambda$ , que se utilizan en los subproblemas, se emplea un esquema basado en el método del subgradiente, ya que este se ha mostrado trabajar bien en la práctica y es sencilla de implementar [27]. En este método los valores de los multiplicadores se calculan mediante la siguiente fórmula:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + t^k(y^k - x^k)$$

Dónde  $t^k$  es el tamaño de paso y  $y^k$  y  $x^k$  son las soluciones óptimas del pro-

blema lagrangiano ( $LD$ ) con los multiplicadores  $\lambda^k$ . La elección del tamaño de paso,  $t^k$  ha mostrado tener un efecto significativo en la convergencia al valor óptimo de  $\lambda$ . Una fórmula para determinar  $t^k$  y que ha mostrado buenos resultados es la siguiente [27] :

$$t^k = \alpha_k \frac{(Z_{LD}(\lambda^k) - Z^*)}{\|y^k - x^k\|^2}$$

En la fórmula anterior  $\alpha_k$  es un escalar que toma valores entre  $[0 - 2]$ ,  $Z_{LD}(\lambda^k)$  es el valor óptimo del problema de relajación Lagrangiana (LD) con los multiplicadores  $\lambda^k$  y  $Z^*$  es la mejor solución conocida del modelo (P).

# Capítulo 3

## Caso de Estudio

Con el objetivo de mostrar como funciona la técnica de descomposición Lagrangiana, en este capítulo se hablará acerca de la reacción de polimerización empleada como caso de estudio, también se describirá el modelo de optimización para planeación, secuenciamiento y control, y su reformulación para llevar a cabo el procedimiento de descomposición.

### 3.1. Definición del Problema

Dado un número de productos que deben ser elaborados sobre un cierto número de períodos de producción, en un solo reactor continuo de tanque agitado (CSTR) y en una sola línea de procesamiento. Las demandas mínimas de cada producto, condiciones de operación en estado estacionario de cada producto deseado, el precio de venta para cada producto, costos de inventario y materia prima se consideran constantes, es decir se planteó de forma determinista. Como se muestra en la figura 3.1 las decisiones de planeación

involucran el uso de periodos de producción que pueden abarcar una duración de semanas ó meses. De igual forma con cada periodo de producción existe un conjunto de *slots* de producción cuyo número es igual a la cantidad de productos. En el fondo de la imagen se representa el comportamiento dinámico del proceso en términos de la discretización del sistema empleando el método de colocación ortogonal en elementos finitos. El problema a abordar en este trabajo consiste en determinar de manera simultánea la mejor secuencia de producción y las trayectorias de transición dinámicas en cada periodo de producción de tal manera que se cumplan los objetivos de producción.

La formulación simultánea de PSC empleada en este trabajo contiene un número limitado de variables tales como variables binarias de secuenciamiento y variables de transición. La descomposición Lagrangiana explota esta característica y reformula el problema de PSC para obtener dos subproblemas cuya solución se obtiene de manera simultánea.

### 3.1.1. CSTR con múltiples estados estacionarios

Se empleó el modelo reportado por Hicks y Ray [32], con algunas variaciones en el valor de los parámetros originales con el fin de obtener el gráfico del multiplicidad que se muestra en la figura 3.2. En su forma adimensional el modelo toma la siguiente forma:

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{1 - y_1}{\theta} - ke^{-N/y_2}y_1 \quad (3.1)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{y_f - y_2}{\theta} + ke^{-N/y_2}y_1 - \alpha u(y_2 - y_c) \quad (3.2)$$

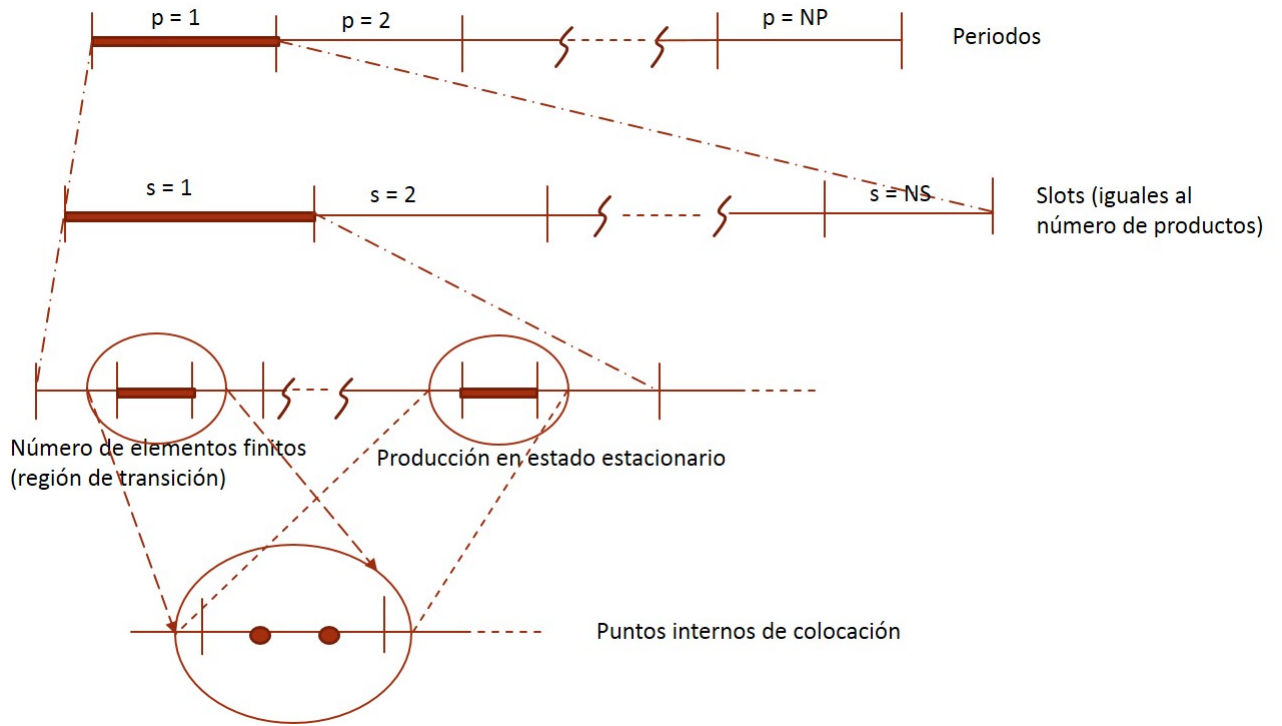


Figura 3.1: Horizontes de tiempo empleados para las operaciones de planeación, secuenciamiento y control donde  $N_p$  es el número periodos y  $N_s$  es el número de slots dentro de cada periodo.

donde  $y_1$  simboliza la concentración adimensional ( $c/c_f$ ),  $y_2$  representa la temperatura adimensional ( $T/Jc_f$ ),  $y_c$  es el temperatura adimensional de refrigerante ( $T_c/Jc_f$ ),  $y_f$  es la temperatura adimensional de la corriente de entrada al reactor ( $T_f/Jc_f$ ), y  $u$  es el flujo del medio de enfriamiento. En la tabla 3.1 se muestra los valores numéricos de los parámetros, mientras que las condiciones de operación e información relacionada con los costos de transición se muestran en la tablas 3.2 y 3.3 respectivamente.



Tabla 3.1: Parámetros para el caso de estudio

|   |          |                       |
|---|----------|-----------------------|
| Tiempo de residencia                        | $\theta$ | 20                    |
| $(-\Delta H)/(\rho C_p)$                    | $J$      | 100                   |
| Concentración de la alimentación            | $c_f$    | 7.6                   |
| Área adimensional de transferencia de calor | $\alpha$ | $1,95 \times 10^{-4}$ |
| Temperatura de la alimentación              | $T_f$    | 300                   |
| Factor pre-exponencial                      | $k_{10}$ | 300                   |
| Temperatura del refrigerante                | $T_c$    | 290                   |
| $E_1/RJc_f$                                 | $N$      | 5                     |

Tabla 3.2: Condiciones de operación del caso de estudio

| producto | $y_1$  | $y_2$  | u   | costo, \$/mol |
|----------|--------|--------|-----|---------------|
| A        | 0.0944 | 0.7766 | 340 | 100           |
| B        | 0.1367 | 0.7293 | 390 | 50            |
| C        | 0.1926 | 0.6881 | 430 | 30            |
| D        | 0.2632 | 0.6519 | 455 | 80            |

Tabla 3.3: Costos de operación y transición (costo de inventario 0.026)

| producto | $C^{oper}$ \$/mol | $C^{trans}$ , \$ |    |    |    |
|----------|-------------------|------------------|----|----|----|
|          |                   | A                | B  | C  | D  |
| A        | 0.13              | 0                | 10 | 12 | 15 |
| B        | 0.22              | 12               | 0  | 12 | 13 |
| C        | 0.35              | 14               | 12 | 0  | 10 |
| D        | 0.25              | 12               | 15 | 13 | 0  |

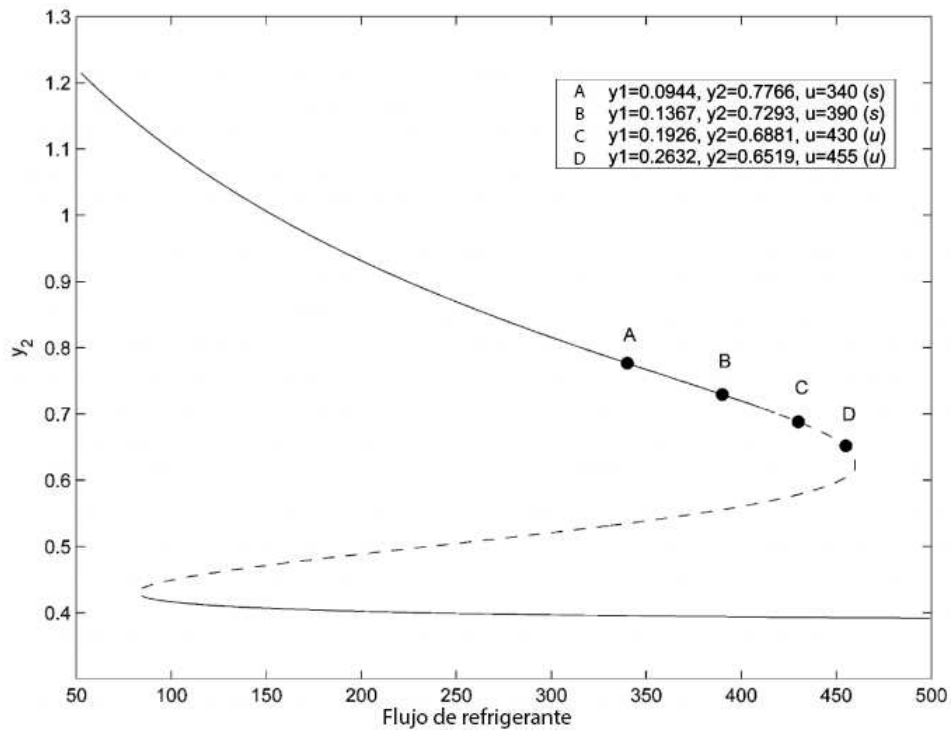


Figura 3.2: Múltiples estados estacionarios para el modelo de Hicks y Ray (- solución estable, - - solución inestable).

### 3.2. Modelo de Optimización de Planeación, Secuenciamiento y Control

En esta sección se presenta el modelo de programación para optimizar simultáneamente las actividades de planeación, secuenciamiento y control. Primero se presenta el modelo completo para PSC [19] y posteriormente se reformula para llevar a cabo la descomposición.

### 3.2.1. Función objetivo

La función objetivo incluye la diferencia entre las ganancias por la venta de cada producto menos todos los costos relacionados con la manufactura de los mismos. También se incluye un término que penaliza las desviaciones de estado estacionario, esto con el fin de obtener perfiles de transición uniformes.

$$\begin{aligned} \text{máx } \Omega = & \sum_{i=1}^{NP} \sum_{p=1}^{N_p} P_{ip} S_{ip} - \sum_{i=1}^{NP} \sum_{p=1}^{N_p} C_{ip}^{oper} q_{ip} - C^{inv} \sum_{i=1}^{NP} \sum_{p=1}^{N_p} A_{ip} - \\ & \sum_{i=1}^{NP} \sum_{k=1}^{NP} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{p=1}^{N_p} C_{ik}^{trans} Z_{iksp} - \sum_{i=1}^{NP} \sum_{k=1}^{NP} \sum_{p=1}^{N_p} C_{ik}^{trans} Z'_{ikp} - \varphi \end{aligned} \quad (3.3)$$

Donde

$$\varphi = \omega_y \int_0^{t_f} \left[ \sum_i \Delta y_i(t) \right]^2 dt \quad (3.4)$$

En la ecuación 3.3,  $N_p$  es el número de períodos de producción,  $N_s$  es el número de slots y  $NP$  es el número de productos,  $P_{ip}$  representa el precio de venta (\$/mol) de cada producto  $i$  en el periodo  $p$ ,  $S_{ip}$  es la cantidad de productos (mol) vendidos en el periodo  $p$ , mientras que  $C_{ip}^{oper}$ ,  $C^{inv}$ ,  $C_{ik}^{trans}$ , corresponden a los costos unitarios de operación del producto  $i$  en el periodo  $p$ , inventario y transición del producto  $i$  al producto  $k$  respectivamente,  $A_{ip}$  es una sobreestimación lineal de la función integral del inventario a través del tiempo y  $q_{ip}$  representa la producción total del producto  $i$  en el período  $p$ . De manera similar en la ecuación 3.4  $y_i(t)$  representa la variable de estado del proceso y  $\omega_y$  es una función peso.

Cabe mencionar que durante las transiciones entre productos se genera pro-

ducto fuera de especificación, lo cual disminuye las ganancias totales debido a que este producto no se puede comercializar. Por lo que el objetivo de la ecuación 3.4 es penalizar largos tiempos de transición, ya que entre mayor es el tiempo de transición la cantidad de producto fuera de especificación aumenta.

### 3.2.2. Restricciones

El siguiente conjunto de ecuaciones representa las restricciones que están relacionadas con planeación y secuenciamiento del proceso.

- **Asignación.** Esta restricción asegura que solo un producto puede ser elaborado en cada slot, sin embargo se puede producir el mismo producto más de una vez en el mismo periodo.

$$\sum_{i=1}^{NP} W_{isp} = 1, \forall s \in N_s; \forall p \in N_p \quad (3.5)$$

- **Tiempo de Producción.** Este está sujeto al tiempo de duración del periodo de producción  $H_p$  como un límite superior de acuerdo a la ecuación 3.6. El tiempo total de producción ( $\theta_{ip}$ ) empleado para elaborar el producto  $i$  en el periodo  $p$  se define en la ecuación 3.7 como la suma de todos los tiempo de producción del slot en el que se elaboró el producto  $i$  ( $\hat{\theta}_{isp}$ )

$$0 \leq \hat{\theta}_{isp} \leq W_{isp} H_p, \forall i \in NP; \forall p \in N_p \quad (3.6)$$

$$\theta_{ip} = \sum_{s=1}^{N_s} \hat{\theta}_{isp}, \forall i \in NP; \forall p \in N_p \quad (3.7)$$

- Tasa de producción. La cantidad de producto  $i$  que se produce en el slot  $s$  durante el periodo  $p$  ( $\hat{q}_{isp}$ ) está dada por la ecuación 3.8, mientras que el total de producto  $i$  se determina como la suma de la producción de  $i$  en los slots del periodo  $p$  ( $q_{ip}$ ).  $r_i$  es la tasa de producción del producto  $i$ .

$$\hat{q}_{isp} = r_i \hat{\theta}_{isp}, \forall s \in N_s; \forall i \in NP; \forall p \in N_p \quad (3.8)$$

$$q_{ip} = \sum_{s=1}^{N_s} \hat{q}_{isp}, \forall i \in NP; \forall p \in N_p \quad (3.9)$$

- Transiciones dentro de periodos. A través de la variable binaria  $Z_{iksp}$ , se realiza la transición entre dos slots del mismo periodo.

$$\begin{aligned} Z_{iksp} &\geq W_{isp} + W_{k,s+1,p} - 1, \forall i \in NP; \forall k \in NP; s \\ &= 1, \dots, N_s - 1; \forall p \in N_p; i \neq k \end{aligned} \quad (3.10)$$

- Transición entre periodos. Mediante la variable  $Z'_{ikp}$  se define si se lleva a cabo o no la transición entre dos periodos de producción.

$$\begin{aligned} Z'_{ikp} &\geq W_{i,N_s,p} + W_{k,1,p+1} - 1, \forall i \in NP; \forall k \in NP; p \\ &= 1, \dots, N_p - 1; i \neq k \end{aligned} \quad (3.11)$$

- Relaciones de tiempo. Tiempo de inicio del primer slot del primer periodo

$$T_{11}^s = 0 \quad (3.12)$$

Tiempo final para cada slot. Se define como la suma del tiempo inicial, el tiempo de producción y el tiempo de transición.

$$T_{sp}^e = T_{sp}^s + \sum_i \hat{\theta}_{isp} + \sum_i \sum_k \tau_{ik} Z_{iksp}, \forall s \in N_s; \forall p \in N_p \quad (3.13)$$

$T_{sp}^s$  y  $T_{sp}^e$  son el tiempo inicial y final de producción en el slot  $s$  y el periodo  $p$  respectivamente. El término  $\tau_{ik} Z_{iksp}$  representa el tiempo de transición entre dos slots consecutivos para realizar el producto  $i$  y  $k$  en el periodo  $p$ . El tiempo de arranque para el primer slot de cualquier periodo  $\neq 1$ , mediante la ecuación 3.14 se establece que el primer slot del periodo  $p$  inicia cuando el último slot del periodo anterior termina.

$$T_{1p}^s = T_{N_s, p-1}^e, \forall p > 1 \in N_p \quad (3.14)$$

El tiempo en que termina el último slot de cualquier periodo establece un límite superior del tiempo de finalización del último slot para un periodo de tiempo dado.

$$T_{N_s, p}^e \leq HT_p, \forall p \in N_p \quad (3.15)$$

- Inventario. En las restricciones que se muestran a continuación  $\mathcal{I}_{ip}$  representa el inventario del producto  $i$  en el periodo de tiempo  $p$ ,  $\hat{\theta}_{isp}$  es el tiempo destinado para la elaboración de un producto  $i$  en el slot  $s$  en el periodo  $p$ ,  $S_{ip}$  es la cantidad de productos  $i$  comercializados en el periodo  $p$  y  $\mathcal{A}_{ip}$  es la sobreestimación lineal de la función de inventario

a lo largo del tiempo. Primer periodo

$$\mathcal{I}_{i1} = \mathcal{I}_i^0 + \sum_s r_i \widehat{\theta}_{is1} - S_{i1}, \forall i \in NP \quad (3.16)$$

Periodos diferentes al primero

$$\mathcal{I}_{ip} = \mathcal{I}_{i,p-1} + \sum_s r_i \widehat{\theta}_{isp} - S_{ip}, \forall i \in NP; \forall p > 1 \in N_p \quad (3.17)$$

Área

$$\mathcal{A}_{ip} = (\mathcal{I}_{i,p-1} - S_{i,p-1})H_p + r_i \theta_{ip} H_p, \forall i \in NP; \forall p \in N_p \quad (3.18)$$

- Tasa de demanda. Establece las ventas del producto  $i$  del periodo  $p$  como un límite superior de demanda de ese producto al final del periodo de producción.

$$S_{ip} \geq d_i, \forall i \in NP; \forall p \in N_p \quad (3.19)$$

Nótese que la producción de cualquiera de los productos puede ser excedida, además que establecer valores de demandas demasiado altos puede generar soluciones infactibles [16].

- Restricciones de simetría. Con el fin de evitar soluciones equivalentes, que incrementan la dificultad computacional se han añadido las siguientes restricciones.

La restricción 3.20 asegura que cada producto  $i$  es asignado por lo

menos a un slot del periodo  $p$

$$\mathbb{Y}_{ip} \geq W_{isp}, \forall i \in NP; \forall s \in N_s; \forall p \in N_p \quad (3.20)$$

Mientras que la restricción 3.21 establece que si el producto  $i$  es elaborado dentro del periodo de producción  $p$  entonces al menos un slot debe emplearse para su producción, de otra manera no se asigna ningún slot

$$\mathbb{Y}_{ip} \leq \mathbb{N}_{ip} \leq \bar{\mathbb{N}}_{ip} \mathbb{Y}_{ip}, \forall i \in NP; \forall p \in N_p \quad (3.21)$$

donde  $\mathbb{N}_{ip}$  es un límite superior.

Mediante las siguientes restricciones se establece si el producto  $i$  es asignado al primer slot de cualquier periodo  $p$  entonces este producto debe usar tantos slots como sea posible. En el caso contrario el producto  $i$  emplea al menos un slot ya que ha sido producido durante el periodo  $p$

$$\mathbb{N}_{ip} \geq N - [(\sum_i \mathbb{Y}_{ip} - 1)] - M(1 - W_{i1p}) \quad (3.22)$$

$$\mathbb{N}_{ip} \leq N - [(\sum_i \mathbb{Y}_{ip} - 1)] + M(1 - W_{i1p}) \quad (3.23)$$

A continuación se describen las restricciones asociadas con el comportamiento dinámico del proceso, para lo que se empleó una formulación de control predictivo no lineal basado en modelo (NLMPC, por sus siglas en inglés Nonlinear Model Predictive Control). Se usó el método de colocación ortogonal en elementos finitos para la discretización del



modelo dinámico (Ecuaciones 3.1 y 3.2). De esta manera, cada slot es dividido en una serie de elementos finitos y dentro de cada elemento finito se seleccionó un número de puntos de colocación y de esta manera se obtiene un conjunto de restricciones no lineales que se deben de satisfacer.

Las ecuaciones 3.24 y 3.25 proporcionan la aproximación de las variables de estado en cada punto de colocación,  $y_{1_{fcsp}}$  y  $y_{2_{fcsp}}$  son el valor de la temperatura y concentración en cada punto de colocación  $c$  del elemento finito  $f$  en el slot  $s$  en el periodo  $p$ .

$$y_{1_{fcsp}} = y_{o1_{fsp}} + t_{sp}h_{fsp} \sum_{j=1}^{N_{cp}} \Lambda_{j,c} \dot{y}_{1_{fcsp}}, \forall f, c, s, p \quad (3.24)$$

$$y_{2_{fcsp}} = y_{o2_{fsp}} + t_{sp}h_{fsp} \sum_{j=1}^{N_{cp}} \Lambda_{j,c} \dot{y}_{2_{fcsp}}, \forall f, c, s, p \quad (3.25)$$

La continuidad entre elementos finitos esta dada por las siguientes restricciones. Solo las variables de estado deben ser continuas cuando se va de un elemento finito a otro, mientras que las variables manipuladas no presentan discontinuidad entre elementos finitos.

$$y_{o1_{fcsp}} = y_{o1_{f-1,s,p}} + t_{sp}h_{f-1,s,p} \sum_{j=1}^{N_{cp}} \Lambda_{j,c} \dot{y}_{1_{f-1,c,s,p}}, \quad (3.26)$$

$$\forall f \geq 2, s, p$$

$$y_{o2_{fcsp}} = y_{o2_{f-1,s,p}} + t_{sp}h_{f-1,s,p} \sum_{j=1}^{N_{cp}} \Lambda_{j,c} \dot{y}_{2_{f-1,c,s,p}}, \quad (3.27)$$

$$\forall f \geq 2, s, p$$

En las restricciones anteriores la longitud de todos los elementos finitos es la misma y se determina mediante la siguiente ecuación

$$h_{fsp} = \frac{1}{N_{fe}} \quad (3.28)$$

Las ecuaciones 3.29 y 3.30 representan el modelo dinámico de forma discretizada

$$\dot{y}_{1fcsp} = \frac{1 - y_{1fcsp}}{\theta} - ke^{-N/y_{2fcsp}} y_{1fcsp}, \quad \forall f, c, s, p \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_{2fcsp} = & \frac{y_f - y_{2fcsp}}{\theta} - ke^{-N/y_{2fcsp}} y_{1fcsp} \\ & - \alpha u_{fcsp} (y_{2fcsp} - y_c), \quad \forall f, c, s, p \end{aligned} \quad (3.30)$$

Los valores iniciales y finales de las variables controladas y manipuladas se calculan mediante las ecuaciones 3.31 - 3.36, las ecuaciones 3.31 y 3.32 determinan el valor para cada variable de estado al inicio de cada slot, mientras que con las ecuaciones 3.33 y 3.34 se calcula el valor de cada variable de estado al termino de cada slot,  $y_{1ss,i}$  y  $y_{2ss,i}$  son el valor de la temperatura y concentración en condiciones de estado

estacionario.

$$y_{1in,s,p} = \sum_{i=1}^{NP} y_{1ss,i} W_{i,s,p}, \forall s \neq 1, p \quad (3.31)$$

$$y_{2in,s,p} = \sum_{i=1}^{NP} y_{2ss,i} W_{i,s,p}, \forall s \neq 1, p \quad (3.32)$$

$$\bar{y}_{1sp} = \sum_{i=1}^{NP} y_{1ss,i} W_{i,s+1,p}, \forall s, p \quad (3.33)$$

$$\bar{y}_{2sp} = \sum_{i=1}^{NP} y_{2ss,i} W_{i,s+1,p}, \forall s, p \quad (3.34)$$

$$\bar{y}_{1sp} = \sum_{i=1}^{NP} y_{1ss,i} W_{i,1,p+1}, \forall s, p \quad (3.35)$$

$$\bar{y}_{2sp} = \sum_{i=1}^{NP} y_{2ss,i} W_{i,1,p+1}, \forall s, p \quad (3.36)$$

Las ecuaciones 3.37 - 3.39 definen el valor de la variable manipulada al inicio y al final de cada slot  $s$ , mediante la ecuación 3.39 el sistema toma el valor de estado deseado en cada slot  $s$ .

$$u_{in,s,p} = \sum_{i=1}^{NP} u_{ss,i} W_{i,s,p}, \forall s \neq 1, p \quad (3.37)$$

$$\bar{u}_{sp} = \sum_{i=1}^{NP} u_{ss,i} W_{i,s+1,p}, \forall s, p \quad (3.38)$$

$$\bar{u}_{sp} = \sum_{i=1}^{NP} u_{ss,i} W_{i,1,p+1}, \forall s, p \quad (3.39)$$

$$u_{1,1,s,p} = u_{in,1,p}, \forall s, p \quad (3.40)$$

$$u_{N_{fe},N_c,s,p} = \bar{u}_{s,p}, \forall s, p \quad (3.41)$$

La ecuación 3.40 fija el valor de la variable manipulada en el primer elemento finito del primer punto de colocación  $c$  de cada slot  $s$  y de cada periodo de producción  $p$  como los valores que la variable toma al comienzo del mismo slot  $s$ . Con la ecuación 3.41 se determina el valor de la variable manipulada al final de cada slot  $s$  en el último elemento finito del último punto de colocación del periodo  $p$  como el valor deseado de estado estacionario de la variable en el slot  $s$ . Mediante las ecuaciones 3.42 y 3.43 se calcula el valor de las variables de estado del sistema al comienzo de cada slot, finalmente la ecuación 3.44 representa la discretización del tiempo durante los periodos de transición.

$$y_{o1_{1,s,p}} = y_{o1_{in,s,p}}, \forall s, p \quad (3.42)$$

$$y_{o2_{1,s,p}} = y_{o2_{in,s,p}}, \forall s, p \quad (3.43)$$

$$\bar{t}_{fcsp} = (f - 1) \frac{t_{sp}}{N_{fe}} + \frac{t_{sp}}{N_{fe}} \gamma_c \quad (3.44)$$

La manera en que interaccionan las actividades individuales de PSC entre ellas es mediante la manipulación del tiempo de transición ( $\tau_{ik}$ ) y el tiempo de producción ( $\theta_{ip}$ ), las cuales se integran en una sola variable independiente del modelo dinámico  $t_{sp}$ , que se define en la ecuación 3.45. Esto significa que todos los estados del sistema cambian con el tiempo cuando una variable de control y/o una variable manipulada cambia, este es uno de los puntos clave en donde las formulaciones de secuenciamiento y control interaccionan. Un cambio en el comportamiento dinámico del proceso generará diferentes tiempos de operación lo cual modificará las decisiones de secuenciamiento. A demás la ta-

sa de producción  $r_i$  esta relacionada con la dinámica del proceso, por lo que es claro que cualquier interacción entre la optimización de las decisiones secuenciamiento y control tendrá un impacto en  $r_i$

$$t_{sp} = \sum_i \sum_k \tau_{ik} Z_{iksp} \quad (3.45)$$

### 3.2.3. Descomposición Lagrangiana para PSC

Para aplicar la metodología de descomposición presentada previamente, el modelo descrito en la sección anterior se reformuló de la siguiente manera. Primero se duplicaron las variables claves

$$V_{isp} = W_{isp} \quad (3.46a)$$

$$X_{ip} = Y_{ip} \quad (3.46b)$$

$$\gamma_{iksp} = Z_{iksp} \quad (3.46c)$$

$$\gamma'_{ikp} = Z'_{ikp} \quad (3.46d)$$

$$f_{sp} = t_{sp} \quad (3.46e)$$

Las ecuaciones 3.46a a 3.46e generan copias de las variables de secuenciamiento, de transición entre periodos, de transición dentro de los periodos y del tiempo de transición.

Posteriormente se asignó una copia de las variables a las restricciones de planeación y secuenciamiento y otras a las de optimización dinámica.

- Se duplicaron las siguientes restricciones

$$\sum_{i=1}^{NP} V_{isp} = 1 \quad (3.47a)$$

$$\gamma_{iksp} \geq V_{isp} + V_{k,s+1,p} - 1 \quad (3.47b)$$

$$\gamma'_{ikp} \geq V_{i,N_s,p} + V_{k,1,p+1} - 1 \quad (3.47c)$$

$$\mathbb{X}_{ip} \geq V_{isp} \quad (3.47d)$$

$$\mathbb{X}_{ip} \leq \mathbb{N}_{ip} \leq \bar{\mathbb{N}}_{ip} \mathbb{X}_{ip} \quad (3.47e)$$

$$\mathbb{N}_{ip} \geq N - [(\sum_i \mathbb{X}_{ip} - 1)] - M(1 - V_{i1p}) \quad (3.47f)$$

$$\mathbb{N}_{ip} \leq N - [(\sum_i \mathbb{X}_{ip} - 1)] + M(1 - V_{i1p}) \quad (3.47g)$$

$$f_{sp} = \sum_i \sum_k \tau_{ik} \gamma_{iksp} \quad (3.47h)$$

- $V_{isp}$  sustituye a  $W_{isp}$  en la ecuaciones 3.31-3.39.

Las copias de las variables (3.46a-3.46e) se relajan y se añaden a la función objetivo, con lo cual toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \text{máx } \Omega_{RP} = & \sum_{i=1}^{NP} \sum_{p=1}^{N_p} P_{ip} S_{ip} - \sum_{i=1}^{NP} \sum_{p=1}^{N_p} C_{ip}^{oper} q_{ip} - C^{inv} \sum_{i=1}^{NP} \sum_{p=1}^{N_p} A_{ip} \\
 & - \sum_{i=1}^{NP} \sum_{k=1}^{NP} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{p=1}^{N_p} C_{ik}^{trans} Z_{iksp} - \sum_{i=1}^{NP} \sum_{k=1}^{NP} \sum_{p=1}^{N_p} C_{ik}^{trans} Z'_{ikp} - \varphi \\
 & + \sum_{i=1}^{NP} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{p=1}^{N_p} [\lambda_W (V_{isp} - W_{isp})] + \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{NP} [\lambda_Y (\mathbb{X}_{ip} - \mathbb{Y}_{ip})] \\
 & + \sum_{i=1}^{NP} \sum_{k=1}^{NP} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{p=1}^{N_p} [\lambda_z (\gamma_{iksp} - Z_{iksp})] + \sum_{i=1}^{NP} \sum_{k=1}^{NP} \sum_{p=1}^{N_p} [\lambda_{z'} (\gamma'_{ikp} - Z'_{ikp})] \\
 & + \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{p=1}^{N_p} [\lambda_t (f_{sp} - t_{sp})]
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

donde  $\lambda_W$ ,  $\lambda_Y$ ,  $\lambda_z$ ,  $\lambda_{z'}$ ,  $\lambda_t$  son los multiplicadores de lagrange. Estos se actualizan después de cada iteración del algoritmo de descomposición lagrangiana.

Finalmete la formulación anterior el problema se puede separar en un subproblema de planeación y secuenciamiento y un subproblema de control.

■ **Subproblema de planeación y secuenciamiento**

$$\begin{aligned}
 \text{máx } \Omega^{PS} = & \sum_{i=1}^{NP} \sum_{p=1}^{N_p} P_{ip} S_{ip} - \sum_{i=1}^{NP} \sum_{p=1}^{N_p} C_{ip}^{oper} q_{ip} - C^{inv} \sum_{i=1}^{NP} \sum_{p=1}^{N_p} A_{ip} \\
 & - \sum_{i=1}^{NP} \sum_{k=1}^{NP} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{p=1}^{N_p} C_{ik}^{trans} Z_{iksp} - \sum_{i=1}^{NP} \sum_{k=1}^{NP} \sum_{p=1}^{N_p} C_{ik}^{trans} Z'_{ikp} \\
 & + \sum_{i=1}^{NP} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{p=1}^{N_p} [\lambda_W (-W_{isp})] + \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{NP} [\lambda_Y (-Y_{ip})] \\
 & + \sum_{i=1}^{NP} \sum_{k=1}^{NP} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{p=1}^{N_p} [\lambda_z (-Z_{iksp})] + \sum_{i=1}^{NP} \sum_{k=1}^{NP} \sum_{p=1}^{N_p} [\lambda_{z'} (-Z'_{ikp})] + \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{p=1}^{N_p} [\lambda_t (-t_{sp})]
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

s. a

Ecuaciones 3.5 a 3.23 y 3.45.

■ **Subproblema de control**

$$\begin{aligned}
 \text{máx } \Omega^C = & - \sum_{f=1}^{Nfe} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{p=1}^{N_p} h_{fsp} \sum_{c=1}^{Ncp} C^r t_{fck} \Lambda_{c,Ncp} [\alpha_1 (y_{1fcs} - \bar{y}_{1sp})^2 + \\
 & \alpha_2 (y_{2fcs} - \bar{y}_{2sp})^2 + \alpha_3 (u_{fcs} - \bar{u}_{sp})^2] + \sum_{i=1}^{NP} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{p=1}^{N_p} \lambda_W V_{isp} + \\
 & \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{NP} \lambda_Y X_{ip} + \sum_{i=1}^{NP} \sum_{k=1}^{NP} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{p=1}^{N_p} \lambda_z \gamma_{iksp} + \sum_{i=1}^{NP} \sum_{k=1}^{NP} \sum_{p=1}^{N_p} \lambda_{z'} \gamma'_{ikp} + \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{p=1}^{N_p} \lambda_t f_{sp}
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

s. a

Ecs. 3.24 a 3.44 con la variable  $V_{isp}$  en lugar de  $W_{isp}$  y las restricciones 3.47a a 3.47h.

Para llevar a cabo la solución de ambos subproblemas, se siguió el algoritmo que se muestra en la figura 3.1, la suma de las funciones objetivo de



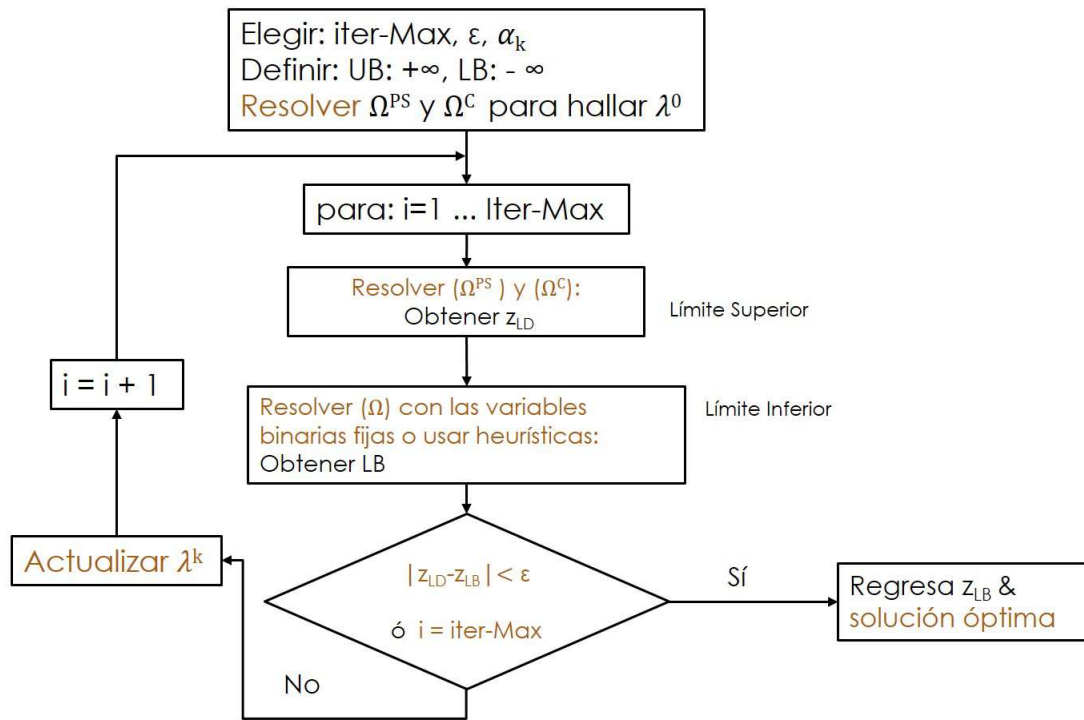


Figura 3.3: Algoritmo de descomposición Lagrangiana para la solución del problema simultáneo de planeación, secuenciamiento y control

los dos subproblemas (Eqs. 3.49 y 3.50) representan una cota superior a la función objetivo del problema de optimización original de PSC, mientras que la cota inferior se determinó mediante un procedimiento heurístico [28, 31] que consiste en fijar las variables binarias obtenidas del subproblema de planeación y secuenciamiento en la formulación original de PSC. De esta manera se obtiene un problema NLP que genera un límite inferior en cada iteración del procedimiento de descomposición.

# Capítulo 4

## Resultados

En este capítulo se presentan los resultados del procedimiento iterativo de descomposición Lagrangiana y se comparan con los obtenidos sin emplear la técnica de descomposición. Nuestro principal interés es analizar el desempeño de la técnica de descomposición en términos del valor de la función objetivo y el tiempo de cómputo.

El subproblema de planeación, secuenciamiento, es un problema MINLP que se resolvió con el solver SBB (Ramificación y acotamiento estándar, por sus siglas en inglés Standar Branch and Bound), el subproblema de control resultante de la formulación de descomposición y el problema empleado para obtener los límites inferiores del problema original son problemas NLP que se resolvieron con el solver CONOPT3, todos los modelos se implementaron en GAMS versión 24.8.5 en un equipo de 2 GHz y 8 GB RAM.

Las variables obtenidas en el subproblema de planeación y secuenciamiento se fijaron en la formulación original de PSC para obtener un problema NLP que genera una cota inferior en cada iteración del algoritmo de descomposi-

ción. Una iteración esta completa cuando se han obtenido los límites inferior y superior, posterior a esto se calcula un conjunto diferente de multiplicadores de Lagrange para cada iteración.

Los valores de todas las variables en cada uno de los períodos se inicializaron tomando como punto inicial de búsqueda los resultados obtenidos del período anterior.

#### ■ Tres Periodos de Producción

En la tabla 4.1 se muestra una comparación del tiempo de cómputo y las soluciones óptimas obtenidas de la solución directa y mediante el enfoque de descomposición Lagrangiana para tres periodos de producción. El tiempo de CPU para la solución por descomposición es  $17,1min$  menor que la solución directa y el valor óptimo de la función objetivo es mejor. La reducción de tiempo para alcanzar la solución óptima fue de un 81 %, esto se atribuye a que en la formulación de la técnica de descomposición las variables binarias solo están presentes en el subproblema de planeación y secuenciamiento que además es el problema más pequeño en comparación con el subproblema de control y el problema que determina los límites inferiores (Ver tabla 4.6). La técnica de descomposición encuentra una secuencia óptima diferente y un óptimo local mejor que el que se encontró con la solución directa, esto se debe a la naturaleza iterativa del algoritmo de descomposición lagrangiana, en dónde los multiplicadores se actualizan en cada iteración permitiendo la búsqueda local diferente cada vez. En la figura 4.1 se observa que el algoritmo de descomposición converge desde la prime-

ra iteración ya que la diferencia entre los límites se mantiene constante durante las siguientes iteraciones.

Tabla 4.1: Solución directa y con descomposición Lagrangiana para tres periodos de producción.

| Algoritmo      | Obj.<br>(\$/hr) | Secuencias<br>óptimas | CPU<br>(min) |
|----------------|-----------------|-----------------------|--------------|
| Directo        | 14, 427, 193    | A-B-C-D               | 21.1         |
|                |                 | D-A-B-C               |              |
|                |                 | C-D-A-B               |              |
| Descomposición | 14, 435, 408    | C-D-A-B               | 4            |
|                |                 | B-C-D-A               |              |
|                |                 | A-B-C-D               |              |

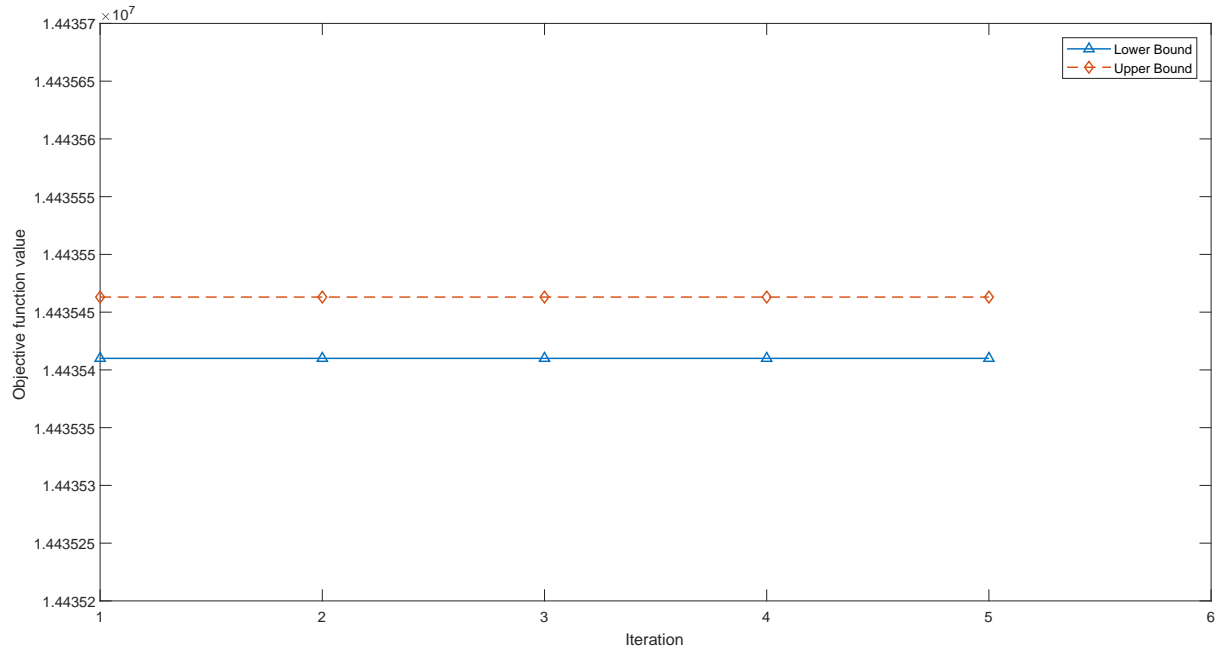


Figura 4.1: Convergencia de los límites inferior y superior durante la descomposición Lagrangiana para tres periodos.

#### ■ Cuatro Periodos de Producción

Para el segundo ejemplo numérico del caso de estudio se definieron cuatro periodos de producción, en el que la secuencia óptima de producción fue CABD, ABCD, ACBD, CABD para el primer, segundo, tercer y cuarto periodo de producción respectivamente. Los resultados para este escenario de operación se muestran en la tabla 4.2, en la que se puede observar que las demandas establecidas se satisfacen estrictamente con una sobreproducción para el producto A en todos los periodos, esto se debe a que su precio de venta es mayor al de los demás productos. En la figura 4.2 se muestra la evolución de los límites superior e inferior durante el procedimiento iterativo de descomposición lagrangiana, se puede ver que se obtuvieron límites muy estrechos desde la primera iteración e incluso mejoran ligeramente en las demás iteraciones. Finalmente se alcanza la solución del problema después de cinco iteraciones con una diferencia entre los dos límites aproximadamente del 3% y tiempo total de CPU de 280s. Los perfiles de transición dinámica se presentan en la figura 4.3, las transiciones son cortas y suaves. Sin embargo muchos de estos no son funciones escalón sencillas. Por lo que la forma y el comportamiento dinámico de los perfiles de control que llevan a transiciones óptimas, se vuelven difíciles de determinar sin el uso de una estrategia de control óptimo. Cabe mencionar que para este y los siguientes ejemplos numéricos no se logró obtener una solución directa del problema debido a que el tamaño y complejidad del problema aumentan con el número de periodos lo cual dificulta su solución.

Tabla 4.2: Resultados para cuatro periodos de producción, profit = 19 687 329.0046, CPU = 280 s

| slot      | producto | demanda<br>(mol) | tiempo de<br>procesamiento (h) | producción total<br>(mol) |
|-----------|----------|------------------|--------------------------------|---------------------------|
| Periodo 1 |          |                  |                                |                           |
| 1         | C        | 15 500           | 25.260                         | 15 500.000                |
| 2         | A        | 14 000           | 33.780                         | 23 249.002                |
| 3         | B        | 19 000           | 28.959                         | 19 000.000                |
| 4         | D        | 19 600           | 35.002                         | 19 600.000                |
| Periodo 2 |          |                  |                                |                           |
| 1         | A        | 11 200           | 27.203                         | 18 722.966                |
| 2         | B        | 20 000           | 30.483                         | 20 000.000                |
| 3         | C        | 18 600           | 30.312                         | 18 600.000                |
| 4         | D        | 19 600           | 35.002                         | 19 600.000                |
| Periodo 3 |          |                  |                                |                           |
| 1         | A        | 11 200           | 29.755                         | 20 479.265                |
| 2         | C        | 15 500           | 25.260                         | 15 500.000                |
| 3         | B        | 20 000           | 30.483                         | 20 000.000                |
| 4         | D        | 21 000           | 37.502                         | 21 000.000                |
| Periodo 4 |          |                  |                                |                           |
| 1         | C        | 14 000           | 22.815                         | 14 000.000                |
| 2         | A        | 10 500           | 42.130                         | 28 995.993                |
| 3         | B        | 17 000           | 25.910                         | 17 000.000                |
| 4         | D        | 18 000           | 32.145                         | 18 000.000                |

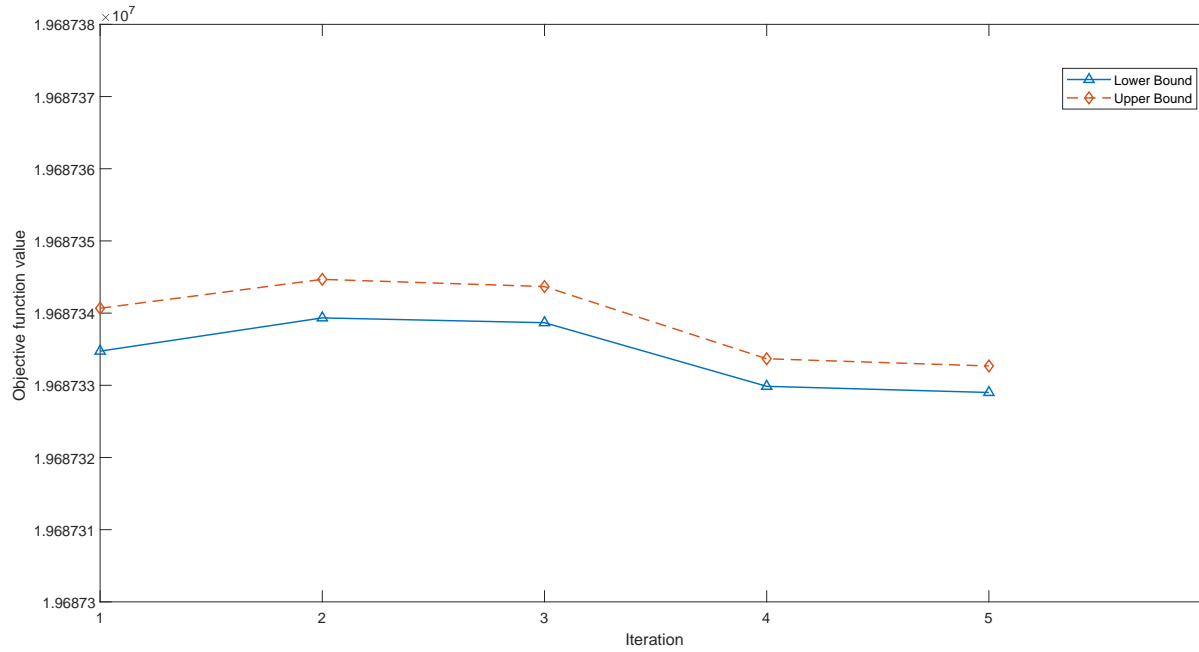


Figura 4.2: Evolución de los límites inferior y superior durante la descomposición Lagrangiana para cuatro periodos.

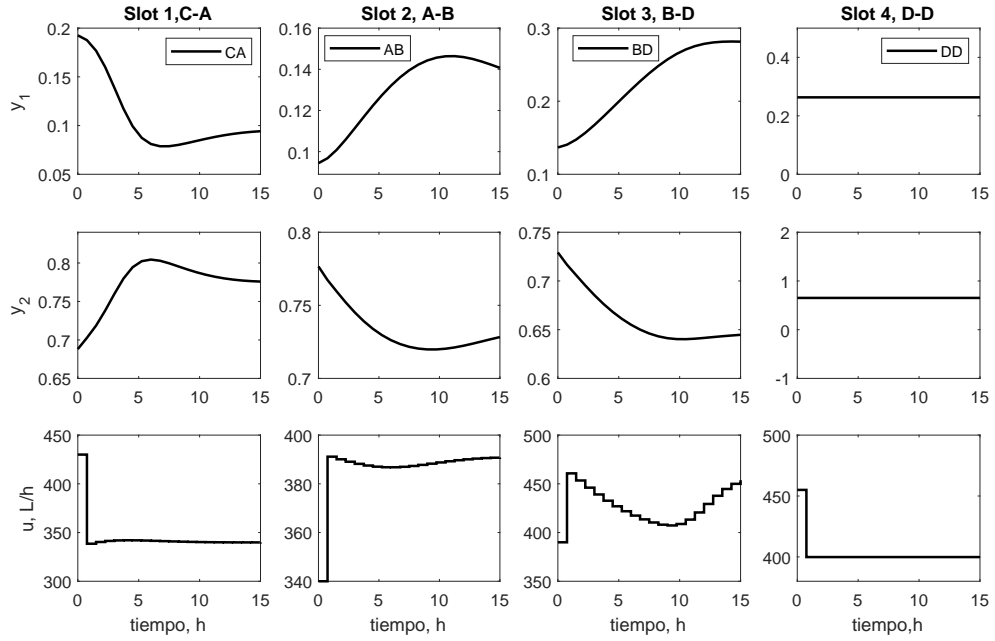


- **Ocho periodos de producción**

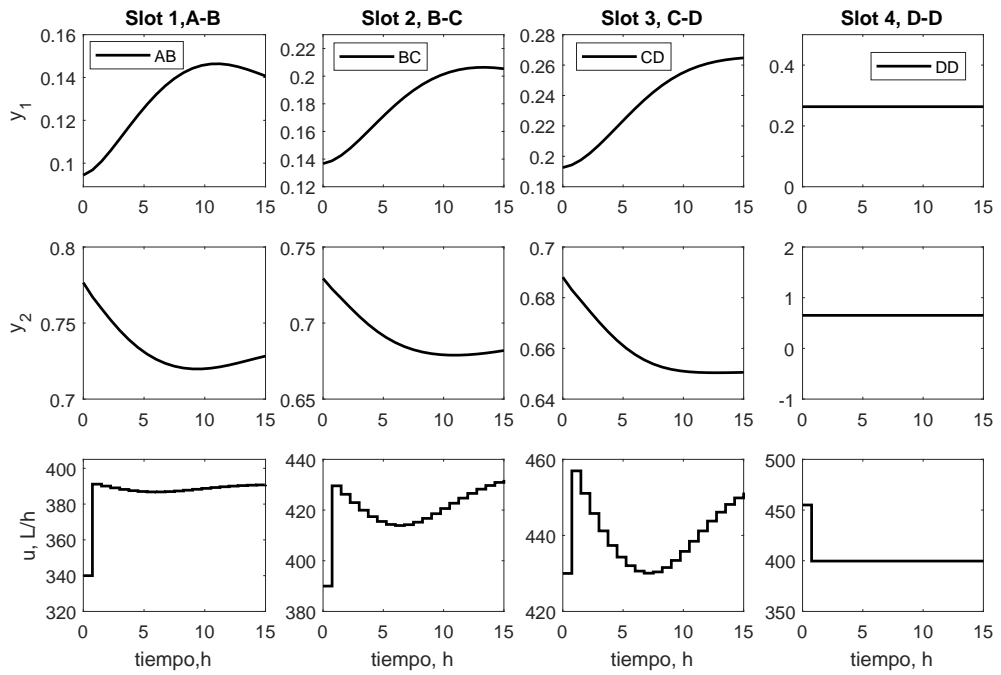
En este ejemplo se abordaron ocho periodos de producción, en la tabla 4.3 se muestran las secuencias óptimas de producción, demandas para cada producto, la tasa de producción para este periodo de operación. Nuevamente se puede observar una sobreproducción en  $A$ , al igual que en el caso anterior esto se debe a su precio de venta.

Los límites inferior y superior para este escenario se muestran en la figura 4.4 en la que se logra ver que la diferencia entre estos no es muy grande y conforme avanza el procedimiento iterativo ligeramente se mejora esta diferencia hasta llegar a la quinta iteración donde se ha alcanzado el valor óptimo del problema ya que ambos límites son iguales.

Periodo 1



Periodo 2



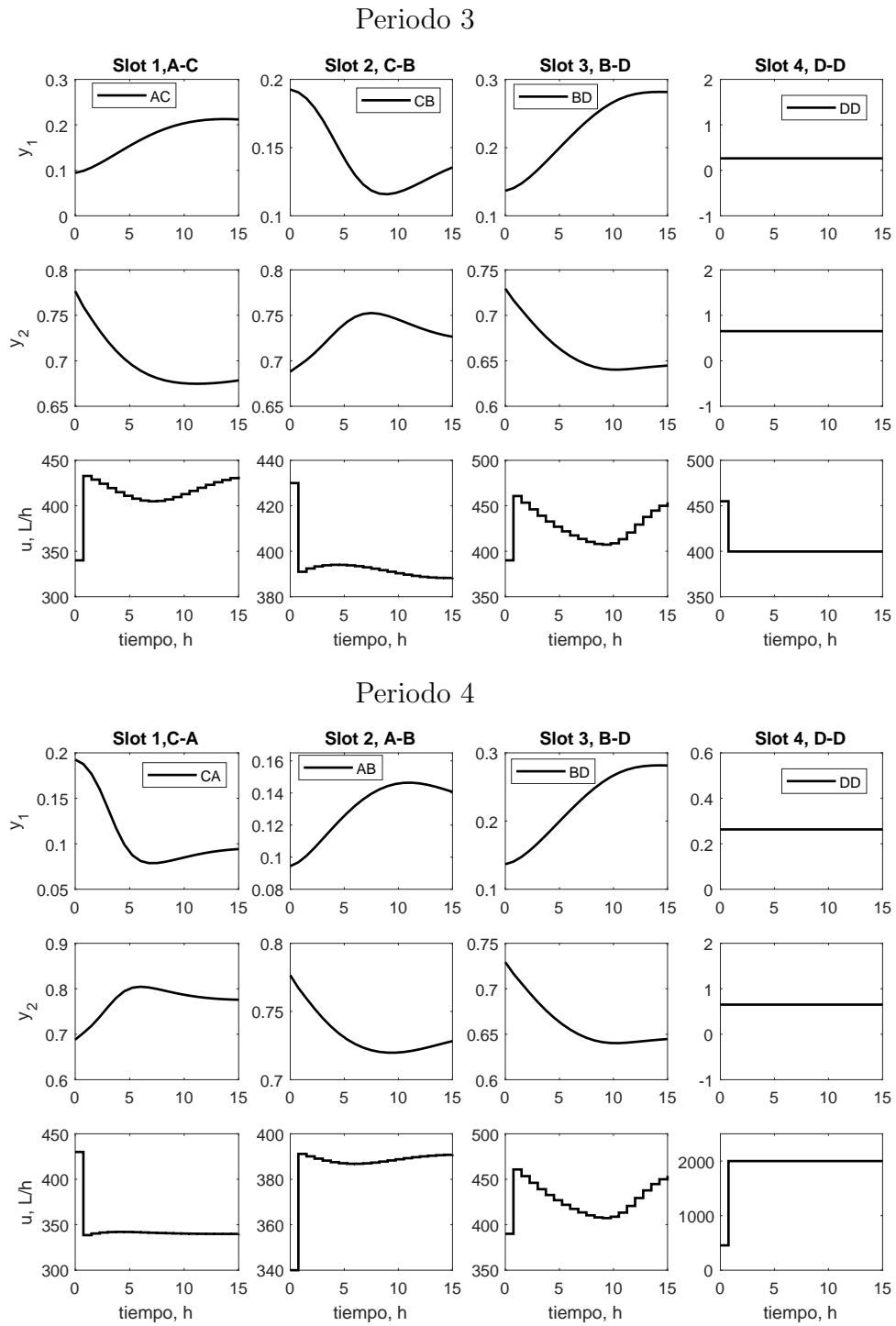


Figura 4.3: Perfiles de transición dinámica para los slots 1-4 para 4 periodos de producción.

Tabla 4.3: Descomposición Lagrangiana para PSC y ocho periodos profit = 40 855 246.8094, CPU = 9 min 59 s

| slot      | producto | demanda (mol) | tiempo de procesamiento (h) | producción total (mol) | slot      | producto | demanda (mol) | tiempo de procesamiento (h) | producción total (mol) | slot      | producto | demanda (mol) | tiempo de procesamiento (h) | producción total (mol) |
|-----------|----------|---------------|-----------------------------|------------------------|-----------|----------|---------------|-----------------------------|------------------------|-----------|----------|---------------|-----------------------------|------------------------|
| Periodo 1 |          |               |                             |                        | Periodo 2 |          |               |                             |                        | Periodo 3 |          |               |                             |                        |
| 1         | A        | 14 000        | 33.780                      | 23 249.002             | 1         | A        | 11 200        | 27.203                      | 18 722.966             | 1         | A        | 11 200        | 29.755                      | 20 479.265             |
| 2         | B        | 19 000        | 28.959                      | 19 000.000             | 2         | B        | 20 000        | 30.483                      | 20 000.000             | 2         | C        | 15 500        | 25.260                      | 15 500.000             |
| 3         | C        | 15 500        | 25.260                      | 15 500.000             | 3         | C        | 18 600        | 30.312                      | 18 600.000             | 3         | D        | 21 000        | 37.502                      | 21 000.000             |
| 4         | D        | 19 600        | 35.002                      | 19 600.000             | 4         | D        | 19 600        | 35.002                      | 19 600.000             | 4         | B        | 20 000        | 30.483                      | 20 000.000             |
| slot      | producto | demanda (mol) | tiempo de procesamiento (h) | producción total (mol) | slot      | producto | demanda (mol) | tiempo de procesamiento (h) | producción total (mol) | slot      | producto | demanda (mol) | tiempo de procesamiento (h) | producción total (mol) |
| Periodo 4 |          |               |                             |                        | Periodo 5 |          |               |                             |                        | Periodo 6 |          |               |                             |                        |
| 1         | C        | 14 000        | 22.815                      | 14 000.000             | 1         | A        | 10 500        | 42.130                      | 28 995.993             | 1         | A        | 10 000        | 43.785                      | 30 135.042             |
| 2         | D        | 18 000        | 32.145                      | 18 000.000             | 2         | C        | 14 000        | 22.815                      | 14 000.000             | 2         | D        | 17 500        | 31.252                      | 14 500.000             |
| 3         | B        | 17 000        | 25.910                      | 17 000.000             | 3         | B        | 17 000        | 25.910                      | 17 000.000             | 3         | C        | 14 000        | 22.815                      | 14 000.000             |
| 4         | A        | 10 500        | 42.130                      | 28 995.993             | 4         | D        | 18 000        | 32.145                      | 18 000.000             | 4         | B        | 16 500        | 25.148                      | 16 500.000             |
| slot      | producto | demanda (mol) | tiempo de procesamiento (h) | producción total (mol) | slot      | producto | demanda (mol) | tiempo de procesamiento (h) | producción total (mol) | slot      | producto | demanda (mol) | tiempo de procesamiento (h) | producción total (mol) |
| Periodo 7 |          |               |                             |                        | Periodo 8 |          |               |                             |                        |           |          |               |                             |                        |
| 1         | C        | 14 500        | 23.630                      | 14 500.000             | 1         | A        | 10 000        | 44.625                      | 30 713.278             |           |          |               |                             |                        |
| 2         | B        | 16 000        | 24.386                      | 16 000.000             | 2         | B        | 16 000        | 24.386                      | 16 000.000             |           |          |               |                             |                        |
| 3         | A        | 10 000        | 44.625                      | 30 713.278             | 3         | C        | 14 500        | 23.630                      | 14 500.000             |           |          |               |                             |                        |
| 4         | D        | 17 000        | 30.359                      | 17 000.000             | 4         | D        | 17 000        | 30.359                      | 17 000.000             |           |          |               |                             |                        |

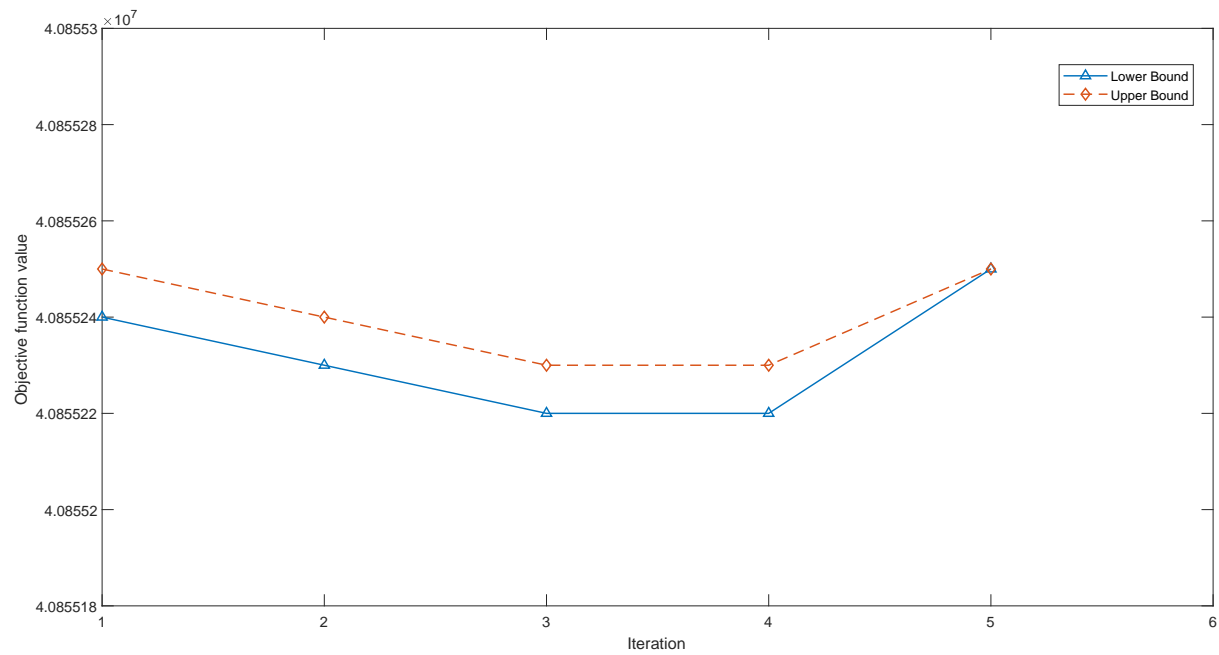


Figura 4.4: Evolución de los límites inferior y superior durante la descomposición Lagrangiana para ocho periodos.

- **Doce periodos de producción**

Para el caso de doce semanas de producción los resultados se muestran en la tabla 4.4 en la que nuevamente se puede apreciar una sobreproducción del producto A, como ya se explicó esto se debe al precio de venta asignado, mientras que en la figura 4.5 se observa la evolución de los límites inferior y superior durante las iteraciones de la técnica de descomposición, desde la primera iteración la diferencia entre ambos límites es de aproximadamente 2 %, esta diferencia se mantiene durante la siguiente iteraciones y mejora ligeramente en la cuarta iteración donde esta diferencia se vuelve del 1 %, con lo cual se ha obtenido la solución óptima.

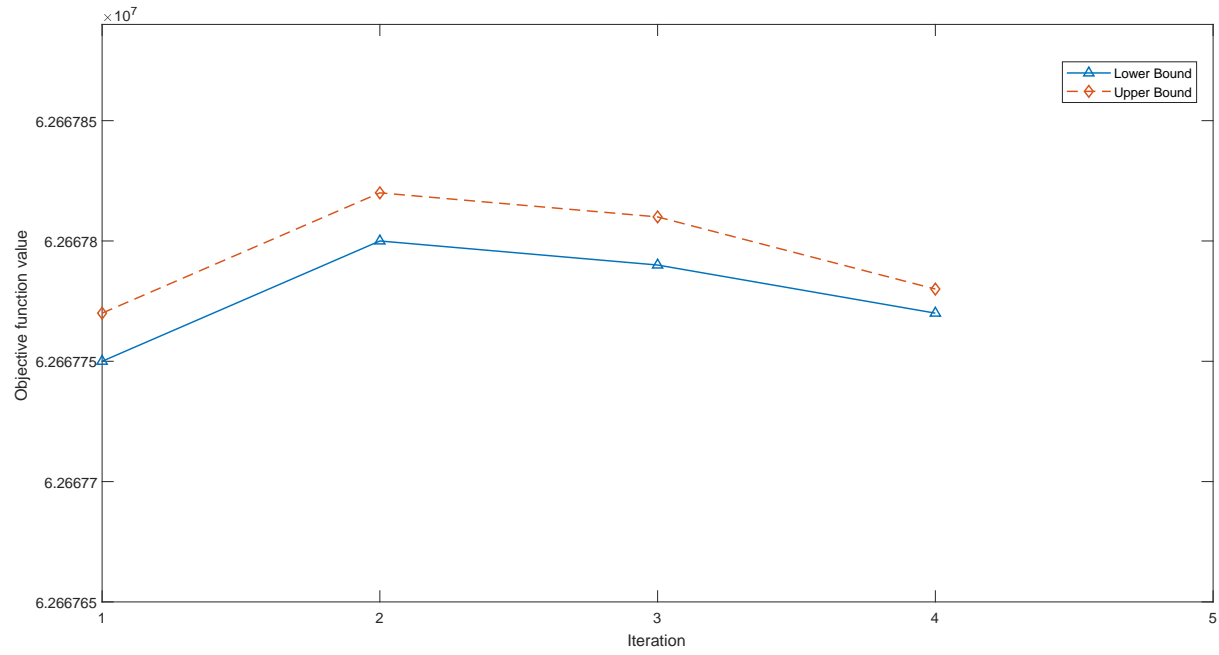


Figura 4.5: Límites inferior y superior durante la descomposición Lagrangiana para doce periodos.

Tabla 4.4: Descomposición Lagrangiana para PSC, doce periodos profit = 62 667 768.3655, CPU = 12 min 20 s

| slot       | producto | demanda (mol) | tiempo de producción (h) | producción total (mol) | slot       | producto | demanda (mol) | tiempo de producción (h) | producción total (mol) | slot       | producto | demanda (mol) | tiempo de producción (h) | producción total (mol) |
|------------|----------|---------------|--------------------------|------------------------|------------|----------|---------------|--------------------------|------------------------|------------|----------|---------------|--------------------------|------------------------|
| Periodo 1  |          |               |                          |                        | Periodo 2  |          |               |                          |                        | Periodo 3  |          |               |                          |                        |
| 1          | B        | 19 000        | 28.959                   | 19 000.000             | 1          | A        | 11 200        | 27.203                   | 18 722.966             | 1          | D        | 18 000        | 37.502                   | 18 000.000             |
| 2          | D        | 19 600        | 35.002                   | 19 600.000             | 2          | C        | 18 600        | 30.312                   | 18 600.000             | 2          | B        | 20 000        | 30.483                   | 20 000.000             |
| 3          | C        | 15 500        | 25.260                   | 15 500.000             | 3          | B        | 20 000        | 30.483                   | 20 000.000             | 3          | C        | 15 500        | 25.260                   | 15 500.000             |
| 4          | A        | 14 000        | 33.780                   | 23 249.002             | 4          | D        | 19 600        | 35.002                   | 19 600.000             | 4          | A        | 11 200        | 29.755                   | 20 479.265             |
| Periodo 4  |          |               |                          |                        | Periodo 5  |          |               |                          |                        | Periodo 6  |          |               |                          |                        |
| 1          | B        | 17 000        | 25.910                   | 17 000.000             | 1          | C        | 14 000        | 22.815                   | 14 000.000             | 1          | A        | 10 000        | 43.785                   | 30 135.042             |
| 2          | D        | 18 000        | 32.145                   | 18 000.000             | 2          | B        | 16 500        | 25.910                   | 16 500.000             | 2          | C        | 14 000        | 22.815                   | 14 000.000             |
| 3          | C        | 14 000        | 22.815                   | 14 000.000             | 3          | D        | 18 000        | 32.145                   | 18 000.000             | 3          | D        | 17 500        | 31.252                   | 17 500.000             |
| 4          | A        | 10 500        | 42.130                   | 28 995.993             | 4          | A        | 10 500        | 42.130                   | 28 995.993             | 4          | B        | 16 500        | 25.148                   | 16 500.000             |
| Periodo 7  |          |               |                          |                        | Periodo 8  |          |               |                          |                        | Periodo 9  |          |               |                          |                        |
| 1          | A        | 10 000        | 44.625                   | 30 713.278             | 1          | A        | 10 000        | 44.625                   | 30 713.278             | 1          | C        | 14 000        | 22.815                   | 14 000.000             |
| 2          | D        | 17 500        | 30.359                   | 17 500.000             | 2          | B        | 16 000        | 24.386                   | 16 000.000             | 2          | B        | 15 500        | 23.624                   | 15 500.000             |
| 3          | B        | 16 000        | 24.386                   | 16 500.000             | 3          | C        | 14 500        | 23.630                   | 14 500.000             | 3          | D        | 16 500        | 29.466                   | 16 500.000             |
| 4          | C        | 14 000        | 23.630                   | 14 000.000             | 4          | D        | 17 000        | 30.359                   | 17 000.000             | 4          | A        | 9 800         | 47.095                   | 32 413.139             |
| Periodo 10 |          |               |                          |                        | Periodo 11 |          |               |                          |                        | Periodo 12 |          |               |                          |                        |
| 1          | A        | 9 500         | 48.261                   | 33 215.993             | 1          | A        | 9 200         | 49.107                   | 33 798.300             | 1          | A        | 9 100         | 50.106                   | 34 485.507             |
| 2          | C        | 13 800        | 22.489                   | 13 800.000             | 2          | D        | 16 000        | 28.573                   | 16 000.000             | 2          | B        | 15 200        | 23.167                   | 15 200.000             |
| 3          | B        | 15 300        | 23.319                   | 15 300.000             | 3          | B        | 15 300        | 23.319                   | 15 300.000             | 3          | D        | 15 800        | 28.216                   | 15 800.000             |
| 4          | D        | 16 200        | 28.930                   | 16 200.000             | 4          | C        | 13 500        | 22.000                   | 13 500.000             | 4          | C        | 13 200        | 23.167                   | 13 200.000             |



- **Dieciséis periodos de producción**

En la figura 4.6 se muestra el comportamiento tanto del límite inferior y superior durante el proceso de descomposición, en la que se puede observar que a partir de la primera iteración la diferencia entre los dos límites es del 2% y aunque el valor de ambos límites cambia el valor de la diferencia se mantiene constante y es entre las iteraciones tres y cuatro en donde el valor de ambos límites permanece constante por lo que el algoritmo de descomposición ha encontrado el valor óptimo para el caso de dieciséis semanas de producción, con un tiempo de CPU de 14 min 38 s.

Tabla 4.5: Descomposición Lagrangiana para PSC, dieciséis periodos profit = 84 994 138.3047, CPU = 14 min 38 s

| slot       | producto | demanda (mol) | tiempo de producción (h) | producción total (mol) | slot | producto | demanda (mol) | tiempo de producción (h) | producción total (mol) | slot | producto | demanda (mol) | tiempo de producción (h) | producción total (mol) | slot | producto | demanda (mol) | tiempo de producción (h) | producción total (mol) |
|------------|----------|---------------|--------------------------|------------------------|------|----------|---------------|--------------------------|------------------------|------|----------|---------------|--------------------------|------------------------|------|----------|---------------|--------------------------|------------------------|
| Periodo 1  |          |               |                          | Periodo 2              |      |          |               | Periodo 3                |                        |      |          | Periodo 4     |                          |                        |      |          |               |                          |                        |
| 1          | A        | 14 000        | 33.780                   | 23 249.002             | 1    | B        | 20 000        | 30.483                   | 20 000.000             | 1    | A        | 11 200        | 29.755                   | 20 479.265             | 1    | A        | 10 500        | 42.130                   | 28 995.993             |
| 2          | C        | 15 500        | 25.260                   | 15 500.000             | 2    | C        | 18 600        | 30.312                   | 18 600.000             | 2    | C        | 15 500        | 25.260                   | 15 500.000             | 2    | D        | 18 000        | 32.145                   | 18 000                 |
| 3          | B        | 19 000        | 28.959                   | 19 000.000             | 3    | D        | 19 600        | 35.002                   | 19 600.000             | 3    | D        | 21 000        | 37.502                   | 21 000.000             | 3    | C        | 14 000        | 22.815                   | 14 000.000             |
| 4          | D        | 19 600        | 35.002                   | 19 600.000             | 4    | A        | 11 200        | 27.203                   | 18 722.966             | 4    | B        | 20 000        | 30.483                   | 20 000.000             | 4    | B        | 17 000        | 25.910                   | 17 000.000             |
| Periodo 5  |          |               |                          | Periodo 6              |      |          |               | Periodo 7                |                        |      |          | Periodo 8     |                          |                        |      |          |               |                          |                        |
| 1          | B        | 17 000        | 25.910                   | 17 000.000             | 1    | A        | 10 000        | 43.785                   | 30 135.042             | 1    | B        | 16 000        | 24.386                   | 16 000.000             | 1    | C        | 14 500        | 23.630                   | 14 500.000             |
| 2          | D        | 18 000        | 32.145                   | 18 000.000             | 2    | C        | 14 000        | 22.815                   | 14 000.000             | 2    | D        | 17 000        | 30.359                   | 17 000.000             | 2    | A        | 10 000        | 44.625                   | 30 713.278             |
| 3          | A        | 10 500        | 42.130                   | 28 995.993             | 3    | D        | 17 500        | 31.252                   | 17 500.000             | 3    | A        | 10 000        | 44.625                   | 30 713.278             | 3    | D        | 17 000        | 30.359                   | 17 000.000             |
| 4          | C        | 14 000        | 22.815                   | 14 000.000             | 4    | B        | 16 500        | 25.148                   | 16 500.000             | 4    | C        | 14 000        | 23.630                   | 14 000.000             | 4    | B        | 16 000        | 24.386                   | 16 000.000             |
| Periodo 9  |          |               |                          | Periodo 10             |      |          |               | Periodo 11               |                        |      |          | Periodo 12    |                          |                        |      |          |               |                          |                        |
| 1          | A        | 9 800         | 47.095                   | 32 413.139             | 1    | C        | 13 800        | 22.489                   | 13 800.000             | 1    | A        | 9 200         | 49.107                   | 33 798.300             | 1    | A        | 9 100         | 50.410                   | 34 695.307             |
| 2          | C        | 14 000        | 22.815                   | 14 000.000             | 2    | D        | 16 200        | 28.930                   | 16 200.000             | 2    | D        | 16 000        | 28.573                   | 16 000.000             | 2    | C        | 13 200        | 21.512                   | 13 200.000             |
| 3          | D        | 16 500        | 32.145                   | 16 500.000             | 3    | B        | 15 300        | 23.319                   | 15 300.000             | 3    | B        | 15 300        | 23.319                   | 15 300.000             | 3    | B        | 15 000        | 22.862                   | 150 00.000             |
| 4          | B        | 15 500        | 23.624                   | 15 500.000             | 4    | A        | 9 500         | 48.261                   | 33 215.993             | 4    | C        | 12 900        | 22.000                   | 12 900.000             | 4    | D        | 15 800        | 28.216                   | 15 800.000             |
| Periodo 13 |          |               |                          | Periodo 14             |      |          |               | Periodo 15               |                        |      |          | Periodo 16    |                          |                        |      |          |               |                          |                        |
| 1          | A        | 9 100         | 51.257                   | 35 277.614             | 1    | B        | 15 300        | 22.557                   | 15 300.000             | 1    | A        | 9 000         | 51.903                   | 35 722.486             | 1    | A        | 9 000         | 53.458                   | 36 792.655             |
| 2          | D        | 15 600        | 27.859                   | 15 600.000             | 2    | D        | 15 600        | 27.859                   | 15 600.000             | 2    | B        | 14 800        | 22.557                   | 14 800.000             | 2    | C        | 12 800        | 20.860                   | 12 800.000             |
| 3          | C        | 13 200        | 21.023                   | 13 200.000             | 3    | A        | 9 100         | 51.724                   | 35 599.576             | 3    | D        | 15 500        | 20.860                   | 15 500.000             | 3    | D        | 14 800        | 26.430                   | 14 800.000             |
| 4          | B        | 15 000        | 22.862                   | 15 000.000             | 4    | C        | 12 800        | 20.860                   | 12 800.000             | 4    | C        | 12 800        | 20.860                   | 12 800.000             | 4    | B        | 14 600        | 22.252                   | 14 600.000             |

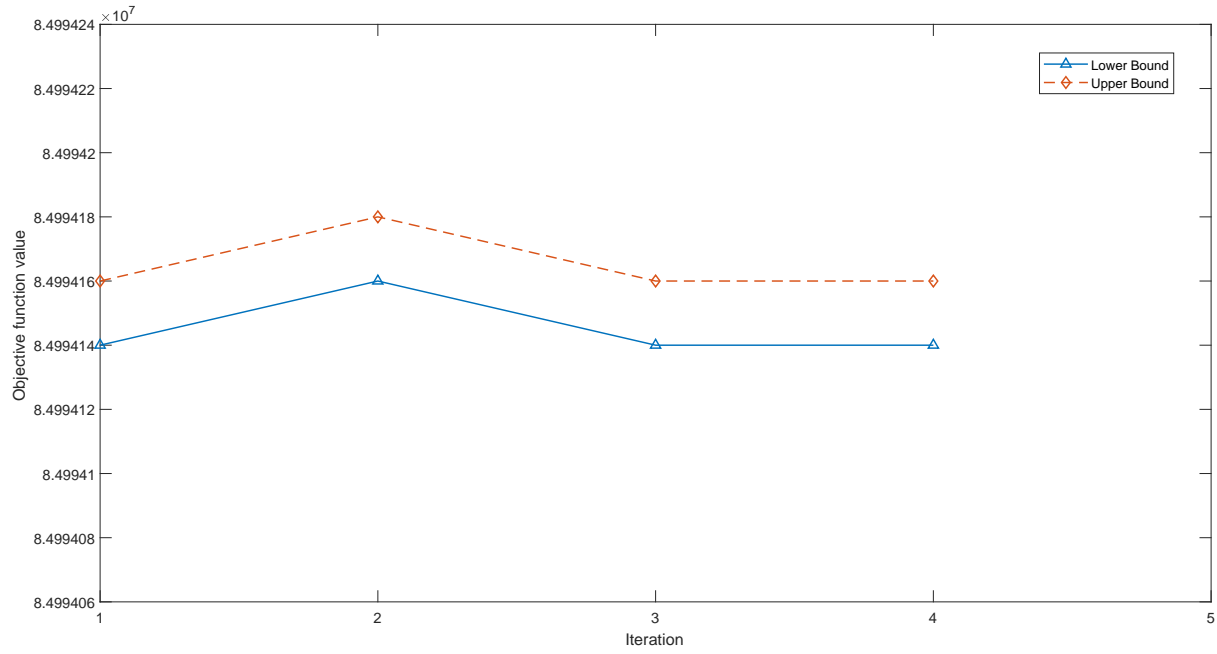


Figura 4.6: Límites inferior y superior durante la descomposición Lagrangiana para dieciséis periodos de producción.

El tamaño de los problemas de optimización de la formulación directa y de cada subproblema involucrado en la formulación de la estrategia de descomposición lagrangiana se muestra en la tabla 4.6. En esta tabla las variables binarias solo están presentes en el subproblema de planeación y secuenciamiento ya que en el subproblema de control estas variables son continuas, además de que es evidente el incremento en el número de variables en la reformulación del problema conforme aumenta el número de periodos. En comparación con la solución obtenida sin emplear la técnica de descomposición reportada en el trabajo previo [19], en particular para el caso de estudio se lograron abordar tres periodos de producción en un tiempo de computo de  $21,1min$ , mientras que empleando el enfoque de descomposición Lagrangiana el tiempo de computo más elevado fue para el caso de dieciséis periodos con  $14,63min$ .

En los resultados mostrados es evidente que el enfoque de solución sin descomposición requiere de un mayor esfuerzo computacional, que se reduce al emplear la estrategia de descomposición Lagrangiana, con la que también se redujo la dificultad para abordar un mayor número de periodos de producción.

Tabla 4.6: Tamaño del problema directo y con descomposición

|             | Problema            | Ecuaciones | Var. Continúas | Var. Discretas | CPU [min] |
|-------------|---------------------|------------|----------------|----------------|-----------|
| 3 periodos  | Directo             | 4604       | 5333           | 60             | 21.1      |
| 3 periodos  | Subproblema PS      | 440        | 461            | 60             | 4         |
|             | Subproblema Control | 4405       | 5125           |                |           |
|             | Límite inferior     | 4544       | 5273           |                |           |
| 4 periodos  | Subproblema PS      | 589        | 613            | 80             | 4.6       |
|             | Subproblema Control | 5877       | 6849           |                |           |
|             | Límite Inferior     | 6061       | 7029           |                |           |
| 8 periodos  | Subproblema PS      | 1185       | 1221           | 160            | 10        |
|             | Subproblema Control | 11765      | 13685          |                |           |
|             | Límite Inferior     | 12129      | 14053          |                |           |
| 12 periodos | Subproblema PS      | 1781       | 1829           | 240            | 12.33     |
|             | Subproblema Control | 17653      | 20533          |                |           |
|             | Límite Inferior     | 18127      | 21077          |                |           |
| 16 periodos | Subproblema PS      | 2377       | 2437           | 320            | 14.63     |
|             | Subproblema Control | 23541      | 27381          |                |           |
|             | Límite Inferior     | 24265      | 28101          |                |           |

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo, se ha implementado la estrategia de descomposición Lagrangiana para la reformulación del problema de PSC. Mediante la formulación de la descomposición se generó un límite superior y a través de fijar las variables complicadas se determinó un límite inferior. La aproximación con la técnica de descomposición fue efectiva para resolver el problema de PSC para el caso de estudio de un reactor CSTR multiproducto, en el que los ejemplos numéricos que se abordaron fueron para cuatro, ocho, doce y dieciséis periodos de producción.

Se mostró de manera evidente que el desempeño de la técnica de descomposición es mucho mejor que la solución directa, ya que en los ejemplos mostrados el tiempo de cómputo es mucho menor que el que se requiere para la solución directa, además de que mediante la solución directa solo fue posible abordar tres periodos de producción mientras que con el enfoque de descomposición se logró abordar un mayor número de períodos. Aunque el número de variables a determinar en los subproblemas era grande y además se incrementaba

conforme aumenta el número de periodos, la dificultad computacional empleando la descomposición Lagrangiana es mucho menor.

Mediante la estrategia de control predictivo no lineal (NLMPC) se obtuvieron trayectorias optimas de transición. Otras técnicas de descomposición para problemas MIDO y MINLP están disponibles, como la descomposición de Benders que separa el problema en un MINLP y un NLP entre los cuales itera para encontrar la solución. Sin embargo, hasta donde sabemos, no hay trabajos reportados que aborden el problema de PSC usando técnicas de descomposición, por lo que no es posible hacer un análisis del desempeño de la estrategia mostrada en este trabajo.

## 5.1. Trabajo Futuro

Como parte de un futuro trabajo, se propone reformular el problema de optimización considerando las incertidumbres que pueden existir en parámetros físicos del modelo dinámico y parámetros de operación del proceso y nuevamente llevar a cabo su resolución mediante la estrategia de descomposición Lagrangiana, considerando periodos de planeación más largos.

# Bibliografía

- [1] R. Harjunkoski, I. Nyström and A. Horch. Integration of scheduling and control-Theory or practice? *Comp. Chem. Eng.*, 33:1909–1918, 2009.
- [2] Y. Nie and Biegler L. T. Integrated Scheduling and Dynamic Optimization of Batch Processes Using State Equipment Networks. *AIChE. J.*, 58:3416–3432, 2012.
- [3] S. Terrazas-Moreno, A. Flores-Tlacuahuac, and I. E. Grossman. Simultaneous Design, Scheduling and Optimal Control of a Methyl-Methacrylate Continuous Polymerization Reactor. *AIChE. J.*, 54:3160–3170, 2008.
- [4] Thomas F.. Edgar, DM Himmelblau, and L Lasdon. *Optimization of Chemical Processes*. McGraw-Hill, New York, NY., 2nd edition, 2001.
- [5] Robert W. Koller and Luis A. Ricardez-Sandoval. A Dynamic Optimization Framework for Integration of Design, Control and Scheduling of Multi-product Chemical Processes under Disturbance and Uncertainty. *Computers & Chemical Engineering*, 106:147–159, 2017.



- 
- [6] Yunfei Chu and Fengqi You. Model-based integration of control and operations : Overview , challenges , advances , and opportunities. *Computers and Chemical Engineering*, 83:2–20, 2015.
- [7] Ignacio Grossmann. Advances in Mathematical Programming Models for Enterprise-Wide Optimization. *Comp. Chem. Eng.*, 47:2–18, 2009.
- [8] Vassilis M. Charitopoulos, Vivek Dua, and Lazaros G. Papageorgiou. Traveling Salesman Problem-Based Integration of Planning , Scheduling , and Optimal Control for Continuous Processes. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 56:11186–11205, 2017.
- [9] Lorenz T. Biegler. operations. *Computers and Chemical Engineering*, page <http://dx.doi.org/10.1016/j.compchemeng.2017.10.01>, 2017.
- [10] E. Muñoz, E. Capón-García, J. M. Laínez-Aguirre, E. Espuña, and L. Puigjaner. Supply Chain Planning and Scheduling Integration Using Lagrangian Decomposition in a Knowledge Management Environment. *Computers and Chemical Engineering*, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compchemeng.2014.06.002>, 2014.
- [11] Yunfei Chu and Fengqi You. Integration of production scheduling and dynamic optimization for multi-product CSTRs: Generalized Benders decomposition coupled with global mixed-integer fractional programming. *Computers and Chemical Engineering*, 58:315–333, 2013.
- [12] Yunfei Chu and Fengqi You. Integration of scheduling and dynamic optimization of batch processes under uncertainty: Two-stage stochastic programming approach and enhanced generalized benders decom-

- position algorithm. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 52(47):16851–16869, 2013.
- [13] Yunfei Chu and Fengqi You. Integrated Scheduling and Dynamic Optimization of Complex Batch Processes with General Network Structure Using a Generalized Benders Decomposition Approach. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 52(23):7867–7885, 2013.
- [14] M.H. Bassett, P. Dave, F.J. Doyle, G.K. Kudva, J.F. Pekny, G.V. Reklaitis, S. Subrahmanyam, D.L. Miller, and M.G. Zentner. Perspectives on model based integration of process operations. *Computers & Chemical Engineering*, 20(6):821–844, 1996.
- [15] Sriram Subrahmanyam, Joseph F. Pekny, and Gintaras V. Reklaitis. Decomposition Approaches to Batch Plant Design and Planning. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 35(6):1866–1876, 1996.
- [16] Muge Erdirik Dogan and Ignacio E. Grossmann. A Decomposition Method for the Simultaneous Planning and Scheduling of Single Stage Continuous Multiproduct Plants. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 45(June):299–315, 2006.
- [17] Sebastian. Terrazas-Moreno, Antonio. Flores-Tlacuahuac, and Ignacio E. Grossmann. Lagrangean Heuristic for the Scheduling and Control of Polymerization Reactors. *AIChE Journal*, 54(504):163–182, 2008.
- [18] Jinjun Zhuge and Marianthi G. Ierapetritou. A Decomposition Approach for the Solution of Scheduling Including Process Dynamics of

- Continuous Processes. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 55(5):1266–1280, 2016.
- [19] Miguel Gutiérrez-Limón, Antonio Flores Tlacuahuac, and Ignacio E. Grossmann. A MINLP formulation for the Simultaneous Planning, Scheduling and Control of Short-Period Single Unit Processing Systems. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 53:14679–14694, 2014.
- [20] Miguel Angel Gutiérrez-Limón, Antonio Flores-Tlacuahuac, and Ignacio E. Grossmann. A reactive optimization strategy for the simultaneous planning, scheduling and control of short-period continuous reactors. *Computers and Chemical Engineering*, 84:507–515, 2016.
- [21] P. Seferlis and Georgiadis M. C. The Integration of Process Design and Control, Computer-Aided. *Chemical Engineering*, Elsevier Ltd., 2004.
- [22] I. E. Grossman. Enterprise Wide Optimization: A New Frontier in Process Systems Engineering. *AIChE. J.*, 51:1846–1857, 2005.
- [23] Cesar De Prada. Overview: Control Hierarchy of Large Processing Plants, 2014.
- [24] Zukui Li and Marianthi G. Ierapetritou. Integrated Production Planning and Scheduling Using a Decomposition Framework. *Chemical Engineering Science*, 64(16):3585–3597, 2009.
- [25] A. M. Geoffrion. Generalized Benders Decomposition. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 10(4):238–260, 1972.

- 
- [26] Ragheb Rahmaniani, Teodor Gabriel, Michel Gendreau, and Walter Rei. The Benders decomposition algorithm : A literature review. *European Journal of Operational Research*, 0:1–17, 2017.
- [27] Marshall L. Fisher. An Applications Oriented Guide to Lagrangian Relaxation. *Interfaces*, 15(2):10–21, 1985.
- [28] Susara A. van den Heever, Ignacio E. Grossmann, Sriram Vasantharajan, and Krisanne Edwards. A Lagrangean Decomposition Heuristic for the Design and Planning of Offshore Hydrocarbon Field Infrastructures with Complex Economic Objectives. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 40(13):2857–2875, 2001.
- [29] Monique Guignard and Siwhan Kim. Lagrangean Decomposition: A Model Yielding Stronger Lagrangean Bounds. *Mathematical Programming*, 39:215–228, 1987.
- [30] Monique Guignard. Lagrangean relaxation. *Top*, 11(2):151–200, 2003.
- [31] Marshall L. Fisher. The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems. *Management Science*, 50:1861–1871, 2004.
- [32] G. A. Hicks and W. H. Ray. Approximation Methods for Optimal Control Synthesis. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 49:522–528, 1971.