

# Aplicación de análisis multifractal de exponentes de Hölder en mercados financieros mexicanos: índice accionario IPC y tipo de cambio USD/MXN

---

Stephanie Rendón De la Torre\*

Fecha de recepción: 4 abril de 2014

Fecha de aceptación: 16 de julio de 2014

---

\* Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Contaduría y Administración.  
stretomx@gmail.com

## RESUMEN

El modelo multifractal ha demostrado que es posible modelar sistemas económicos al describir una serie de tiempo financiera a través de su espectro multifractal. Este tipo de análisis ofrece la posibilidad de estudiar (entre otras características) la regularidad local de las series de tiempo (la cual es útil en la detección a priori y a posteriori de las caídas fuertes en los mercados). La propuesta de este trabajo es demostrar que a través de la evolución de los exponentes de Hölder y la detección de sus puntos irregulares, es posible estudiar la dinámica de los mercados financieros. Para evaluar y probar lo anterior, se determinaron los exponentes locales y puntuales de las series de tiempo históricas del índice IPC de México, y del tipo de cambio dólar americano/peso mexicano durante los años de 1992-2013 (utilizando precios de cierres oficiales diarios) y finalmente, se propone la posibilidad de anticipar y de detectar movimientos críticos en estas series de tiempo mediante la metodología definida.

El presente documento se divide de la siguiente manera: al inicio se incluye una introducción, en la primera parte se elabora una revisión de la literatura, en la segunda sección se analiza detalladamente la metodología aplicada, en la tercera parte se muestran y analizan los resultados obtenidos y finalmente, la última parte resume las conclusiones.

Clasificación JEL: C32, C53, C61, G17

**Palabras clave:** Exponentes de Hölder, Análisis Multifractal, Series de tiempo financieras

**A Multifractal Analysis Application of Hölder Exponents in Mexican Financial Markets: Mexican Stock Index and Foreign Exchange USD/MXN.**

## ABSTRACT

*The Multifractal Model has proven that it is possible to model economic systems by describing a financial time series through its multifractal spectrum. This type of model offers the possibility of study time series local regularity (among other characteristics) which allows to detect large market falls a priori and a posteriori. This paper aims to show that it is feasible to study financial markets dynamics through the evolution of Hölder Exponents and the detection of their irregularities. In order to assess and test the above mentioned, local and punctual exponents from the Mexican Stock Market (IPC) and Foreign Exchange financial series (considering official daily closing prices), from 1992 to 2013, were determined. Eventually, the possibility to anticipate and detect critical movements in the financial series studied, through the methodology stated, is proposed.*

*This paper is divided as follows: an introduction is presented, then section one includes a literature review, in section two the methodology used is described in detail, in the third section the results obtained are shown and analyzed, and in the last part conclusions are drawn.*

*JEL Classification: C32, C53, C61, G17*

**Keywords:** Hölder Exponents, Multifractal Analysis, Financial Time Series

## Introducción

El objetivo es evaluar los resultados de aplicar los exponentes de Hölder locales y puntuales a series de tiempo financieras correspondientes a mercados mexicanos. Estos exponentes son indicadores útiles para modelar y también son útiles en la detección de puntos críticos (en series de tiempo financieras) y son herramientas propias del análisis multifractal. Existe un algoritmo que calcula la regularidad de una serie de tiempo; este algoritmo parte del supuesto de que antes de que ocurra un evento crítico la dinámica intrínseca de una serie de tiempo financiera cambia de forma radical, dicho algoritmo es útil en el pronóstico de los cambios de precios agresivos. Este fenómeno se explica cualitativamente como una reducción universal de los horizontes de inversión al aproximarse un punto crítico, es decir, los operadores o inversionistas con horizontes de tiempo de largo plazo intentarán reducir sus posiciones (en inversiones cualesquiera que éstas sean) lo más posible antes de que el mercado se hunda, es decir, que el espectro de los horizontes temporales se ve reducido y como consecuencia se incrementa la regularidad de la serie de tiempo. Si se calcula la regularidad de una serie de tiempo financiera determinada, podrían pronosticarse posibles puntos críticos en el futuro (Kuperin & Schastlivtsev, 2001), es decir, momentos de crisis financieras.

Los modelos convencionales estadísticos financieros basados en supuestos de estacionariedad no pueden analizar apropiadamente los “cracks” o caídas dramáticas de precios en los mercados, precisamente porque las propiedades estadísticas de sus datos altamente no estacionarios son muy diferentes de las propiedades estadísticas de las estacionarias. Entonces, un modelo basado en datos obtenidos en tiempos estables y estacionarios no es de mucha utilidad al evaluar momentos de crisis.

Los sistemas complejos pueden ser divididos en dos categorías: Los sistemas en equilibrio y los que no están en equilibrio (Blackedge, 2008). Los sistemas complejos en equilibrio pueden conducir a estados críticos y mostrar estructuras fractales aleatorias en los que sus datos estadísticos poseen invariancia de escala. Por ejemplo, cuando los ferro magnetos son calentados y la temperatura se eleva, los spins de los electrones que contribuyen a ga-

nar energía al campo magnético comienzan a cambiar de dirección. A cierta temperatura, los spins forman un campo de vector aleatorio, con media cero y ocurre una fase de transición en la que el campo magnético promedia cero. Pero el campo no sólo es aleatorio, es auto afín ya que su distribución estadística es la misma a diferentes escalas, sin importar las características de la distribución. Los sistemas complejos que no están en equilibrio dan origen a estados críticos auto organizados, un ejemplo es el crecimiento de montículos de arena; eventualmente, se generarán pequeñas avalanchas ocasionadas por la fuerza de gravedad. Los valores estadísticos espaciales y temporales de dichas avalanchas presentan invariancia de escala.

Bajo este contexto, los mercados financieros pueden ser considerados como sistemas fuera de equilibrio (Blackedge, 2010) porque están siendo influenciados constantemente por transacciones que se producen como resultado de la incorporación de información nueva sobre las empresas y el entorno. En los sistemas complejos, los elementos se adaptan al patrón que crean; en tanto los componentes reaccionan, el todo cambia, y en tanto el todo cambia los componentes reaccionan. Las transacciones de los mercados generalmente ocurren globalmente a una tasa de cientos, miles o millones por segundo. Son la frecuencia y la naturaleza de estas transacciones las que dictan los índices de los mercados, de la misma forma que la frecuencia y la naturaleza de las partículas en la arena dictan la estadística de las avalanchas de las dunas de arena; todos estos son ejemplos de fractales escalantes (Mandelbrot, 1970, Feder, 1988). La relación entre los sistemas dinámicos, el caos y la economía es importante porque los sistemas dinámicos muestran que la aleatoriedad y el determinismo global pueden coexistir.

## 1. Revisión de la literatura

De acuerdo al punto de vista académico de que los mercados son eficientes, sólo la información negativa relevante podría causar una crisis financiera (Samuelson 1964 y Fama 1970, 1991), sin embargo hasta ahora el enfoque lineal de la estructura de los mercados no puede explicar con exactitud las caídas altamente frecuentes en los mercados financieros; por otra parte, los mercados han mostrado ser similares a los sistemas dinámicos complejos. La idea de investigar y analizar mercados durante las épocas de crisis financieras está basada en la evidencia científica en física de que los sistemas dinámicos complejos revelan sus propiedades mejor bajo condiciones de estrés que en circunstancias normales (Johansen, Sornette & Ledoit, 2000).

La investigación en los últimos treinta años ha dado diversos avances en cuanto a ciertas técnicas no lineales aplicadas en los mercados. En 1997 y en 2000 Mantegna y Stanley encontraron que las distribuciones financieras concuerdan con las distribuciones estables de Lévy y que las colas de las distribuciones de las acciones en general describen un comportamiento que incluye leyes de potencia, es decir encontraron evidencia de escalamiento en sus investigaciones. En 1997, Mandelbrot junto con otros autores, desarrollaron un modelo multifractal de activos (Mandelbrot, Fisher y Calvet 1997); Peters (1991) y Hilborn (1994) también han publicado diversos libros y artículos de investigación con aplicaciones y modelos fractales y multifractales a las series de tiempo financieras.

Costa y Vasconcelos (2003) construyeron coeficientes de Hurst del mercado brasileño a partir de un modelo multifractal para pronosticar crisis en dicho mercado; Kuperin *et al.* utilizaron los exponentes de Hölder para analizar la crisis financiera de los Estados Unidos de 1987. Cornelis y Rossitsa (2004) analizaron los patrones de los espectros multifractales de la crisis financiera de 1987 y concluyeron que hay un patrón de cambio en la dinámica de los mercados antes de que las crisis ocurran.

Otros estudios como los de Sornette (2003) también demuestran las propiedades multifractales y su relación con los exponentes de Hölder. Johansen, Sornette & Ledoit (2000) encontraron que las oscilaciones log-periódicas aparecen en el precio de los activos justo antes de que ocurra una caída agresiva, y que esas oscilaciones se pueden detectar mediante análisis multifractal.

De acuerdo a Sornette, Johansen & Bouchaud (1996) la conducta de los mercados accionarios antes de una crisis se relaciona con la conducta volátil que precede a un conjunto de datos en estado de equilibrio. Esta observación habilita y hace posible la detección temprana (y de advertencia) de caídas o crisis en los mercados financieros partiendo de la idea de que un mercado financiero que funcione normalmente exhibe propiedades de un sistema dinámico complejo.

La Tabla 1 muestra las características y diferencias más notables entre la Hipótesis del Mercado Eficiente (HME) y la Hipótesis del Mercado Fractal (HMF):

### Análisis multifractal

El análisis multifractal es relativamente reciente en el campo de estudio de las matemáticas (Feder, 1988). Al tener características universales, sus apli-

Tabla 1: Diferencias más notables entre HME y HMF:

Hipótesis del Mercado Eficiente	Hipótesis del Mercado Fractal
Estadística Gaussiana. Retornos independientes normalmente distribuidos.	Estadística No Gaussiana. Los cambios en los precios no están distribuidos de forma normal. Pueden caer más rápido de lo que se elevan.
Movimiento browniano geométrico: 0.50 o Raíz cuadrada del tiempo para escalar volatili- dades a diferentes periodos de tiempo.	Movimiento browniano fraccionario: Leyes de potencia o escala.
Procesos estacionarios.	Procesos no estacionarios.
No hay correlaciones históricas.	Hay correlaciones históricas.
No hay memoria. Eventos pasados no in- fluencian el presente o el futuro.	Existe memoria (los eventos están interco- nectados). Los inversionistas están influen- ciados por lo ocurrido. Sus expectativas están basadas en experiencias anteriores.
No se repiten (o muy raramente) los patrones a ninguna escala.	Se repiten patrones en todas las escalas de tiempo (minutos, días, años).
Continuas y estables en todas las escalas.	Se presentan discontinuidades en cualquier escala. (Por ej. Vuelos de Lévy o eventos tipo cisnes negros)
Toda la información se refleja en los precios.	Cada individuo interpreta la información de diferentes formas y en distintos momentos. (En ocasiones la información no se asimila de forma inmediata ni en un solo periodo de tiempo, a veces la información del presente tiene efectos claros en el futuro).
Los inversionistas son adversos al riesgo, y son racionales.	Los inversionistas pueden actuar de forma irracional, y pueden buscar riesgo cuando hay peligro de perder valor.

\*Fuente de elaboración propia.

caciones no sólo se dan en las matemáticas o en la física, sino también en otras áreas como en la lingüística, medicina, informática y por supuesto en la econofísica.

Las crisis de los mercados sugieren que las caídas son precedidas por un incremento de susceptibilidad y señales precursoras similares a la inestabilidad crítica de la dinámica física de los fluidos, por eso el análisis de espectros multifractales puede revelar la existencia de un patrón precursor identificable.

## Exponentes de Hölder

Existen varias maneras de medir la regularidad de una función alrededor de un determinado punto. La más conocida es usando el exponente puntual de Hölder, pero existen otras como la del exponente local de Hölder.

Un exponente de Hölder da una medida de la regularidad de una señal y se usa para detectar la presencia de discontinuidad y cuándo ocurre dicha discontinuidad en una señal dinámica. Así, la regularidad de una señal está definida por el número de derivadas continuas que una señal posee. Primero, el origen del tiempo de variación del exponente de Hölder se obtiene basándose en una transformada wavelet. Como los puntos discontinuos no tienen derivadas continuas, estos puntos se identifican localizando puntos en el tiempo donde el valor de exponente de Hölder cae repentinamente. Luego, un indicador se desarrolla para cuantificar los cambios significativos en este exponente de Hölder (Sohn, Robertson & Farrar, 2002).

Los exponentes son una herramienta útil en el procesamiento de señales e imágenes, además de tener aplicaciones en las finanzas. Adicionalmente, la distribución estadística de los exponentes de Hölder es utilizada para caracterizar señales naturales a través de análisis multifractal.

Las estructuras singulares e irregulares de los sistemas complejos usualmente poseen información esencial en su señal; para caracterizar estas estructuras es necesario cuantificar la regularidad local de una señal  $f(t)$ .

## 2. Metodología

Existen diversas técnicas que han sido desarrolladas para estimar los exponentes locales y puntuales de Hölder, pero no todas dan resultados satisfactorios. Estimar un indicador de irregularidad local sobre datos discretos es una tarea difícil. El método utilizado para los exponentes puntuales y locales en este trabajo está basado en la evaluación de las oscilaciones. Se utilizó el programa de MATLAB (Fraclab) en la determinación de los exponentes locales y puntuales de Hölder.

### Exponente puntual

La diferencia entre la estimación del exponente puntual y el local, es que el exponente puntual caracteriza la regularidad de la función en un punto dado, y el exponente local se relaciona con la regularidad de una función determinada, alrededor de un punto determinado.

Un punto en una función altamente irregular está caracterizado por un valor bajo del exponente puntual de Hölder, mientras que las partes regulares y suavizadas de una función presentan valores más altos, es decir, este exponente cuantifica la rugosidad de la función de una gráfica. Cuando el valor tiende a cero, es indicador de alta irregularidad en una señal, lo que se interpreta como un indicador de inestabilidad en los mercados financieros (Figliola, Rosenblatt & Serrano, 2012).

Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ... y...  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  tal que  $f$  no es diferenciable en  $x_0$ .

El exponente puntual de Hölder de  $f$  en  $x_0$  es el número real:

$$\alpha_p(x_0) = \liminf_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\log |f(x_0 + h) - f(x_0)|}{\log \|h\|} \quad (1)$$

donde  $\| \cdot \|$  denota la norma euclidiana en  $\mathbb{R}^2$ . Esta definición se ilustra en la siguiente Figura 1 que establece que, para cualquier  $\varepsilon > 0$ , la gráfica de  $f$ , en una región suficientemente pequeña de  $x_0$ , está incluida en la ecuación:

$$\pm |x - x_0|^{(\alpha_p(x_0) - \varepsilon)} \quad (2)$$

Pero no en la ecuación:

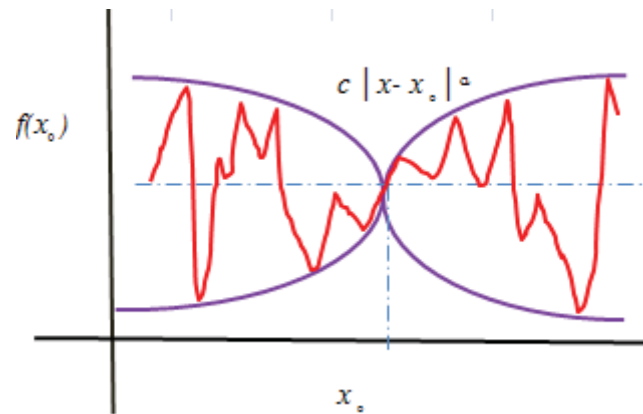
$$\pm |x - x_0|^{(\alpha_p(x_0) + \varepsilon)} \quad (3)$$

La ecuación 1 da un vínculo de la cantidad por la cual una señal varía u oscila alrededor de un punto  $x_0$  dentro de una región  $B(x_0, n)$ . A partir de la definición y la Figura 1, se puede ver que una pequeña  $\alpha$  cercana al valor de cero se traduce en una señal altamente variable, mientras que una  $\alpha$  cercana al valor de uno, corresponde a una señal más suave.

Según Trujillo, Legrand, Olague y Lévy-Vehel (2012) el método acertado para estimar  $\alpha$  sería usar los incrementos y directamente aplicar la ecuación 1, explicada previamente, sin embargo se deben hacer ajustes y reescribir dicha ecuación tomando en cuenta las oscilaciones. Sea la siguiente expresión la definición de oscilación que es la que se utilizó para efectos de este trabajo:



Figura 1: Envolvente de Hölder en una señal no diferenciable  $f$  en un punto  $x_0$ .



\*Fuente: Elaboración propia. Esta gráfica no contiene datos reales es únicamente para explicar de forma gráfica el comportamiento de una señal a partir del valor de  $\alpha$ .

La oscilación de  $f$  en una bola centrada en  $t$  es:

$$osc_{\tau}(t) = \sup_{||t-t'|\leq\tau} f(t') - \inf_{||t-t'|\leq\tau} f(t') \quad (4)$$

Se puede expresar el exponente de Hölder en términos de las oscilaciones (cuando es menor a uno).

Entonces, una definición alternativa del exponente de Hölder es:

$$\alpha_f(t) = \liminf_{\tau \rightarrow 0} \frac{\log osc_{\tau}(t)}{\log \tau} \quad (5)$$

Para estimar  $\alpha(t)$  con esta fórmula, el límite inferior es de hecho un límite y se asume la siguiente relación para un  $\tau$  suficientemente pequeña:

$$\log osc_{\tau}(t) = \alpha_f(t) \log \tau + k \quad (6)$$

Donde  $k$  es una constante. Se estima  $\alpha_f(t)$  como la pendiente de la regresión de los mínimos cuadrados del logaritmo de la oscilación como función del logaritmo de tamaño  $\tau$ .

Los parámetros en este método basado en las oscilaciones son los tamaños mínimos y máximos de la región  $\tau$ , y la base de incremento  $\tau$  entre sus valores extremos.

Un exponente puntual cercano a uno revela altos niveles de regularidad y uno cercano a cero revela niveles de muy poca regularidad.

### Exponente local

Para determinar el exponente local de Hölder, primero definimos que (Agaev, Kuperin 2005):

$f(x)$  pertenece a la clase de funciones de Hölder del orden de  $\alpha$ , si se cumple:

$$|f(t+h) - f(t)| < const \times h^\alpha ; t, h, \in \mathbf{R}; 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (7)$$

Una función de Hölder es aquella que asocia a cada punto un exponente de Hölder.

En el caso de que  $\alpha$  dependa de  $t$ , por ejemplo:  $\alpha \rightarrow \alpha(t)$ , entonces  $\alpha(t)$  tiene un exponente local de Hölder.

Cuando  $\alpha = 1$ , coincide con la clase diferenciable de funciones; cuando  $\alpha = 0$ , coincide con la clase de funciones discontinuas, por lo tanto, la clase de funciones de Hölder está en un punto intermedio entre las funciones continuas y las discontinuas, y el exponente de Hölder es una medida de la función de irregularidad.

Para obtener un exponente local, se parte de información expresada en una dimensión, por ejemplo una serie de datos:

Sea  $Y(t)$  el precio de un activo, luego la medida asociada con las series de tiempo estudiadas puede ser definida de la siguiente manera:

$$X(t, \Delta t) = (\ln Y(t + \Delta t) - \ln Y(t))^2 \quad (8)$$

Luego se divide el intervalo de tiempo  $[0, T]$  entre  $N$  intervalos del tamaño de  $\Delta t$  y se define la suma de la muestra:

$$Z_r(T, \Delta t) = \sum_{i=0}^{N-1} |X(i \times \Delta t, \Delta t)|^r \quad (9)$$

En términos de una muestra, se puede definir la siguiente función de escala:

$$\tau(r) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln Z_r(T, \Delta t)}{\ln \Delta t} \quad (10)$$

El espectro de la dimensión fractal de los retornos logarítmicos cuadrados,  $X(t, I)$  se define como:

$$D_r = \frac{\tau(r)}{r-1} \quad (11)$$

Finalmente, para obtener el exponente local de Hölder se debe diferenciar  $\tau(r)$

$$\alpha = \frac{d\tau(r)}{dr} \quad (12)$$

Entonces se puede determinar si la serie de tiempo es multifractal o no. Si  $D_r \neq D_0$  para  $r$  real, entonces  $X(t, 1)$  es multifractal. Para series de tiempo monofractales la función de escala  $\tau(r)$  sólo es lineal. Las series multifractales se pueden caracterizar por sus exponentes de Hölder locales:

$$\alpha(t) = X(t, \Delta t) \sim (\Delta t)^{\alpha(t)} \quad (13)$$

En el modelo clásico de precios de activos:  $\alpha(t) = 1$

Un exponente local que resulte entre valores de cero y de uno significa que la señal es continua pero no diferenciable en un cierto punto. Adicionalmente, el valor más bajo del exponente significa mayor irregularidad en la señal.

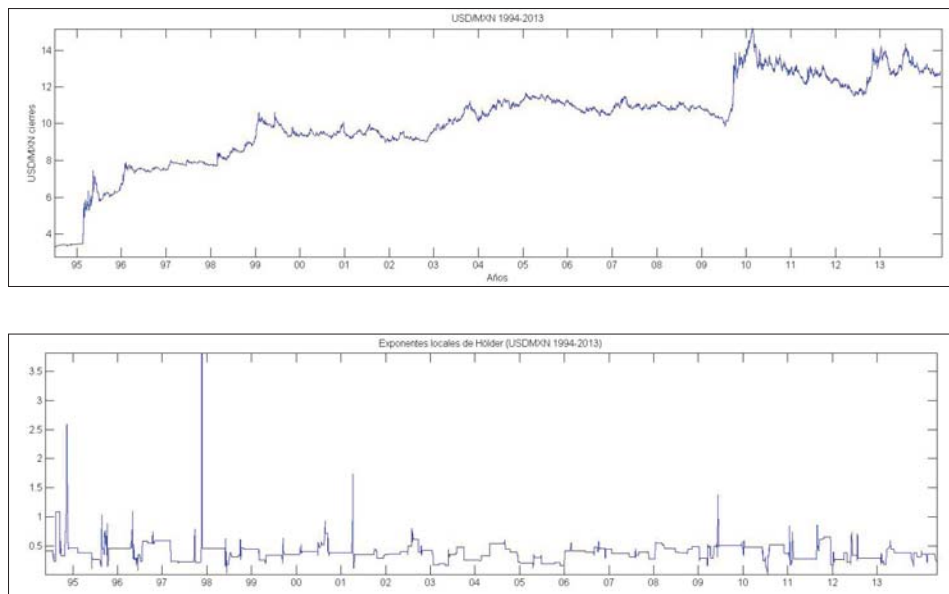
### 3. Resultados

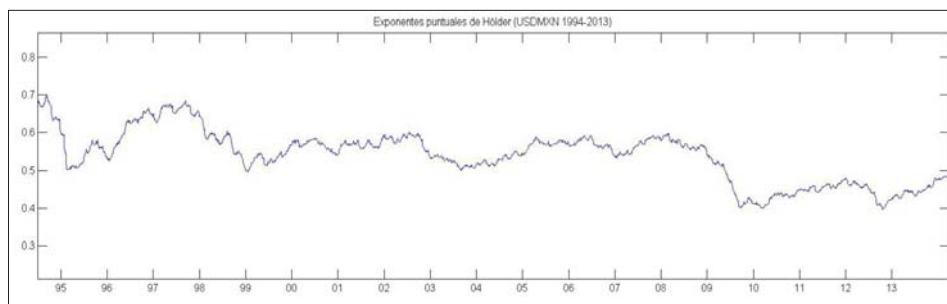
Se analizaron datos de cierres diarios de mercado, tanto del índice accionario de México IPC como del tipo de cambio dólar/peso mexicano. Los periodos de tiempo analizados fueron desde 1992 a febrero de 2013, respectivamente. En estos resultados se muestra que existen patrones que pueden modelar correctamente los momentos de crisis o caídas e incluso como alertas para anticipar una crisis, y que dichos patrones han mostrado funcionar bien en los datos analizados.

La Figura 2, consta de tres gráficas, en ellas se señalan con líneas verticales punteadas continuas las épocas de crisis que fueron detectadas exitosamente por los exponentes locales de Hölder. Las líneas verticales discontinuas y el círculo discontinuo son caídas detectadas por los exponentes puntuales, que no detectaron los exponentes locales.

La primera gráfica muestra los cierres del tipo de cambio dólar/peso mexicano. En la segunda gráfica se muestran los exponentes locales de Hölder correspondientes a cada periodo. En la tercera gráfica se muestran los exponentes puntuales que corresponden a cada periodo.

Figura 2: Tipo de cambio USD/MXN por el periodo de 1994-2013, exponentes locales de Hölder y exponentes puntuales de Hölder





Cuando se obtienen exponentes locales y puntuales con valores entre 0 y 1, significa que la señal es continua pero no diferenciable en un punto determinado; adicionalmente entre más pequeño sea el valor de un exponente significa que la señal es más irregular y entre más se aproxime a 1 es más regular. En los exponentes locales, se observan algunos puntos que superan el valor de 1, y precisamente estos puntos son indicadores de crisis. De acuerdo con la metodología de Agaev y Kuperin (2005), las crisis se pueden detectar por la caracterización de periodos de muy alta regularidad seguidos de periodos prolongados de mucha irregularidad. Esto es, que las crisis o los cambios fuertes (ya sean hacia arriba o hacia abajo) ocurren después de encontrarse exponentes locales con valores por encima de 1 seguidos de exponentes con valores muy bajos cercanos a 0 por tiempos prolongados.

Hay 7 regiones en la gráfica de los exponentes locales donde se supera el exponente con valor 1, sin embargo, sólo 5 de estos puntos presentan exponentes locales mayores a 1 seguidos de exponentes locales cercanos a cero y que corresponden a caídas fuertes.

Como se puede observar, las líneas rectas continuas punteadas de la gráfica de los exponentes locales aparecen después de que se detecta un patrón de crisis (un punto con exponente local superior a uno y luego exponentes cercanos a cero). De esta forma, los exponentes locales detectaron exitosamente 4 momentos de caídas fuertes, en 1994, 1995, en 1998 y en 2009-2010. Un aspecto interesante de los exponentes es que modelan y replican los cambios en la estructura de la señal o de la serie de tiempo.

El primer y segundo patrón de crisis detectado fue a finales del año 1994 en el año 1995; coincide con la crisis mexicana denominada «Efecto Tequila» (Mussachio, 2012) y sus efectos cambiarios posteriores.

El segundo patrón detectado corresponde al año de 1998, el cual coincide con los efectos en América Latina derivados de la crisis asiática. El peso continuó perdiendo valor frente al dólar durante todo ese año y el que siguió.

El tercer patrón detectado es en el año 2009 y coincide con la crisis mundial que azotó el mundo y los mercados en general y que tuvo como consecuencia la desaceleración económica de Estados Unidos y la pérdida de valor del peso frente al dólar.

Para el caso de los exponentes puntuales las regiones circuladas muestran congruencia con los patrones de crisis encontrados en los exponentes locales, es decir, las regiones en las que el exponente puntual resultó muy cercano a cero, coinciden con los momentos en los que sucedieron las caídas detectadas en los años 1994, 1995, 1998, y 2009; sin embargo, los exponentes puntuales revelan otro patrón de caída que ocurre a mediados de 2012 y que no es detectado por los exponentes locales, y que corresponde a una caída fuerte del peso frente al dólar. En la primera gráfica de precios, se puede apreciar que la caída ocurre después de que el exponente puntual lo indica.

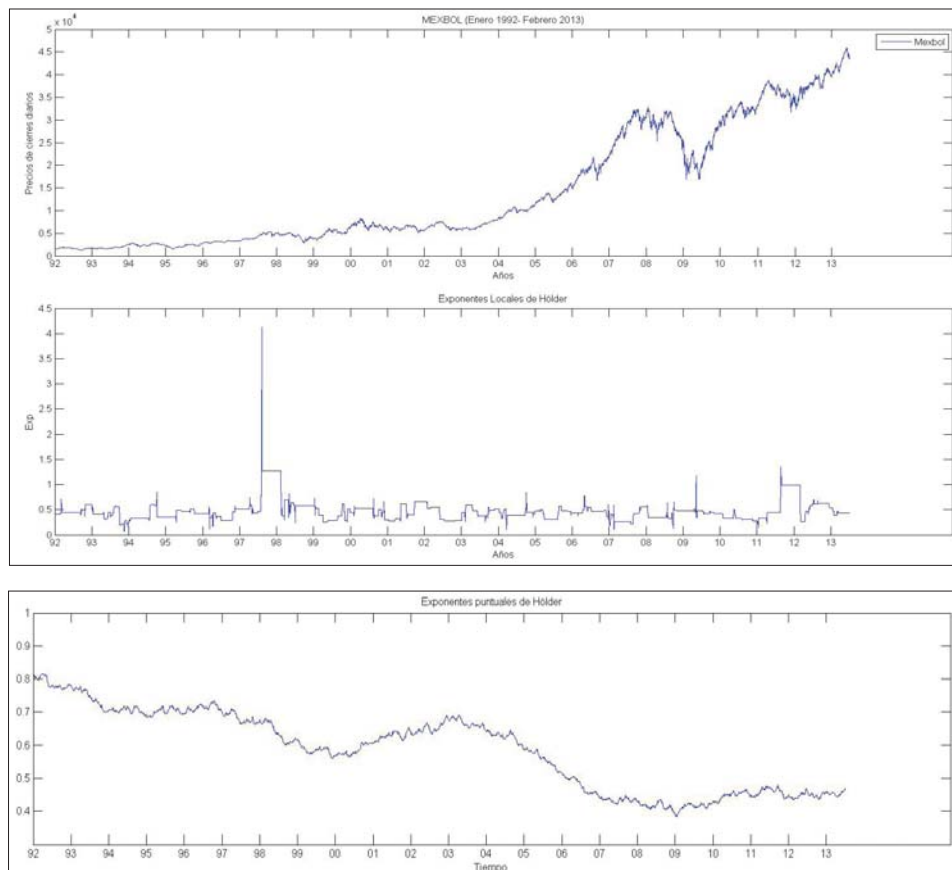
La Figura 3, está dividida en tres gráficas; la primera muestra la serie de tiempo completa analizada del índice accionario de México: IPC, la segunda gráfica muestra los exponentes locales y la tercera los exponentes puntuales. Las líneas punteadas rectas muestran el periodo en el que se muestra una baja fuerte o crisis en el mercado y que fue detectada exitosamente por los exponentes de locales. Los círculos punteados muestran las caídas fuertes detectadas por los exponentes puntuales.

Se detectaron exitosamente 3 patrones de caídas en los exponentes locales. Los exponentes puntuales detectaron los mismos puntos, pero además los exponentes puntuales detectaron que la serie de tiempo a lo largo del tiempo se ha vuelto cada vez más irregular. Se detectaron caídas en 1997-1999, luego en el año 2009 y en el 2011.

En el año 1994 hay un exponente local cuyo valor no llega al de uno pero es muy alto, e indica un cambio en la dinámica del comportamiento de precios, lo que coincide con la crisis de finales 1994 en México; otro detalle interesante es que en 1994 el exponente local llega al valor de cero, lo que muestra que el comportamiento de la serie de tiempo fue irregular durante ese año y hubo muchos movimientos muy bruscos en las subidas y bajadas de precios; los exponentes puntuales también detectan este cambio y aunque no llegan a ser muy cercanos a cero, registran una disminución por el periodo de mediados de 1994 hasta mediados de 1995.

A partir de mediados del año 1997, los exponentes locales detectan un cambio drástico ya que el valor del exponente llega a ser hasta de 4, y luego se reduce a valores muy bajos, lo que representa un patrón de crisis. Este punto coincide con la crisis asiática que se gestó en 1998. Los exponentes puntuales

Figura 3: Índice de la Bolsa Mexicana de Valores: IPC 1992-2013, exponentes locales de Hölder y exponentes puntuales de Hölder



detectaron irregularidades desde el año de 1997, esto coincide con lo detectado por los exponentes locales.

Los exponentes locales detectaron otra caída fuerte en 2009 y otro patrón de caída en 2011 que coincide con una caída drástica en el IPC.

#### 4. Conclusiones

La aportación fundamental de este trabajo es que al no encontrarse estudios o aplicaciones anteriores de este tipo de análisis multifractal para analizar específicamente el caso mexicano, es decir el índice IPC y el tipo de cambio

dólar/peso mexicano, presenta los resultados obtenidos de estos mercados a partir de la evolución de la dinámica de los exponentes de Hölder de sus respectivas series de tiempo. Además, a partir de estos resultados, se recomienda que al analizar series de tiempo financieras se analicen ambos exponentes, tanto el puntual como el local, ya que existió un caso en el que los exponentes puntuales detectaron una caída que los exponentes locales no, lo que conduce a pensar que los exponentes locales y puntuales de Hölder son análisis complementarios al buscar patrones de crisis.

Otra propuesta derivada de este trabajo es pues, el estudio de la dinámica de los mercados financieros a partir de la evolución de los exponentes locales y puntuales de Hölder, o de los puntos singulares/irregulares de las series de tiempo. Más allá de identificar con éxito las caídas *a posteriori*, los exponentes de Hölder podrían servir para identificar patrones que puedan prevenir caídas en los mercados financieros ya que en algunos casos, las caídas se detectaron de forma previa y un instrumento útil en el modelado y posible detección de patrones de caídas resulta útil en la gestión de riesgos financieros para inversionistas o departamentos de riesgos de alguna empresa.

En este estudio, se encontró que los exponentes locales y puntuales de Hölder pueden ser una herramienta útil para modelar el comportamiento y la detección de patrones de caídas en los mercados, ya que detectaron suficientemente bien ciertos eventos críticos en las series de tiempo del tipo de cambio dólar/peso mexicano y en el índice accionario de México IPC. El análisis multifractal realizado tanto a la serie de tiempo del índice de México IPC como al mercado cambiario de USD/MXN, en el periodo 1992-2013 reveló que la variación temporal de los exponentes puntuales y locales de Hölder refleja la evolución de las crisis y caídas, y detectó correctamente los eventos históricos que se desarrollaron durante ese fenómeno.

Los exponentes de Hölder pueden aplicarse a diferentes mercados con distintas dinámicas como los mercados cambiarios y los accionarios y muy posiblemente serían útiles en otros mercados como los de *commodities*, deuda y derivados. La propuesta derivada de este trabajo sería extender el análisis realizado a otro tipo de mercados para probar su efectividad.

La presente investigación concuerda con los resultados de investigaciones previas como las de Agaev y Kuperin (2005), Figliola, Rosenblatt y Serrano (2012) y Kuperin y Schastlivtev (2001) en las que aplican análisis multifractal utilizando los exponentes para detectar patrones de crisis en otros mercados.



## Bibliografía

- Agaev, I.A., Kuperin Yu. A. (2005). Multifractal Analysis and Local Hölder Exponents Approach to Detecting Stock Market Crashes.
- Ayache A., Lévy-Vehel, J. (2004). "On the identification of the pointwise holder exponent of the generalized multifractional Brownian motion". *Stochastic Processes and Their Applications*, Vol. 111 (1), p. 119-156.
- Blackedge, J. M., (2008). "Application of the Fractal Market Hypothesis for Macroeconomic Time Series Analysis". *ISAST Transactions on Electronics and Signal Processing*, Vol. 1(2).
- (2010). "Systemic Risk Assessment using a Non-stationary Fractional Dynamic Stochastic Model for the Analysis of Economic Signals." *ISAST Transactions on Computers and Intelligent Systems*, Vol. 2 (1), p. 76 – 94.
- Cornelis, A., Rossitsa, Y. (2004). "Multifractal Spectral Analysis of the 1987 Stock Market Crash". Kent State University, recuperado de <http://65.54.113.26/Publication/58551073/multifractal-spectral-analysis-of-the-1987-stock-market-crash>.
- Costa R., Vasconcelos G. L. (2003). "Long Range Correlations and Nonstationarity in the Brazilian Stock Market". *Physica A*, 329, p. 231-248.
- Fama E.F. (1970). "Efficient Capital Market: Review of Theory and Empirical Work". *The Journal of Finance*, 25.
- (1991). "Efficient Capital Markets: II, *The Journal of Finance*". Vol. 46(5).
- Feder, J. (1988). "Fractals". *Plenum Press*, New York, London, p. 254.
- Figliola A., Rosenblatt M., Serrano, E.P. (2012). "Local Regularity Analysis of Market Index for the 2008 Economical Crisis". *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* 2012, Vol. 19 (1), p. 65-78.
- Hilborn (1994). *Chaos and Nonlinear Dynamics*, Oxford University Press.
- Jaffard, S (2004). Wavelet techniques in multifractal analysis. In: *Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoit Mandelbrot, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Vol. 72, p. 91-151.
- Johansen, A., Sornette D., Ledoit O. (2000). "Crashes as Critical Points". *International Journal for Theoretical & Applied Finance*, Vol. 3(2), p. 219-255.
- Kuperin Y.A, Schastlivtsev R.R. (2001). Modified Holder Exponents Approach to Prediction of the USA Stock Market Critical Points and Crashes". Saint Petersburg State University, Russia.

- Mandelbrot, B. (1970). *La geometría fractal de la naturaleza*. España, Matemáticas, Tusquets Editores.
- , y Fisher A., Calvet L. (1997). "A Multifractal Model of Asset's Returns". *Cowles Foundation Discussion Paper*, #1164.
- Mantegna R., Stanley H (1997). *Physica A*, 239.
- (2000). *An Introduction to Econophysics, Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press.
- Mussachio, A. (2012). "Mexico's financial crisis 1994-1995". *Working Paper 12-101*, May 2012, Harvard Business School.
- Peters, E.E. (1991), *Chaos, order in the capital markets*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Samuelson P.A.(1964). Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly. *Industrial Management Review*, 6.
- Sohn H., Robertson Amy N., Farrar C. R., (2002). "Singularity Detection Using Hölder Exponent". *Proceedings of the US-Korea Workshop on Smart Infrastructural Systems*, Pusan, South Korea.
- Sornette, D. A., Johansen J., Bouchaud, P. (1996). "Stock Market Crasher, Precursors and Replicas". *Journal of Physics in France*, 6, p. 167-175.
- . Why Stock Market Crash, *Physics Reports*, V. 378 p. 1-100.
- Trujillo L., Legrand, P., Olague G., Lévy-Véhel J., (2012). "Evolving estimators of the Pointwise Hölder Exponent with Genetic Programming". *Information Sciences*, Elsevier. Vol. 209, p. 61-79.