

Estocástica: FINANZAS Y RIESGO

**Volatilidad del Mercado
Integrado Latinoamericano:
un enfoque multivariado**

Martha Beatriz Mota Aragón
Leovardo Mata Mata

**Métodos numéricos para cálculo
de la prima de opciones asiáticas**

Nora Gavira Durón
Julio Irving Aguilar Galindo

**Global Financial Crisis
Volatility Impact and
Contagion Effect on
NAFTA Equity Markets**

Miriam Sosa
Edgar Ortiz

**Valuación de la viabilidad de un
cambio tecnológico en México
utilizando opciones reales**

Francisco A. Álvarez Echeverría

**VOLUMEN 7, NÚMERO 1
ENERO - JUNIO 2017**

Universidad
Autónoma
Metropolitana
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco



Directorio

Universidad Autónoma Metropolitana Rector General Dr. Salvador Vega y León Secretario General M. en C. Q. Norberto Manjarrez Álvarez Unidad Azcapotzalco Rector de la Unidad Dr. Romualdo López Zárate Secretario de la Unidad Mtro. Abelardo González Aragón Director de la División de Ciencias Sociales y Humanidades Dr. Oscar Lozano Carrillo Secretario Académico Lic. Miguel Pérez López Jefa del Departamento de Administración Dra. María Teresa Magallón Diez Coordinador de Difusión y Publicaciones de la División Dr. Saúl Jerónimo Romero	Consejo Editorial Dr. Onésimo Hernández-Lerma Departamento de Matemáticas, CINVESTAV, Instituto Politécnico Nacional. Cd. de México, México Dr. Francisco Venegas-Martínez Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional, Cd. de México, México Dr. Edgar Ortiz Facultad de Ciencias Políticas y Sociales, Universidad Nacional Autónoma de México, Cd. de México, México Dr. Miguel Ángel Gutiérrez-Andrade Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, Cd. de México, México Dra. Patricia Saavedra-Barrera Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, Cd. de México, México Dr. Francisco López-Herrera Facultad de Contaduría y Administración, Universidad Nacional Autónoma de México, Cd. de México, México Dr. Dan Rosen Facultad de Ciencias Aplicadas e Ingeniería Universidad de Toronto, Toronto, Canadá Dr. Diego Agudelo-Rueda Área de Mercados Financieros, Universidad EAFIT Medellín, Colombia Dr. Roberto J. Santillán-Salgado ECADE Business School Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey Campus Monterrey, Monterrey, Nuevo León, México Comité Editorial Presidenta Dra. María G. Henaine-Abed Departamento de Sistemas, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco Cd. de México, México Editora Dra. Marissa R. Martínez-Preece Departamento de Administración, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco Cd. de México, México Coeditor Mtro. Carlos Zubieta-Badillo Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco Cd. de México, México
Dirección de este número Dra. María G. Henaine-Abed Dra. Marissa R. Martínez-Preece Mtro. Carlos Zubieta-Badillo	

Estocástica: FINANZAS Y RIESGO

Volumen 7, número 1
Enero - junio 2017

Estocástica: finanzas y riesgo es una revista académica de acceso abierto, especializada en finanzas, dirigida a investigadores/as y académicos/as interesados/as en el análisis de los riesgos financieros y temáticas relacionadas con éstos, editada semestralmente por la Universidad Autónoma Metropolitana, en versión impresa y electrónica. Todos los artículos son sometidos a arbitraje bajo la modalidad doble ciego, los cuales pueden ser publicados en inglés o español. Su objetivo es contribuir al desarrollo del conocimiento de las finanzas, la administración y modelado de riesgos, y la ingeniería financiera, así como promover la comunicación de resultados de investigación original, tanto teórica como empírica, relacionada con el estudio y práctica de estas disciplinas.

Universidad
Autónoma
Metropolitana



Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

ESTOCÁSTICA: FINANZAS Y RIESGO. Volumen 7, número 1, enero -junio 2017, es una publicación semestral de la Universidad Autónoma Metropolitana, a través de la Unidad Azcapotzalco, División de Ciencias Sociales y Humanidades, Departamento de Administración. Prolongación Canal de Miramontes 3855, Col. Exhacienda San Juan de Dios, Delegación Tlalpan, C.P. 14387, México, Ciudad de México, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Delegación Azcapotzalco, C.P. 02200. México, Ciudad de México; teléfono 53-18-94-54 extensiones 157 y 154. Página electrónica de la revista: <http://estocastica.azc.uam.mx>, y dirección electrónica: estocastica@correo.azc.uam.mx. Editora responsable Dra. Marissa del Rosario Martínez Preece. Certificado de Reserva de Derechos al Uso Exclusivo número 04-2011-102016113300-203, ISSN 2007-5383, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Dra. María Guadalupe Henaine-Abed, Departamento de Sistemas, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Unidad Azcapotzalco, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, delegación Azcapotzalco, C.P. 02200, México, Ciudad de México; fecha de última modificación: 26 de enero de 2017. Tamaño del archivo: 5.87 MB.

Las opiniones expresadas por los/as autores/as no necesariamente reflejan la postura del/la editor/a de la publicación.

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

Volatilidad del Mercado Integrado Latinoamericano: un enfoque multivariado

Martha Beatriz Mota Aragón
Leovardo Mata Mata

9

Métodos numéricos para cálculo de la prima de opciones asiáticas

Nora Gavira Durón
Julio Irving Aguilar Galindo

27

Global Financial Crisis Volatility Impact and Contagion Effect on NAFTA Equity Markets

Miriam Sosa
Edgar Ortiz

67

Valuación de la viabilidad de un cambio tecnológico en México utilizando opciones reales

Francisco A. Álvarez Echeverría

89

PRESENTACIÓN

El año 2017 se vislumbra como un año difícil para México, los eventos políticos y económicos recientes, apuntan hacia una economía con graves problemas.

Las proyecciones para 2017 apuntan a que México enfrentará un ambiente externo poco favorable, con reducción de la inversión extranjera directa y de los flujos de capital, así como variaciones en los precios del petróleo y el tipo de cambio, además internamente tendrá que lidiar con el descontento social.

Algunas de las declaraciones del presidente de Estados Unidos han provocado la preocupación tanto del sector gubernamental como privado, en especial aquellas que se refieren a su intención de tomar medidas para detener el cruce de mexicanos a EUA y la retención del flujo de remesas como elemento de presión para lograr sus fines. Sus políticas nacionalistas y su promesa de reactivar su economía, podrían llevar a establecer aranceles comerciales entre ambos países y severas limitaciones a las importaciones de México hacia EUA; además de poner en marcha varias medidas que frenarían la inversión en nuestro país, como podría considerarse el caso de la empresa automotriz Ford que anunció los primeros días de enero de 2017, la cancelación de una inversión por mil 600 millones de dólares para construir una nueva planta en México, al mismo tiempo que hizo saber que invertirá 700 millones de dólares en la expansión de la planta de *Flat Rock*, ubicada en Michigan (norte de Estados Unidos), creando 700 trabajos para producir vehículos eléctricos e híbridos.

El efecto que tendrán las políticas de la nueva administración de EUA en el Tratado de Libre Comercio de América del Norte (TLCAN) aún no es claro, sin embargo, las declaraciones emitidas al respecto hacen pensar en la posibilidad de una renegociación o aún la desaparición del mencionado tratado.

Como se puede observar, se vislumbra un panorama un tanto sombrío para este año 2017, caracterizado por una lucha política con nuestro vecino del norte, complicada, con noticias negativas como la depreciación de nuestra moneda frente al dólar norteamericano y un alza generalizada de precios, encabezada por el aumento en el precio de la gasolina, entre otras variables.

Si bien persisten las posiciones pesimistas debemos esperar que se encuentren escenarios y medidas positivas que sean viables y susceptibles de ser puestas en marcha para impulsar el crecimiento económico y social. Es por tanto necesario, continuar estudiando los mercados financieros y los métodos que ayuden a plantear nuevas alternativas de solución que puedan contribuir a resolver los problemas que actualmente se presentan.

En esta ocasión los cuatro artículos que se incluyen son:

En el primer artículo titulado “Volatilidad del Mercado Integrado Latinoamericano: un enfoque multivariado”, Martha Beatriz Mota Aragón y Leovardo Mata Mata; describen la volatilidad y abordan el grado de dependencia de los rendimientos de los principales índices accionarios del Mercado Integrado Latinoamericano (MILA), mediante un modelo GARCH multivariado no normal de correlaciones condicionales constantes, para el periodo 2009-2016.

“Métodos numéricos para el cálculo de la prima de opciones asiáticas” de Nora Gavira Durón y Julio Irving Aguilar Galindo, es el segundo artículo incluido; en éste se presentan las características y aplicaciones de métodos numéricos para la valuación de las opciones asiáticas; se incluye el cálculo con la fórmula cerrada para hacer un comparativo de resultados, en los casos en que se puede calcular el costo de la prima mediante fórmula.

El tercer artículo versa sobre el *North American Free Trade Agreement* (NAFTA), y se titula “Global financial crisis volatility impact and contagion effect on NAFTA equity markets”, de Miriam Sosa y Edgar Ortiz. El objetivo de esta investigación es analizar el impacto de la crisis financiera global en la dinámica de la volatilidad de los mercados accionarios del bloque TL-CAN.

Por último se tiene el artículo “Valuación de la viabilidad de un cambio tecnológico en México utilizando opciones reales”, de Francisco A. Álvarez Echeverría; el trabajo se centra en la valuación económica del cambio tecnológico en el sistema de generación de energía eléctrica en México, con el fin de reducir las emisiones contaminantes y/o de optimizar los costos

operativos y de producción a través de la sustitución tecnológica del sistema carboeléctrico de generación de energía por un sistema nucleoelectrico.

Como en otros números, el deseo de los/as editores/as es que los artículos aquí incluidos contribuyan al avance de las ciencias financieras, en especial, en aquellas áreas especializadas en riesgo y que estos puedan resultar un referente en la toma de decisiones financieras.

Una vez más, deseamos mencionar que esta publicación ha llegado a su séptimo año ininterrumpido gracias a la colaboración de la comunidad especializada que aceptó la invitación para participar en el esfuerzo de difundir y promover la investigación en las disciplinas objeto de esta revista, por ello, agradecemos el interés mostrado en este proyecto y se reitera la invitación para que los/as investigadores/as en estas disciplinas continúen formando parte del espacio de colaboración que representa esta publicación.

María G. Henaine-Abed
Marissa R. Martínez-Preece
Carlos Zubieta-Badillo

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Ciudad de México
México

Volatilidad del Mercado Integrado Latinoamericano: un enfoque multivariado

Volatility of the Latin American Integrated Market: A Multivariate Approach

Martha Beatriz Mota Aragón*

Leovardo Mata Mata**

(Fecha de recepción: 27 de julio de 2016, Fecha de aceptación: 19 de octubre de 2016)

RESUMEN

En este trabajo se describe la volatilidad y se aborda el grado de dependencia de los rendimientos de los principales índices accionarios del Mercado Integrado Latinoamericano (MILA), mediante un modelo GARCH multivariado no normal de correlaciones condicionales constantes, para el periodo 2009-2016. Se encuentra evidencia de que el grado de dependencia entre los rendimientos es bajo y que existe segmentación entre algunos de sus miembros. Los mercados mayormente integrados son Chile y México, después sigue Perú y finalmente Colombia. En contraste, a pesar de la volatilidad diferenciada entre los miembros del MILA, el nivel de dependencia entre sus rendimientos ha sido estable en el periodo de referencia, lo que sugiere una mayor integración de los mercados hacia el largo plazo.

Clasificación JEL: C32, G11, G14.

Palabras clave: GARCH multivariado, volatilidad, MILA, causalidad de Granger.

ABSTRACT

This paper describes Latin American Integrated Market (MILA) major stock indices yields' volatility and addresses the degree of dependence among such stock indices, by means of a multivariate non normal constant conditional correlation GARCH model

* Departamento de Economía, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Izta-palapa, Ciudad de México, México, beatrizmota4@gmail.com

** Departamento de Economía, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Izta-palapa, Ciudad de México, México, leovardomata@gmail.com

for 2009-2016. Evidence was found that there is a low degree of dependence among the yields and that segmentation exists among some of its members. The degree of integration is higher in Chile and Mexico followed by Peru and finally Colombia. Despite the differentiated volatility between members of the MILA, the dependency level among their yields has been stable over the reference period, suggesting long term market integration.

JEL Classification: C32, G11, G14

Key words: Multivariate GARCH model, volatility, MILA, Granger causality.

Introducción

En esta época la interacción económica entre los diferentes países ha crecido constantemente, si bien es cierto que existe una tendencia hacia procesos globales con nacionalismos culturales, las relaciones económicas son el ejemplo más claro y tácito de cómo una nación influye sobre otra (Figueroa, 2014). En este sentido, la situación de los países emergentes resulta un caso de interés macroeconómico, ya que sus mercados financieros reflejan la capacidad que tiene un país para reaccionar ante choques externos e internos (Cantor, 2015). A este respecto, los mercados de valores constituyen una parte del sistema económico que se inserta con mayor profundidad en el contexto global, de ahí que sus operaciones afectan a otras economías y representan elementos ineludibles del proceso financiero (Sanz, 2013).

En los países emergentes de América existe una integración entre los mercados bursátiles de Chile, Perú, Colombia y México, denominado como el Mercado Integrado Latinoamericano (MILA), su desarrollo es incipiente y se encuentra en una época temprana de desarrollo, aunque existen expectativas de altos beneficios para los miembros en el largo plazo, (Romero-Álvarez *et al*, 2013).

Los principales índices accionarios dentro del MILA son IPSA (Chile), COLCAP (Colombia), S&P/BVL (Perú) y el IPC (México); usualmente se involucran empresas con un alto nivel de capitalización y una apertura mayor a los mercados internacionales (Figueroa, 2014).

La relación que existe entre los distintos mercados bursátiles se puede indagar mediante los co-movimientos que presentan sus variables financieras y económicas, así como la evolución de sus volatilidades. (Calderón, 2007) analiza la evolución del comercio y del producto de Latinoamérica con el continente asiático y encuentra evidencia de una sincronía relevante, similar a los resultados de (Granger *et al.*, 2000) para los tipos de cambio y los índices accionarios de Hong Kong, Malasia, Singapur, Corea del Sur, Tailandia y Taiwan.

Bajo este contexto, se encuentra usualmente en la literatura que los autores analizan los grados de dependencia (Cont, 2001) mediante vectores autorregresivos (VAR), modelos de cointegración (VEC) y especificaciones univariadas de la familia GARCH, tales como el modelo GARCH(1,1), (Tsay, 2010).

En este trabajo se estudia la dependencia y volatilidad de los rendimientos accionarios de los principales índices del MILA mediante los cuatro principales modelos de GARCH multivariado (Hou y Li, 2016). El conjunto de estimaciones consideran tanto a la distribución normal multivariante como a la distribución t-Student múltiple, el objetivo es calibrar de manera robusta la especificación GARCH (Bauwens *et al.*, 2006) y capturar en mayor medida los hechos estilizados que suceden usualmente en los rendimientos financieros (Cont, 2001).

La especificación GARCH multivariada que se ajuste en mayor medida, permitirá verificar si existe una correlación positiva estacionaria entre los índices del MILA. Asimismo, se podrá establecer el grado de dependencia entre sus elementos y estudiar la magnitud de la volatilidad realizada en el periodo de referencia. Este conjunto de estimaciones contribuyen a la literatura con una herramienta integral para analizar las variaciones de los rendimientos al interior del MILA, pues el enfoque de este documento para abordar la dependencia y la volatilidad es multivariado, es decir, se aborda el comportamiento de la media y la varianza a lo largo del tiempo mediante distribuciones de probabilidad conjuntas. De esta forma, el modelo GARCH multivariado de mejor ajuste al MILA, puede ser un instrumento útil tanto para académicos como para quienes día a día se enfrentan a los cambios bruscos de los rendimientos financieros.

En este sentido, en el siguiente apartado se comienza con la descripción de las cuatro especificaciones más relevantes de los modelos GARCH multivariados, bajo los cuales se persigue describir la volatilidad y dependencia de los rendimientos históricos en el periodo que va de septiembre de 2009 a junio de 2016.

1. Volatilidad y especificación GARCH multivariada

Los rendimientos de los principales índices accionarios del MILA se analizan desde dos frentes, la media y la varianza. En ese caso, resulta crucial el concepto de estacionariedad (Greene, 2012), pues implica indirectamente que existe una distribución de probabilidad estable sobre el periodo de análisis. Para ello, se realizará la prueba clásica de raíz unitaria Dickey-Fuller aumentada y Phillips-Perron (Tsay, 2010) cuya hipótesis nula es que existe raíz unitaria (no estacionariedad). Si es el caso, el rechazo de la hipótesis nula señala evidencia sobre la naturaleza de la serie de tiempo. De igual forma, el test de Kwiatkowski, Phillips, Smichdt y Shin (KPSS) es una prueba relevante para verificar estacionariedad bajo el no rechazo de la hipótesis base (Hamilton, 1994). Este conjunto de pruebas son de gran importancia, pues permiten un uso correcto de las distribuciones de probabilidad.

En el caso de los rendimientos de los índices del MILA, la condición de estacionariedad implica también algunos hechos relevantes. Concretamente, si las series de tiempo son estacionarias, entonces existe una varianza finita, memoria limitada; fluctúan alrededor de su valor medio y las autocorrelaciones disminuyen rápidamente, a medida que el número de rezagos aumenta. Estas características son elementos cruciales para verificar si existe causalidad en el sentido de Granger y para concretar una especificación de GARCH multivariado (Silvennoinen y Terasvirta, 2009).

La causalidad en el sentido de Granger es un concepto relevante, pues permite encontrar evidencia suficiente para establecer un efecto a lo largo del tiempo entre dos variables aleatorias (Granger, 2002). La hipótesis nula es que no existe causalidad en el sentido de Granger para cierto número de rezagos específico. Entonces, si se rechaza la hipótesis base, existe evidencia para sustentar una o más relaciones entre dos o más variables y sus rezagos. En relación a los modelos GARCH multivariados, se realiza la prueba de causalidad en el sentido de Granger para sustentar la estructura autorregresiva que presentan las diferentes especificaciones (Hou y Li, 2016).

En general, un modelo GARCH multivariado permite a la matriz de covarianzas condicional de un vector aleatorio seguir una estructura dinámica flexible (Bauwens *et al*, 2006) y de esta forma permitir que la media condicional (Engle, 2002) se estime bajo un vector autorregresivo (VAR). En general, la especificación es:

$$y_t = Ax_t + u_t \quad (1)$$

$$u_t \sim B_t^{1/2} v_t \quad (2)$$

donde y_t es un vector aleatorio de tamaño $m \times 1$ de variables dependientes, A es una matriz de parámetros $m \times k$, x_t es un vector $m \times 1$ de variables explicativas, usualmente los rezagos de y_t , $B_t^{1/2}$ es el factor de Cholesky de la matriz de covarianzas condicional (Bollerslev y Wooldridge, 1988) a lo largo del tiempo y v_t es un vector aleatorio $m \times 1$ cuyos elementos son ruido blanco escrito (Aielli, 2009).

Existen cuatro parametrizaciones usuales (Comte y Lieberman, 2003) para un GARCH multivariado, según se asuma una estructura para la matriz de covarianzas condicional (Engle, 1982):

a) GARCH DVECH. Este modelo considera a la matriz H_t como

$$H_t = S + \sum_{i=1}^p A_i \odot u_{t-1} u'_{t-1} + \sum_{j=1}^q B_j \odot H_{t-j} \quad (3)$$

siendo S , A_i y B_j matrices simétricas de parámetros $m \times m$ y $\odot$ el producto de Hadamard (Tse y Tsui, 2002). Los estimadores se encuentran usualmente mediante la función de log-verosimilitud de una distribución normal multivariante

$$l = \sum_{t=1}^T -\frac{1}{2} m \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\det(H_t)) - \frac{1}{2} u_t H_t^{-1} u'_t \quad (4)$$

aunque puede emplearse una especificación más flexible mediante la distribución multivariada t-Student (Lütkepohl, 2005).

b) GARCH CCC. La especificación con correlaciones condicionales constantes (CCC) asume una matriz R de correlaciones fijas, invariantes en el tiempo, tal que

$$H_t = D_t^{1/2} R D_t^{1/2} \quad (5)$$

con D_t una matriz diagonal de varianzas condicionales (Bollerslev, 1986), donde se define para cada elemento de la diagonal

$$\sigma_{i,t}^2 = s_{i,t} + \sum_{j=1}^{p_i} \alpha_j u_{i,t-j}^2 + \sum_{j=1}^{q_i} \beta_j \sigma_{i,t-j}^2 \quad (6)$$

- c) GARCH DCC. Por el contrario, la especificación bajo correlaciones condicionales dinámicas (DCC) asume que la matriz de correlaciones no es constante (Silvennoinen y Terasvirta, 2009) y establece las siguientes matrices

$$H_t = D_t^{1/2} R_t D_t^{1/2} \quad (7)$$

$$R_t = Z_t^{-1/2} Q_t Z_t^{-1/2} \quad (8)$$

donde Z_t es la diagonal de la matriz $Q_t = (1 - a - b)R + a\tilde{u}_{t-1}\tilde{u}_{t-1}' + bQ_{t-1}$ para algunos valores específicos $a, b \in \mathbb{R}$ y residuales estandarizados $\tilde{u}_t$, (Escribano y Pfann, 1998).

- d) GARCH VCC. Este modelo, (Tsay, 2010), extiende el modelo GARCH multivariado del inciso c) bajo una matriz de correlaciones variante en el tiempo (VCC) de la forma

$$R_t = (1 - a - b)R + a\Psi_{t-1} + bR_{t-1} \quad (9)$$

donde $\Psi_t = f(\tilde{u}_t)$ es una matriz que se obtiene como función de los residuales estandarizados y $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros según la dinámica de R_t .

Un comentario importante es que la bondad de ajuste de cada uno de los modelos GARCH que se han señalado en los incisos a), b), c) y d) se pueden evaluar mediante los criterios de información de Akaike y Schwarz (Hou y Li, 2016).

Finalmente, bajo los conceptos y modelos señalados en esta sección, el procedimiento de estimación que se implementa en este trabajo para encontrar el modelo GARCH de mejor ajuste a los rendimientos del MILA en el periodo 2009-2016 es como sigue:

- i) Se realizan las pruebas de raíz unitaria de Dickey-Fuller, Phillips-Perron y KPS para verificar si las series de tiempo de los rendimientos son estacionarias.
- ii) Se lleva a cabo la prueba de causalidad en el sentido de Granger para diferentes rezagos y hallar evidencia de relaciones a lo largo del tiempo.
- iii) Se estiman los cuatro modelos GARCH, empleando tanto la distribución normal multivariante como la distribución t-Student multivariada sobre el periodo de referencia. Las estimaciones se realizan empleando diferentes rezagos y se elige el modelo cuya bondad de ajuste promedio sea superior. Para ello, se escoge el modelo GARCH cuyos criterios de Akaike y Schwarz sean mínimos.
- iv) Mediante el modelo GARCH de mejor ajuste se analiza la volatilidad realizada y las correlaciones entre los rendimientos a lo largo del tiempo.

Por último, en la siguiente sección se presentan las estimaciones pertinentes sobre las cuatro especificaciones GARCH para describir la volatilidad de los principales índices accionarios del MILA y valorar el grado de dependencia entre ellos, en el periodo 2009-2016.

2. Estimaciones y resultados

Los rendimientos diarios de los diferentes índices IPSA, IPC, COLCAP y S&P/BVL se calcularon bajo la expresión

$$x_{it} = \ln(p_{it}) - \ln(p_{it-1}) \quad (10)$$

donde p_{it} es el nivel de un índice en el tiempo t . Los estadísticos descriptivos para el periodo 2009-2016 se presentan en el Cuadro 1, donde se puede observar que los rendimientos de COLCAP exhiben la desviación estándar más alta, le sigue S&P/BVL, IPC y luego IPSA. También sobresale que los rendimientos más altos y más bajos corresponden a COLCAP y S&P/BVL.

Cuadro 1. Índices bursátiles en el MILA

Variable	Media	Desviación estándar	Mínimo	Máximo
S&P/BVL	-0.0112%	0.894%	-13.291%	6.917%
IPC	0.010%	0.650%	-5.985%	4.167%
IPSA	0.001%	0.624%	-7.236%	5.732%
COLCAP	-0.007%	1.296%	-7.517%	13.118%

Fuente. Elaboración propia con datos de Bloomberg.

En el Cuadro 2 se presentan tres pruebas de hipótesis para verificar si las series de tiempo de los rendimientos son estacionarias (Hamilton, 1994). Bajo la prueba KPSS no se rechaza la hipótesis nula, en tanto que bajo la prueba de hipótesis de Dickey-Fuller aumentada y Phillips-Perron se rechaza la hipótesis nula de raíz unitaria (Granger, 2000), así que existe evidencia para afirmar que las series de los rendimientos son estacionarias en la ventana de tiempo 2009-2016. Esta característica es importante, pues es un requisito para el modelo VAR de la media condicional que se encuentra dentro de cada especificación del modelo GARCH multivariado señaladas en el apartado 1.

Cuadro 2. Pruebas de raíz unitaria

Variable	Dickey Fuller Estadístico t	Phillips-Perron Estadístico t	KPSS Estadístico t
S&P/BVL	-48.36***	-48.39***	0.52
IPC	-52.04***	-52.03***	0.05
IPSA	-32.06***	-44.70***	0.22
COLCAP	-41.59***	-90.76***	0.53

Fuente. Elaboración propia con datos de Bloomberg.

*Nivel de confianza al 90%.

**Nivel de confianza al 95%.

*** Nivel de confianza al 99%.

Asimismo, en el Cuadro 3 se realiza la prueba de causalidad de Granger para las series de tiempo de los rendimientos de COLCAP, IPC, IPSA y S&P/BVL sobre un conjunto de cinco rezagos, ya que son datos diarios. Se puede apreciar que existe evidencia de causalidad en el sentido de Granger (Greene, 2012) desde el primer día hasta el quinto día, aunque debe señalarse que la relación es heterogénea entre los diversos índices. S&P/BVL causa en el sentido de Granger a IPC e IPSA, pero no a COLCAP. En tanto que IPC causa en el sentido de Granger a S&P/BVL e IPSA, pero no a COLCAP. Asimismo, IPSA causa en el sentido de Granger a S&P/BVL e IPC, pero no a COLCAP. De igual forma, COLCAP causa en el sentido de Granger a IPC e IPSA, pero no a S&P/BVL, lo cual sugiere que los mercados bursátiles de Perú y Colombia se encuentran menos integrados dentro del MILA.

En el Cuadro 4 se presentan los criterios de información para las cuatro especificaciones GARCH, donde se puede observar que el modelo de mejor ajuste corresponde al caso GARCH CCC. Asimismo, en el Cuadro 5 se presentan los criterios de Akaike y Schwarz para elegir el número de rezagos óptimo en el GARCH CCC, bajo la distribución normal y t-Student multivariadas. Se puede apreciar que dos rezagos, bajo la distribución t-Student multivariada con dos grados de libertad, es la especificación más adecuada para el GARCH CCC. El nivel mínimo de los criterios de información se señala con un asterisco (*).

El modelo estimado de mejor ajuste, GARCH CCC, con dos rezagos y bajo la distribución t-Student, se muestra en el Cuadro 6. Ahí se puede apreciar que en lo que respecta a la media condicional de los rendimientos diarios, S&P/BVL e IPSA afectan con un día de retraso, en el sentido de Granger, al nivel de S&P/BVL, y que su volatilidad realizada se puede describir adecuadamente mediante un GARCH(1,1), siendo que se ha considerado la relación conjunta entre los cuatro índices bursátiles. Este comportamiento es similar para los cuatro casos que se han considerado, así que se puede reafirmar la robustez del GARCH(1,1) dentro del GARCH CCC. Además, debe señalarse que el efecto de un índice sobre otro, en la media condicional, es positivo; ya que los coeficientes significativos del modelo VAR implícito son mayores a cero. De igual forma, los coeficientes estimados del apartado GARCH(1,1) para cada ecuación tienen signos positivos y sugieren sincronía en la volatilidad histórica.

La relación positiva señalada por los coeficientes del modelo GARCH multivariado tanto en las ecuaciones de la media como en las ecuaciones de la varianza, reafirman una relación de corto plazo directa y sincrónica, que

Cuadro 3. Pruebas de causalidad de Granger en MILA

	IPC		IPSA		COLCAP	
	Rezagos	Estadístico F	Rezagos	Estadístico F	Rezagos	Estadístico F
S&P/BVL	1	0.964	1	2.879*	1	0.001
	2	4.456**	2	6.186***	2	0.051
	3	10.118***	3	9.893***	3	0.174
	4	14.256***	4	10.065***	4	0.298
	5	16.281***	5	10.501***	5	0.368
	S&P/BVL		IPSA		COLCAP	
	Rezagos	Estadístico F	Rezagos	Estadístico F	Rezagos	Estadístico F
IPC	1	0.908	1	0.115	1	0.277
	2	1.346	2	0.491	2	0.467
	3	1.378	3	1.445	3	0.717
	4	2.856*	4	2.769*	4	0.718
	5	3.097***	5	2.707*	5	0.671
	IPC		S&P/BVL		COLCAP	
	Rezagos	Estadístico F	Rezagos	Estadístico F	Rezagos	Estadístico F
IPSA	1	2.981**	1	0.297	1	0.016
	2	4.187**	2	0.240	2	0.227
	3	4.221**	3	0.298	3	0.615
	4	4.769***	4	0.882	4	0.616
	5	5.368***	5	2.398*	5	1.295
	IPC		IPSA		S&P/BVL	
	Rezagos	Estadístico F	Rezagos	Estadístico F	Rezagos	Estadístico F
COLCAP	1	0.486	1	0.007	1	0.007
	2	0.429	2	0.596	2	0.025
	3	0.517	3	1.925	3	0.429
	4	1.471	4	2.021*	4	0.466
	5	2.412*	5	3.392***	5	1.555

Fuente. Elaboración propia con datos de Bloomberg.

*Nivel de confianza al 90%.

**Nivel de confianza al 95%.

*** Nivel de confianza al 99%.

Cuadro 4. Elección del modelo GARCH de mejor ajuste
en el periodo 2009-2016

Especificaciones	Criterios de información	
	Akaike	Schwarz
GARCH CCC	-86663.93*	-86065.86*
GARCH DCC	-86694.95	-86078.94
GARCH VCC	-86779.91	-86259.59
GARCH VECH	-86712.93	-86134.79

Cuadro 5. Rezagos óptimos para el modelo de mejor ajuste, GARCH CCC

Rezagos óptimos para el modelo GARCH CCC				
Rezagos	Criterios de información		Criterios de información	
	Distribución normal multivariante		Distribución t-student múltiple	
	Akaike	Schwarz	Akaike	Schwarz
1	-86911.48*	-86690.14*	-91770.13	-91560.76
2	-86846.06	-86535.01	-91906.98*	-91601.91*
3	-86759.21	-86352.48	-91438.01	-91307.26
4	-86626.73	-86124.32	-91598.10	-91101.57
5	-52402.66	-52378.73	-91778.46	-91186.37

Fuente. Elaboración propia con datos de Bloomberg.

*Nivel de confianza al 90%.

**Nivel de confianza al 95%.

*** Nivel de confianza al 99%.

sugiere una relación de largo plazo tanto en la media condicional como en la volatilidad realizada. Este comportamiento se encuentra bajo la especificación de una matriz de correlación condicional estacionaria al interior del GARCH multivariado. Es decir, bajo la existencia de una matriz de correlaciones fija e invariante en el periodo 2009-2016.

Cuadro 6. Estimación del modelo de mejor ajuste, GARCH CCC.

Distribución t-Student multivariada Log-verosimilitud = 46004.49 Grados de libertad = 2 Estadístico ji-cuadrado= 672.51***					
Variable dependiente	Variables explicativas				
S&P/BVL	Rezagos	S&P/BVL	IPC	IPSA	COLCAP
	1	0.1176 (6.21)***	-0.0002 (-0.01)	0.0496 (2.41)**	0.0010 (0.43)
	2	0.0249 (1.57)	-0.0147 (-0.95)	0.0265 (1.42)	0.0051 (2.11)**
	Constante		-0.0001 (-2.86)***		
	ARCH(1)		1.7302 (13.68)***		
	GARCH(1)		0.4979 (26.96)***		
IPC	Rezagos	S&P/BVL	IPC	IPSA	COLCAP
	1	-0.0141 (-1.36)	0.0309 (1.52)	-0.0085 (-0.45)	0.0001 (0.38)
	2	0.0236 (2.46)***	-0.0276 (-1.61)	0.0079 (0.45)	0.0075 (2.93)***
	Constante		0.0002 (4.68)***		
	ARCH(1)		1.0842 (12.53)***		
	GARCH(1)		0.5859 (37.44)***		
IPSA	Rezagos	S&P/BVL	IPC	IPSA	COLCAP
	1	0.0082 (0.89)	0.0699 (4.68)***	0.1106 (5.17)***	0.0033 (1.79)*
	2	0.0072 (0.92)	0.0226 (1.87)*	-0.0239 (-1.41)	0.0037 (2.01)**
	Constante		-0.0001 (-0.63)		
	ARCH(1)		1.9802 (14.74)***		
	GARCH(1)		0.4273 (22.56)***		
COLCAP	Rezagos	S&P/BVL	IPC	IPSA	COLCAP
	1	0.0069 (0.91)	0.0052 (0.40)	0.0026 (0.20)	-0.4332 (-21.15)***
	2	0.0150 (2.15)**	-0.0341 (-2.65)***	0.0361 (2.66)**	-0.2073 (-11.83)***
	Constante		-0.0002 (-2.74)***		
	ARCH(1)		2.4716 (22.82)***		
	GARCH(1)		0.4801 (7.33)***		

Fuente. Elaboración propia con datos de Bloomberg.

*Nivel de confianza al 90%.

**Nivel de confianza al 95%.

*** Nivel de confianza al 99%.

Los coeficientes de correlación entre los rendimientos de los índices accionarios de los cuatro países miembros del MILA se presentan en el Cuadro 7. La mayoría de los estimadores son mayores a cero y significativos, salvo las correlaciones entre los rendimientos de COLCAP, IPSA, IPC y S&P/BVL. La ausencia de significancia en estos casos indica una relación lineal peque-

ña e intermitente, aunque podría pensarse en relaciones no lineales elevadas, lo que podría sugerir una agenda de investigación futura. En cualquier caso, las correlaciones positivas y relevantes entre los rendimientos de los índices S&P/BVL, IPC e IPSA sugieren una relación fuerte y directa entre Chile, México y Perú.

De la información que aparece en el Cuadro 7, se puede deducir que los países con mayor integración son Chile y México, le siguen México y Perú y por último Perú y Chile. Colombia presenta correlaciones más pequeñas, lo que sugiere segmentación respecto a los miembros del MILA.

Por otra parte, si se observa el comportamiento de la volatilidad realizada, el modelo GARCH CCC señala que el índice bursátil COLCAP ha sido el más volátil, le sigue S&P/BVL, luego IPSA y finalmente México, ver Figura 1.

La volatilidad de los cuatro índices se encuentra relacionada entre todos los miembros del MILA, como se había comentado, pero su comportamiento es diferenciado y ha venido disminuyendo a lo largo del tiempo, lo que sugiere un voto de confianza para la diversificación y para una mayor integración hacia el futuro.

Por último, en la Figura 1 también se puede apreciar que en la estimación encontrada durante el año 2011, la volatilidad de los cuatro índices alcanzó un valor más alto. Esto puede explicarse por la gran incertidumbre en ese año, debe recordarse que cayeron dictaduras en Egipto, Libia y otros más de Euroasia, sin mencionar la muerte de Osama Bin Laden, la recesión en países europeos y movimientos militares en Medio Oriente (OCDE, 2015).

Cuadro 7. Correlaciones condicionales estacionarias en 2009-2016

corr(S&P/BVL, IPC)	0.3648 (15.65)***
corr(S&P/BVL, IPSA)	0.3369 (14.36)***
corr(S&P/BVL, COLCAP)	0.0129 (0.86)
corr(IPC, IPSA)	0.4647 (22.61)***
corr(IPC, COLCAP)	0.0125 (0.83)
corr(IPSA, COLCAP)	0.0036 (0.24)

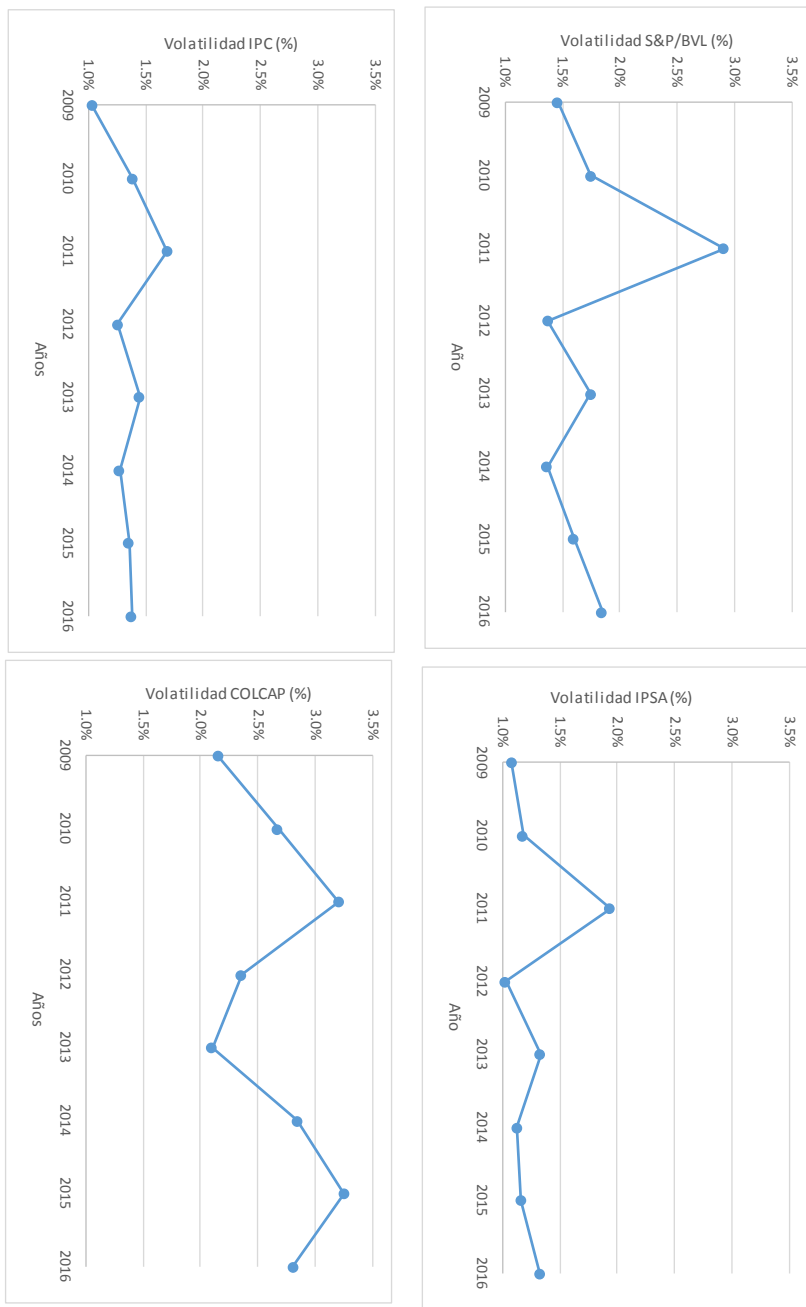
Fuente. Elaboración propia con datos de Bloomberg.

*Nivel de confianza al 90%.

**Nivel de confianza al 95%.

*** Nivel de confianza al 99%.

Figura 1. Volatilidad realizada anual 2009-2016 según el modelo GARCH CCC.



Fuente: Elaboración propia.

Conclusiones

Este documento describe la volatilidad y el grado de dependencia entre los rendimientos accionarios diarios de los principales índices que se encuentran dentro del MILA. La dependencia es positiva y significativa entre sus elementos, tanto en la media como en la volatilidad condicional, para Perú, México y Chile, en tanto que Colombia se encuentra menos integrado, pues los coeficientes de correlación no son significativos para COLCAP. Concretamente, el grado de dependencia entre los rendimientos es bajo y existe segmentación respecto a Colombia.

Los mercados mayormente integrados son Chile y México, después sigue Perú y finalmente Colombia. Respecto a las volatilidades, el índice bursátil COLCAP ha sido el más volátil, le sigue S&P/BVL, luego IPSA y finalmente IPC de México. En este sentido, a pesar de la volatilidad diferenciada entre los miembros del MILA, el nivel de dependencia entre sus rendimientos ha sido estable en el periodo de referencia, lo que sugiere una mayor integración de los mercados hacia el largo plazo. Es decir, indirectamente se ha encontrado evidencia a favor de la diversificación y la integración hacia el MILA.

El modelo multivariado de mejor ajuste (GARCH CCC) emplea una distribución t-Student múltiple con dos grados de libertad, según los criterios de información clásicos de Akaike y Schwarz, y asume una matriz de correlaciones condicionales estacionarias para el periodo 2009-2016. Esto es relevante, pues estadísticamente se ha encontrado que las correlaciones condicionales constantes constituyen la mejor especificación.

Esto sugiere adicionalmente que la relación de integración entre los miembros del MILA ha sido estable en los últimos años, a pesar de la volatilidad heterogénea de sus miembros y de su incipiente desarrollo. Estos resultados confirman las expectativas positivas que existen en el mercado financiero sobre el MILA y su evolución hacia el largo plazo.

Referencias bibliográficas

- Aielli, G. P. (2009). "Dynamic Conditional Correlations: On Properties and Estimation". (*working paper*, Dipartimento di Statistica, University of Florence, Florence, Italy).
- Bauwens, L., S. Laurent, y J.V.K., Rombouts (2006). "Multivariate GARCH Models: A Survey". *Journal of Applied Econometrics*, 21 (1), pp. 79-109.
- Bollerslev, T. (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*, 31(1), pp. 307-327.
- Bollerslev, T. Engle, R. y Wooldrige, J. (1988). "A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances". *The Journal of Political Economy*, 96 (1), pp. 116-113.
- Calderón, C. (2007). "Trade, Specialization and Cycle Synchronization: Explaining Output Comovement between Latin America, China and India". (*working paper*, The World Bank, LCRCE).
- Cantor, R. A. (2015). "El retorno de activos de renta variable pertenecientes al Mercado Integrado Latinoamericano MILA: un enfoque cuantitativo". (*working paper*, Pontificia Universidad Javeriana).
- Comte, F. y Lieberman, O. (2003). "Asymptotic theory for multivariate GARCH processes". *Journal of Multivariate Analysis*, 84 (1), pp. 61-84.
- Cont, R., (2001). "Empirical properities of asset returns: stylized facts and statistical issues". *Quantitative Finance*, 1 (2), pp. 223-236.
- Engle, R. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of Variance of United Kingdom Inflation". *The Journal of Political Economy*, 96 (1), pp. 116-131.
- Engle, R. F. (2002). "Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models". *Journal of Business & Economic Statistics*, 20 (1), pp. 339-350.
- Escribano, A. y Pfann, G. A. (1998). "Non-linear error correction, asymmetric adjustment and cointegration". *Economic Modelling*, 15 (2), pp. 197-216.
- Figuroa, D. (2014). "Integrating Latin American Stock Markets: The Mercado Integrado Latinoamericano (MILA): Innovations and Perspectives". *American University Business Law Review*, 3 (2), pp. 277-303.
- Granger, C. W., Huangb, B. N. y Yang, C. W. (2000). "A bivariate causality between stock prices and exchange rates: evidence from recent Asianflu". *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 40(3), pp. 337-354.

- Greene, W. H. (2012). *Econometric Analysis* (2a. Ed.). Boston, EEUU: Prentice Hall.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis* (1a. Ed.). New Jersey, EEUU: Princeton University Press.
- Hou, Y. y Li, S. (2016). "Information transmission between US and China index futures markets: An asymmetric DCC GARCH approach". *Economic Modelling*, 52 (1), pp. 884-897.
- Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. New York, EEUU: Springer Science & Business Media.
- OCDE (2015). *Perspectivas económicas*. París.
- Romero-Álvarez, Y. P., Ramírez-Atehortúa, F. H. y Guzmán-Aguilar, D. S. (2013). "Mercado Integrado Latinoamericano (MILA): análisis de correlación y diversificación de los portafolios de acciones de los tres países miembros en el período 2007-2012". *Cuadernos de Contabilidad*, 14(34), pp. 53-74.
- Sanz, J. (2013). "La influencia de China en Latinoamérica: el Consenso de Washington y el de Beijing". *Cuadernos de Pensamiento Político*, 37(1), pp. 145-166.
- Silvennoinen, A. y Terasvirta, T. (2009). *Multivariate GARCH models*. In *Handbook of Financial Time Series* (1a. Ed.). New York, EEUU: Springer.
- Tsay, R. S. (2010). *Analysis of financial time series* (2a. Ed.). Massachusetts, EEUU: Wiley.
- Tse, Y.K. y Tsui, A.K.C. (2002). "A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations". *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(1), pp. 351-362.

Métodos numéricos para cálculo de la prima de opciones asiáticas

Numerical Methods for Calculation of Asian Options Premium

Nora Gavira Durón*

Julio Irving Aguilar Galindo**

Fecha de recepción: 29 de abril de 2016, Fecha de aceptación: 30 de noviembre de 2016

RESUMEN

La forma más común de valorar opciones, es mediante fórmulas cerradas; sin embargo, debido a que no necesariamente existen para todos los tipos de opciones asiáticas, se hace necesario aplicar métodos numéricos y comparar sus resultados para determinar la eficiencia de los mismos. En este trabajo se presentan las características y aplicaciones de métodos numéricos para la valuación de las opciones asiáticas; se incluye el cálculo con la fórmula cerrada para hacer un comparativo de resultados, en los casos en que se puede calcular el costo de la prima mediante fórmula. Se describen ventajas y desventajas de los métodos; los métodos suponen una tasa libre de riesgo constante, volatilidad constante y una distribución de precios lognormal. En este contexto se concluyó que el método Monte Carlo es el que presenta resultados más confiables para evaluar opciones asiáticas.

Clasificación JEL: C02, C13, C63, G13

Palabras clave: opciones asiáticas, precio de la opción, métodos numéricos.

ABSTRACT

The most common way to value options is by closed formulas; however, because this formulas do not necessarily exist for all types of Asian options, it is necessary to apply numerical methods and compare their results to determine their efficiency. This paper describes the characteristics and applications of numerical methods for the valuation of Asian Options. The calculation with closed formulas is included to compare results, in those cases where the formula can be used. Advantages and disadvantages of the methods are described; they assumed a constant risk free rate, constant volatility and a lognormal distribution of prices. Within the context of this article, it can be concluded that the Montecarlo Method achieves the most reliable results when valuing Asian options.

JEL Classification: C02, C13, C63, G13

Keywords: Asian Options, Option Price, Numerical Methods.

* Universidad de Las Américas, Puebla, Cholula Puebla, nora.gavira@udlap.mx

** Fideicomiso de Fomento Minero, Ciudad de México, México, jaguilar@fifomi.gob.mx

Introducción

Las opciones exóticas son aquellas no tradicionales, donde el precio de ejercicio no es fijo (Fernández y Ariño, 1996); se operan en los principales mercados financieros del mundo desde finales de los sesenta en mercados Over The Counter (OTC); sin embargo, hasta los noventa, su negociación comienza a ser relevante. Nacen por la necesidad de menores costos en las primas de las opciones tradicionales, también se conocen como opciones de segunda generación (García *et al.*, 2000).

Una opción asiática es una modalidad de opción exótica (Arregui y Vallejo, 2001), su precio depende del promedio del precio del subyacente a lo largo de la vida de la opción, o de parte de ella, también se conocen como opciones promedio (Clewlow y Chris, 1997). Se emplean para hacer frente a cambios bruscos en los precios del activo subyacente y en diversas situaciones caracterizadas por su regularidad en el tiempo. El costo de la prima es menor al de las opciones tradicionales debido a que en la valuación de las opciones tradicionales se considera la volatilidad del activo subyacente sobre el que esté hecha la opción, mientras que en las opciones asiáticas se considera la volatilidad como la media de los precios que alcanza el activo subyacente a lo largo de la vida de la opción; esta volatilidad de la media siempre será menor a la volatilidad del subyacente.

El estudio y manejo de las opciones asiáticas, puede generar un gran impacto en los diversos mercados internacionales de capitales, ya que son instrumentos útiles tanto para la gestión de riesgos, como para la especulación. No obstante, hasta el momento su uso no se ha extendido en nuestro país; entre otras causas, debido al desconocimiento sobre su existencia, la dificultad de establecer el precio de sus primas y a la poca o nula difusión que los investigadores han hecho de las ventajas que representan este tipo de opciones.

Turnbully y Wakeman, (1991) crean un algoritmo eficiente, que describe los precios promedio de las opciones europeas y al compararlo con las estimaciones de Monte Carlo; éstas demostraron ser bastante precisas, la velocidad de cálculo del algoritmo es comparable al algoritmo Black-Scholes. Levy, (1992) desarrolla una metodología sencilla que produce de forma cerrada aproximaciones analíticas para la valoración de las reclamaciones de opciones europeas, que conectan a la media aritmética de los tipos de cambio futuros. La principal ventaja, es que evita la necesidad de adoptar procedimientos numéricos que consumen mucho tiempo. La precisión de

la fórmula resultante, y el supuesto de distribución que subyace en ella, se examina por medio de simulaciones de Monte Carlo.

Hull y White, (1993) muestran cómo los métodos de árboles binomiales y trinomiales se pueden extender para valorar opciones como son las lookback; las opciones asiáticas con media aritmética del precio de las acciones, presentan el problema de las iteraciones, debido a que el número de precios promedio de las acciones que podría presentarse entre el tiempo cero y un nodo puede ser muy grande. Neave y Turbull, (1993) desarrollan un método de distribución de frecuencias para la valoración de opciones europeas y americanas, con media aritmética en tiempo discreto, asumiendo que la trayectoria del precio de las acciones se comporta como una binomial multiplicativa; el método conduce a aproximaciones rápidas que están teóricamente más cerca al valor real que los desarrollados por Hull y White, (1993).

Dempster y Hutton, (1997) presentan métodos numéricos para la valuación de opciones vainilla y opciones exóticas americanas; métodos de programación lineal para opciones vainilla americana y métodos explícitos para las opciones exóticas *look-back*; obteniendo resultados eficientes en poco tiempo. Debido a la complejidad de la valoración de las opciones asiáticas se han utilizado técnicas computacionales como MATHEMATICA (Cruz y Rodríguez, 2007), con lo que se obtiene alto grado de precisión en la valuación de las opciones asiáticas aritméticas. Fusai y Meucci, (2008) presentan metodologías para el precio de opciones asiáticas con *payoff* aritmético, suponiendo que los subyacentes evolucionan de acuerdo con un proceso de Lévy genérico. Ortiz y Martínez, (2016) valúan opciones asiáticas con subyacente promedio con simulación Monte Carlo y comparan los resultados con opciones europeas; siendo las primeras de menor precio, la diferencia aumenta cuando se incrementa el plazo de vencimiento de la opción.

Uno de los principales problemas de los métodos numéricos es la simulación de números aleatorios ya que se generan mediante algoritmos, con lo que se pueden reproducir de forma rápida; sin embargo, las secuencias de números obtenidas no son realmente aleatorias, debido a que se obtienen mediante operaciones deterministas y sólo se obtienen secuencias pseudo-aleatorias, para que sean válidos éstos números deben satisfacer criterios de aleatoriedad adecuados. Para la programación de los métodos numéricos para la valuación de opciones asiáticas en el presente trabajo, se utiliza el software Matlab® (The MathWorks, 2016), sus algoritmos¹ hacen

que sus resultados sean pseudo-aleatorios y pseudo-independientes, los cuales pasan varias pruebas estadísticas de aleatoriedad e independencia, con lo que se resuelve el problema de la validez estadística.

Un problema importante que en el mercado mexicano de derivados (MexDer, 2016) existen contratos de opciones sobre índices, acciones, ETF's y divisas; por lo general de tipo europeo y alguno de tipo americano pero actualmente no operan opciones asiáticas, la hipótesis del presente artículo es que el Método Montecarlo es el más eficiente para valorar opciones asiáticas comparado con otros métodos analizados en este trabajo. El objetivo del presente estudio es dar a conocer las metodologías de valuación; así como sus ventajas para motivar su uso. Se realiza un análisis comparativo entre algunos de los diversos métodos numéricos que existen para valorar opciones asiáticas, aritméticas y geométricas, de tipo europeo; se describen y aplican los métodos para realizar una comparación entre sus resultados y así determinar el más eficiente; con lo que podemos contribuir al análisis y difusión de este tipo de opciones, para incrementar su adecuado uso en el sistema financiero mexicano.

En la Sección 1 se muestra la descripción y características de las opciones asiáticas; en la Sección 2 se describen los métodos numéricos, a comparar (Binomial, binomial recursivo, binomial con matrices, binomial alternativo, simulación Montecarlo y método explícito diferencial finito); en la Sección 3 se presenta la aplicación de los métodos y resultados, denotando los métodos más eficientes; en la Sección 4 se presentan las conclusiones, futuras líneas de investigación y consideraciones finales.

1. Opciones asiáticas

Las opciones asiáticas poseen la característica de que su valor al vencimiento depende de la trayectoria del subyacente en el periodo de vigencia, es decir, depende también de su evolución. Las opciones de promedio son particularmente eficaces para negocios en los mercados en los cuales se lleven a cabo intercambios comerciales de productos primarios recién cotizados, y su uso puede evitar la manipulación del precio cuando se acerca el fin del periodo de vigencia de una opción ordinaria; así mismo cuando las entidades financieras realizan negociaciones en las que reciben pagos en otras divisas;

¹ Uniformes, semillas del generador basadas en la hora actual, multiplicativo de Fibonacci, normales, combinación recursiva múltiple, etcétera.

la media de los valores de la cotización de esas divisas es una forma de protegerse de grandes variaciones del tipo de cambio.

Cox, Ross y Rubinstein, (1979) desarrollaron el método binomial para la valoración de opciones europeas para varios periodos; que tiene la ventaja de que, además de ser muy intuitivo, utiliza una matemática muy sencilla. Supone que la distribución de los precios de las acciones es una binomial multiplicativa, las varianzas de los rendimientos son los mismos en todos los periodos, los tipos de interés sin riesgo se suponen constantes. El modelo supone una neutralidad ante el riesgo, porque se puede construir una cartera de arbitraje que elimina totalmente el riesgo de la inversión. Si el valor de la opción no coincide con el calculado a través del modelo, entonces se puede conseguir un beneficio sin riesgo.

La mayoría de las opciones asiáticas que actualmente se negocian en los mercados financieros son de tipo europeo, ya que una opción de tipo americano se puede ejercer de manera tan adelantada como desde el comienzo del periodo y perder la posibilidad de protegerse el tiempo restante. Las más negociadas son aquellas que al vencimiento, ofrecen una remuneración igual a la diferencia, si es positiva, entre el precio medio del activo subyacente durante el periodo predeterminado y el precio de ejercicio. Su utilización tiene numerosas ventajas en situaciones caracterizadas por la regularidad en el tiempo; como son: las situaciones de aprovisionamientos periódicos de materias primas y otros suministros, y las operaciones de importación y exportación que tengan la misma característica de regularidad temporal (Crespo, 2001). Las opciones asiáticas también reducen la exposición a movimientos repentinos en el subyacente justo antes de expirar; algunos esquemas de pensiones tienen tal característica.

1. 1 Tipos de payoff

El promedio del subyacente puede reducir significativamente el precio de una opción asiática, comparada con una opción ordinaria similar o vainilla, debido a que la diferencia que se encuentra en el precio de ejercicio (ya sea $|S_A - K|$ o $|S_A - S_T|$) es menor que $|S_T - K|$ (vainilla), la volatilidad será la media de los valores que alcance el activo subyacente de la opción a lo largo de la vida de la misma. Esta volatilidad de la media siempre será inferior a la volatilidad del activo porque depende del promedio acumulado del precio; así, el costo de las opciones asiáticas será menor que el de las tradicionales. Así como existen opciones *put* y *call*, americanas y europeas, el *Payoff* se clasifi-

ca en *strike* y *rate*, también llamado este último *price*. Si tomamos el precio de ejercicio de una opción vainilla (Hull J. C., 2012),

$$\max(S - K, 0) \quad (1)$$

al reemplazar el precio *strike* K con un promedio, se tendrá una opción *average strike call*, con el siguiente *payoff*:

$$\max(S - S_{ave}, 0) \quad (2)$$

De igual forma, el *payoff* de una *average strike put* es:

$$\max(S_{ave} - S, 0) \quad (3)$$

Si tomamos el *payoff* de una opción *vanilla* y en vez de reemplazar el precio *strike*, sustituimos el precio del subyacente al momento de ejercerla por el promedio, lo que obtenemos es una *rate option*. Una *average rate put* tendría un *payoff* igual a:

$$\max(S_{ave} - K, 0) \quad (4)$$

y una *average rate put* un *payoff*:

$$\max(K - S_{ave}, 0) \quad (5)$$

La diferencia en el grado de dificultad del cálculo de los precios de opciones *call* y *put* no es relevante debido a que sólo se cambia un signo, pero la distinción entre *strike* y *rate* puede hacer una gran diferencia. Las opciones *strike* se pueden valorar numéricamente. Los tipos más comunes de opciones asiáticas son aquellas cuyo valor depende del promedio de los valores que ha tomado el subyacente, durante la vida (o parte de ella) de la opción.

También se negocian, aunque en menor volumen, opciones que al vencimiento ofrecen una remuneración igual a la diferencia, si es positiva, entre el precio del activo subyacente en la fecha de vencimiento de la opción y

la media de los precios que el activo subyacente ha alcanzado durante el periodo de tiempo especificado. A este tipo de opciones se les conoce como opciones de precio de ejercicio promedio (OEP) (*average strike options*) o pseudo-asiáticas (Fernández y Ariño, 1996). Estas opciones pueden garantizar que la media de los precios pagados por un activo sobre un periodo de tiempo no es mayor que el precio final o para el caso del *Put*, garantiza que la media recibida no es menor que el precio final. Considerando el tipo de media que podemos utilizar, se pueden tener opciones de media aritmética y opciones de media geométrica.

Otra clasificación separa las opciones asiáticas en función del periodo de tiempo en que se calcula la media (Alziary, Décamps, y Koehl, 1997):

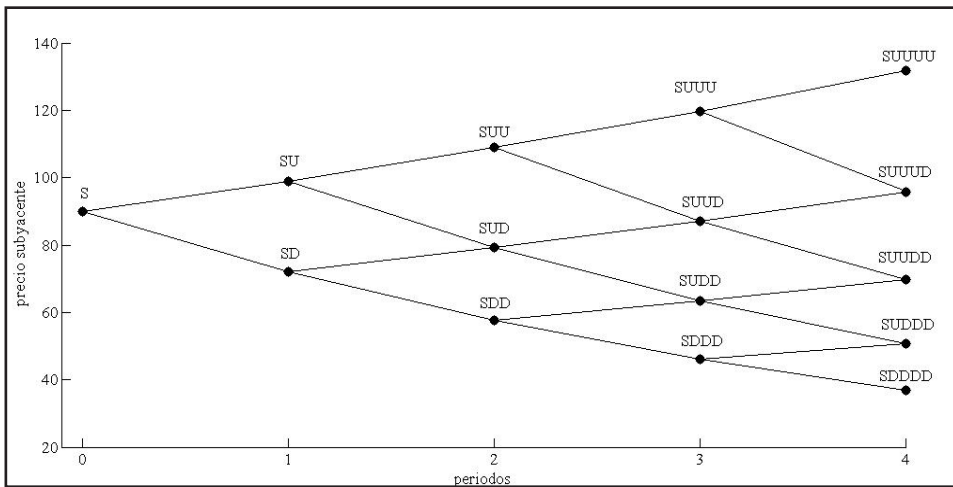
- *Forward-starting options* si el periodo de tiempo entre el que se calcula el precio de opción la media se encuentra en el futuro.
- *Backward-starting o plain vanilla* cuando el tiempo que resta para el vencimiento de la opción es menor o igual que el intervalo de tiempo en el que se calcula la media.

2. Aproximación por métodos numéricos

2.1 Método binomial

A partir de las opciones vainilla, se utiliza el método binomial y se realizan modificaciones para poder valorar opciones asiáticas (Haug, 2006). El modelo binomial simula que la serie de precios se mueve hacia arriba o abajo. Si el precio *stock* comienza con valor S entonces éste podría tomar cualquier valor entre US o DS ($U > 1$ y $D < 1$) en el siguiente periodo de tiempo, esto es, como una caminata aleatoria. Si suponemos una tasa libre de riesgo constante, volatilidad constante y una distribución de precios lognormal, podemos extender la caminata aleatoria para otro periodo de tiempo. Después de dos periodos de tiempo el valor del subyacente podría ser U^2S , si hacen dos movimientos hacia arriba, UDS , si hace un movimiento hacia arriba seguido de uno hacia abajo o viceversa, o D^2S , si hace dos movimientos consecutivos hacia abajo. Después de tres periodos el precio del subyacente puede ir al U^3S , U^2DS , etcétera. El resultado de la estructura de la caminata aleatoria, se puede ver en la Figura 1, donde los nodos representan el valor tomado por el subyacente.

Figura 1. Simulación del movimiento de los precios con $S = 90$, $U = 1.1$, $D = 0.8$ y 4 periodos.



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

El nodo superior e inferior del árbol, en el momento de expiración, pueden ser alcanzados por un sólo camino (todos los movimientos hacia arriba o hacia abajo). Por lo tanto, los valores intermedios son más probables de ser alcanzados que el valor final si se está haciendo una simulación. En la Figura 2 se muestra el número de caminos de cada nodo después de cuatro periodos de tiempo y la probabilidad de obtener cada uno.

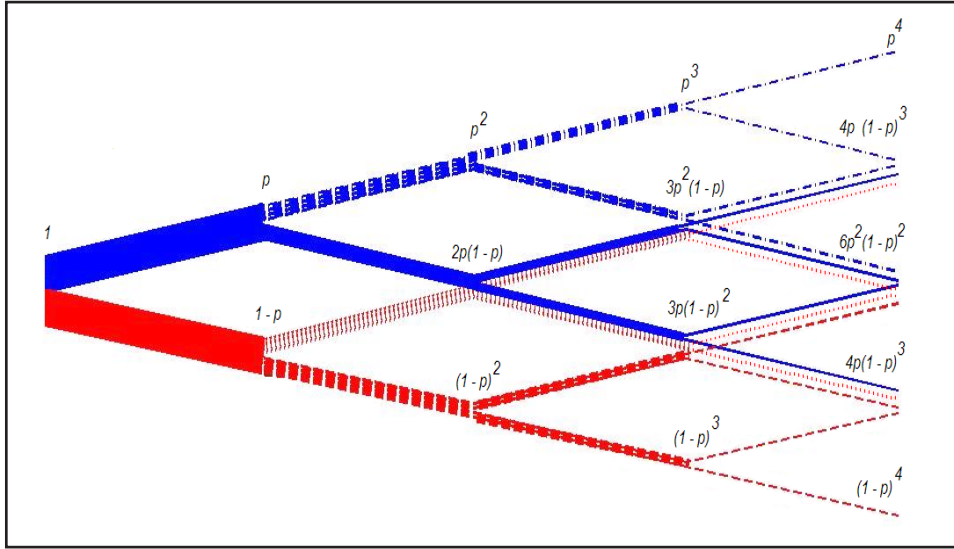
Este método tiene como desventaja, la lentitud de ejecución dada una partición del tiempo relativamente pequeña como lo son 15 periodos.

Ecuación para el valor de una opción: Suponiendo que se conoce el valor de una opción en el tiempo $t + \Delta t$ (por ejemplo, este tiempo puede ser el momento de expiración de la opción), se construye un portafolio en el tiempo t consistente en una opción y una posición corta en una cantidad Δ del subyacente. En el tiempo t este portafolio vale:

$$\Pi = V - \Delta S, \quad (6)$$

donde el valor V ya está determinado.

Figura 2. Árbol con las diferentes probabilidades de riesgo neutral de cada nodo.



Fuente: Elaboración propia en Matlab®

En el tiempo $t + \delta t$ el portafolio toma uno de dos valores, ya sea que aumente o disminuya el precio del subyacente. Estos dos valores son:

$$V^+ - \Delta US \text{ y } V^- - \Delta DS. \quad (7)$$

Debido a que suponemos que conocemos V^+ , V^- , U , D , S y Δ , los valores de ambas expresiones son conocidos y, en particular, dependen de Δ . Teniendo la libertad de elegir Δ , podemos tener el mismo valor de este portafolio, ya sea que el precio del activo suba o baje. Esto se asegura si hacemos:

$$V^+ - \Delta US = V^- - \Delta DS \quad (8)$$

Esto nos da a elegir:

$$\Delta = \frac{V^+ - V^-}{(U - D)S}, \quad (9)$$

cuando el valor del nuevo portafolio es:

$$\Pi + \delta\Pi = V^+ - \frac{U(V^+ - V^-)}{U - D} = V^- - \frac{D(V^+ - V^-)}{U - D}. \quad (10)$$

Debido a que el valor del portafolio ha sido garantizado, podemos decir que este valor debe coincidir con el valor del portafolio original más un interés cobrado con la tasa libre de riesgo; éste es el argumento del no arbitraje. Por lo tanto:

$$\delta\Pi = r\Pi\delta t. \quad (11)$$

Desarrollando la expresión anterior, se llega a:

$$V = \frac{V^+ - V^-}{U - D} + \frac{UV^- - DV^+}{(1 + r\delta t)(U - D)}. \quad (12)$$

Dado la ecuación (12), considerando V^+ y V^- , el valor de la opción en el siguiente periodo de tiempo, y los parámetros U y D describen la caminata aleatoria del activo. Podemos escribir la anterior ecuación como:

$$e^{r\delta t}V = p'V^+ + (1 - p')V^-, \quad (13)$$

donde:

$$p' = \frac{e^{r\delta t} - D}{U - D} \quad (14)$$

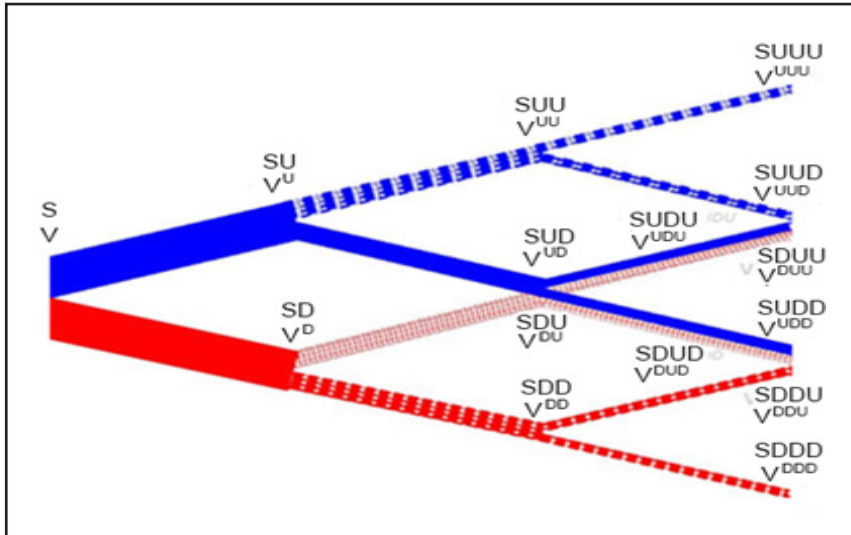
Se interpreta p' como una probabilidad de riesgo neutral y la expresión $e^{r\delta t}V$ es el valor esperado de la opción en el tiempo t calculado con las probabilidades neutrales al riesgo y los valores posibles de la opción como variable aleatoria. Suponiendo que conocemos V^+ y V^- entonces podemos encontrar V . Si conocemos el valor de la opción en el momento de expiración, se puede usar la ecuación para encontrar el valor de la opción en el tiempo $T - \delta t$ para todos los valores de S en el árbol, lo que implica que podemos

encontrar el valor de la opción un periodo atrás en el tiempo. Podemos trabajar el camino hacia atrás en el árbol, usando la ecuación:

$$e^{r\Delta t}V = p'V^+ + (1-p')V^- \quad (15)$$

dados V^+ y V^- deben regresar por el camino por el cual sus subyacentes asociados llegaron un paso antes, como lo indica la Figura 3 y así hasta llegar a la raíz que es el tiempo cero, y de ese modo encontramos el valor de la opción al día de hoy.

Figura 3. Árbol binomial. Para “regresar” al precio V o tronco es necesario seguir el camino por el cual se llegó a los nodos o ramas finales.



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Opción americana: El procedimiento para analizar las opciones americanas usando el árbol binomial es trabajar de regreso a través del árbol desde el final hasta el comienzo, evaluando en cada nodo para ver si adelantar el ejercicio de la opción es adecuado. El valor de la opción en el nodo final es el mismo de la opción Europea. En nodos anteriores el valor de la opción es el mayor de:

1. El valor traído a valor presente, V , a partir V^+ y V^- en la ecuación

$$e^{r\delta t}V = p'V^+ + (1 - p')V^- \quad (16)$$

2. El *payoff* de ejercer temprano tomando en cuenta la trayectoria que siguió el subyacente para llegar a ese nodo es:
 $\max(e^{r\delta t}V = p'V^+ + (1 - p')V^-, \text{payoff})$.

2.2 Método binomial recursivo

Para el algoritmo Binomial Recursivo (Haug, 2006), sean:

S_0 = precio inicial del activo subyacente.

X = precio de ejercicio.

S_{ave} = precio promedio del subyacente.

r = tasa de interés libre de riesgo.

q = tasa de dividendos.

T = tiempo faltante para la finalización del contrato.

periodos = número de fracciones de tiempo en que fue dividido el periodo total.

U = número por el cual se multiplica al valor del subyacente actual para obtener el valor del siguiente periodo superior.

D = número por el cual se multiplica al valor del subyacente actual para obtener el valor del siguiente periodo inferior.

contador = cuenta en número de periodos transcurridos.

El algoritmo de una función recursiva para el método binomial, está dado por:

1. Se crea una función f con los siguientes parámetros: S_0 , X , S_{ave} , r , q , T , *periodos*, U , D y *contador*.
2. Se obtiene el *payoff* del respectivo tipo de opción y se asigna a V_{T,S_0} .
3. Si *periodos* > 0 pasamos al paso 4, si no pasamos al paso 6.
4. Obtenemos:

$$p = \frac{e^{(r-q)\frac{T}{\text{periodos}}} - D}{U - D} \quad (17)$$

5. Se obtiene el valor de la opción V_{T,S_0} de ese periodo:

$$V_{T,S_0} = \max(e^{-r\frac{T}{\text{periodos}}}(pV_{T-1,U} + (1-p)V_{T-1,D}), V_{T,S_0} * \text{americana}) \quad 18)$$

donde $V_{T-1,U}$ es la misma función declarada en el paso 1 pero con los siguientes cambios en los parámetros:

$$S_0 \rightarrow S_0 U$$

$S_{ave} \rightarrow$ El nuevo promedio ya sea geométrico o aritmético dado el promedio anterior y nuevo precio $S_0 U$, por ejemplo:

$$S_{ave} = \frac{(t-1)S_{ave} + S_0 U}{t} \quad (19)$$

$$T \rightarrow T - \frac{T}{\text{periodos}}$$

$$\text{periodos} \rightarrow \text{periodos} - 1$$

$$\text{contador} \rightarrow \text{contador} + 1$$

y $V_{T-1,D}$ también es la misma función declarada en el paso 1 con los siguientes cambios en los parámetros:

$$S_0 \rightarrow S_0 D$$

$S_{ave} \rightarrow$ El nuevo promedio ya sea geométrico o aritmético dado el promedio anterior y nuevo precio $S_0 D$.

$$T \rightarrow T - \frac{T}{\text{periodos}}$$

$$\text{periodos} \rightarrow \text{periodos} - 1$$

$$\text{contador} \rightarrow \text{contador} + 1$$

y la variable *americana* es cero si queremos una opción europea y 1 si queremos una opción americana.

6. Por último, con la función f se calcula el valor de V_{t,S_0} .

Una ventaja de este método es que se pueden valorar todos los tipos de opciones asiáticas, ya sean opciones de tipo europeo o americano, *average strike* o *average price*, *put* o *call* y con promedio geométrico o aritmético. Otra ventaja es que el código del programa es el más corto y más sencillo comparado con los que se verán más adelante. La gran desventaja de este método es que al elegir particiones o ciclos de recursividad más finos, el programa tiende a hacerse rápidamente más lento.

2.3. Método binomial con matrices

Para el Método binomial con matrices (Haug, 2006):

1. Se crea una función con los siguientes parámetros: S_0 , X , S_{ave} , r , q , T , $periodos$, U , D y $contador$.
2. Se declaran dos matrices de tamaño $(2^{periodos}) \times (periodos + 1)$ cada una, que representan $periodos + 1$ el número de periodos y $2^{periodos}$ el número de trayectorias, una matriz se utilizará para llenar los valores del subyacente y la otra para el precio de la opción de cada trayectoria en el tiempo, sean S y F respectivamente.
3. Se igualan todas las entradas de la matriz S a S_0 .

$$\begin{bmatrix} S_0 & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0 & \cdots & S_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_0 & \cdots & S_0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

4. Se hace un ciclo desde que $i = 2$ hasta que $i = periodos + 1$ como se indica a continuación:
 - a) Sea el caso $i=2$, se dividen los renglones de esa columna en dos partes, notando que $2^{periodos}$ es un número par, se toman desde el ren-

glón 1 hasta el renglón $2^{\text{periodos}-1}$, que son la primera mitad de los renglones y se multiplican por U y desde $2^{\text{periodos}-1} + 1$ hasta 2^{periodos} , que son la segunda mitad de renglones, se multiplican por D.

$$\begin{bmatrix} S_0 & S_0 U & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0 U & S_0 & \cdots & S_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_0 U & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0 D & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0 D & S_0 & \cdots & S_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_0 D & S_0 & \cdots & S_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2^{\text{periodos}-1} \\ 2^{\text{periodos}-1} + 1 \\ 2^{\text{periodos}-1} + 2 \\ \vdots \\ 2^{\text{periodos}} \end{matrix} \quad (21)$$

b) Para el caso $i = 3$ se iguala la columna 3 con la anterior

$$\begin{bmatrix} S_0 & S_0 U & S_0 U & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0 U & S_0 U & S_0 & \cdots & S_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_0 U & S_0 U & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0 D & S_0 D & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0 D & S_0 D & S_0 & \cdots & S_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_0 D & S_0 D & S_0 & \cdots & S_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2^{\text{periodos}-1} \\ 2^{\text{periodos}-1} + 1 \\ 2^{\text{periodos}-1} + 2 \\ \vdots \\ 2^{\text{periodos}} \end{matrix} \quad (22)$$

c) Se divide la columna 3 entre cuatro partes y al primer cuarto se le multiplica por U al segundo por D al tercero por U y al cuarto por D.

$$\begin{bmatrix} S_0 & S_0U & S_0U & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0U & S_0U & S_0 & \cdots & S_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_0U & S_0D & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0D & S_0D & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0D & S_0D & S_0 & \cdots & S_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_0D & S_0D & S_0 & \cdots & S_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2^{\text{periodos}-1} \\ 2^{\text{periodos}-1} + 1 \\ 2^{\text{periodos}-1} + 2 \\ \vdots \\ 2^{\text{periodos}} \end{matrix} \quad (23)$$

- d) A la cuarta columna se iguala a la anterior y se divide en 8 partes. Cada parte se multiplica por U y después por D y así sucesivamente.
- e) Se ubica la n -ésima columna, se iguala con la anterior, y se divide entre 2^{n-1} partes. La primera parte se multiplica por U , la segunda por D , la tercera por U y la cuarta por D y así intercalando U y D hasta completar la columna.
- f) Se completa el llenado de columnas hasta llegar a la columna $i = \text{periodos} + 1$.
5. Una vez llena la matriz S se igualan las entradas de la matriz F

$$V_{i, \text{periodos}+1} = \text{payoff}(S_{i, \text{periodos}+1}), i = 1, \dots, 2^{\text{periodos}}$$

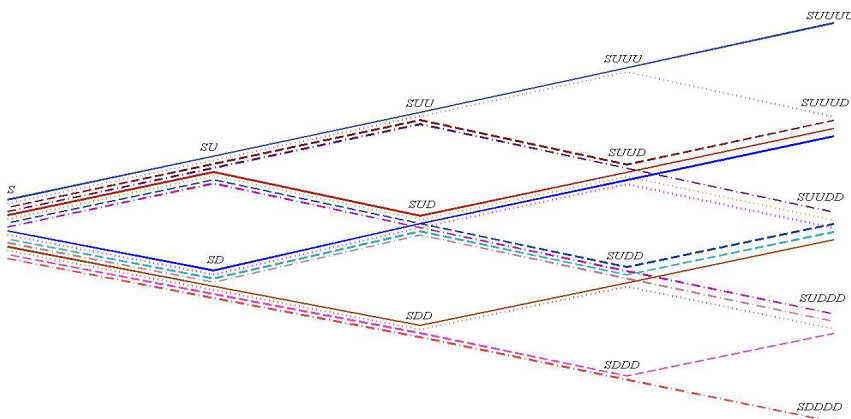
6. Dados los valores del nodo final se procede a regresar a través del árbol tomando de la última las entradas 1 y 2 que son V^+ y V^- respectivamente, para obtener V y colocarla en la columna periodos en las entradas 1 y 2. A continuación se toman los pares 3 y 4 para ser V^+ y V^- respectivamente y obtener V colocándola en la columna periodos en las entradas 3 y 4, y así sucesivamente hasta llenar la columna periodos .
7. Para la columna $\text{periodos} - 1$ se toman los pares 1 y 3 que son V^+ y V^- , respectivamente, para obtener V y colocarla en la columna $\text{periodos} - 1$ en las entradas 1 hasta 4. A continuación se consideran los pares 5 y 7 para ser V^+ y V^- respectivamente y obtener V para co-

localra en la columna *periodos* - 1 en las entradas desde la 5 hasta la 8, y así sucesivamente. Se toman las entradas $1+4j$ y $3+4j$ para ser V^+ y V^- respectivamente y obtener V y para colocarla en la columna *periodos* - 1, en las entradas desde la $1+4j$ hasta la $4+4j$ con $j = 0, \dots, \frac{2_{periodos}}{4} - 1$ hasta llenar la columna *periodos*.

8. En general, al considerar la columna n se toman las entradas $1+2^{periodos+2-n}j$ y $(2^{periodos+1-n}+1)+2^{periodos+2-n}j$ que son V^+ y V^- respectivamente para obtener V y colocarla en la columna n en las entradas desde $1+2^{periodos+2-n}j$ hasta $2^{periodos+2-n}+2^{periodos+2-n}j$ con $j=0, \dots, \frac{2^{periodos}}{2^{periodos+2-n}}-1$ hasta llenar la columna.
9. Se va de atrás para adelante hasta llegar a llenar la columna 1 y el valor de la opción es cualquier valor de la columna 1.

En la Figura 4 se puede apreciar la matriz S, cada línea representa un renglón y cada periodo de tiempo representa una columna e igualmente el recorrido del camino de ida para llegar a los nodos finales, debe recorrerse el camino de regreso para obtener el valor de la opción en $t = 0$.

Figura 4. Cada línea representa los valores que toma cada vector de la matriz.



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

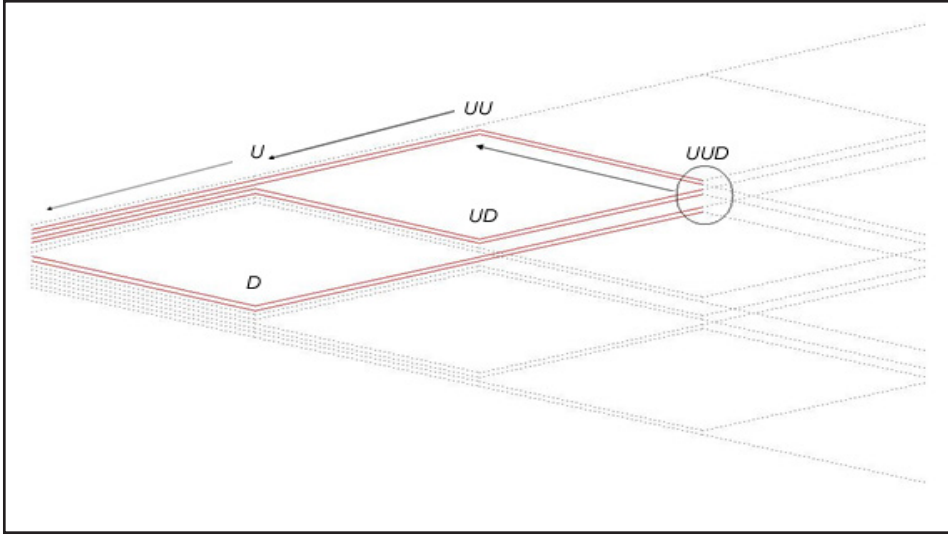
2.4 Método binomial alternativo

En este método al considerar un mayor número de particiones, el valor de la opción tiende a alejarse del valor que arrojan los otros modelos. El enfoque es computacionalmente factible cuando el número de valores alternativos de la función del camino F , en cada nodo no alcanza a crecer tan rápido como el incremento de número de pasos en el tiempo. La primera etapa es hacia delante a través del árbol estableciendo los valores máximos y mínimos del camino en cada nodo, suponiendo que el valor de trayectoria en el tiempo $\tau + \Delta t$ depende sólo del valor de la función de la trayectoria al tiempo τ y el valor de la variable del subyacente al tiempo $\tau + \Delta t$, los valores máximos y mínimos de la función de la trayectoria para los nodos al tiempo $\tau + \Delta t$ pueden ser calculados en un sencillo camino de esos para los nodos al tiempo τ . La segunda etapa consiste en escoger valores representativos de la función de la trayectoria en cada nodo, se eligen los valores representativos como el valor máximo, valor mínimo y un grupo de otros valores que son igualmente espaciados entre el máximo y el mínimo. Como se tiene que regresar a través del árbol, valuamos el derivado para cada valor representativo de la función de la trayectoria.

Fórmula para el promedio más grande y más pequeño que alcanza un nodo: Los promedios que llegan a un nodo deben estar contenidos en una zona como lo indica la Figura 5, si para llegar a ese nodo se utilizó el camino UUD , entonces los demás caminos son las combinaciones que se pueden hacer con UUD , que son UDU y DUU . La trayectoria que representa el promedio máximo será aquella que tenga en cada nodo que lo compone un valor de nodo más grande que los demás nodos que componen a los otros promedios de las trayectorias. Para determinar la trayectoria que representa el promedio mayor se debe comenzar en el nodo e ir hacia atrás y arriba hasta llegar a la orilla del árbol y después ir hacia atrás y hacia abajo, asegurando así encontrar el valor más grande para cada nodo y el promedio más grande.

Análogamente con el mínimo, en este caso hay que recorrer el camino hacia atrás y hacia abajo hasta llegar a la orilla y después atrás y arriba hasta llegar a la raíz, obteniendo los nodos más pequeños posibles para encontrar la trayectoria con el promedio más pequeño. Dado el nodo $U^i D^j$ el promedio aritmético más grande alcanzado por alguna trayectoria (Haug, 2006), es:

Figura 5. Trayectoria de promedio más grande.



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

$$\frac{1+U+U^2+\dots+U^i+U^iD+U^iD^2+U^iD^3+\dots+U^iD^j}{i+j+1}$$

$$= \left[\frac{1-U^i}{1-U} + \frac{1-D^{j+1}}{U^i(1-D)} \right] \frac{1}{i+j+1} \quad (24)$$

y para el mínimo:

$$\frac{1+D+D^2+\dots+D^j+D^jU+U^2D^j+\dots+U^iD^j}{i+j+1}$$

$$= \left[\frac{1-D^j}{1-D} + \frac{1-U^{i+1}}{D^j(1-U)} \right] \frac{1}{i+j+1} \quad (25)$$

y para el promedio máximo del promedio geométrico:

$$\begin{aligned} & [(U)(U^2) \cdot \dots \cdot (U^i)(U^i D)(U^i D^2)(U^i D^3) \cdot \dots \cdot (U^i D^j)]^{\frac{1}{i+j}} \\ & = U^{\frac{i(i+1)+2j}{2(i+j)}} D^{\frac{j(j+1)}{2(i+j)}} \end{aligned} \quad (26)$$

por último el promedio mínimo:

$$\begin{aligned} & [(D)(D^2) \cdot \dots \cdot (D^j)(D^{-j})(U^2 D^j)(U^3 D^j) \cdot \dots \cdot (U^i D^j)]^{\frac{1}{i+j}} \\ & = U^{\frac{i(i+1)}{2(i+j)}} D^{\frac{j(j+1)+2j}{2(i+j)}} \end{aligned} \quad (27)$$

y así tenemos las fórmulas para el promedio más grande de cada nodo.

Algoritmo para el método binomial alternativo:

1. Se obtienen los valores más grandes y más pequeños del promedio que alcanzan los nodos, y después se obtiene una cantidad $n - 2$ con $n \geq 2$ entre el máximo y el mínimo espaciados entre sí con igual magnitud, estos $n - 2$ números más el máximo y el mínimo forman n números representativos de los promedios que puede llegar a tener un nodo.
2. Se calcula el *payoff* de los n números representativos del periodo de maduración.
3. Para un nodo cualquiera de un periodo antes al de maduración, se toma uno de los n valores representativos del promedio de ese nodo, sea S_{ave}^i nuestro número y sea S el subyacente asociado a ese nodo. Con ese valor y con SU formamos un nuevo promedio, del cual, se interpolará el precio de la opción, en este caso el *payoff*, con ayuda de los valores representativos de ese periodo, sea V_+^i , de igual manera obtenemos el valor de la opción del nuevo promedio formado por nuestro valor S_{ave}^i y SD , sea V_-^i este valor.
4. Con estos dos valores obtenemos la aproximación del precio de la opción correspondiente a S_{ave}^i , sea V^i . Entonces:

$$V^i = e^{-r\Delta t} (pV_+^i + (1-p)V_-^i) \quad (28)$$

5. Se desarrolla el mismo procedimiento para $i = 1, \dots, n$, es decir, toda la n valores representativos.
6. Se realizan los pasos 3 al 5 para los demás nodos del periodo.
7. Se realizan los pasos 3 al 6 para dos periodos antes de la maduración, utilizando los precios de la opción ya obtenidos del siguiente periodo.
8. Se repite el paso 7 para los periodos restantes siguiendo el orden de atrás hacia adelante.

2.5. Método de simulación Montecarlo

Este método se aplica al caso de las opciones de tipo europeo, ya sea *average strike* o *average price, put call*, con promedio geométrico o aritmético. Éste método es fácil de implementar, pero es necesario un buen generador de números aleatorios ya que de no ser así se tendrían problemas de precisión de cálculo; al crear números aleatorios utilizando el software Matlab® (The MathWorks, 2016), sus algoritmos² hacen que los resultados sean pseudo-aleatorios y pseudo-independientes, los cuales pasan varias pruebas estadísticas de aleatoriedad e independencia.

Se simulan trayectorias múltiples, en cada una, se obtiene el promedio final y se emplea según sea el tipo de opción (*average price* o *average strike*), se trae a valor presente con la tasa libre de riesgo, esto se repite para todas las trayectorias y al final se obtiene el promedio de los valores presentes de las trayectorias. Se considera la muestra de trayectorias para obtener el valor esperado del *payoff* y se descuenta con la tasa libre de riesgo. Suponiendo un derivado dependiente de una sola variable de mercado S que proporciona un *payoff* al tiempo T .

Asumiendo que la tasa de interés es constante, se puede valorar el derivado (Haug, 2006), como sigue:

1. Modelar un camino aleatorio para S con una formulación de riesgo neutral.
2. Calcular el *payoff* del derivado.
3. Repetir los pasos 1 y 2 para obtener varias muestras del valor del *payoff* del derivado con la formulación de riesgo neutral (la cantidad

² Uniformes, semillas del generador basadas en la hora actual, multiplicativo de Fibonacci, normales, combinación recursiva múltiple, etcétera.

depende de la capacidad de la computadora donde se ejecute el programa).

4. Calcular el promedio de la muestra de *payoff*'s obteniendo un estimado del valor esperado del *payoff* con la formulación de riesgo neutral.
5. Descontar al valor esperado del *payoff* a la tasa de riesgo neutral para obtener un estimado del valor del derivado.

Supongamos que el proceso seguido por el subyacente con la formulación de riesgo neutral es:

$$dS = rSdt + \sigma Sdz \quad (29)$$

donde dz es un proceso de Wiener (Rubio, 1989), r es el valor esperado de retorno en riesgo neutral, y σ es la volatilidad. Para simular el camino seguido por S , se divide la vida del derivado en N intervalos de longitud Δt y se aproxima la ecuación anterior a:

$$\begin{aligned} S(t + \Delta t) - S(t) &= \mu S(t)\Delta t + \sigma S(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} \\ \Rightarrow S(t + \Delta t) &= \mu S(t)\Delta t + \sigma S(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} + S(t) \\ \Rightarrow S(t + \Delta t) &= (r - q)S(t)\Delta t + \sigma S(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} + S(t) \end{aligned} \quad (30)$$

donde $S(t)$ denota el valor de S al tiempo t , ε es una muestra aleatoria con una distribución normal con media cero y desviación estándar 1. Esto permite al valor de S en un tiempo Δt al ser calculado desde el valor inicial de S , el valor al tiempo $2\Delta t$ desde el valor al tiempo Δt , y así sucesivamente. Una prueba involucra construir una trayectoria completa para S usando N muestras aleatorias de una distribución normal.

Del lema de Itô el proceso seguido por $\ln S$ es:

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dt \quad (31)$$

y así tenemos que:

$$\ln S(t + \Delta t) - \ln S(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (32)$$

que equivale a:

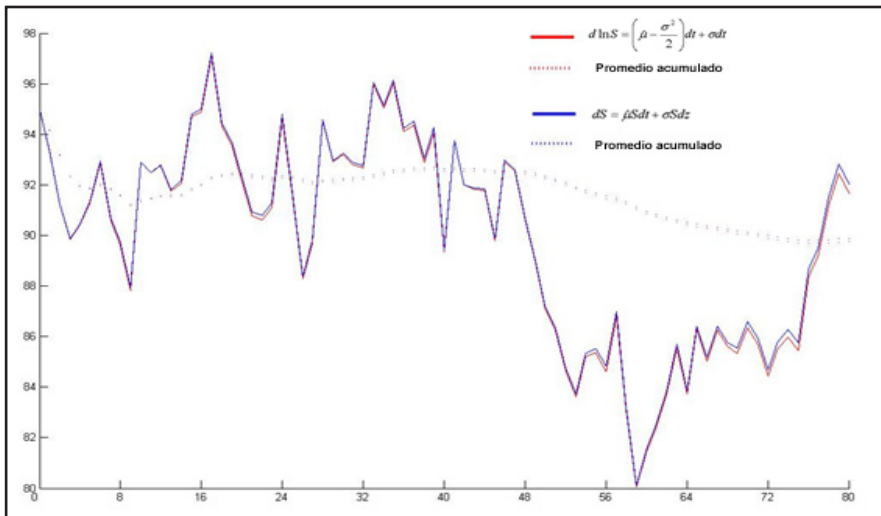
$$S(t + \Delta t) = S(t) e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}}$$

$$\Rightarrow S(t + \Delta t) = S(t) e^{\left((r - q) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}} \quad (33)$$

Esta ecuación es usada para construir una trayectoria para S .

La ventaja de usar $\ln S$ es que esto sigue una generalización del proceso de Wiener. Esto se refiere a que la ecuación:

Figura 6. Comparación de las dos formas de modelar la trayectoria del subyacente.



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

$$\ln S(T) - \ln S(0) = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \varepsilon \sqrt{T} \quad (34)$$

es cierta para todo T , a diferencia de la primera ecuación que sólo es cierta si Δt tiende a cero. Esto significa que:

$$\begin{aligned} S(T) &= S(0) e^{\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \varepsilon \sqrt{T}} \\ \Rightarrow S(T) &= S(0) e^{\left((r-q) - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \varepsilon \sqrt{T}} \end{aligned} \quad (35)$$

Se necesita conocer la trayectoria desde $S(0)$ hasta $S(T)$, en particular en las opciones de tipo asiático debido a que es necesario conocer el camino seguido por el activo subyacente. Cualquier proceso estocástico para S puede ser acomodado. La desventaja de la simulación Monte Carlo es que consume desde algunos segundos hasta horas en la computadora porque entre más simulaciones se lleven a cabo es más precisa la valuación y no es tan operable en situaciones donde hay oportunidades de ejercer tempranamente, es decir, no contempla las opciones de tipo americano.

Algoritmo simulación Monte Carlo (Haug, 2006)

1. Se crea la función con los siguientes parámetros: S_0 , X , T , *periodos*, *trayectorias*, r , q , σ .
2. Se inicializa un contador $cont = 0$ que va a sumar los *payoffs*.
3. Del paso 4 al 8 se hace un ciclo desde 1 hasta n *trayectorias*.
4. Se inicializa la variable $s = S_0$ y $S_{ave} = S_0$.
5. Del paso 6 al paso 7 se hace un ciclo desde 1 hasta m *periodos*.
6. Se iguala

$$s = s(r - q) \left(\frac{T}{periodos} \right) + s \left(\sigma \sqrt{\frac{T}{periodos}} \right) (aleatorioNormal(0,1)) \quad (36)$$

donde la función *aleatorioNormal* (0,1) es un generador de números aleatorios normales con media 0 y varianza 1.

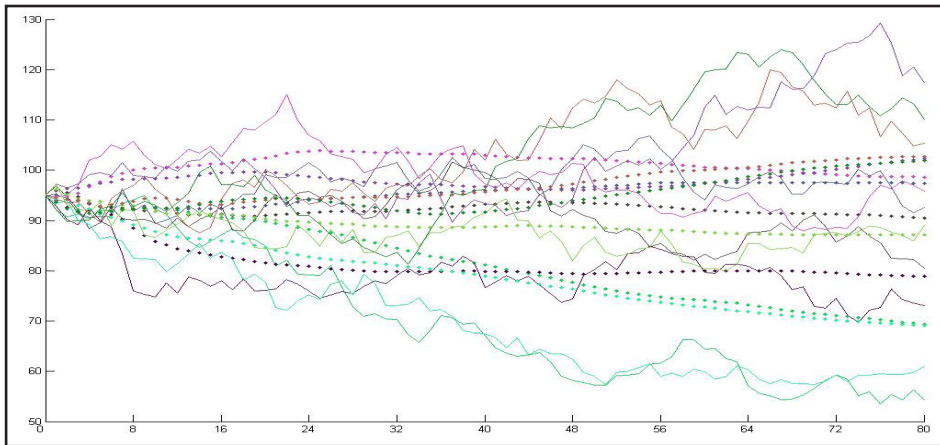
- Obtenemos el nuevo promedio S_{ave} obteniéndolo con el promedio anterior y el nuevo precio de s . Por ejemplo

$$S_{ave} = \frac{S_{ave} * (periodo - 1) + s}{periodo} \quad (37)$$

para el promedio aritmético, siendo *periodo* el número que indica en qué periodo va del ciclo que se inició en el paso 5.

- Se obtiene el *payoff* y se acumula en la variable *contador*. Entonces $contador = contador + payoff$.
- Por último hacemos que la función regrese el valor $\frac{contador}{trayectorias} e^{-rT}$.

Figura 7. Simulación de diez trayectorias (líneas), con su promedio acumulado (líneas punteadas).



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

2.6 Método explícito diferencial finito

Se aproxima la ecuación diferencial parcial, por medio de aproximaciones de las letras griegas (Haug, 2006).

Aproximación de θ : Se define como la derivada de V respecto a t cuando $t = T - k\Delta t$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(S, t+h) - V(S, t)}{h}, \quad (38)$$

se puede aproximar la derivada para el valor de la rejilla usando:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S, t) \approx \frac{V_i^k - V_i^{k+1}}{\partial t} \quad (39)$$

Aproximación de Δ : Se define como la derivada de V respecto a S , y se puede aproximar para el valor de la rejilla usando:

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\Delta S} \quad (40)$$

Aproximación de Γ : Se define como:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) \approx \frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{\Delta S^2} \quad (41)$$

Entonces, se puede aproximar la ecuación de *Black-Scholes*:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (42)$$

Como:

$$\begin{aligned} & \frac{V_i^k - V_i^{k+1}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{\Delta S^2} + rS \frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\Delta S} - rV_i^k \\ & = O(\partial t, \Delta S^2) \end{aligned} \quad (43)$$

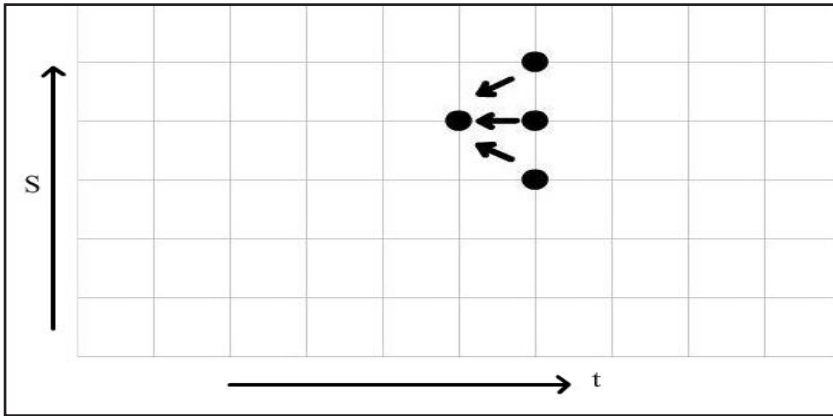
donde $O(\partial t, \Delta S^2)$ es el error de la ecuación.

Al despejar el valor requerido se obtiene:

$$V_i^{k+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{\partial S^2} + rS \frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\partial S} - rV_i^k \right) \partial t + V_i^k \quad (44)$$

y así se puede obtener el valor de la opción de un periodo anterior:

Figura 8. Obtención de V_i^{k+1} a partir de V_{i-1}^k , V_i^k y V_{i+1}^k .



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Condición de salto: El primer paso en la derivación es la observación de que la ecuación diferencial estocástica para I es degenerada $\partial I = 0$. Esto se debe a que la variable I puede sólo cambiar en el sistema discreto de datos t_i . Esto es cierto si $t \neq t_i$ para toda i . La ecuación del precio es la ecuación de Black-Scholes básica:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (45)$$

Ahora V es una función de tres variables, donde I es un parámetro. La muestra de datos del precio del subyacente no muestra fuertes cambios. Mientras el resultado de la muestra de datos es conocido y el dinero no cam-

bie de manos no se puede realizar ningún salto en el valor de la opción. Sea t_i^- el tiempo infinitesimal antes de la muestra de datos en t_i y t_i^+ el tiempo infinitesimal después de la muestra de datos, la continuidad del valor de la opción es representada matemáticamente por:

$$V(S, I_{i-1}, t_i^-) = V(S, I_i, t_i^+) \quad (46)$$

en otras palabras, tenemos:

$$V(S, I, t_i^-) = V(S, F(S, I, i), t_i^+) \quad (47)$$

la cual es llamada condición de salto.

Cuando el dinero cambia de manos, en un momento dado, ocurrirá un cambio repentino en el valor de la opción en ese tiempo. Si se sigue el camino de S en el tiempo, se apreciará que es continuo. Sin embargo, el camino para I es discontinuo. Allí el salto es determinista en I a través de la muestra de datos. Si se gráfica V como una función de S e I justo antes la muestra de datos se puede observar que para mezclar a S e I el precio de la opción será discontinuo. Pero esta grafica tendrá que ser interpretada correctamente; $V(S, I, t)$ puede ser discontinuo como una función de S e I ; así como V es continuo a lo largo de cada camino realizado de S e I . En particular, en el caso de las opciones asiáticas con promedio aritmético en el tiempo t_i se soluciona la ecuación de Black-Scholes para $V(S, A, t)$ con:

$$V(S, A, t_i^-) = V\left(S, \frac{i-1}{i}A + \frac{1}{i}S, t_i^+\right) \quad (48)$$

y una conveniente condición final representando el *payoff*.

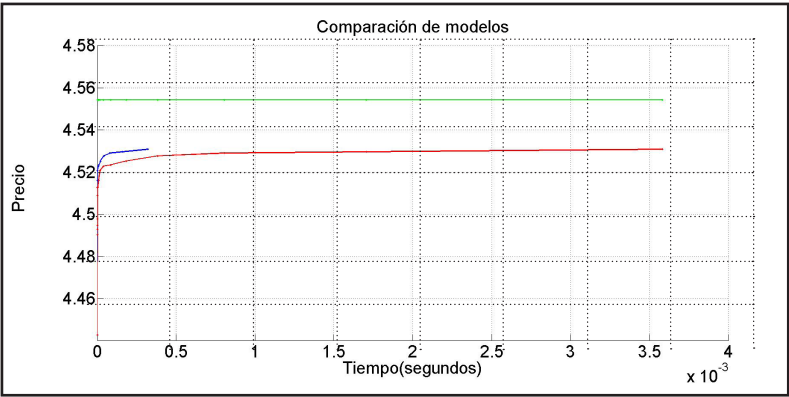
3. Resultados

Para completar el análisis se realizaron 17 simulaciones para valuar opciones europeas, con promedio aritmético y/o geométrico, precio del subyacente 100, tiempo del periodo un año, precio strike 100, $r = 0.05$, $\sigma = 0.15$.

3.1 Aplicaciones de los métodos binomiales

Considerando una opción europea con precio del subyacente de 100, un precio de ejercicio de 100, periodo de 1 año *call* promedio geométrico y volatilidad $\sigma = 15\%$, se compararán; el método binomial recursivo, binomial alternativo y binomial con matrices.

Figura 9. Gráfica de tiempo contra precio del método binomial con matrices (gráfica intermedia), binomial con recursividad (gráfica inferior) y el precio obtenido con fórmula (gráfica superior).



Fuente: Elaboración propia en Matlab®

Tabla 1. Estimación del valor de una opción call europea, con precio promedio geométrico del subyacente, utilizando los métodos binomial matricial y binomial recursivo (tiempo de corrida y precio obtenido).

Binomial matricial		Binomial recursivo	
min:seg.miliseg	Precio	min:seg.miliseg	Precio
00:00.015	4.4428	00:00.004	4.4428
00:00.003	4.4948	00:00.001	4.4948
00:00.006	4.4929	00:00.001	4.4929
00:00.015	4.4902	00:00.004	4.4902
00:00.033	4.4978	00:00.007	4.4978
00:00.072	4.509	00:00.014	4.509

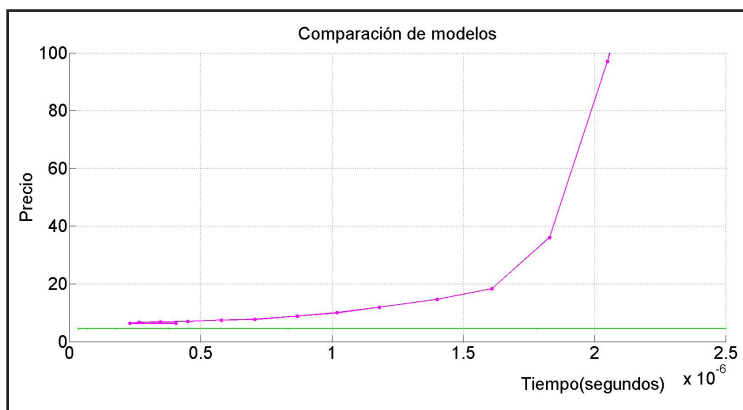
(Continuación)

Binomial matricial		Binomial recursivo	
min:seg.miliseg	Precio	min:seg.miliseg	Precio
00:00.154	4.5127	00:00.029	4.5127
00:00.354	4.5129	00:00.056	4.5129
00:00.752	4.5161	00:00.114	4.5161
00:01.627	4.5208	00:00.223	4.5208
00:03.400	4.5229	00:00.471	4.5229
00:07.298	4.5234	00:00.910	4.5234
00:15.754	4.5253	00:01.768	4.5253
00:33.051	4.5278	00:03.543	4.5278
01:09.576	4.5291	00:06.976	4.5291
02:27.344	4.5297	00:13.969	4.5297
05:09.466	4.5308	00:27.692	4.5308

Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Los precios de la opción obtenidos por el método binomial con matrices y con recursividad son los mismos pero el resultado por el método binomial con recursividad tardó menos tiempo en calcularse. La línea que representa el precio por fórmula, se usa con fines de comparación, y el valor obtenido es casi instantáneo para esta última y las demás gráficas.

Figura 10. Precios contra tiempo del método alternativo (gráfica superior) y el precio con fórmula (gráfica inferior).



Fuente: Elaboración propia en Matlab®

Tabla 2. Estimación del valor de una opción call europea, con precio promedio geométrico del subyacente, utilizando el método Binomial Alternativo (tiempo de corrida y precio obtenido).

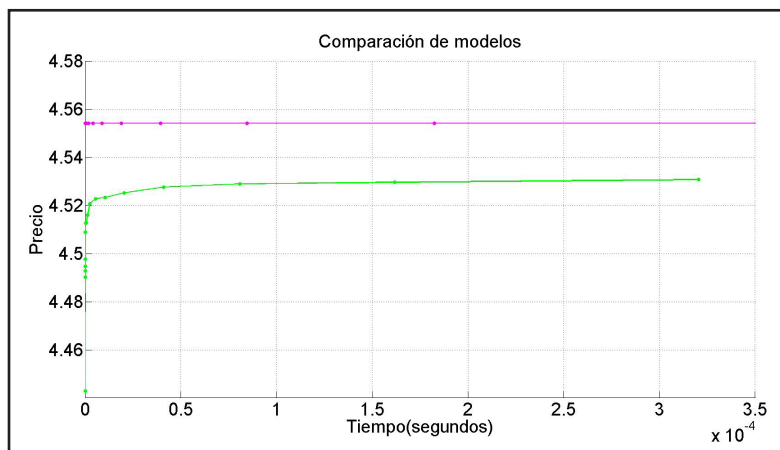
Binomial alternativo	
min:seg.miliseg	Precio
00:00.035	6.4257
00:00.020	6.2967
00:00.023	6.5994
00:00.030	6.8262
00:00.039	6.9921
00:00.050	7.4539
00:00.061	7.6931
00:00.075	8.8353
00:00.088	10.0111
00:00.102	11.9177
00:00.121	14.6274
00:00.139	18.3280
00:00.158	36.0901
00:00.177	97.0361
00:00.197	173.1141
00:00.218	483.2885
00:00.241	3,821.8671

Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Se puede apreciar que se sobrevalúa el precio de la opción, conforme aumenta el número de periodos, se emplearon de 4 a 45 periodos; el precio diverge pero parte de valores cercanos a los obtenidos con la fórmula.

Se consideraron de 4 a 24 particiones de tiempo (izquierda a derecha) conforme se van refinando las particiones el precio del binomial recursivo tiende al valor del precio de la fórmula, pero en cada nuevo valor se tarda el doble y se acerca con mayor lentitud. Por lo tanto para futuras comparaciones se empleará al método binomial recursivo.

Figura 11. Precio contra tiempo del modelo binomial recursivo (gráfica inferior) y el precio con fórmula (gráfica superior).



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Tabla 3. Estimación del valor de una opción call europea, con precio promedio geométrico del subyacente, utilizando el método Binomial Recursivo (tiempo de corrida y precio obtenido).

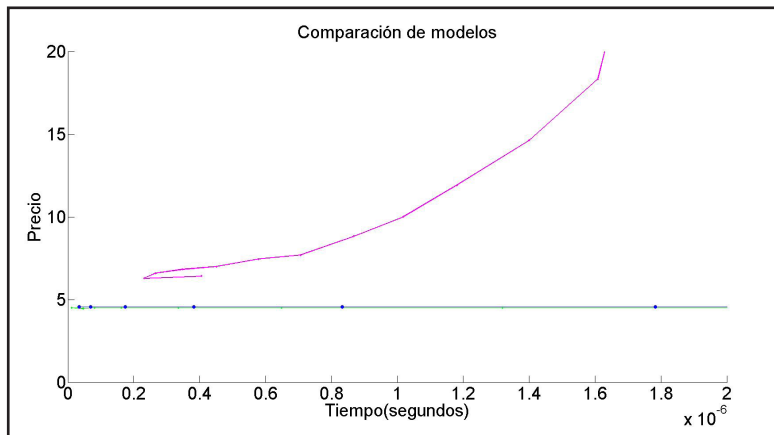
Binomial recursivo	
min:seg.miliseg	Precio
00:00.004	4.4428
00:00.001	4.4948
00:00.001	4.4929
00:00.004	4.4902
00:00.007	4.4978
00:00.014	4.5090
00:00.029	4.5127
00:00.056	4.5129
00:00.114	4.5161
00:00.223	4.5208
00:00.471	4.5229
00:00.910	4.5234

(Continuación)

Binomial recursivo	
min:seg.miliseg	Precio
00:01.768	4.5253
00:03.543	4.5278
00:06.976	4.5291
00:13.969	4.5297

Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Figura 12. Precio contra tiempo del método binomial alternativo (gráfica superior), el método binomial recursivo (gráfica inferior) y el precio con fórmula (obscura).



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Tabla 4. Estimación del valor de una opción call europea, con precio promedio geométrico del subyacente, utilizando el método binomial alternativo y el binomial recursivo (tiempo de corrida y precio obtenido).

Binomial alternativo		Binomial recursivo	
min:seg.miliseg	Precio	min:seg.miliseg	Precio
00:00.035	6.4257	00:00.004	4.4428
00:00.020	6.2967	00:00.001	4.4948
00:00.023	6.5994	00:00.001	4.4929
00:00.030	6.8262	00:00.004	4.4902

(Continuación)

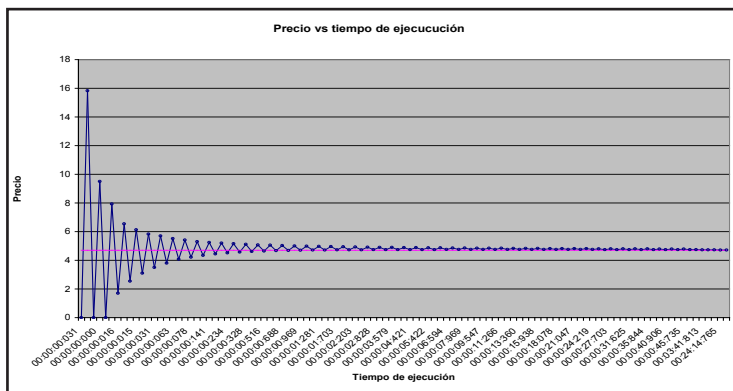
Binomial alternativo		Binomial recursivo	
min:seg.miliseq	Precio	min:seg.miliseq	Precio
00:00.039	6.9921	00:00.007	4.4978
00:00.050	7.4539	00:00.014	4.5090
00:00.061	7.6931	00:00.029	4.5127
00:00.075	8.8353	00:00.056	4.5129
00:00.088	10.0111	00:00.114	4.5161
00:00.102	11.9177	00:00.223	4.5208
00:00.121	14.6274	00:00.471	4.5229
00:00.139	18.3280	00:00.910	4.5234
00:00.158	36.0901	00:01.768	4.5253
00:00.177	97.0361	00:03.543	4.5278
00:00.197	173.1141	00:06.976	4.5291
00:00.218	483.2885	00:13.969	4.5297
00:00.241	3,821.8671	00:27.692	4.5308

Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

3.2 Aplicaciones del método simulación Montecarlo

A continuación se presentan los resultados de las simulaciones de un *call*, europeo, con promedio aritmético, precio del subyacente de 100, tiempo del periodo: un año, precio *strike* 100, $r = 0.05$, $\sigma = 0.15$.

Figura 13. Simulación de precio promedio, *call*, europea, promedio aritmético, precio del subyacente: 100, tiempo del periodo: un año, precio *strike*: 100, $r = 0.05$, $\sigma = 0.15$.



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Tabla 5. Estimación del valor de una opción call europea, con precio promedio aritmético del subyacente, utilizando el método Montecarlo, precio strike 100 (tiempo de corrida y precio obtenido).

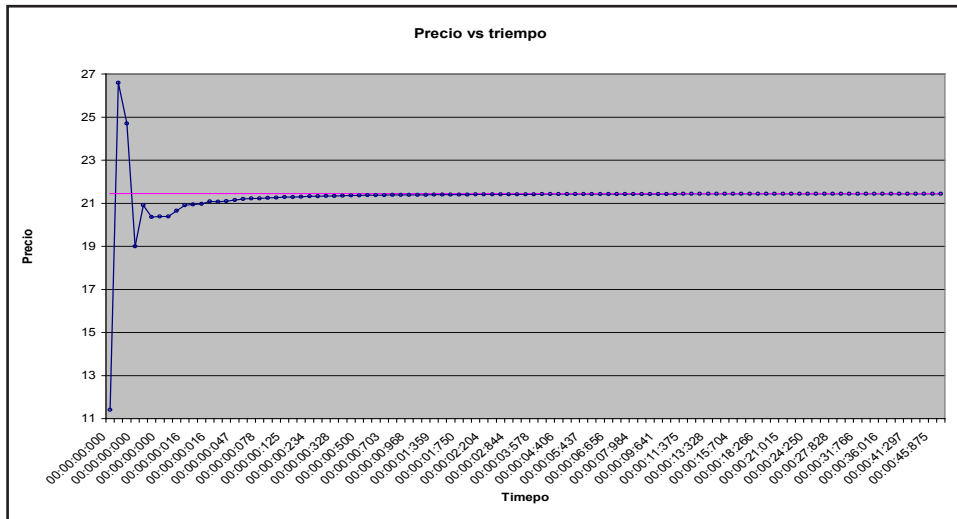
Montecarlo	
min:seg.miliseg	Precio
00:00.668	4.3199
00:01.033	4.1312
00:01.540	4.6767
00:02.037	4.1985
00:02.672	3.9788
00:03.362	4.4914
00:04.121	4.3607
00:04.931	4.5700
00:06.022	4.5703
00:06.908	4.4657
00:08.114	4.6981
00:09.187	4.7171
00:10.513	4.9847
00:11.781	5.2795
00:13.234	4.1241
00:14.790	4.8107
00:16.373	4.7233

Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Considerando los datos anteriores pero un precio *strike* de 80, (ver Figura 14).

Las opciones de tipo europeo con precio promedio y de promedio geométrico, ya sean *put* o *call* tienen una fórmula cerrada la cual no consume recursos significativos, por lo que resulta más eficiente calcular mediante la fórmula. Las opciones de tipo europeo con precio promedio y de promedio aritmético, ya sean *put* o *call*, tienen dos fórmulas cerradas que suponen lognormalidad, lo que puede resultar que sean menos precisas; sin embargo, con los mismos parámetros arrojan resultados similares, como se puede apreciar en la Tabla 6:

Figura 14. Simulación de precio promedio, call, europea, promedio aritmético, precio del subyacente: 100, tiempo del periodo: un año, precio strike: 80, $r = 0.05$, $\sigma = 0.15$.



Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Tabla 6. Comparación de modelos de la estimación del valor de una opción call europea, con promedio aritmético, precio del subyacente 100, tiempo del periodo: un año, precio strike: 80, $r = 0.05$, $\sigma = 0.15$.

Aproximación <i>Turnbull y Wakeman</i>	Levy's	Binomial
21.447643114349148	21.447688799406635	21.445250161954878

Fuente: Elaboración propia en Matlab®.

Conclusiones

La eficiencia de los modelos depende de las metodologías y los recursos computacionales con los que se cuenta, esto se expresa en tiempo de ejecución y uso de la memoria de la computadora. El modelo binomial y el modelo diferencial, calculan todos los tipos de opciones, pero la forma en la que están

implementados ocasiona que el modelo binomial, en un mismo tiempo de ejecución, soporte menos particiones que el modelo diferencial, lo que genera que el precio de la opción binomial de tipo americano esté subvaluado debido a que se toma menos veces la decisión de ejercer o no, la cual aumenta el precio de la opción debido a que esa decisión da a elegir el máximo entre dos valores. Los métodos binomiales dieron como resultado un valor más próximo al cálculo de la prima por medio de la fórmula cerrada y el tiempo de ejecución fue relativamente insignificante. El modelo alternativo es rápido y arroja una buena aproximación en poco tiempo de ejecución, pero con más particiones del tiempo, el precio tiende a ser impreciso y divergente.

Los modelos binomiales son valuados con métodos recursivos, donde a cada paso en el tiempo se representa la valuación de nuevos nodos a una escala de crecimiento de 2^n donde n es el número de pasos desde el inicio, lo que ocasiona que en magnitudes de por ejemplo, $n=25$, el programa comience a mostrar cierta lentitud. En el caso de los modelos matriciales, el diferencial finito es modelado con “rejillas” o matrices, donde contiene un número limitado de trayectorias. La ventaja del método binomial recursivo es la facilidad de programación pero consume un prolongado tiempo de ejecución, debido a que entre un periodo y otro requiere el doble de cálculos. Mientras que con el método binomial con matrices el resultado numérico es el mismo que el binomial recursivo, la diferencia es el algoritmo de construcción, el primero requiere memoria de almacenaje en dos matrices, una para las trayectorias y otra para los precios, con lo que se prolonga el tiempo de ejecución del programa y resulta aún más lento que el método binomial recursivo. En el método binomial alternativo se sustituyen las numerosas matrices, debido a que se simplifica el número de trayectorias al considerar sólo la máxima y la mínima; el tiempo de ejecución disminuye pero llega a divergir.

El método explícito diferencial finito consiste en resolver la ecuación Black-Scholes considerando una muestra del precio del subyacente que se almacena en matrices, las cuales usarán el cálculo del precio de la opción despejándolo de la ecuación. La programación del algoritmo es similar al del binomial con matrices, requiere de un espacio previo para el precio del subyacente y otro para el precio de la opción; al ejecutar el modelo se aprecia que converge más lentamente que el método binomial con matrices.

Entre las desventajas del método Montecarlo se puede mencionar que depende completamente del número de trayectorias y del número de subdivisiones en el período analizado. Otra desventaja es que no se obtienen

resultados idénticos en diferentes corridas, por lo que la velocidad de convergencia no se puede apreciar claramente. Asimismo, para aumentar la precisión de la valuación se requiere incrementar el número de trayectorias y el número de subintervalos de tiempo, lo cual trae como consecuencia que se incremente el tiempo de cómputo. Quizá su mayor desventaja es que no se puede aplicar a opciones americanas. No obstante lo anterior, el método Montecarlo es el que brinda resultados más confiables y por tanto se puede aceptar la hipótesis, que éste es el más eficiente para valorar opciones asiáticas, con respecto a los demás métodos analizados en este trabajo. Futuras líneas de investigación apuntan a utilizar métodos de reducción de varianza para disminuir el tiempo de cálculo; así como repetir la aplicación de los métodos, considerando volatilidad y tasa de interés estocástica; además de utilizar datos de subyacentes que se utilizan comúnmente en el mercado de derivados.

Referencias bibliográficas

- Alziary, B., Décamps, J.P., y Koehl, P.F. (1997). A P.D.E. "Approach to Asian Options: Analytical and Numerical Evidence". *Journal of Banking y Finance*, vol. 21, Issue 5, pp. 613-640.
- Arregui, A., y Vallejo, A. (2001). "Análisis de la valoración de las opciones asiáticas utilizadas por fondos de inversión garantizados de renta variable". *Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa*, vol. 7, núm. 1, pp. 57-70.
- Clewlow, L., y Chris, S. (1997). "Exotic Options: the State of the Art". *IB Tauris*, pp. 11-15.
- Cox, J. C., Ross, S. A., y Rubinstein, M. (1979). "Option Pricing: A Simplified Approach". *Journal of Financial Economics*. núm. 7, pp. 229-263.
- Crespo, J. L. (2001). "Utilización práctica de las opciones exóticas. Opciones asiáticas y opciones barrera". *Boletín Económico de ICE*, núm. 2686, pp. I-VIII.
- Cruz, B. D., y Rodríguez, J. M. (2007). "Valoración de opciones asiáticas con Matematica". *Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA*, núm. 8, pp. 139-150.
- Dempster, M. A., y Hutton, J. P. (1997). "Fast Numerical Valuation of American, Exotic and Complex Options". *Applied Mathematical finance*. vol. 4, núm. 1, pp 1-20.
- Fernández, P., y Ariño, M. (1996). "Derivados exóticos". *IESE Business School*, núm. D/308, p. 4.

- Fusai, G., y Meucci, A. (2008). "Pricing Discretely Monitored Asian Options under Lévy processes". *Journal of Banking y Finance*, vol. 32, núm. 10, pp. 2076-2088.
- García, M. J., Sancha, D. M., Tejero, R. C., y Toscano, P. D. (2000). Opciones "exóticas". *Boletín económico de ICE, Información Comercial Española*, núm. 2673, pp. 1001-1008.
- Haug, E. G. (2006). *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*. New York: McGraw-Hill.
- Hull, J. C. (2012). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Eighth Edition, Boston USA, Prentice Hall.
- Hull, J. C., y White, A. D. (1993). "Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options". *The Journal of Derivatives*, vol. 1, núm. 1, pp. 21-31.
- Levy, E. (1992). "Pricing European Average Rate Currency Options". *Journal of International Money and Finance*, vol. 11, núm. 5, pp. 474-491.
- MexDer (2016). *Mercado Mexicano de Derivados*. Obtenido de Contratos listados en MexDer: http://www.mexder.com.mx/wb3/wb/MEX/contratos_opcion#.
- Neave, E. H., y Turnbull, S. M. (1993). "Quick Solutions for Arithmetic Average Quick Solutions for Arithmetic Average". In *Proc. of 4th Actuarial Approach for Financial Risks International Colloquium*, pp. 718-739.
- Ortíz, R. A., y Martínez, P. M. (2016). "Valuación de opciones asiáticas versus opciones europeas con tasa de interés". *Contaduría y Administración*, vol. 61, Issue 4, pp. 629-648.
- Rubio, I. G. (1989). "Una introducción a los Procesos de ITO: el Modelo de valoración de activos de capital como condición suficiente para la valoración de opciones". *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, vol. 18, núm. 60, pp. 701-717.
- The MathWorks, I. (2016). *Documentation*. Obtenido de Random Numbers in MATLAB: <https://es.mathworks.com/help/matlab/math/random-numbers-in-matlab.html>.
- Turnbull, S. M., y Wakeman, L. M. (1991). "A Quick Algorithm for Pricing European Average Options". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 26, núm. 3, pp. 377-389.

Global Financial Crisis Volatility Impact and Contagion Effect on NAFTA Equity Markets

Impacto de la volatilidad y efecto de contagio de la crisis global financiera en los mercados bursátiles del TLCAN

Miriam Sosa*

Edgar Ortiz**

Fecha de recepción: 3 de agosto de 2016, Fecha de aceptación 16 de diciembre de 2016

ABSTRACT

The aim of this paper is to analyze the contagion effect and the impact of the global financial crisis in NAFTA bloc stock markets' volatility, using rolling window correlation and a GARCH approach. Once the contagion effect is established through an increasing correlation during the crisis period, volatility changes and leverage effects are tested with symmetric and asymmetric GARCH models with a dummy variable in the variance equation. Canada, the United States and Mexico's equity markets stock indexes daily yields, in US dollars, from January 2003 through February 2015 were studied. Results confirmed the presence of asymmetric volatility during the whole period and an increasing volatility since the Global Financial Crisis.

JEL Classification: G01, G15, F65, C58

Key words: NAFTA, GARCH, TARCH, financial crisis, leverage effect.

RESUMEN

El objetivo de esta investigación es analizar el impacto de la crisis financiera global en la dinámica de la volatilidad de los mercados accionarios del bloque TLCAN, usando correlación medida a través de ventanas móviles y modelos GARCH simétricos (GARCH 1,1) y asimétricos (TARCH 1,1). Las variables financieras empleadas son los rendimientos de los precios de cierre diarios de los índices bursátiles: S&P 500 (Estados Unidos), IPC (México) y S&P TSE Composite (Canadá) en dólares de Estados Unidos, durante el periodo del primero de enero de 2003 al 27 de febrero

* Facultad de Economía, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México, msosac87@hotmail.com.

** Programa de Posgrado en Ciencias Políticas y Sociales, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México, edgaro@unam.mx.

de 2015. La evidencia confirma la existencia de volatilidad asimétrica en las series durante todo el periodo de estudio, así como incremento en la volatilidad a partir de la crisis bursátil presentada en 2007.

Clasificación JEL: G01, G15, F65, C58

Palabras clave: volatilidad asimétrica, GARCH, TARCH, TLCAN, crisis financiera.

Introduction

The global financial crisis (GFC) has been one of the most significant global events in history concerning economics and finance, due to the fast transmission of its profound impact around the world. The financial crisis first signs began to be evident through the subprime crisis in 2007 and lasted until the end of 2012. Second-round effects appeared until 2015, with the European sovereign debt crisis (Aizenman *et al.*, 2012 and Zestos, 2015). These disequilibria were evident by equity markets unsteadiness around the world, characterized by higher stock shares and stock price indexes volatility and lower, and even negative, yields.

The North America Free Trade Agreement (NAFTA), integrated by Mexico, Canada and the United States, (U.S.), relates to one of the geographical zones undergoing important changes due to the GFC. The primary role played by the U.S. in the crisis and its strong relations with Mexico and Canada based on trade, foreign direct investment and, above all, foreign portfolio investments may explain the implications of the global financial crisis in the region.

To a large extent, profound and persistent global financial imbalances were caused by integration. In particular, countries with higher level of integration, as those belonging to the NAFTA bloc, have higher risk exposure to global turmoil. Therefore, to analyze the relation among the NAFTA stock markets is a key factor in order to establish the contagion effect by examining increasing correlation during the crisis. Once crisis transmission effects are determined, the presence of higher volatility and higher leverage effect, since the GFC, can be tested for by modeling NAFTA stock market's volatility through a GARCH approach.

It is of uttermost importance to study equity markets volatility and their relationships in an interconnected and deeply integrated financial backdrop, as is the NAFTA bloc case, since these markets have experienced an accelerated growth. Their rapid rise and development has allowed these stock markets to operate as a link between different economic and social agents (savers, pension funds, public and private investors and issuers), becoming an important investment channel. In this sense, an efficient performance of stock markets, as an investment channel, may enhance economic activity and reinforce economic growth and competitiveness of the NAFTA bloc economies.

On the other hand, this paper shows important implications for asset allocation, for portfolio diversification and, above all, for the construction of trilateral portfolios considering that higher correlation levels and similar responses to external financial shocks inhibit the traditional portfolio diversification techniques. Finally, to examine the volatility behavior of the NAFTA stock markets should shed some light about the integration process between these markets.¹

This paper is organized as follows. Section 1 presents a review of the literature. Section 2 unfolds the data and methodology used to estimate the contagion effect and the crisis effects stock market volatility. The following section discusses the empirical evidence. Finally, conclusions are presented.

1. Evidence from previous studies

Financial integration has increased investment options promoting higher levels of financial assets demand. However, it has also led to the instantaneous transmission of financial disequilibria among markets that, apparently, are not closely related. The growth of interconnections among stock markets and their relations with different economic agents have boosted the external shocks impact on economic activity, leading to the enormous devastation resulting from the recent global financial crisis and its effects. Given the importance of this phenomenon, extensive literature

¹ If the price of a security, commodity or asset is different in two different markets, then an arbitrageur will purchase the asset in the cheaper market and sell it the most expensive. Otherwise, the markets are integrated.

has been recently published about transmission effects and their impacts on the behavior of equity markets.

NAFTA is one of the world's largest free trade zones. Recently the number and depth of studies dealing with NAFTA's stock markets has increased. Among these publications stands out the article written by Reyes and Ortiz (2013); they analyze regional diversification through the M-VARCH methodology, which presupposes greater conservatism and precision on estimating potential losses of investment portfolios. Their results show that, despite the interrelation among NAFTA stock markets, there still are opportunities to construct profitable tri-national portfolios.

Among the studies about contagion effect, Chittedi (2015) analyzes the GFC contagion from the US to India. Empirical findings show that there has been a significant increase in the correlation coefficient mean between those markets during the crisis periods compared to the pre-crisis period, which establishes the existence of contagion between the U.S., and Indian markets. Jin & An (2016), analyze the GFC contagion effects between the BRICS's and the U. S. stock markets. Their empirical results show that there are significant contagion effects from the U. S. to the BRICS's equity markets. Other recent studies include those by Jawadi *et al.*; Louhichi and Cheffou (2015); Martin and Nguyen (2015); Pragidis *et al.* (2015); and Mollah *et al.* (2016).

Related to the GFC impact on volatility performance, Kalsie and Aro-ra (2016) examine the volatility of the BRICS's and the U.S. markets. They present evidence about a uniform increase in the absolute volatility during the crisis period compared to the pre-crisis period for all the countries under study. Miniaoui *et al.* (2015) study the performance of Islamic and conventional indexes of the Gulf Cooperation Council (GCC) countries in the wake of the GFC. Their results show that the GFC had an impact on the mean returns of Bahrain, leaving the other indexes unaffected. Recent literature has been also presented by: Kulshreshtha and Mittal (2015); Sinha (2015); Mohammadi and Tan (2015); Syriopoulos, *et al.* (2015); Andriosopoulos *et al.* (2016); Paul and Kimata (2016).

In this paper, two studies were regarded as a starting point. First, the one presented by Mohammadi and Tan (2015) was considered. They used a complementary methodology that integrates correlation analysis and a GARCH approach, in order to analyze contagion and its effects on the U.S., Hong Kong and China stock markets. Secondly, the study developed by Joshi (2012) was reviewed. He applies symmetric and asymmetric GARCH models

with a dummy variable in the variance equation to test the presence of increasing volatility and leverage effect since the GFC on the stock markets of India, Korea, Malaysia, Hong Kong and Indonesia.

2. Data and methodology

2.1 Data

The Daily closing price of Mexico (IPC), Canada (TSE) and the U.S. (S&P500) stock indexes, in US dollars, were used to test contagion effect and changes in the volatility behavior. The time period analyzed includes from January 1, 2003 to February 27, 2015. The pre-crisis period considered comprises January 2003 to August 8, 2007 and the crisis period August 9, 2007 to February 2015, according to the periods identified by Taylor and Williams (2009) and Joshi (2012).

2.2 Methodology

The analysis of empirical contagion aims to determine whether or not channels and intensities of shock propagation across countries change during certain crises periods. Particularly, the contagion effect is a phenomenon characterized by a significant increase in correlation levels among different markets as a consequence of a relevant shock from other markets (Sander & Kleimeier, 2003). Considering this definition as a starting point, this study applies a rolling window correlation methodology to test changes in the systemic variation of one variable in relation to another. The correlation index estimation is measured for 60 days rolling window correlation. The estimation changes every day, in order to observe daily changes in the co-movements between two variables.

Figure 1 exemplifies how correlation is estimated every 60 days, from data 1 to data 61, from data 2 to data 62, and so on. In this sense, the rolling window correlation allows to estimate 2395 daily coefficients for each time varying correlation bilateral relation, as shown in the graphic representation for the period under analyses. Significant increasing correlation provides evidence about contagion effect in NAFTA countries stock markets.

Rolling window correlation shows contagion effects, but it does not give information about the crisis effects on volatility behavior. To overcome this limitation, this paper proposes a complementary methodology that includes

Figure 1. Methodology to measure the rolling window correlation graphic representation.



Source: Prepared by author

a GARCH approach, using symmetric and asymmetric models with a dummy variable in the variance equation, proving whether or not the volatility and leverage effect increased since the GFC.

2.3 GARCH model

ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity), GARCH models and all their extensions have been identified in the empirical literature as effective in modeling the volatility of financial series. This is because the GARCH models capture some features of the assets returns volatility flows. Among the stylized factors they capture are: thick tails, volatility clustering, leverage effects, cumulative information in non-trading periods, strong inverse relation between volatility and serial correlation and co-movements in volatilities (Bollerslev *et al.*, 1994).

Based on the effectiveness and good fit of the GARCH approach on modeling asset prices volatility, this paper used these models in order to prove that the GFC impacted the dynamic of the NAFTA countries stock markets, by increasing their volatility and their volatility asymmetry.

Another advantage of the GARCH models is their parsimony. This allows estimating and interpreting the results in a simple way.

Daily returns are identified as the closing index value natural logarithm difference for two consecutive trading days;

$$R_t = \log(IPC)(t) - \log(IPC)(t - 1) \quad (1)$$

Unit root tests were applied to determine that an individual financial series is stationary. Therefore, Augmented Dickey Fuller and Phillips Perron Tests were used. The null hypothesis is $H_0: \delta = 0$ y $H_1: \delta < 1$. The null hypothesis acceptance means that the series has a unit root. Non-stationary series can be transformed through the differentiation of themselves, ARMA, ARIMA and ARFIMA models are commonly used in this process.

GARCH modeling (Bollerslev, 1986 & Taylor, 1986) assumes conditional heteroscedasticity with homoscedastic unconditional error variance. Variance is a function of the realizations of previous error terms and the squared of previous disturbances (Casas & Cepeda, 2008). Thus, the conditional variance of GARCH (p, q) is specified as follows:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \quad (2)$$

With $\alpha_0 > 0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \geq 0$ and $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_p \geq 0$ to ensure that the conditional variance is positive, h_t represents the conditional variance estimated considering relevant past information; β_i are the lagged GARCH coefficients, which indicate that changes in the conditional variance disappear slowly, in other words, they show volatility persistence; α_j is the error coefficient, if it takes a high value, it means that there is a high sensibility to volatility derived from market movements. If $(\alpha + \beta)$ value is near but lower than the unit, it means that a shock in time t will persist in future periods; a value near one, implies that the series has long memory (Joshi, 2012). This GARCH model is also known as a symmetric model, since it considers that negative and positive variations have the same impact in volatility.

Increasing volatility as a result of contagion effect is determined by introducing a dummy variable in the variance equation as follows:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} + \delta_k D \quad (3)$$

D represents the dummy variable which takes value 0 before August 8, 2007 and one afterwards. If the dummy variable coefficient is positive and statistically significant, an increased volatility was caused by the GFC. Then, the model was tested for ARCH effect using an ARCH-LM test. If the coefficient is not statistically significant, the model will be adequate.

2.4 TARCh model

There is a wide range of asymmetric GARCH models: EGARCH de Nelson (1991), GJR-GARCH (Glosten *et al.*, 1993), T-GARCH (Zakoian, 1994), APARCH (Ding *et al.*, 1993), PNP- GARCH (Bae y Karolyi, *op cit.*) or T- GARCH (Hsin, 2004) are some of them.

The TARCh models proposed in this paper have the following generalized specification of the variance equation:

$$\sigma^2 = \alpha + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{h=1}^r \gamma_h \varepsilon_{t-h}^2 d_{t-h} \quad (4)$$

if $d_t = 1$ if $\varepsilon_t < 0$

In this model if $\varepsilon_{t-i} > 0$ the positive residual values are interpreted as positive shocks. If $\varepsilon_{t-i} < 0$, negative residual values represent negative shocks. Positive news has an α_1 impact and negative news has a $\alpha_1 + \gamma_1$ effect. Whether $\gamma_1 > 0$, negative news increases volatility, this effect is known as asymmetric volatility or leverage effect, in other words if $\gamma_1 \neq 0$, the impact of good and bad news is asymmetric (Joshi, 2012). The main objective of this paper is to prove asymmetries in terms of positive and negative shocks.

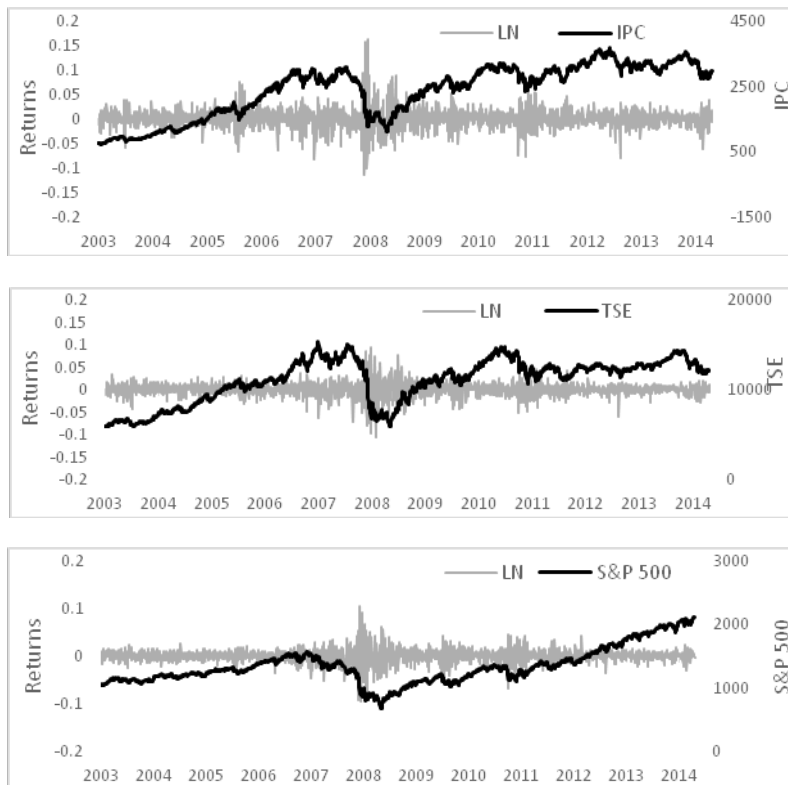
$$\sigma^2 = \alpha + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{h=1}^r \gamma_h \varepsilon_{t-h}^2 d_{t-h} + \delta_k Du \quad (5)$$

Here Du takes a value of 0 before August 9, 2007 and one afterwards. If the dummy variable coefficient, Du is positive and statistically significant, it indicates an increase in magnitude of leverage effect.

3. Empirical analysis

Figure 2 presents the Canada, the U.S. and Mexico level index values and stock index returns, before and during the financial crisis. The increase in all level index values, during the third quarter of 2007, is explained by a speculative bubble peak. This peak was followed by a big fall in all the stock markets resulting from the GFC effects. On the other hand, returns, apparently, present higher changes (increasing volatility) and volatility clusters during the crisis period compared to the pre-crisis period. Overall, all series kept a strong relationship due to general instability and falls in all

Figure 2. Mexico, Canada and the U. S. Level Value and Stock Price Index Returns (January, 2003-February, 2015)



Source: Prepared by author using Bloomberg and Economatica data.

the stock markets. These facts are analyzed through the implementation of the methodology in the following section.

Table 1 shows the date of the maximum positive and negative variations and the highest and lowest levels for each index. Maximum variations (positive and negative) occurred when the crisis turned into a global financial crisis, after the failure of Lehman Brothers in september 2008. The lack of coincidence between the date of the highest and the lowest level suggests that these facts may be related to local conditions.

Table 1. Stock Price Index Maximum Positive and Negative Variation and Highest and Lowest level index values

Index		Level		Maximum variation	
		High	Low	Positive	Negative
IPC	Level/Change	3680.127	722.170	0.162	-0.115
	Date	11/04/2013	24/11/2003	29/10/2008	06/10/2008
TSE	Level/Change	15323.764	5849.301	0.095	-0.105
	Date	31/10/2007	18/05/2004	29/10/2008	01/12/2008
S&P 500	Level/Change	2115.480	676.530	0.104	-0.095
	Date	24/02/2015	09/03/2009	14/10/2008	15/10/2008

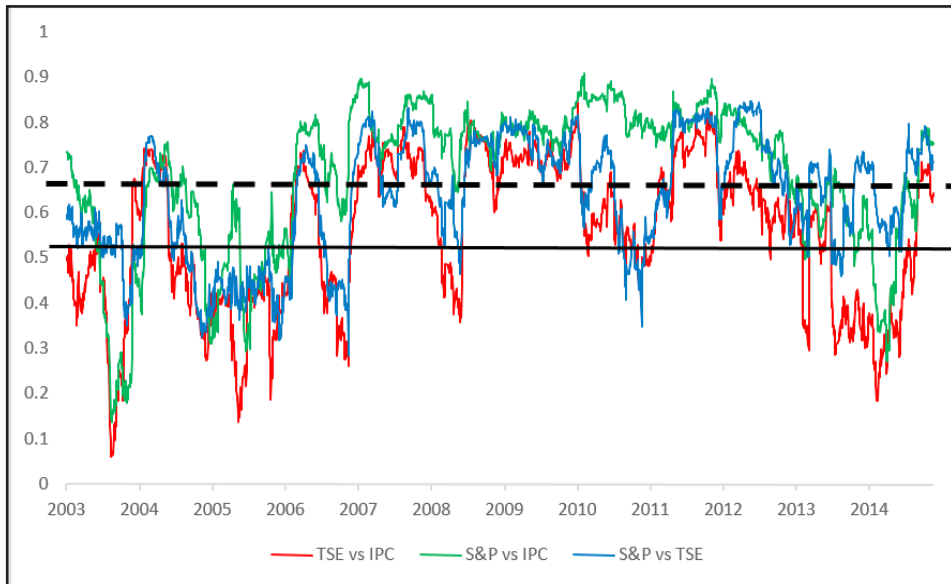
Source: Prepared by author using Bloomberg and Economatica data.

3.1 Rolling window correlation analysis

Figure 3 shows changes in the correlation index among NAFTA countries equity markets. The Mexican and the U.S. stock markets held the highest correlation levels during the whole period. The second most important relationship is between the Canadian and the U.S. markets. The lowest correlations levels were those presented by the Mexican and the Canadian equity markets. This last result may be caused by the geographical location

of both the Mexican and Canadian markets next to the U.S. economy and not by a close relationship between them, as well as, by the fact that the U.S. is the largest portfolio foreign investment source and recipient country.

Figure 3. Rolling window correlation results



Source: Prepared by author based on results obtained.

Two lines can be observed in Figure 3, the first one, from the bottom up, corresponds to the correlation coefficient average before the crisis, which is 0.53; while the discontinuous line above it represents the correlation coefficient after the crisis, which has a value of 0.68. It is important to mention that, the correlation average, as an immediate effect of the crisis (August 2007-December 2012) is above 0.7. In this sense, related literature has identified that a correlation level higher than 0.7 represents strong correlation. Hence, Figure 3 provides evidence about contagion effect on NAFTA stock markets during the GFC.

3.2 GARCH model results

Descriptive statistics of NAFTA countries equity markets indexes are presented in Tables 2 and 3. Standard deviation, mean, kurtosis, skewness, Jarque Bera and ARCH-LM tests are included. Table 2 contains the pre-crisis period results and table 3 shows the descriptive statistics outcome of the crisis period in order to compare the financial series performance between two periods.

Table 2. Descriptive Statistics before Crisis Period- January 1, 2001 to August 8, 2007

Country	S. D.	Mean	Kurtosis	Skewness	Jarque Bera	ARCH F-statistics	Probability
US	0.0084	0.0005	4.3735	-0.0342	73.99635*	5.81 (2)*	0.00
Canadá	0.0098	0.0012	4.2862	-0.3532	84.2478*	3.48 (3)**	0.02
México	0.0145	0.0016	5.9237	-0.2688	345.745*	9.78 (1)*	0.00

Reported values are statistically representative at
*1%,** 5% and ***10% significance levels.

Note: the statistic test ARCH LM corresponds to the Lagrange multiplier used to detect the ARCH effect; the null hypothesis represents the absence of heteroscedasticity, distribution of that parameter is $\lambda^2(k)$.

Table 3. Descriptive Statistics Crisis Period- August 8, 2007 to February 27, 2015

Country	S. D.	Mean	Kurtosis	Skewness	Jarque Bera	ARCH (1) F-statistics	Probability
US	0.015	0.0002380	10.371	-0.454	3483.70*	172.03*	0.00
Canada	0.016	-0.0000319	9.703	-0.484	2897.44*	191.95*	0.00
Mexico	0.020	0.0000574	11.086	0.256	4146.74*	103.35*	0.00

Reported values are statistically representative at * 1%,** 5% and ***10% significance levels.

Note: As in Table 2, the statistic test ARCH LM corresponds to the Lagrange multiplier used to detect the ARCH effect; the null hypothesis represents the absence of heteroscedasticity, distribution of that parameter is $\lambda^2(k)$.

It can be observed that volatility, measured by the increase in the standard deviation, is much higher after the crisis for all the markets. The returns distribution is negatively skewed during the pre-crisis period in all cases and negatively biased in the crisis period, except for the Mexican market that is positively biased, indicating the presence of asymmetry. The values concerning kurtosis suggest that, the distribution is leptokurtic with a high concentration on the central values and the presence of heavy tails. Additionally, LM ARCH results indicate the presence of ARCH effect for each and every one of the series under study. Since the GARCH model is suitable for modeling leptokurtic series, it is expected to correctly analyze equity markets indexes behavior. Finally, values of the ARCH (1,1) shown in Tables 2 and 3 imply the presence of clusters of volatility, where large changes in volatility tend to be followed by large changes and small changes tend to be followed by small changes (Engle and Bollerslev, 1986). Consequently, the probabilities of Jarque-Bera testing reported in Tables 2 and 3, allow the rejection of the normal distribution hypothesis at the 1% significance level.

The condition of stationarity was tested applying the Phillips Perron and the Augmented Dickey Fuller tests. Results reported in Table 4 suggest

Table 4. Unit Root Testing of Daily Returns of Stock markets

	ADF				Phillips- Perron			
	Pre-crisis		Crisis		Pre-crisis		Crisis	
	Levels	FD	Levels	FD	Levels	FD	Levels	FD
U. S.	-32.46	-16.59	-43.26	-21.41	-32.72	-307.81	-43.26	-376.45
	(0.00)*	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
Canada	-29.98	-14.69	-35.25	-17.16	-29.99	-322.64	-35.21	-369.68
	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)
Mexico	-29.48	-18.26	-35.19	-18.75	-29.34	-313.92	-38.02	-332.14
	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)

Critical MacKinnon criteria at a significance level of 1% is -3.44. Null hypothesis, series has unit root

*Values within parentheses indicate probabilities

that the null hypothesis about the presence of a unit root is rejected; values of stock indexes are greater than the critical MacKinnon value at a 1% significance level. Therefore, it is confirmed that the series are stationary both for levels (logs) and for the first differences.

To confirm that the series are stationary, a regression equation for the average yield for each of the stock exchanges is performed by applying the Breusch-Godfrey test. The null hypothesis requires that the residuals are not serially correlated. The evidencia suggests that the probability value is greater than 0.05, rejecting the existence of autocorrelation.

3.3 Application of the GARCH (1,1) model

For parameter estimation the Marquardt optimization logarithm was employed, in conjunction with the maximum likelihood method. Derived from maximum likelihood analysis a GARCH (1,1) model was chosen, since the other models presented negative coefficients α_i y β_i for all $i \neq 0$, or they were not significant at least at a 90% confidence level.

Results of the GARCH (1,1) dummy variable for the TLCAN financial series, are reported in Table 5. The GARCH model is tested using the ARCH-LM statistic, revealing the presence of an ARCH effect after applying the models, results from this test are statistically significant, their probability is higher than 0.05.

Furthermore, Table 5 shows that all parameters estimated by the GARCH (1,1) model are positive and statistically significant, with a probability of less than 0.05. In addition, the value of the parameter estimate is higher in all cases than the value of α_1 , as well as, the sum $\alpha_1 + \beta_1$ is smaller and very close to one, such condition insures that the ARCH process is stationary, i.e. the variance does not increase indefinitely. The fact that the lag coefficient of the conditional variance was larger than the error coefficient α_1 implies that there is a persistence of shocks with effects in the long run, that is, volatility does not decay rapidly but tends to remain and its effect dies off gradually.

The coefficients of the dummy variables introduced in the variance equation (GARCH dummy) are positive, except for the case of Canada; they are also statistically insignificant in the case of Mexico and Canada and in the U. S. case the coefficient is statistically significant at 10% significance level; this suggests that volatility increased in the U. S. market after the crisis. However, these results indicate the need to apply a TAR model to examine the presence of asymmetric volatility and an increase in volatility following

Table 5. GARCH models coefficients -January 1, 2001 to February 27, 2015

Coefficients	Mexico	U. S.	Canada
α_0	7.47E-06 (0.00)*	2.52E-06 (0.00)	1.93E-06 (0.00)
α_1	0.0946 (0.00)	0.1027 (0.00)	0.0668 (0.00)
β_1	0.8782 (0.00)	0.8746 (0.00)	0.9236 (0.00)
$\alpha_1 + \beta_1$	0.9728	0.9701	0.9905
GARCH			
Dummy	1.24E-06	7.20E-07	-3.17E-07
0.2198	0.0732	0.3007	
ARCH LM	0.0077 (0.9297)	3.3911 (0.0657)	0.1118 (0.7381)

*Values within parentheses indicate probabilities.

the financial crisis. The GARCH model is tested for its fitness and adequacy using ARCH-LM test. Results indicate that there was no ARCH effect after applying the GARCH models, since ARCH LM tests are not statistically significant as their probability value is higher than 0.05.

3.4 Crisis and volatility changes applying a TARCH model

The financial literature, provides ample evidence proving that changes in the conditional volatility of stock returns not only depends on the magnitude of the shocks, but also on its signs; namely, good and bad news leads to different results. Bad news yields greater changes in volatility than good news which can be tested applying a TARCH (1, 1) model with a dummy variable in the variance equation. Results of its implementation are shown in Table 6.

In Table 6, the leverage term (γ) represented by $\text{RESID} < 0 \text{ ARCH} (1)$ is greater than zero and statistically significant, reinforcing the assumption that positive and negative shocks have different effects on the volatility of daily stock returns. Good news has an impact of α_1 , while bad news' impact is $\alpha_1 + \gamma$, therefore, the impact of bad news is larger than that of good news in all financial markets analyzed. In this regard, the Canadian market shows a more pronounced effect on the asymmetry of volatility, followed by the Mexican and the U.S. markets. Therefore, the evidence confirms that negative impacts produced a leverage effect.

Results reported for the dummy variable indicate that the financial crisis did not increase the magnitude of the leverage effect on the NAFTA financial markets, where the probability associated with the dummy variable is not statistically significant and, in the case of Mexico and Canada, the dummy coefficient is negative. Meanwhile, the values of the one lag ARCH- LM values are statistically insignificant, with a probability value higher than 0.05.

Table 6. TARCH models coefficients -January 1, 2001 to February 27, 2015

Coefficients	Mexico	U. S.	Canada
α_0	6.70E-06 (0.00)*	1.17E-05 (0.00)	2.29E-06 (0.00)
α_1	0.003568 0.5261	0.17777 (0.00)	0.035707 (0.00)
β_1	0.130937 (0.00)	0.199725 (0.00)	0.052788 (0.00)
RESID<0 ARCH (1) γ	0.90793 (0.00)	0.703279 (0.00)	0.924504 (0.00)
$\alpha_1 + \gamma$	0.911498	0.881049	0.960211
Dummy in variance	-1.09E-06 (0.1346)	5.01E-07 (0.7707)	-6.24E-07 (0.0381)
ARCH LM	0.4542 (0.5004)	0.7475 (0.4548)	0.2126 (0.6447)

*Values within parentheses indicate probabilities.

As previously mentioned, the Canadian market presented higher volatility and leverage effect, followed by the Mexican market. It could be because of the size of the Canadian market and its recent merger process that started in 2011 and officially finished in 2014. This merger process has given place to the second higher transatlantic market, combining the London Stock Exchange Group plc (LSEG) with the TMX Group. These types of international operations could increase the global risk exposure.

4. Conclusion

This paper analyzes the contagion effect and volatility changes of the stock market indexes for the countries comprising the NAFTA bloc: Mexico, Canada and the U. S. Its aim was to unveil whether or not those markets were characterized by asymmetric volatility as well as if such effect became accentuated due to the global financial crisis, which began in 2007 with disequilibria in the U. S. market. Data examined included January 1, 2003 to February 27, 2015. The methodology employed to prove the contagion effect was rolling window correlation, and to capture the dynamics of the volatility returns of the IPC, TSE and S&P500 indexes, GARCH (1,1) and TARCH (1,1) models were used.

The rolling window correlation analysis offers evidence about contagion effect among the NAFTA countries stock markets. The equity indexes more closely related are IPC and S&P followed by TSE and S&P. This evidence has important implications on asset allocation and risk diversification concerning tri-national portfolios among these equity markets. Portfolio weights should be carefully optimized to benefit from higher risk returns from the Mexican market and lower risk-return performance from the other two bloc members, particularly the low correlation between the Canadian and Mexican stock markets.

Empirically, the stationarity of the series, the presence of ARCH effect and normality were first verified. Then, relevant models were chosen applying maximum likelihood analysis identifying a GARCH (1, 1) model as the most suitable. The empirical evidence suggests the persistence of shocks with long run effects. Results associated with the dummy variable indicated that volatility in the Mexican and Canadian markets were not very large following the crisis, nevertheless in the case of the U. S., equity markets indexes increasing volatility since the global financial crisis, was confirmed.

Finally, a TARCH (1, 1) model was applied to determine the presence of asymmetric volatility impacts on the returns of the NAFTA markets and, likewise, if such asymmetry increased following the financial crisis. Findings show that for the three stock exchanges there was a leverage effect in their return series; that is, negative news have a larger impact than positive ones on volatility. The Canadian market shows the largest asymmetry in volatility, followed by the stock markets from Mexico and the U. S., respectively. With regard to the effects of the financial crisis on volatility behavior, results about the dummy variable indicate that the financial crisis did not accentuate the asymmetrical behavior of volatility. These latter results may be indicative of a greater integration among the Mexican, Canadian and the U.S. markets due to their similar reaction to exogenous shocks.

The importance of this type of analysis consists in emphasizing that long memory and leverage effect inhibit investment operations, and higher market yields imply higher costs for corporations issuing shares and bonds, which affect the real economy, generates more expensive funding, increases prices and discourages investment. As a corollary, for policy makers, findings imply the need to enhance their stock markets to further economic integration and development.

Referencias bibliográficas

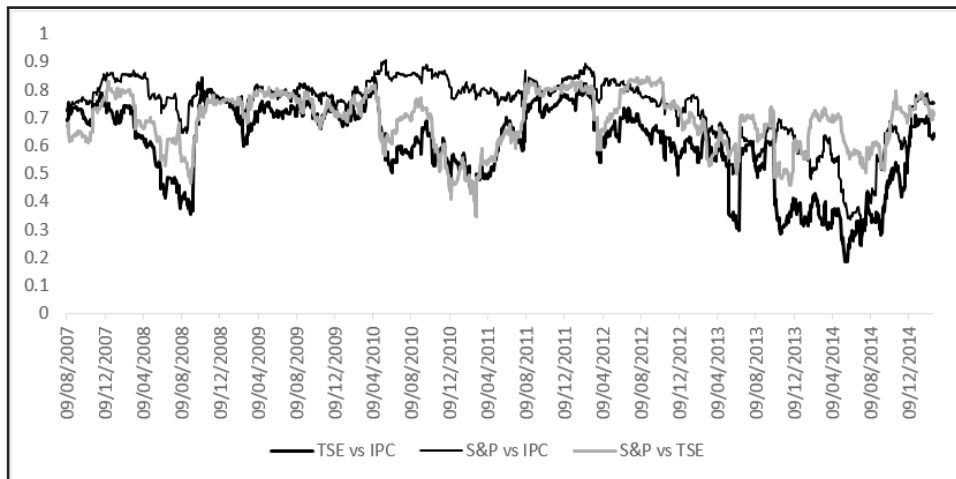
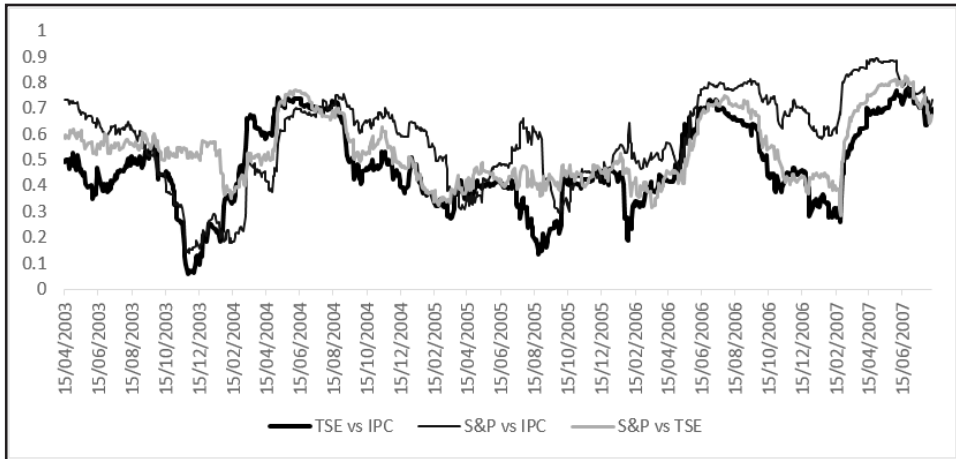
- Aizenman, J., Jinjark, Y., Lee, M., & Park, D. (2012). "Developing Countries' Financial Vulnerability to the Euro Crisis: An Event Study of Equity and Bond Markets (No. w18028). *National Bureau of Economic Research*.
- Andriosopoulos, K. D., Galariotis, E. C., & Spyrou, S. I. (2016). "Contagion, Volatility Persistence, and Volatility Spill-Over: The Case of Energy Markets During the European Financial Crisis." *Available at SSRN 2718841*.
- Bae K. H. and G. A. Karolyi (1994). "Good News, Bad News and International Spillovers of Stock Return Volatility Between Japan and the US". *Pacific-Basin Finance Journal*, 2, pp. 405-438.
- Bollerslev, T. (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity". *Journal of Econometrics* 31, pp. 307-327.
- Bollerslev, T., Engle, R. F., & Nelson, D. B. (1994). "ARCH models". *Handbook of econometrics*, 4, pp. 2959-3038.

- Casas, M. and Cepeda, E. (2008). "Modelos Arch, Garch y EGarch: Aplicaciones a Series Financieras". *Cuadernos de Economía*, vol. XXVII, núm. 48, Bogotá 2008, pp. 287-319.
- Chittedi, K. R. (2015). "Financial Crisis and Contagion Effects to Indian Stock Market: 'DCC-GARCH'Analysis". *Global Business Review*, 16(1), pp. 50-60.
- Ding Z., Granger C. W. J. and Engle R. F. (1993). "A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model". *Journal of Empirical Finance*. 1(1), pp. 83-106.
- Engle, R. F., & Bollerslev, T. (1986). "Modelling the Persistence of Conditional Variances". *Econometric reviews*, 5(1), pp. 1-50.
- Glosten L. R., R. Jagannathan and D. E. Runkle (1993). "On the Relationship Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks". *The Journal of Finance*. 48(5), pp. 1779-1801
- Hsin C. W. (2004). "A Multilateral Approach to Examining the Comovements Among Major World Equity Markets". *International Review of Financial Analysis*, 13(4), pp.433-462.
- Jawadi, F., Louhichi, W., & Cheffou, A. I. (2015). "Testing and Modeling Jump Contagion Across International Stock Markets: A Nonparametric Intraday Approach". *Journal of Financial Markets*, 26, pp. 64-84.
- Jin, X., & An, X. (2016). "Global Financial Crisis and Emerging Stock Market Contagion: A Volatility Impulse Response Function Approach". *Research in International Business and Finance*, 36, pp. 179-195.
- Joshi, P. (2012). "Financial Crisis and Volatility Behaviour of Stock Markets of Asia". *Quest-Journal of Management and Research*, 2(2), pp. 35-44.
- Kalsie, A., & Arora, A. (2016). "Analysis of the Impact of US Financial Crisis on BRICS Economies using ANOVA". *FOCUS. Journal of International Business*, 2(2).
- Kulshreshtha, P., & Mittal, A. (2015). "Volatility in the Indian Financial Market Before, During and After the Global Financial Crisis". *Journal of Accounting and Finance*, 15(3), p. 141.
- Martin, F., & Ian Nguyen, M. (2015). "Asymmetric Dynamics in the Correlations of Hedge Fund Strategy Indices: What Lessons About Financial Contagion?" *Economics Bulletin*, 35(4), pp. 2110-2125.
- Miniaoui, H., Sayani, H., & Chaibi, A. (2015). "The Impact of Financial Crisis on Islamic and Conventional Indices of the GCC Countries". *Journal of Applied Business Research*, 31(2), p. 357.

- Mohammadi, H., & Tan, Y. (2015). "Return and Volatility Spillovers across Equity Markets in Mainland China, Hong Kong and the United States". *Econometrics*, 3(2), pp. 215-232.
- Mollah, S., Quoreshi, A. S., & Zafirov, G. (2016). "Equity Market Contagion During Global Financial and Eurozone Crises: Evidence From a Dynamic Correlation Analysis". *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*.
- Nelson, D. B. (1991). "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach". *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 347-370.
- Paul, M. T., & Kimata, J. D. (2016). "The Linkages, Persistence, Asymmetry in the Volatility, the Price Discovery and Efficiency, and the Effect of the US Subprime Mortgage Financial Crisis on the Spot and the Futures Market's Returns: the Case of India". *Applied Economics*, 48(8), pp. 669-683.
- Pragidis, I. C., Aielli, G. P., Chionis, D., & Schizas, P. (2015). "Contagion Effects During Financial Crisis: Evidence From the Greek Sovereign Bonds Market". *Journal of Financial Stability*, 18, pp. 127-138.
- Reyes, F. J. Z., & Ortiz, E. (2013). "Modelos VAR-GARCH y portafolios de inversión trinacionales en los mercados accionarios del TLCAN". *Revista Mexicana de Economía y Finanzas. Nueva Época/Mexican Journal of Economics and Finance*, 8(2), pp. 129-155.
- Sander, H., & Kleimeier, S. (2003). "Contagion and Causality: an Empirical Investigation of four Asian Crisis Episodes". *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 13(2), pp. 171-186.
- Sinha, A. (2015). "Nature of Energy Index Volatility in Post Financial Crisis Period: Evidences from India". *Energy Procedia*, 75, pp. 2556-2562.
- Syriopoulos, T., Makram, B., & Boubaker, A. (2015). "Stock Market Volatility Spillovers and Portfolio Hedging: BRICS and the Financial Crisis". *International Review of Financial Analysis*, 39, pp. 7-18.
- Taylor, S. (1986). *Modeling Financial Time Series*. John Wiley & Sons, New York.
- Taylor, J. B., & Williams, J. C. (2009). "A Black Swan in the Money Market". *American Economic Journal: Macroeconomics*, 1(1), pp. 58-83.
- Zakoian J. M. (1994). "Threshold Heteroskedastic Models". *Journal of Economic Dynamics and Control*, 15, pp. 931-955.
- Zestos, G. K. (2015). *The Global Financial Crisis: From US Subprime Mortgages to European Sovereign Debt*. Routledge.

APPENDIX 1

Rolling window correlation, pre-crisis period (Jan 1, 2003- Ago 8, 2007)



Rolling window correlation, crisis period (Ago 9, 2007- Feb 27, 2015).

Valuación de la viabilidad de un cambio tecnológico en México utilizando opciones reales

Valuation of the Feasibility of a Technological Change Using Real Options

Francisco A. Álvarez Echeverría*

Fecha de recepción: 30 de octubre de 2016, Fecha de aceptación 18 de enero de 2017

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo se centra en la valuación económica del cambio tecnológico en el sistema de generación de energía eléctrica en México, con el fin de reducir las emisiones contaminantes y/o de optimizar los costos operativos y de producción, a través de la sustitución tecnológica del sistema carboeléctrico de generación de energía por un sistema nucleoelectrico, utilizando diferentes tipos de opciones reales para tal fin: una opción de real de cambio tecnológico y otra opción real de expansión de proyectos, empleando el modelo de tasa corta de Cox, Ross y Rubinstein (1979), para el cálculo de la estructura de plazos de la tasa libre de riesgos.

Clasificación JEL: G19, G39

Palabras clave: opciones reales, nucleoelectrica, carboeléctricas, sector energético.

ABSTRACT

This paper deals with the economic valuation of the electric energy generation system's technological change in Mexico. Such change is aimed at reducing the pollution resulting from the electric energy generation process, and/or to optimize its operating and production costs, through the substitution of the carbo-electric energy generation system, for a nucleo-electric one, using different types of real options, namely, a technological change real option and a project expansion one. In order to calculate the term structure of risk free interest rate, the short rate model proposed by Cox, Toss and Rubinstein (1979) is used.

JEL Classification: G19, G39

Key words: Real Options, Nucleo-electric, Carbo-electric, Energy Sector.

* Instituto de Ciencia, Tecnología e Innovación, Universidad Francisco Gavidia.
San Salvador, El Salvador, franlve@yahoo.com.mx.

Introducción

A lo largo de los últimos años, la política energética ha resultado ser un tema prioritario dentro del panorama estratégico mundial. Más aún, si se considera que la infraestructura energética de la gran mayoría de los países del mundo se basa en el consumo masivo de combustibles fósiles no renovables, cuyo posible agotamiento y la volatilidad de su precio obliga a la búsqueda de alternativas energéticas viables económica y ambientalmente sostenibles, a fin de conseguir una independencia energética a través de tecnologías limpias y bajas en consumo de carbón. La utilización de los combustibles fósiles (hidrocarburos y gas principalmente) ha provocado la degradación y alteración sistemática del ecosistema, debido a las emisiones contaminantes que son generadas durante el proceso de generación y/o utilización de energía. Esta búsqueda de independencia energética en donde lo que se requiere es la no dependencia de combustibles fósiles a largo plazo, debe ser acompañada de la planeación, la evaluación y el desarrollo de fuentes alternas de energía, que permitan un desarrollo de todos los sectores y actores dentro de la sociedad, a partir de una mayor diversificación en la matriz de generación energética dentro del país en cuestión, en la cual se debe dar cabida a tecnologías menos contaminantes.

La organización del presente trabajo es la siguiente. En la Sección 1 se realiza inicialmente una revisión sobre la situación de generación de energía eléctrica a nivel nacional por cada una de las tecnologías involucradas en el sistema. Identificándose las tecnologías de generación a evaluarse y obteniéndose en el transcurso de esta sección, los datos financieros necesarios para la evaluación del cambio o sustitución tecnológica, a través de la aplicación metodológica de dos tipos diferentes de opciones reales (opción real de cambio tecnológico y opción real de expansión); cabe mencionar, que en esta sección se presenta el marco teórico. En la Sección 2 se evalúa la viabilidad del cambio tecnológico, considerando tanto los costos de mantenimiento y operación, así como los posibles beneficios ambientales del cambio para su posterior consideración. Finalmente en la Sección 3 se presentan las conclusiones del trabajo.

1. Marco teórico

Si se considera que la infraestructura energética de la gran mayoría de los países del mundo se basa en el consumo masivo de combustibles fósiles

(recursos no renovables), se hace necesaria la búsqueda de alternativas viables, con el objeto de obtener una independencia energética que permita suplir la demanda sin comprometer los activos económicos estratégicos de una nación.

Es en este marco en donde la discusión en materia de la viabilidad económica, ambiental y social de la energía nuclear cobra actualidad en México, cumpliéndose ya más de 25 años de la puesta en operación de la primera planta nucleoelectrica en el estado de Veracruz; dentro de un entorno en donde los precios de los combustibles fósiles hoy en día, como resultado de especulaciones y conflictos, demuestran la vulnerabilidad de la mayoría de las economías desarrolladas y subdesarrolladas, incluida la mexicana. Esta vulnerabilidad, en referencia al consumo y dependencia energética de los hidrocarburos, conlleva a que las empresas se vean impactadas en su estructura de costos, y a la pérdida de competitividad debido al traslado de este tipo de externalidades hacia los consumidores, los cuales ven mermados sus ingresos; mientras que los gobiernos, sufren desequilibrios fiscales debido a los cuantiosos subsidios que se destinan a las familias con el objetivo de compensar la caída en su poder adquisitivo y en programas de estímulo a los sectores productivos.

En este marco los gobiernos deben desarrollar e implementar todas aquellas políticas y estrategias viables para la implementación de proyectos tendientes a disminuir su dependencia de los combustibles fósiles de forma gradual. Sin embargo, la viabilidad de este tipo de proyectos, depende de los criterios y de la forma en que se valoren los factores que determinan la factibilidad de éste, en donde, en ocasiones, los métodos tradicionales son incapaces de valorar adecuadamente el valor estratégico de estas opciones de inversión a través de un horizonte de tiempo determinado de forma estocástica (Milanesi, 2014). No obstante, en la actualidad existen algunos estudios que muestran el incremento de la utilización de prácticas y sistemas sofisticados de presupuestación, en un amplio contexto, en donde el método de los flujos de fondos descontados (DFC, por sus siglas en inglés) ha dejado de ser exclusivo para el cálculo y el análisis de la incertidumbre estratégica y financiera (Miller *et al.*, 2003 y Chatterjee *et al.*, 2003; Trigeorgis, 1996; Dixit y Pindick, 1994 y Cruz *et al.*, 2017), ya que el DFC, en la práctica resulta ser lineal y estático por naturaleza (Duku-Kaakyire *et al.*, 2004), además de asumir que si las oportunidades de inversión no son totalmente reversibles, entonces no hay oportunidad de inversión (Kulatilaka y Marcus, 1992). De igual forma, dentro del *valor presente neto* (VPN) subyace la misma filosofía,

en la que un proyecto resulta ser factible solamente cuando la organización puede explotar una ventaja competitiva temporalmente en ausencia de arbitraje o que éste resulte ser neutral al riesgo (Pinches, y Lander 1997).

El modelo utilizado para el desarrollo de VPN resulta ser muy comprensivo en la práctica, y requiere que los beneficios estratégicos sean identificados y cuantificados al inicio de cada etapa de inversión en el proceso de selección de alternativas, con la desventaja de que algunas de las opciones posibles podrían quedar latentes dentro del portafolio de opciones, sin tomar en cuenta que el valor estratégico a través del tiempo pudiera cambiar, dando como resultado que éste se destruya o se cree durante la implementación (MacDougall y Pike, 2003; y Kokkaew y Sampima, 2014).

Cabe señalar que cuando se utilizan las técnicas tradicionales de evaluación de proyectos actuales (VPN, flujos DFC, tasa interna de retorno, etcétera), éstas son capaces de administrar decisiones de espera de la inversión, revisando adecuadamente la estrategia de operación inicial (Lander *et al.*, 1998). Sin embargo, el cálculo del valor de las decisiones de la administración no es simplemente el agregar o descontar cierto flujo de efectivo; más bien se deben establecer ciertas políticas estratégicas de inversión, así como el desarrollo de futuras oportunidades de entrada o salida de proyectos, expansión de la inversión, contracción de la producción o el abandono de un proyecto (Dixit y Pindick, 1994, Kokkaew y Sampima, 2014), en donde dichas políticas estratégicas de inversión a final de cuentas resultan ser meramente oportunidades u opciones dentro de la estrategia corporativa susceptibles de evaluarse (Trigeorgis, 1996); considerándose que el tiempo óptimo de la adopción tecnológica puede ser representado como un modelo de irreversibilidad, en donde el VPN resulta ser una posibilidad subóptima dentro del espectro de las posibles soluciones (Doraszelsky, 2001).

Es desde este contexto, en donde la evaluación de proyectos tecnológicos de inversión a través de la utilización de opciones reales se presenta como una herramienta viable y confiable dentro de entornos dinámicos (Trigeorgis, 1996), que puede ser incorporada al proceso de toma de decisiones en la selección de estrategias de negocios a implementarse (Amram y Kulatilaka, 2000), cuando existe la flexibilidad u opcionalidad de tomar en el futuro nuevas decisiones relacionadas con dichos proyectos en una fecha futura, como pueden ser (Dixit y Pindick, 1994; Venegas y Botero, 2006; Cuervo, 2014, Kodukula y Papudesu, 2006; Lee, 2011; Venetsanos *et al.*, 2002; Hull, 2002; Alvarez *et al.*, 2012; Cruz y Sánchez, 2017 y Rogers, 2002): (1) La extensión de un proyecto o estrategia; (2) La contracción de un proyecto o

estrategia; (3) La posposición de un proyecto o estrategia; (4) La corrección de un proyecto o estrategia; (5) La valuación de dos o más activos (Baldi, 2010 y Bollen, 1998) y (6) El abandono de un proyecto, entre otras.

Las opciones reales, han sido ampliamente utilizadas para la valuación de diversos activos en diferentes áreas como son (Cuervo, 2014; Lander *et al.*, 1998; Pareja y Cadavid, 2016; Marques *et al.*, 2014): manufactura, bienes estatales, investigación y desarrollo, inventarios, patentes, distribución de agua potable, tasas de interés, fuerza laboral, riesgo de capital, publicidad, efectos de histéresis, competitividad, estrategias corporativas, recursos naturales, conservación ambiental, generación eléctrica y nuevas tecnologías, por mencionar algunas. La versatilidad de las opciones reales dentro de la valuación del cambio tecnológico ha cobrado relevancia, sobre todo en el sector energético, aunque para ello, generalmente se deben de plantear algunos supuestos para valorar adecuadamente dichas opciones energéticas, pudiéndose utilizar diferentes tipos de opciones reales para tal fin (Tian *et al.*, 2016; Damasceno *et al.* 2016; Alvarez *et al.*, 2012, Hua *et al.*, 2013, Deng *et al.*, 2001; Kirby y Davison, 2010; Moreira *et al.*, 2004; Kjaerland *et al.*, 2007; Laurikka, 2006; Deng *et al.*, 2001; Barria y Rudnick, 2011; Madlener y Stoverink., 2012; Gollier *et al.*, 2005; Naito *et al.*, 2010; Zhu, 2012, y Lee, 2011).

2. Viabilidad de cambio tecnológico

México y varios países a nivel mundial contemplan el desarrollo de energías alternas como la biomasa, energía solar, energía eólica, energía geotérmica, energía nuclear, entre otras. La primera alternativa requiere de consumos altos de productos básicos alimenticios o de grandes cantidades de insumos de origen vegetal. La energía solar se presenta como una alternativa viable, con el inconveniente que la eficiencia de captación no supera el 20% y la fragilidad de las fotoceldas que de una u otra forma encarecen dichos proyectos; en este sentido resulta importante mencionar que actualmente se consideran algunos proyectos bajo dicha tecnología, sin embargo la Secretaría de Energía (SENER, 2009) apunta que *“No se espera que durante los próximos años los precios de la energía eléctrica generada con celdas fotovoltaicas pueda ser completamente competitiva con los precios de la energía generada con tecnologías convencionales, sin embargo sí podría serlo con los precios de la electricidad al menudeo en regiones cálidas y con alta incidencia solar, o bien en zonas aisladas y en aquellas donde el costo de transmisión y distribución de energía eléctrica impide proporcionar el servicio...”*, cabe señalar, que en

México existe la superficie necesaria para la implementación de este tipo de tecnología, sin embargo, no se ha incursionado en la producción de este tipo de alternativas a gran escala SENER (2009).

La energía eólica presenta diversos beneficios (Bazán-Perkins, 2005), sin embargo, está sujeta a un tipo específico de condiciones atmosféricas, además de influir en la mortandad de aves e insectos dentro de los ecosistemas, sin mencionar que en algunos lugares, como España, este tipo de tecnologías no ha resultado ser rentable a largo plazo y a gran escala.

La energía geotérmica (Bazán-Perkins, 2005), al igual que la eólica, requiere de la existencia de condiciones geológicas particulares (aguas termales entre 150 y 400 °C a poca profundidad, en donde el agua caliente o el vapor pueden fluir naturalmente, por bombeo o por impulsos de flujos de agua y de vapor, pudiéndose presentar algún tipo de contaminación debido a la generación de arsénico y amoníaco, en mantos acuíferos principalmente. En lo referente a la energía nuclear, ésta se puede vislumbrar como una alternativa viable económicamente, encaminada a lograr una mayor independencia energética en relación a los combustibles fósiles. Generalmente, a la generación de energía mediante el uso de reactores nucleares se le atribuye efectos perjudiciales (ver Cuadro 1), tanto para el ser humano como para el equilibrio de los ecosistemas. Sin embargo, todo tipo de fuente alterna de energía conlleva e implica un impacto directo o indirecto al entorno. La núcleo-electricidad no está ajena al impacto ambiental, ya que elimina algunas de las externalidades de las otras opciones energéticas e introduce otras diferentes. En particular, ésta no emite dióxido de azufre, partículas, óxidos

Cuadro 1. Niveles de afectaciones de las tecnologías de generación eléctrica al ambiente y a la salud humana

Tecnología de generación	Calentamiento global	Acidificación
Carbón mineral	55%	48%
Petróleo	22%	47%
Gas natural	22%	5%
Hidráulica	0%	0%
Eólica	1%	0%
*Nuclear	0%	0%

Fuente: Adaptado parcialmente de Bazán-Perkins , 2005

de nitrógeno, compuestos orgánicos volátiles o gases que contribuyen al efecto invernadero.

Con respecto a los costos de producción de energía a base de nucleoelectricas, Bazán-Perkins (2005) y el US *Nuclear Energy Institute* (reporte 1995–2008) demuestran que en los Estados Unidos de Norteamérica, la energía nuclear se presenta como una opción viable en la generación de energía eléctrica en contra de los altos costos de producción en relación a los sistemas en donde se involucran gas e hidrocarburos. En la República Mexicana los requerimientos de inversión para la expansión de la capacidad de generación eléctrica instalada requerirán en los próximos años una gran cantidad de recursos económicos, con el objeto de cubrir la demanda del servicio a nivel nacional a menor costo.

Debido a lo anterior, en la actualidad, se requiere evaluar las diferentes opciones energéticas de forma flexible a través del tiempo, analizando horizontes estratégicos mucho más amplios, mediante métodos que permitan considerar la expansión o el abandono de un proyecto, y que permita determinar la factibilidad económica, a largo plazo de las diversas tecnologías utilizadas para la generación de energía, con el objeto de determinar la conveniencia de cada una de las opciones involucradas en la matriz de generación dentro del análisis (Shah *et al.*, 2015).

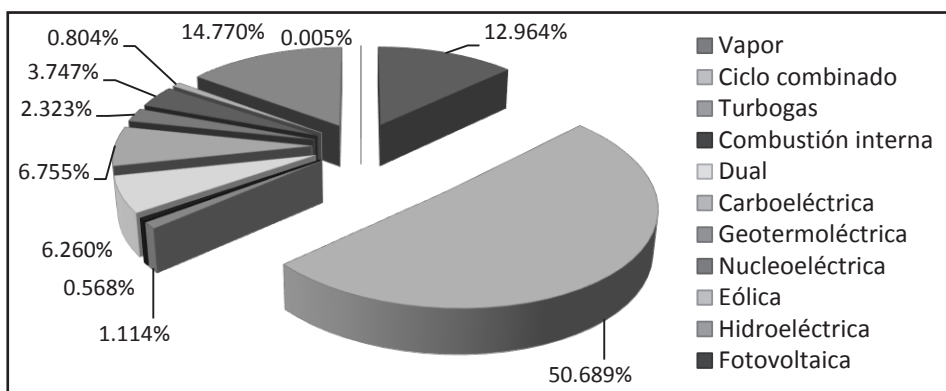
Bajo el contexto antes enunciado, la hipótesis sobre la que gira el presente trabajo es que la posibilidad de obtener una mayor eficiencia en la generación energética, disminuyendo considerablemente las emisiones de gases de efecto invernadero (y de paso obtener cierta independencia energética en la generación de energía a través de modos de producción menos contaminantes y no dependientes de combustibles fósiles), es totalmente viable en la República Mexicana a través del cambio o sustitución de tecnologías menos contaminantes. En este sentido, La Secretaría de Energía (SENER) y la Comisión Federal de Electricidad (CFE) de México, bajo la tesis anterior, estarían en la posibilidad de sustituir los sistemas carboeléctricos de generación de energía por sistemas nucleoelectricos,¹ bajo el entendido que

¹ Se realizó la comparativa entre dichas tecnologías debido a que la suma de la capacidad neta instalada de las plantas carboeléctricas de 1675.1 MW (COPAR, 2013) es o podría ser equiparable a una unidad de generación nucleoelectrica con una capacidad neta instalada de 1351 MW (COPAR, 2013). De igual manera, el precio del combustible (nucleoelectrica) no depende del precio de los combustibles fósiles, existiendo una marcada diferencia, muy significativa, en la emisión de contaminantes a la atmósfera. Cabe destacar que los sistemas carboeléctricos generan

este tipo de sistemas (nucleoeléctricos), contribuyen no sólo a la obtención de ahorros sustanciales en los costos de operación y mantenimiento de los sistemas de generación a largo plazo (SENER, 2013 y MIT, 1977), sino que de igual manera conllevan a reducir las perturbaciones generadas por el cambio climático debido a las emisiones de CO², las cuales en un futuro podrían tener un costo económico y ambiental alto y de difícil reversión (Xinhua y Wei, 2011), permitiendo de igual manera la diversificación de la matriz para la generación de energía eléctrica energética a nivel nacional, proveyendo mayor autonomía dentro del mercado eléctrico, sobre todo por la creciente tendencia de pérdida de activos petroleros en México.

Para evaluar la viabilidad del cambio tecnológico entre dichas tecnologías, se realizó una comparativa de los flujos de efectivo de cada una de las tecnologías dentro de la matriz de generación energética en México. Es así, que, con el objeto de determinar la viabilidad de la transición de un modo de producción a otro, se requirió analizar, de forma preliminar, la generación bruta de energía por tecnología en la República Mexicana (ver Figura 1), observándose que en la República Mexicana la mayor parte de la generación se realiza a través del proceso de ciclo combinado.

Figura 1. Generación bruta de energía por tecnología en el año 2014



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de SENER (2015) con datos del año 2014.

alrededor de 6.75% de la energía a nivel nacional, y el sistema nucleoeléctrico 3.74% del total nacional (SENER, 2015).

Es de esta forma que para valorar adecuadamente el cambio o sustitución tecnológica, se hace necesario evaluar estas tecnologías en cuestión, para verificar la viabilidad e idoneidad del cambio, en lo que al modo de producir se refiere, considerándose también el tiempo de adopción, los costos e ingresos asociados a estas tecnologías, así como los beneficios y riesgos a través del tiempo —lo cual es susceptible de realizarse a través de la utilización de opciones reales— (Venegas, 2006, Epaulard y Gallon, 2001; Takizawa *et al.*, 2001 Gollier *et al.*, 2005, Alvarez *et al.*, 2012 y Mun, 2006), no pudiendo ser esto posible a través de los métodos tradicionales de presupuestación.

En este sentido, se evaluaron los flujos históricos de cada una de las tecnologías consideradas, con el objetivo de determinar la rentabilidad del cambio; para posteriormente valorar la suficiencia de los flujos de efectivo de la entidad a través del tiempo para la realización de dicha sustitución tecnológica, a través de una opción de expansión. Con este fin, se recopiló la información base necesaria a partir del portal oficial de la (SENER, 2015,) obteniéndose:² (1) La generación bruta anual total a nivel nacional; (2) El histórico de generación mensual bruta de energía en *Megawatt-hora* (*MW-h*) de cada una de las tecnologías en cuestión (ver Cuadro A1 contenido en el Anexo 1); y (3). Los productos obtenidos por la venta de energía eléctrica (ver Cuadro 2).

3.1 Valuación de la opción real de cambio tecnológico y de la opción de expansión

Toda vez obtenidos los datos de producción bruta de energía en *MW-h* por cada tecnología y los productos generados por la venta de energía eléctrica (ver Cuadro 2), se calculó el precio de venta por *Megawatt* producido ($\$/MW-h$) por año de operación (columna 4 del Cuadro 2). Para tal efecto, se dividió la columna 3 del Cuadro 2 entre la columna 2 del mismo cuadro. Una vez obtenido el precio de venta por año, de cada *Megawatt* producido, éste se multiplicó por los valores contenidos en el Cuadro A1 (ver Anexo 1), —histórico de generación mensual bruta de energía *MW-h* por tecnología 2002–2014—, con el fin de calcular los flujos de efectivos históricos mensuales para cada una de las tecnologías en cuestión (ver Cuadro A2 contenido en el Anexo 1). La comparativa de los flujos de efectivo de las tecnologías se realizó utili-

² Los datos base se obtuvieron de la información publicada por la SENER (2015) en su portal Web y posteriormente fueron adaptados para su análisis y visualización.

Cuadro 2. Histórico de producción bruta anual de energía y ventas totales de energía a nivel nacional en la República Mexicana

Año	Generación anual bruta (MW-h)	Productos de ventas por año (en miles)	Precio (\$/MW-h)
2002	200,362,388.29	115,593,715.44	576.92
2003	202,595,550.71	136,069,905.83	671.63
2004	207,018,877.63	156,128,125.29	754.17
2005	217,158,778.07	174,231,816.69	802.32
2006	223,563,511.54	199,551,308.13	892.59
2007	230,926,638.93	212,651,126.37	920.86
2008	234,096,292.46	252,569,493.08	1078.91
2009	233,471,637.74	219,914,531.27	941.93
2010	241,490,894.83	249,234,879.31	1,032.07
2011	257,883,545.48	286,843,393.25	1,112.30
2012	260,497,832.13	307,927,933.96	1,182.07
2013	257,860,107.02	314,163,009.63	1,218.35
2014	258,255,774.32	328,197,628.04	1,270.82

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de la SENER, 2015.

zando un *Call* de una opción real europea de cambio tecnológico³ (ver Ec. 1) donde S_1 y S_2 son los valores de los activos subyacentes, siendo S_2 el valor o costo de implementación de la tecnología a implementarse (nucleoeléctrica) y X es el costo proporcional de la tecnología actual S_1 con respecto a la tecnología a implementarse S_2 , es decir S_2/S_1 , en donde la ecuación utilizada para la evaluación de cambio tecnológico, es la siguiente (Mun, 2006):

$$Call = S_2 \Phi \left[\frac{\ln \left(\frac{S_2}{(1+X)S_1} \right) + \frac{T\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T}} \right] - S_1 \Phi \left[\frac{\ln \left(\frac{S_2}{(1+X)S_1} \right) - \frac{T\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T}} \right] - \quad (1)$$

³ Dicha ecuación se fundamenta principalmente en los modelos de Black-Scholes (1973) y Merton (1973a, 1973b y 1973c), y en el modelo de Margrabe (1978).

$$S_1 X \Phi \left[\frac{\ln \left(\frac{S_2}{(1+X)S_1} \right) - \frac{T\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T}} \right]$$

Bajo este entendido, se calculó la volatilidad periódica anualizada de los flujos de efectivo para ambas tecnologías (Figura 2) a través del método logarítmico. Para el cálculo de la volatilidad se realizó un promedio⁴ histórico para cada una de las dos variables. Para el cálculo de S_1 y S_2 se utilizaron los promedios históricos anuales contenidos en el Cuadro 2. El valor de X (el costo proporcional de la tecnología actual S_1 con respecto a la tecnología a implementarse S_2) se calculó a través de los datos contenidos en la COPAR⁵ (2013), donde se especifica que los costos unitarios de inversión por tecnología (en dólares por kW_{bruto} generado o a generarse), son de alrededor de 4,500 USD/ kW_{bruto} para las nucleoelectricas,⁶ y de 6,054 USD/ kW_{bruto} para los sistemas carboelectricos. Dando como resultado un factor del 0.7433 (S_1/S_2) como relación de costo proporcional de sustitución tecnológica considerado en la opción de cambio tecnológico (ver Ec. 1). Es decir, si el comportamiento de S_2 (tecnología a implementarse) excede el desempeño de S_1 (tecnología actual), considerando además los costos asociados a ésta (S_1), entonces la opción de cambio tecnológico es óptima para S_2 (Mun, 2006).

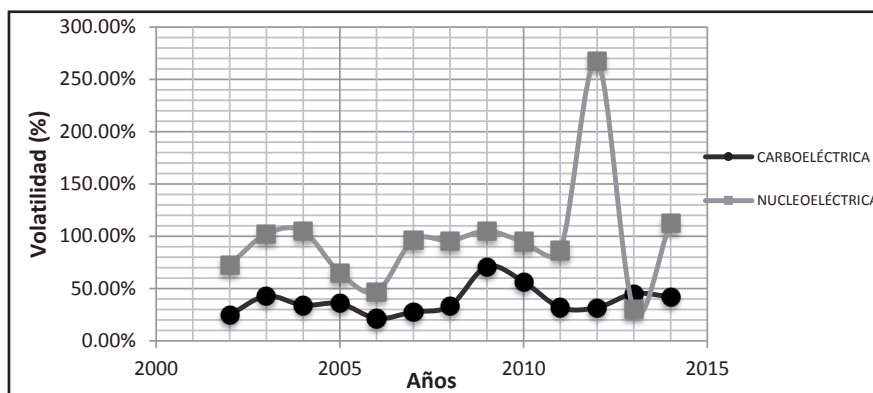
Así mismo, cabe señalar que cada una de las tecnologías genera una serie de costos derivados de la operación y el mantenimiento de las mismas (fijos y variables), teniéndose un costo integrado de mantenimiento y operación (M&O, por sus siglas en inglés) para los sistemas nucleoelectricos de \$14.14 USD por cada MW producido (COPAR, 2013), y para el caso de los sistemas

⁴ Todos los promedios calculados en el presente trabajo se obtuvieron a través del método geométrico, ya que éste método no es tan sensible, como la media aritmética a los valores extremos.

⁵ La COPAR (2013) donde se presenta la actualización de los principales parámetros técnico-económicos que intervienen en el cálculo del costo nivelado del kWh neto generado de las diversas tecnologías para la producción de energía eléctrica, es editada y elaborada por la Comisión Federal de Electricidad (CFE), para la planificación del sistema eléctrico a nivel nacional, así como en la evaluación económica y financiera de tecnologías y proyectos de generación eléctrica.

⁶ En concordancia con la COPAR (2013), el Banco Interamericano de Desarrollo (BID, 2010) estima que "El costo de una nueva central nucleoelectrica en México sería de \$4,500 millones de dólares (USD), de los cuales 57.4% podría ser de suministros nacionales de equipos, materiales y servicios (...)".

Figura 2. Volatilidad periódica anualizada de los flujos de efectivo de los sistemas de generación carboeléctrico y nucleoelectrico



Fuente: Elaboración propia.

carboeléctricos, de forma integrada, éstos generan un costo de mantenimiento y operación de \$24.94 USD por *MW* producido (COPAR, 2013). Para el caso de los costos de *O&M* totales, se multiplicó la fila 1 del Cuadro 3 por el costo respectivo correspondiente a cada tecnología para obtener los flujos de efectivo promedio por tecnología (fila 2 del Cuadro 3), obteniéndose los siguientes valores:

Cuadro 3. Flujos de efectivo promedio y costos de mantenimiento y operación.

	Carboeléctrica	Nucleoelectrica
MW-h promedio de generación en 12 años*	17,358,604.76	9,850,315.671
Flujos de efectivo promedio de generación en 12 años (en pesos)**	10,014,582,258	5,682,875,895**
Volatilidad periódica anualizada promedio	38.26%	98.44%
Costos O&M de plantas (en pesos)	6,623,731,121	2,131,036,993

* Los promedios de generación se obtuvieron a través de los datos contenidos en el Cuadro A3 del Anexo 1.

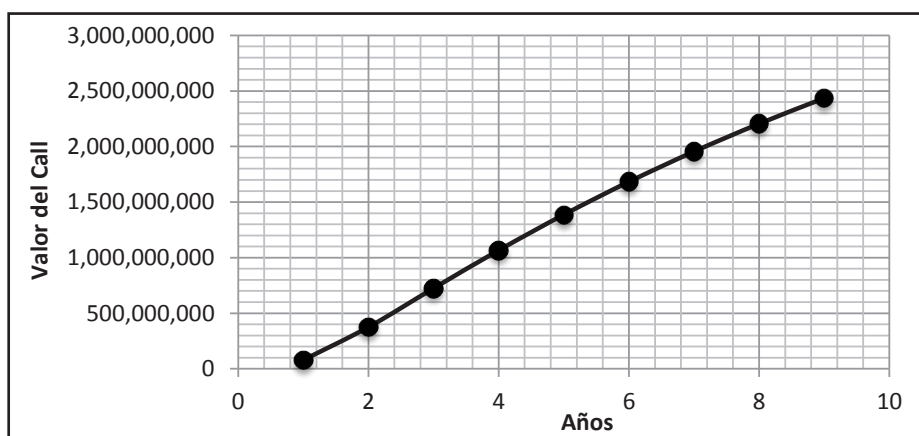
** Cuando no se tienen datos específicos para el cálculo de los flujos de efectivo para el caso de las nucleoelectricas, es posible calcularlos a través de modelos específicos como el de Rothwell (2006).

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 3 se presentan los resultados obtenidos a través del análisis del cambio tecnológico o *switching options* (en donde el valor del *Call* resulta positivo desde el primer año), determinándose a través del análisis que resulta factible la migración de un sistema carboeléctrico hacia un sistema nucleoeeléctrico; sobre todo si se analizan los flujos de efectivo y los costos de operación de cada una de las tecnologías, ya que los costos de operación de las carboeléctricas, representan el 66.14% de sus ingresos. En cambio, los costos operativos para nucleoeeléctricas, representan el 37.49% es decir, que en términos totales las ganancias netas antes de impuestos del sistema nucleoeeléctrico son 1.04 veces mayores que el del sistema carboeléctrico (considerando todo el sistema carboeléctrico a nivel nacional), pudiéndose inferir que este último resulta hasta cierto punto ineficiente en diversos aspectos, que a la postre resultan determinantes en su desempeño financiero.

Una vez determinada la viabilidad del cambio tecnológico, se debe de efectuar la evaluación de la capacidad de la organización para soportar financieramente el cambio tecnológico a través del tiempo. En este caso en particular, el flujo de efectivo de los ingresos por la venta de energía por parte de los sistemas de generación del tipo carboeléctrico en conjunto, no son suficientes como para posibilitar la implementación tecnológica a corto, mediano o largo plazo.

Figura 3. Evolución del Call de la opción real de cambio tecnológico a través del tiempo



Fuente: Elaboración propia.

Es por lo anterior que se requirió efectuar un análisis de la capacidad económica de la empresa CFE para tal fin, pudiéndose observar en el Cuadro A3 los flujos de efectivo derivados del producto de la venta de energía a nivel nacional. Para realizar la valoración de la viabilidad económica de la propuesta se utilizó un *Call* de una opción real de expansión (Black-Scholes, 1973), como es (Venegas, 2006):

$$c_{BS}(S_t, t) = S_t \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \quad (2)$$

Siendo

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (3)$$

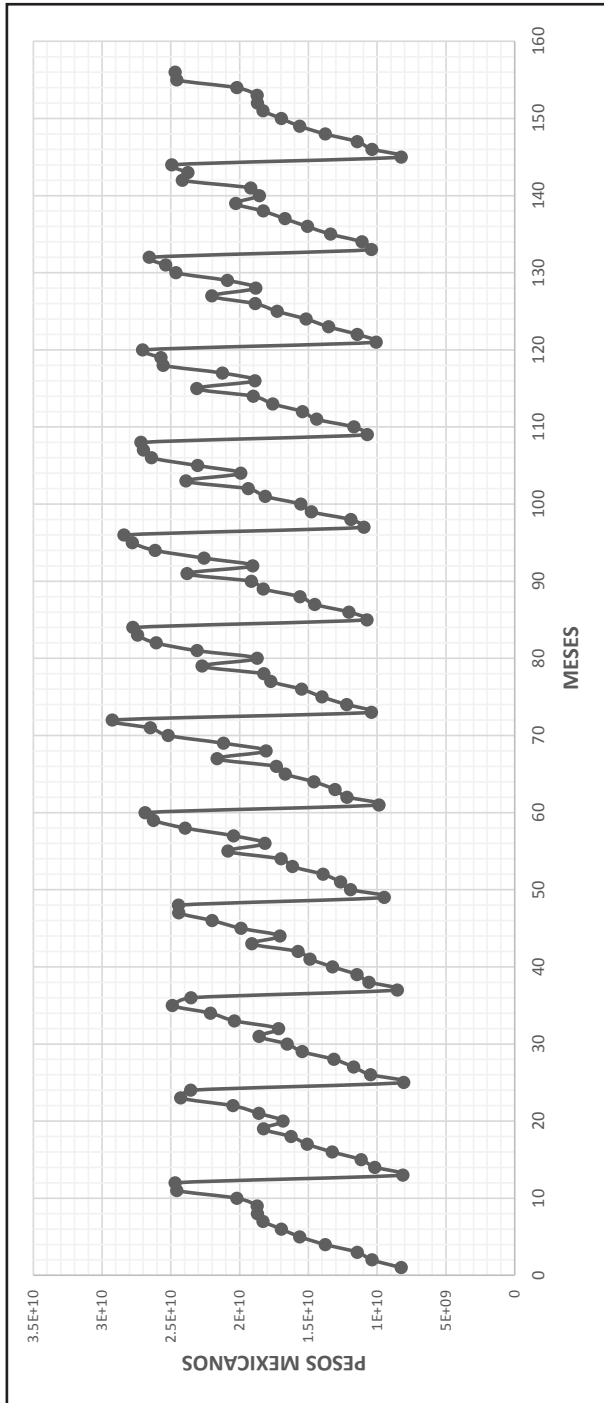
$$d_1 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad \text{y} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Donde S_t es el valor presente de los flujos esperados en t , K es el costo de inversión en T , r es la tasa de interés libre de riesgo, σ es la volatilidad de los flujos de efectivo del proyecto, y $T-t$ es el tiempo en que la oportunidad de invertir desaparece.

En la Figura 4 se presenta la distribución de los productos históricos totales obtenidos de la venta de energía a nivel nacional (todas las tecnologías), observándose que dicha distribución posee un fuerte componente estacional. Así mismo, se muestran los ingresos históricos por mes, a partir de la venta de energía a nivel nacional (de la Figura A1 a la Figura 12A, en el Anexo 1), advirtiéndose que, aunque la producción de energía ha aumentado, los ingresos por este rubro tienden a disminuir a través del tiempo (los cuales pueden predecirse a través de series polinómicas de orden seis, a excepción de los meses de abril, agosto y noviembre que pueden ser inferidos a través de series de tiempo con intervenciones y *outliers*).

Cabe mencionar que, para determinar la estructura de plazos de la tasa libre de riesgo de los flujos de efectivo antes presentados, se utilizaron los datos históricos de la tasa de los Certificados de la Tesorería (CETES) a 1 año (subastados mensualmente) con datos comprendidos entre el 26 de enero 2012 hasta el 11 de diciembre de 2014 (Banco de México, 2015). Para

Figura 4: Productos históricos totales mensuales por la venta de energía eléctrica a nivel nacional en México (2002-2014)



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de SENER, 2015.

el cálculo de la tasa libre de riesgo (ver Figura 5) se utilizó el modelo de tasa corta de Cox, *et al.* (1979) el cual puede ser representado a través una ecuación diferencial estocástica como es la siguiente:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \quad (4)$$

cuya ecuación discreta puede escribirse como

$$y_{t+1} = \beta_1 y_t^{-1} + \beta_2 y_t + \varepsilon_t \quad (5)$$

donde

$$y_t = 2\sqrt{r_t}, \beta_1 = 2ab - (\sigma^2/2), \beta_2 = 1 - (a/2) \quad (6)$$

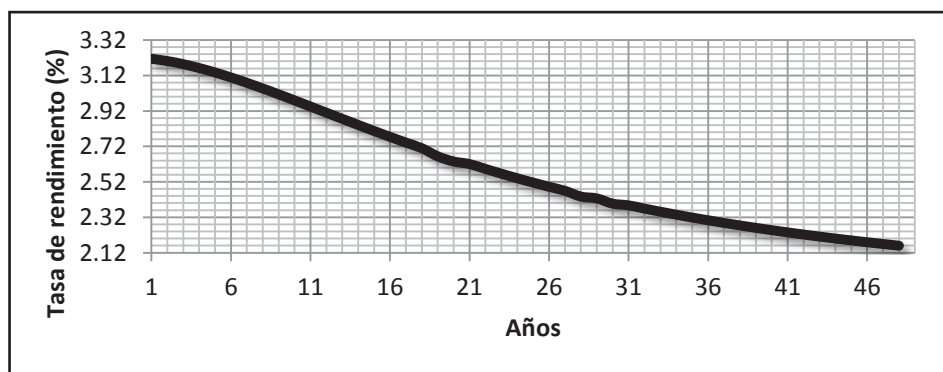
y

$$\varepsilon_t \approx N(0, \sigma^2) \text{ donde } \tilde{a} = 2\left(1 - \tilde{\beta}_2\right) \text{ y} \quad (7)$$

$$\tilde{b} = \frac{2\tilde{\beta}_1 + \tilde{\sigma}^2}{4\tilde{a}} = \frac{2\tilde{\beta}_1 + \tilde{\sigma}^2}{8\left(1 - \tilde{\beta}_2\right)}$$

Donde St es el valor presente de los flujos esperados en t , K es el costo de inversión en T , r es la tasa de interés libre de riesgo, σ (0.07432) es la volatilidad de los flujos de efectivo del proyecto, y $T-t$ es el tiempo en que la oportunidad de invertir desaparece.

Figura 5. Estimación de la estructura de plazos de la tasa libre de riesgo a través del modelo CIR a partir de la tasa de rendimientos de CETES



Fuente: Elaboración propia.

Parámetros: $\tilde{a} = 0.4801$; $\tilde{b} = 2.8980$; $\sigma = 0.0743$

3.1.1 Beneficios ambientales derivados del cambio tecnológico

Cabe señalar a partir del cambio tecnológico antes planteado que es posible obtener ciertos beneficios asociados a éste, como son los beneficios adicionales de la no emisión de CO_2 (BANECO), es decir, que partiendo desde el año 2002 hasta el año 2014, se han emitido en promedio⁷ (debido a la producción de energía a través de los sistemas carboeléctricos), al menos 18,799,021 toneladas de CO_2 (ver Cuadro 4), además de otros contaminantes (SO_2 y NOx) de efecto invernadero y materia particulada.

Es por ello que el cambio tecnológico a un sistema de producción menos contaminante contribuiría al mejoramiento del entorno inmediato de forma importante a corto plazo. Sin embargo, dicho cambio tecnológico no sólo posee beneficios ambientales asociados, sino que existe la posibilidad de obtener recursos económicos adicionales por dicha transición tecnológica. Si esas no-emisiones se pudiesen titularizar bajo un esquema de CO_2 *bonus-malus system*⁸ (Baldi, 2010 y Kiriyaama *et al.*, 2004) estas emisiones podrían gene-

⁷ Considerando los datos de la COPAR (2013), donde se establece que por cada MWh producido a partir del carbón, se emiten 1082.98 kg de CO_2 , 4.52 kg de SO_2 , 1.30 kg de NOx y 1.01 kg de materia particulada.

⁸ Cabe destacar que dichos bonos de carbono, forman parte de las prioridades de la política fiscal de algunos países como Francia (Boreau, 2012 y D'Haultfoeuille *et al.*, 2014).

Cuadro 4. Emisiones anuales históricas producidas por la generación de energía en México a partir de tecnologías carbopléctricas

Año	Emisiones anuales (en kilogramos)*			Material particulado
	MW-h total anual nacional	MW-h total anual carbopléctrica	Porcentaje del total	
2002	155,787,763.70	16,151,910.84	10.37%	17,492,196,401.50
2003	155,839,635.90	16,681,198.88	10.70%	18,06,540,763.06
2004	166,201,034.10	17,883,260.21	10.76%	19,367,213,142.23
2005	167,157,905.70	18,380,281.63	11.00%	19,905,477,399.66
2006	174,963,437.30	17,931,203.39	10.25%	19,419,134,647.30
2007	18,238,426.80	18,100,720.47	9.92%	19,602,718,254.60
2008	193,325,773.80	17,789,140.47	9.20%	19,265,283,346.20
2009	187,488,213.81	16,886,209.67	9.01%	18,28,742,348.42
2010	196,930,360.00	16,485,075.94	8.37%	17,853,007,541.50
2011	207,733,426.70	18,158,430.52	8.74%	19,665,217,084.55
2012	211,951,447.50	17,724,103.14	8.36%	19,194,849,218.56
2013	208,349,308.20	16,044,399.99	7.70%	17,375,764,301.17
2014	208,953,304.70	17,445,926.68	8.35%	18,89,358,9675.91

* No se poseen datos sobre la eficiencia de los sistemas anticontaminantes instalados en las carbopléctricas, por lo que se supone que se emiten a la atmósfera en su totalidad todos los contaminantes.

Fuente: Elaboración propia.

rar rendimientos adicionales anuales por \$2,013,375,232,511 de pesos (considerando que cada acción pudiera colocarse a \$7.00 USD por tonelada (CEC, 2014). Entonces, si se parte del principio de que una opción real se encuentra circunscrita en un esquema donde una opción real es igual a $\overline{VPN} = VPN + c$ (Venegas, 2006 y Schwartz, 2013), dicha ecuación podría reescribirse, para este caso particular, como $\overline{VPN} = VPN + c + \text{BANECO}$ donde *BANECO* representaría los beneficios adicionales de la no emisión de CO_2 ; considerando que la no emisión de CO_2 al día de hoy tiene un costo o un beneficio, y que éste puede ser susceptible de cuantificarse y de incorporarse a la evaluación económica de cambio tecnológico.

Cuadro 5. Flujos de efectivo a nivel nacional provenientes de los productos por la venta de energía eléctrica. Fuente: Elaboración propia a partir de datos obtenidos a través de la SENER (2015) y COPAR (2013).

Año	Producción bruta anual (MW-h)	Ventas totales por año (miles de pesos)	Volatilidad anualizada de ventas totales	M&O* (en pesos)	TOTAL - M&O (en pesos)
2002	200362,388.29	115593,715.44	15.83%	145988581.59	115447726861
2003	202595,550.71	136069,905.83	14.58%	150772536.27	135908268496
2004	207018,877.63	156128,125.29	16.58%	161637333.05	155966487957
2005	217158,778.07	174231,816.69	10.75%	166129646.84	174065687043
2006	223563,511.54	199551,308.13	14.64%	162070666.08	199389237464
2007	230926,638.93	212651,126.37	14.06%	163602841.33	212487523529
2008	234096,292.46	252569,493.08	16.98%	160786634.47	252408706446
2009	233471,637.74	219914,531.27	16.22%	152625520.40	219761905750
2010	241490,894.83	249234,879.31	19.98%	148999884.77	249085879430
2011	257883,545.48	286843,393.25	14.35%	164124451.97	286679268799
2012	260497,832.13	307927,933.96	13.60%	160198796.47	307767735161
2013	257860,107.02	314163,009.63	18.77%	145016847.89	314017992781
2014	258255,774.32	328197,628.04	14.57%	157684506.51	328039943529

* *M&O*: Los costos de mantenimiento y operación están conformados por los costos fijos y los variables. Los costos fijos son aquellos gastos relacionados a la operación de la central, pero no varían significativamente con la generación de energía eléctrica (salarios, prestaciones, mantenimientos, contratos de servicios generales, materiales, insumos, gastos generales. Los costos variables son aquellos que guardan una relación directa con la generación de energía eléctrica (consumo de agua, lubricantes y sustancias químicas, catalizadores, gases, y sustancias para operar la central y los equipos anticontaminantes, equipos, materiales y refacciones relacionadas a la generación de energía y mantenimiento mayor refacciones, equipo y servicios– COPAR, 2013–).

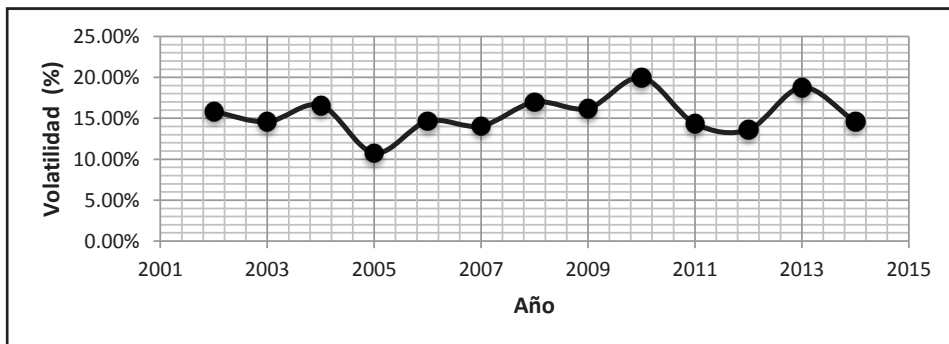
3.2 Valuación de la opción real de expansión

Los flujos de efectivo requeridos para la evaluación de la opción real fueron obtenidos a partir de los productos por la venta de energía eléctrica totales mensuales a nivel nacional (SENER, 2015), los cuales pueden observarse en el Cuadro 5 (ventas totales por año). De igual manera la volatilidad periódica anualizada de los flujos de efectivo (ver Cuadro 5), fue en promedio de 15.35% (ver Figura 6). Cabe señalar que se incorporaron los gastos de mantenimiento y operación a través de un costo promedio, cuyo valor resultó ser de \$9.03 USD/MW-año (se realizó un promedio de costos en donde se involucraron los costos de mantenimiento y operación de todas las tecnologías).

A partir de lo antes enunciado, el costo de *M&O* promedio (USD/MW-año) se multiplicó por la generación bruta de energía anual producida por todas las tecnologías que conforman el sistema, y se descontó de los productos totales anuales por la venta de energía eléctrica. Adicionalmente al descuento de los costos de operación y mantenimiento, se supuso que la entidad gubernamental no poseía otro tipo de obligaciones de inversión o pago, es decir, se consideró que los flujos de efectivo antes de impuestos es el capital con el que se cuenta para el desarrollo de inversiones en nuevos proyectos y modernización tecnológica.

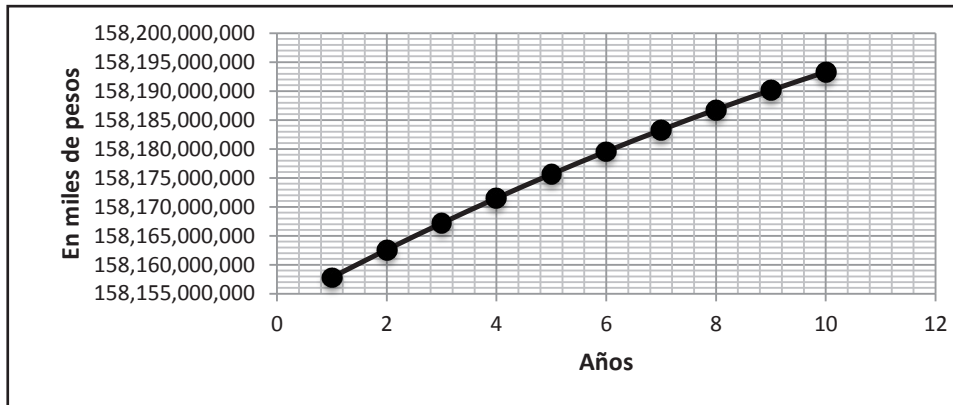
Los resultados del análisis de la opción real de expansión a través de una opción europea se muestran en la Figura 7 donde se observa el valor del *Call* de la opción a través del tiempo; y al igual que la valuación de la opción real de cambio tecnológico, en donde la opción de expansión resulta factible

Figura 6. Volatilidad periódica anualizada de los productos anuales totales por la venta de energía eléctrica



Fuente: Elaboración propia.

Figura 7. Factibilidad de la de la opción real de expansión a través del tiempo.



Fuente: Elaboración propia.

desde el primer año, por lo que es posible concluir que el cambio tecnológico y la implementación de dicho proyecto no sólo resultan rentables a través del tiempo, sino también se presenta como una opción viable para la reducción de la emisión de gases de efecto invernadero a largo plazo.

4. Conclusiones

Las fuentes renovables en la actualidad, se presentan como una opción viable para la generación de energía eléctrica, como sustitutos de los combustibles fósiles, ya que éstas de una forma u otra, evitan la emisión de gases de tipo invernadero, los cuales han contribuido al deterioro y desequilibrio del entorno de forma acelerada. Sin embargo, estas energías renovables, en su mayoría se encuentran condicionadas a diversos factores que determinan su viabilidad, lo que las hace dependientes de elementos climatológicos y/o geológicos, a la disposición de superficies extensas (en ocasiones), y en algunos casos, de la erogación de subsidios importantes para su operación. Es en este punto en donde la generación de energía eléctrica a través de sistemas nucleoelectricos cobra importancia como un activo estratégico dentro de la República Mexicana, ya que de acuerdo al análisis efectuado en el presente trabajo, no sólo se demuestra que dichos sistemas son económicamente viables, sino también conllevan a disminuir, de forma importante, la contaminación debida a la liberación de materia particulada a la atmósfera, y a la reducción de la emisión

de gases tipo invernadero, contribuyendo así a mantener el equilibrio en el ambiente, en lo que al calentamiento global se refiere.

La generación de energía en una nación se encuentra directamente relacionada con el desarrollo de éste, considerándose por ende como un bien estratégico debido a que la energía forma parte fundamental del desarrollo nacional. La escasez de dicho recurso conlleva a depender de terceros para su obtención o generación, supeditando el plan de desarrollo a algún otro país o ente suministrante (ya sean los insumos o del abastecimiento de la energía misma). Entonces la independencia energética podría entenderse como la autonomía necesaria para la generación de energía necesaria, sin depender significativamente de terceros para su producción y/o generación. Desde esta perspectiva entonces resulta no solamente viable, sino también deseable, la inversión en proyectos nucleoelectricos que no sólo propician la independencia energética, sino que también presentan costos competitivos de generación y reducen significativamente las emisiones de CO₂ a la atmósfera, aunado a que dichas no emisiones de CO₂ pueden ser susceptibles de titularizarse, pudiendo generar recursos adicionales a los rendimientos obtenidos por la venta de energía.

De manera particular dentro del análisis previo se advierte que, aunque el desempeño de los sistemas carboeléctricos permiten generar una cantidad importante de ingresos por medio de la venta de energía, los costos asociados a la operación y al mantenimiento resultan ser excesivos, ocasionando que la rentabilidad de éstos disminuya considerablemente. De la misma forma, el sistema nucleoelectrico presenta una volatilidad grande en lo que a los flujos de efectivo se refiere, en donde dicha variabilidad es un indicador de que el sistema opera de forma subóptima, por lo que sería conveniente realizar un estudio posterior, con el objeto de mejorar el proceso y la operación del sistema.

En síntesis, es posible afirmar que de acuerdo al análisis anterior, la generación de energía eléctrica a partir de un sistema nucleoelectrico, resulta ser una inversión económicamente viable, en donde el retorno de ésta y su rentabilidad económica es positiva a mediano plazo. Sin embargo, resulta importante señalar que la viabilidad no solamente va acompañada por aspectos financieros, sino también por beneficios ambientales tangibles inmediatos que hacen aún más atractiva dicha opción, permitiendo a su vez, alcanzar una mayor independencia energética al no depender enteramente de combustibles fósiles para la generación de energía eléctrica a nivel interno.

Referencias bibliográficas

- Alvarez F, López P. y Venegas F. (2012). Valuación económica de proyectos energéticos mediante opciones reales: el caso de energía nuclear en México. *Ensayos Revista de Economía*, Volumen XXXI, núm. 1, mayo 2012, pp. 75-98.
- Amram, M. y Kulatilaka, N. (2000). Strategy and Shareholder Value Creation: The Real, Options Frontier. *Journal of Applied Corporate Finance*, Bank OF America, Volume 13, Number 2, Summer, pp 8-21.
- Baldi, F. (2010). "Switch, Switch, Switch! a Regime-Switching Option-Based Model for Valuing a Tolling Agreement". *The Engineering Economist*, 55, pp 268-304, DOI: 10.1080/0013791X.2010.504807.
- Banco de México (2015). <http://www.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?accion=consultarCuadro&idCuadro=CF114§or=18&locale=es>
- Barria, C. y Rudnick H. (2011). "Investment under uncertainty in power generation: Integrated electricity prices modelling and real options approach". *IEEE Latin American Transactions*, 9(5), pp. 785-792.
- Bazán Perkins, S. (2005). "La energía nuclear, una alternativa de sustentabilidad para resolver la demanda eléctrica de México (Primera parte)". *Revista Ingeniería Investigación y Tecnología*, VI. 3, pp. 187-205.
- BID. (2010). "Oportunidades y retos de la energía nuclear en México". Nota Técnica No. 170, Departamento de Infraestructura y Medio Ambiente. Banco Interamericano de Desarrollo, New York.
- Black, F. y Scholes, M. (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy* 81 (3), pp. 637-654. doi:10.1086/260062.
- Bollen, N. (1998). "Valuing options in regime-switching models". *Journal of Derivatives*, 6, pp. 8-49.
- Boreau, D. (2012). "The Political Economy of the 2009 French Carbon Tax Project". Organisation for Economic Co-operation and Development, OECD Headquarters, Paris.
- CEC (Climate Economic Chair). (2014). "What Economic are There for an International Agreement? Economic instruments in the climate negotiations". Annual Conference October 15, 2014. Paris-Dauphine University-Amphitheatre Raymond ARON.
- Chatterjee, S., Wiseman R. M., Fiegenbaum A. y Devers, C. E. (2003). "Integrating Behavioral and Economic Concepts of Risk in to Strategic Management: The Taiwan Shall Meet". *Long Range Planning*, 36, pp. 61-79.

- COPAR. (2013). "Costos y parámetros de referencia para la formulación de proyectos de inversión del sector eléctrico, generación". Edición 33, México, DF, Comisión Federal de Electricidad (CFE).
- Cox, J., Ross, S. y Rubinstein M. (1979). "Option pricing: A simplified approach". *Journal of Financial Economics* 7(3), pp 229–263, doi:10.1016/0304-405X(79)90015-1.
- Cruz S. and Sánchez A. M. (2017). "The Option to Expand a Project: its Assessment with the Binomial Options Pricing Model". *Operations Research Perspectives*, Available online 11 January 2017, doi.org/10.1016/j.orp.2017.01.001.
- Cuervo, F. y Botero S. (2014). "Aplicación de las opciones reales en la toma de decisiones en los mercados de electricidad". *Estudios Gerenciales*, Volumen 30, No. 133, (oct.–dic.), pp 397–407.
- D'Haultfœuille, X., Givord P. y Boutin X. (2014). "The Environmental Effect of Green Taxation: The Case of French Bonus/Malus". *The Economic Journal*, volume 124, Issue 578, August, pp 444–480.
- Damasceno do Nascimento W. J., Cavalcanti M. A., Guimarães M. A. and Soares M. A. (2016). "A Portfolio Analysis for Termopower Generation Using Fuzzy Real Options and Genetic Algorithm". *Procedia Computer Science*, Volume 91, pp 901–908.
- Deng, S. J., Johnson, B. y Sogomonian A. (2001). "Exotic Electricity Options and the Valuation of Electricity Generation and Transmission Assets". *Decision Support Systems*, 30(3), pp 383–392.
- Dixit A. K., Pindyck R. S. (1994). *Investment under Uncertainty*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Doraszelski, U. (2001). "The Net Present Value method versus the option value of waiting: a note on Farzin, Huisman and Kort (1998)". *Journal of Economic Dynamics & Control*, 25, pp. 1109–1115.
- Duku-Kaakyire, Nanang D. (2004). "Applications of Real Options Theory Investment Analysis". *Forest Policy and Economics*, 6, pp 539–552.
- Epaulard, A. y Gallon, S. (2001). La Valorization du Project Nucléaire EPR par la Méthode des Options Réelles". *Economie et Prevision* 149, (July-September): pp 29–50.
- Gollier, C., Proult, D., Thais F. y Wlagenwitz G. (2005). "Choice of Nuclear Power Investments Underprice Uncertainty: Valuing Modularity". *Energy Economics*, 27(4), pp. 667–685.
- Hua Yu, S. y Hai Tao, S. (2013). "Applying the Real Option Approach on Nuclear Power Project Decision Making". *Energy Procedia* 39, pp 193–198.

- Hull, C. (2002). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Prentice Hall, 5th Edition, New Jersey.
- Kirby, N. y Davison, M. (2010). "Using Spark Spread Valuation to Investigate the Impact of Corn-Gasoline Correlation on Ethanol Plant Valuation". *Energy Economics*, 32(6), pp. 1221–1227.
- Kiriyama, E. y Suzuki, A. (2004). "Use of Real Options in Nuclear Power Plant Valuation in the Presence of Uncertainty with CO₂ Emission Credit". *Journal of Nuclear Science and Technology*, 41(7), pp 756–764.
- Kjaerland, F. (2007). "A Real Option Analysis of Investments in Hydropower —The Case of Norway". *Energy Policy*, 35(11), pp. 5901–5908.
- Kodukula, P. y Papudesu, C. (2006), *Project valuation using real options: A practitioner's guide*. J. Ross Publishing, New York.
- Kokkaew N. and Sampima T. (2014). "Improving Economic Assessments of Clean Development Mechanism Projects Using Real Options". *Energy Procedia*, Volume 52, pp 449-458.
- Kulatilaka, N. and A. J. Marcus. (1992). "Project Valuation under Uncertainty: When Does DCF fail?". *Journal of Applied Corporate Finance*, 5 (Fall), pp 92–100.
- L. Trigeorgis L. (1995). *Real Options in Capital Investment: Models. Strategies and Applications*, (1st ed.), Praeger, London.
- Lander, D. M. y Pinches, G. (1998). Challenges to the practical implementation of modeling and valuing real options. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, Vol. 38, 1998, Special Issue, pp. 537–567.
- Laurikka, H. (2006). "Option Value of Gasification Technology Within an Emissions Trading Scheme". *Energy Policy*, 34(18), pp. 3916–3928.
- Lee, S. (2011). "Using Real Option Analysis for Highly Uncertain Technology Investments: The Case of Wind Energy Technology". *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 15(9), pp. 4443–4450.
- MacDougall, S. L. y Pike, R. H. (2003). "Consider your Options: Changes to Strategic Value During Implementation of Advanced Manufacturing Technology Omega". *The International Journal of Management Science*, 31, 2003, pp. 1–15.
- Madlener, R. y Stoverink, S. (2012). "Power Plant Investments in the Turkish Electricity Sector: A Real Options Approach Taking in to Account Market Liberalization". *Applied Energy*, 97, pp. 124–134.
- Margrabe W. (1978). "The Value of an Option to Exchange One Asset for Another". *Journal of Finance*, Volume 33, Issue 1, pp 177–186.
- Marques J., Cunha M. and Savic D.A. (2014). "Decision Support for Optimal Design of Water Distribution Networks: A Real Options Approach". *Procedia Engineering*, Volume 70, pp 1074-1083.

- Merton R. (1973a). "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model". *Econometrica*, Volume 41, September, pp. 867–887.
- Merton R. (1973b). "The Theory of Rational Option Pricing". *The Bell Journal Of Economic and Management Science*, Volume 4, Spring, pp 141–183.
- Merton R. (1973c). "The Relationship Between Put and Call Option Prices: Comment". *Journal of Finance*, 28, March, pp 183–184.
- Milanesi G., (2014). "Valoración probabilística versus borrosa, opciones reales y el modelo binomial. Aplicación para proyectos de inversión en condiciones de ambigüedad". *Estudios Gerenciales*, Volume 30, Issue 132, July–September, pp 211–219.
- Miller, K. D. y Waller, H. G. (2003). "Scenarios, Real Options, and Integrated Risk Management". *Long Range Planning*, 36, pp. 93–107.
- MIT. (1977). "Documentation: Nuclear Power Issues and Choices". *International Security*. The MIT Press Vol. 2, No. 1 (Summer), pp 110–119.
- Moreira, A., Rocha, K. y David, P. (2004). "Thermopower generation investment in Brazil". Economic conditions. *Energy Policy*, 32(1), pp. 91–100.
- Mun, J. (2006). *Real Options Analysis, Tools and Techniques for valuing Strategic Investments and Decisions*. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.
- Naito, Y., Takashima, R., Kimura, H. y Madarame, H. (2010). "Evaluating Replacement Project of Nuclear Power Plants Under Uncertainty". *Energy Policy*, 38, pp. 1321–1329.
- Pareja J., Cadavid C. (2016). "Valoración de patentes farmacéuticas a través de opciones reales: equivalentes de certeza y función de utilidad". *Contaduría y Administración*, Volume 61, Issue 4, October–December 2016, pp 794–814.
- Pinches, G. y Lander, D. (1997). "The Use of NVP in Newly Industrialized and Developing Countries: a.k.a. "What Have We Ignored?", *Managerial Finance: Capital Budgeting*, 23 (9), pp 24–45.
- Rogers, J. (2002). *Strategy, Value and Risk-Real Options Approach*. Palgrave MacMillan, NY.
- Rothwell, G. (2006). "A Real Options Approach to Evaluating New Nuclear Power Plants". *The Energy Journal*, Vol. 27. No. 1: 37–53.
- Schwartz, E. (2013). "The Real Options Approach to Valuation: Challenges and Opportunities". *Journals of Economics*, Vol. 50, No. 2, (Nov.), pp. 163–177.
- SENER (2009). "Prospectiva del Sector Eléctrico 2009 – 2024". México, Secretaría de Energía.
- SENER (2013). "Prospectiva del sector eléctrico 2013–2017". México, Secretaría de Energía.

- SENER. (2015). <http://sie.energia.gob.mx/bdiController.do?action=temas>.
- Shah M., Maybee B., Whale J y McHugh A. (2015). "Climate Policy Uncertainty and Power Generation Investments: A Real Options-CVaR Portfolio Optimization Approach". *Energy Procedia*, Volume 75, August, pp 2649-2657.
- Takizawa, S., Omori, R., Suzuki, A., y Ono K. (2001). "Analysis of Critical Electricity Price for the Investment for Constructing a Nuclear Power Plant using Real Options Approach". *Journal of Nuclear Science and Technology* 38(10), pp. 907-909.
- Tian L., Shan H., y Zhu N. (2016). "Analysis of the Real Options in Nuclear Investment under the Dynamic Influence of Carbon Market". *Energy Procedia*, Volume 104, December, pp 299-304.
- Trigeorgis, L. (1996). *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*. Cambridge, MA, MIT Press.
- US Nuclear Energy Institute, Report. (1995-2008). http://www.nei.org/resourcesandstats/nuclear_statistics/usnuclearpowerplants/.
- Venegas Martínez, F. (2006). *Riesgos financieros y económicos: Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Internacional Thomson Editores, Tomson Learning.
- Venetsanos, K., Angelopoulou, P. y Tsoutsos, T. (2002). "Renewable Energy Sources Project Appraisal Under Uncertainty: The Case of Wind Energy Within a Changing Energy Market Environment". *Energy Policy*, 30(4), pp. 293-307.
- Xinhua, Z. and Wei, L. (2011). "Power Producer's Carbon Capture Investment Timing under Price and Technology Uncertainties". *Energy Procedia* 5, pp. 1713-1717.
- Zhu L. (2012). "A Simulation Based Real Options Approach for the Investment Evaluation of Nuclear Power". *Computers & Industrial Engineering*, Volume 63, Issue 3, November 2012, pp 585-593.

Anexo 1

Cuadro A1. Histórico de generación mensual bruta de energía por tecnología (MW-h)

	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
CARBOELÉCTRICA													
ENE	1198,639.81	1446,067.40	1505,231.59	1293,983.27	1337,135.97	1646,572.38	1563,063.88	1540,015.43	1583,202.50	1420,880.69	1255,297.87	1370,914.38	1226,110.69
FEB	1249,613.26	1291,064.74	1521,937.16	1248,642.67	1380,747.95	1434,986.11	1307,193.39	1071,807.06	1613,382.71	1383,544.04	1325,546.45	1197,218.01	1325,847.43
MAR	1415,324.03	1415,877.87	1677,191.29	1634,597.77	1399,031.09	1503,451.66	1258,387.62	1560,838.12	1527,626.01	1599,601.19	1387,608.34	1391,532.47	1663,051.01
ABR	1395,186.41	1434,799.67	1511,446.41	1661,237.33	1519,963.66	1497,188.25	1349,202.76	1275,609.13	1239,244.62	1482,954.51	1524,780.77	1294,098.20	1556,761.12
MAY	1325,433.96	1613,254.82	1574,883.54	1749,564.78	1560,251.57	1559,011.01	1568,213.53	1343,168.78	1235,416.91	1569,946.11	1532,975.41	1316,525.04	1682,528.34
JUN	1412,256.47	1568,006.48	1607,750.40	1632,826.84	1529,164.91	1616,492.10	1430,120.48	1487,631.39	1463,658.79	1715,257.00	1709,320.31	1478,693.19	1648,861.22
JUL	1486,235.12	1542,591.67	1643,289.22	1636,161.51	1565,114.47	1578,635.13	1498,598.80	1632,611.72	1188,289.15	1734,237.27	1701,712.54	1634,064.98	1716,390.83
AGO	1356,432.24	1527,015.01	1639,725.79	1481,635.89	1499,914.17	1600,364.93	1438,701.66	1594,712.27	1632,877.69	1787,668.96	1786,348.46	1710,327.50	1733,310.37
SEP	1354,403.20	1173,229.35	1330,803.49	1571,802.64	1379,058.70	1425,879.70	1434,134.50	1289,271.21	1399,676.06	1517,588.51	1615,612.04	1307,896.44	1377,527.55
OCT	1424,942.70	1233,691.15	1175,878.47	1437,176.38	1512,565.62	1498,746.64	1630,414.30	1366,350.11	1262,237.98	1444,757.37	1491,090.51	1210,806.87	1179,134.40
NOV	1324,026.80	1107,893.19	1314,732.00	1534,446.52	1518,397.35	1312,046.56	1608,691.27	1250,485.56	1130,537.74	1270,991.43	1234,332.23	1043,341.85	1187,528.02
DIC	1209,416.86	1327,707.52	1380,388.86	1498,206.03	1729,857.93	1427,346.00	1702,618.28	1473,508.89	1208,925.80	1231,003.46	1159,478.22	1088,981.07	1148,875.72
NUCLEOELÉCTRICA													
ENE	876,289.94	992,893.61	1002,767.38	982,254.03	1003,830.77	953,012.61	1005,625.01	957,932.36	1026,665.31	508,564.01	726,190.85	1005,574.83	1058,735.57
FEB	754,325.92	900,318.96	888,623.39	836,743.27	872,213.44	884,814.39	941,393.38	912,359.00	884,994.48	732,546.89	786,130.22	896,006.03	904,446.87
MAR	856,624.50	996,844.37	890,530.66	984,458.78	912,876.14	527,367.16	995,313.80	969,952.51	719,976.49	855,660.03	1176,055.88	1015,175.96	760,547.73
ABR	959,951.13	869,261.48	614,109.64	958,967.10	768,902.78	890,071.38	934,997.67	526,341.94	486,696.19	715,032.38	1142,522.98	1013,613.17	476,513.27
MAY	985,242.91	455,165.76	495,340.99	974,412.59	746,425.04	978,976.04	987,806.49	473,705.75	504,147.57	886,492.07	1137,919.65	1043,170.52	791,289.08
JUN	905,167.81	643,793.80	579,457.24	949,720.34	940,989.23	915,344.73	875,803.08	956,983.63	487,365.06	718,316.33	1056,438.61	1000,962.78	601,924.12
JUL	906,859.25	969,803.80	929,977.72	970,397.46	952,926.62	980,552.50	976,359.60	962,929.80	390,647.25	1015,333.09	960,483.37	939,105.43	519,269.48
AGO	887,566.27	974,585.60	968,657.53	800,370.65	972,123.04	961,821.02	862,456.35	997,911.14	366,775.77	1042,552.94	325,234.87	1032,722.55	888,151.30
SEP	640,656.75	938,513.08	839,409.39	581,702.33	933,948.44	889,194.36	479,263.06	970,213.79	374,989.26	997,193.14	67,531.25	923,267.91	987,924.10
OCT	490,987.73	989,355.07	707,140.58	852,487.05	905,855.33	640,703.17	460,124.29	968,364.62	173,715.08	883,169.73	212,845.37	883,020.43	748,538.58
NOV	593,556.55	776,695.00	477,366.72	946,766.56	935,050.77	828,558.36	454,269.98	853,141.73	232,985.39	683,181.20	503,575.88	990,726.12	945,138.53
DIC	889,392.36	994,277.25	800,554.13	966,625.88	991,099.49	970,309.30	830,263.57	951,242.63	230,282.80	1051,153.22	674,669.88	1056,523.88	994,729.44

Fuente: Elaboración propia a partir de la de datos de SENER, 2015.

Cuadro A2. Histórico de flujos mensuales de efectivo energía por tecnología (En miles de pesos)

	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
CARBOELÉCTRICA													
ENE	691,523.14	720,930.91	816,533.30	804,915.44	764,673.64	814,763.56	857,443.56	782,537.26	781,386.67	822,082.54	763,861.81	697,740.67	9318,412.51
FEB	834,269.87	744,845.23	816,852.83	827,769.25	930,724.18	904,619.36	889,956.96	880,970.43	676,863.26	711,745.08	639,169.32	765,985.31	9623,771.07
MAR	868,403.06	878,040.90	877,610.61	871,988.54	908,588.05	927,548.55	948,051.72	945,995.89	767,771.44	678,391.60	758,499.42	796,378.39	10317,268.17
ABR	746,529.00	720,370.96	943,037.42	958,406.40	1009,364.56	942,015.73	943,939.58	854,790.16	906,809.45	829,140.43	885,257.84	864,349.86	10604,011.37
MAY	771,424.80	796,585.56	807,133.53	876,902.34	900,145.37	882,210.75	902,950.89	865,335.32	755,610.99	872,634.24	875,998.70	997,995.22	10344,927.71
JUN	949,945.85	827,876.82	867,376.18	863,762.68	899,429.66	927,591.84	910,751.27	923,287.70	822,623.12	840,661.75	756,950.13	823,469.06	10442,726.05
JUL	901,767.86	754,150.23	725,993.05	778,386.41	904,738.81	825,069.72	864,461.07	830,020.40	827,385.50	940,623.88	928,091.36	982,280.03	10262,968.31
AGO	888,470.67	618,350.39	900,483.76	735,928.53	774,905.27	858,249.10	941,891.62	920,026.55	743,810.51	788,394.50	721,434.16	850,101.50	9742,046.56
SEP	913,386.29	930,797.96	881,322.92	714,949.00	712,740.71	844,418.75	685,551.61	942,045.07	807,505.63	728,214.40	652,233.48	697,457.37	9510,623.20
OCT	819,739.07	798,198.69	922,847.08	855,550.90	905,738.37	989,571.60	1000,521.76	1031,347.74	875,532.06	833,514.08	733,264.47	710,194.49	10476,020.32
NOV	724,210.50	764,738.53	800,543.48	879,681.44	884,409.12	986,146.59	981,757.49	1030,585.92	932,084.11	860,244.75	712,114.93	668,929.91	10225,446.77
DIC	790,912.35	690,702.88	802,807.40	746,595.31	759,533.87	853,092.45	942,730.04	986,727.66	754,555.83	698,542.61	601,928.15	628,258.47	9256,387.01
NUCLEOELÉCTRICA													
ENE	505,552.02	435,188.14	494,206.57	553,818.10	568,409.52	522,212.33	523,188.17	512,057.60	369,609.76	283,262.23	342,436.56	513,111.11	505,552.02
FEB	572,823.38	519,414.92	575,102.67	501,497.14	262,995.70	371,419.60	559,502.34	562,261.07	541,449.99	570,781.92	448,093.39	573,621.64	572,823.38
MAR	578,519.79	512,667.47	513,767.82	354,294.11	285,773.72	334,302.34	536,525.75	558,841.03	484,274.77	407,965.82	275,403.95	461,858.27	578,519.79
ABR	566,685.16	482,736.63	517,957.14	553,250.39	562,161.25	542,878.54	549,765.50	461,752.42	335,597.58	491,819.58	546,211.62	557,668.92	566,685.16
MAY	579,133.29	503,200.19	526,659.45	443,597.87	390,245.32	547,915.72	559,844.83	560,840.36	538,816.55	522,608.98	539,452.51	571,788.32	579,133.29
JUN	549,815.11	510,469.97	304,250.36	513,502.85	564,794.02	528,083.63	565,703.51	554,896.89	512,996.88	369,636.54	478,014.56	559,793.97	549,815.11
JUL	580,168.43	543,111.71	574,392.73	539,421.87	569,888.51	505,271.14	563,284.53	497,571.10	276,497.99	265,456.39	262,078.90	478,998.34	580,168.43
AGO	552,653.43	526,361.10	559,588.13	303,658.89	273,291.85	552,106.08	555,536.57	575,718.11	559,738.87	558,672.04	492,197.28	548,793.97	552,653.43
SEP	592,307.06	510,373.87	415,371.16	280,786.34	290,854.44	281,172.22	225,373.47	211,601.46	216,340.01	100,220.26	134,414.68	132,855.50	592,307.06
OCT	293,402.39	422,023.32	493,650.14	412,518.78	511,437.87	414,413.38	585,769.24	601,473.00	573,303.88	509,521.13	394,143.10	606,434.71	293,402.39
NOV	418,956.37	453,536.78	678,493.95	659,148.04	656,492.27	609,483.97	554,127.17	187,635.55	38,960.55	122,795.44	290,524.62	389,232.72	418,956.37
DIC	580,139.47	516,926.69	585,678.59	584,776.98	601,829.30	577,478.68	541,791.74	595,801.63	532,654.70	509,434.99	571,572.91	609,533.17	580,139.47

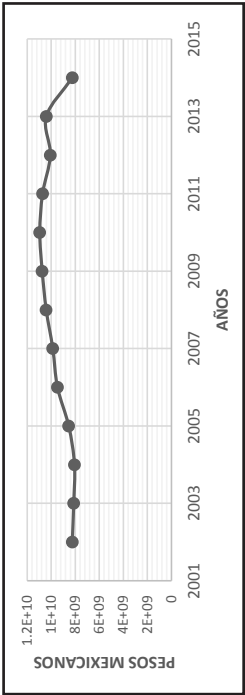
Fuente: Elaboración propia.

Cuadro A3. Productos totales por la venta de energía eléctrica a nivel nacional (en pesos)

	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
ENE	8243714737	8124769623	8057641469	8539062584	9476286000	9863540470	10411583740	10742546210	10945804150	10716881430	10066052480	104085832550	8243714737
FEB	10363193099	10168217813	10465153020	10583746149	11924477146	12198784388	12214922900	12041002034	11903291783	11675843647	11438738982	11092534868	10363193099
MAR	11449212233	11166981788	11701056342	11462990227	12654071498	13067628481	14001661017	14540566527	14772268637	14399474068	13531105425	13381109047	11449212233
ABR	13775359450	13265130990	13133790680	13231927850	13929564020	14596303520	15482649570	15607008040	15549588680	15427936830	15162611890	15069745170	13775359450
MAY	15619045100	15073171450	15441571380	14874563490	16158957110	16673833200	17736836950	18280518620	18142125780	17594929770	17257511920	16698243360	15619045100
JUN	16951073730	16247938000	16527149810	15745664800	16979070980	17330320670	18240328790	19137263990	19360020700	18999478990	18856931220	18275884690	16951073730
JUL	18299773000	18260855030	18574428320	19111438210	2085099350	21640113780	22728363220	23818143600	23899102580	23109619750	22008625240	20268041000	18299773000
AGO	18702211772	16838302454	17163711714	17062389986	18151253821	18073094358	18713013940	19043676775	19919668871	18871215793	18816625805	18559345981	18702211772
SEP	18711532017	18604713916	20369413240	19897879933	20442106756	21173635002	23092936889	22574746922	23053702021	21246668629	20878080472	19189463518	18711532017
OCT	20187475411	20484075727	22116195196	21987137571	23953236144	25198005212	26067023603	26133774017	26397751783	25546690188	24621688451	24130339948	20187475411
NOV	24551716057	24278097159	24880644747	24422582427	26251106307	26482581641	27422033367	27799543813	26994053931	25719275193	25374612884	23751686431	24551716057
DIC	24675615264	23559179923	23525971365	24444246660	26859063684	29246349940	2776782445	28397901206	27167661455	27045152330	26562661472	24915423885	24675615264
TOTAL	115593715443	136069905829	156128125290	174231816690	199551308130	212651126370	252569493080	219914531270	249234879315	286843393251	307927933957	314163009629	328197628036

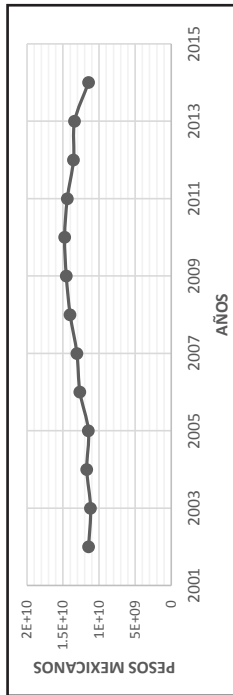
Fuente: Elaboración propia a partir de datos de SENER, 2015.

Figura A1. Productos históricos totales del mes de enero por la venta de energía eléctrica a nivel nacional México (2002-2014).



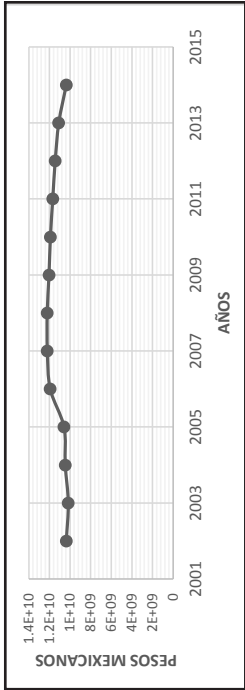
Fuente: Elaboración propia con datos de Sener, 2015.

Figura A3. Productos históricos totales del mes de marzo por la venta de energía eléctrica a nivel nacional México (2002-2014).



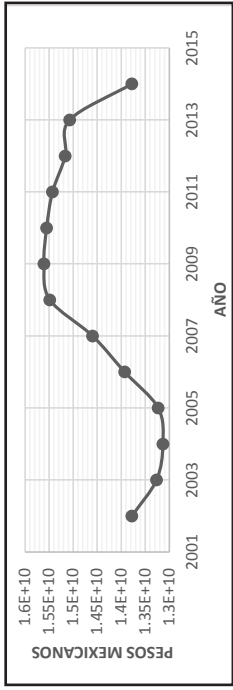
Fuente: Elaboración propia con datos de Sener, 2015.

Figura A2. Productos históricos totales del mes de febrero por la venta de energía eléctrica a nivel nacional México (2002-2014).



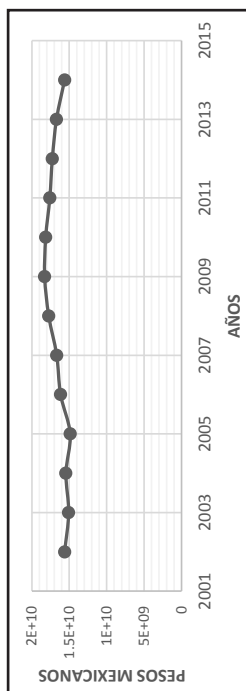
Fuente: Elaboración propia con datos de Sener, 2015.

Figura Aa. Productos históricos totales del mes de abril por la venta de energía eléctrica a nivel nacional México (2002-2014).



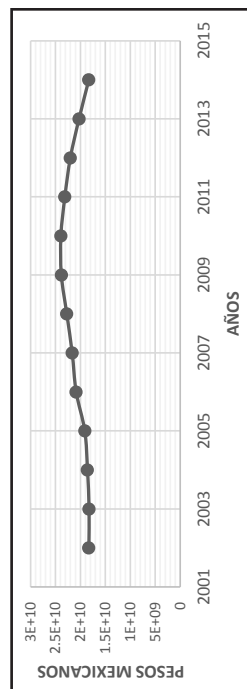
Fuente: Elaboración propia con datos de Sener, 2015.

Figura A2. Productos históricos totales del mes de mayo por la venta de energía eléctrica a nivel nacional México (2002-2014).



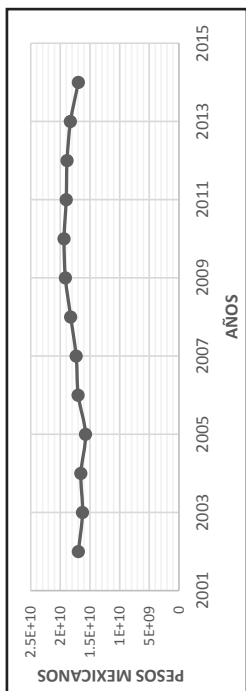
Fuente: Elaboración propia con datos de Sener, 2015.

Figura A2. Productos históricos totales del mes de julio por la venta de energía eléctrica a nivel nacional México (2002-2014).



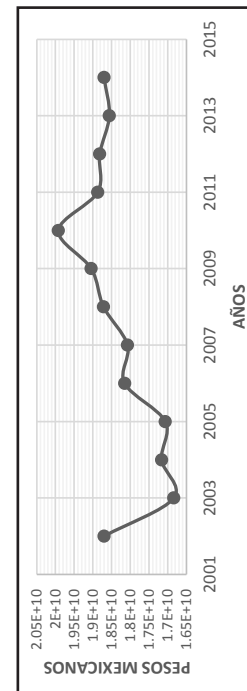
Fuente: Elaboración propia con datos de Sener, 2015.

Figura A2. Productos históricos totales del mes de junio por la venta de energía eléctrica a nivel nacional México (2002-2014).



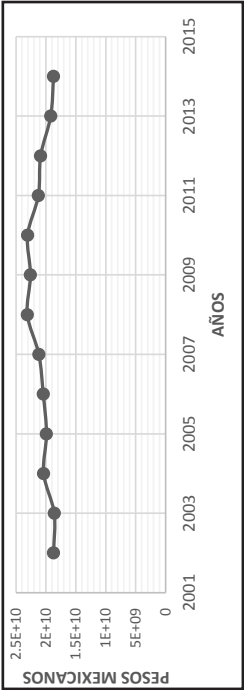
Fuente: Elaboración propia con datos de Sener, 2015.

Figura A2. Productos históricos totales del mes de agosto por la venta de energía eléctrica a nivel nacional México (2002-2014).



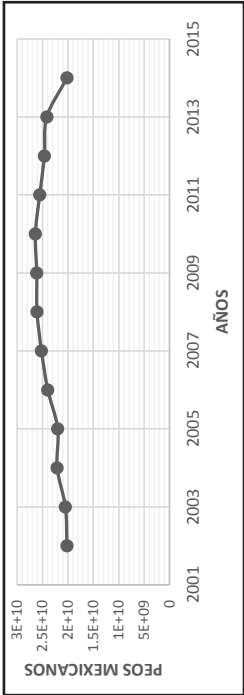
Fuente: Elaboración propia con datos de Sener, 2015.

Figura A2. Productos históricos totales del mes de septiembre por la venta de energía eléctrica a nivel nacional México (2002-2014).



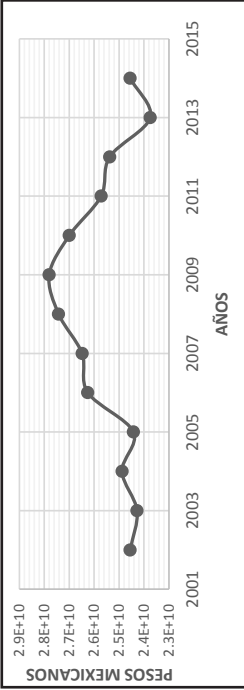
Fuente: Elaboración propia con datos de Sener, 2015.

Figura A2. Productos históricos totales del mes de octubre por la venta de energía eléctrica a nivel nacional México (2002-2014).



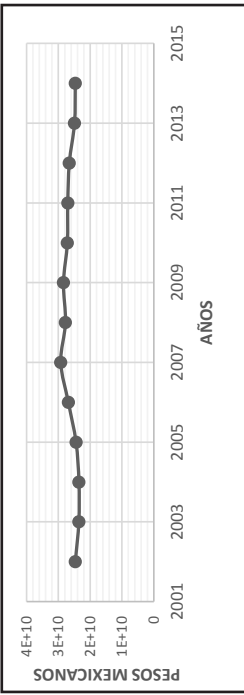
Fuente: Elaboración propia con datos de Sener, 2015.

Figura A2. Productos históricos totales del mes de noviembre por la venta de energía eléctrica a nivel nacional México (2002-2014).



Fuente: Elaboración propia con datos de Sener, 2015.

Figura A2. Productos históricos totales del mes de diciembre por la venta de energía eléctrica a nivel nacional México (2002-2014).



Fuente: Elaboración propia con datos de Sener, 2015.

La revista
Estocástica: finanzas y riesgo
está incluida en:



CSH *División
de Ciencias
Sociales y
Humanidades*

Departamento de
Administración 

CBI *DIVISIÓN DE
CIENCIAS BÁSICAS
E INGENIERÍA*
UAM - Azcapotzalco



Departamento de
Sistemas

 **Red para el
Análisis de
Riesgos
Financieros**

