DIVISION DE CIENCIAS Y ARTES PARA EL DISEÑO

DEPARTAMENTO DE PROCESOS Y TECNICAS DE REALIZACION

ESLABON INTERDISCIPLINARIO I

Mayo 1979

ISBN 968-597-011-4

Introducción a la lógica simbólica
Teoría de los conjuntos y relaciones

Arq. Dolores González
Arq. Esteban Villasante

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA–AZCAPOTZALCO

DIVISION DE CIENCIAS Y ARTES PARA EL DISEÑO

DEPARTAMENTO DE PROCESOS Y TECNICAS DE REALIZACION

ESLABON INTERDISCIPLINARIO I

Mayo 1979

Introducción a la lógica simbólica
Teoría de los conjuntos y relaciones

ISBN 968-597-011-4

Arq. Dolores González
Arq. Esteban Villasante

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-AZCAPOTZALCO
Casa abierta al tiempo

INDICE GENERAL

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
UNIDAD AZCAPOTZALCO
DIVISION DE CIENCIAS Y ARTES PARA EL DISEÑO

C. Y A. D.

P R E S E N T A C I O N

La División de Ciencias y Artes para el Diseño desde su fundación ha destacado su enorme preocupación por la matemática dentro de esta Area de conocimiento y ante la necesidad de formular programas idóneos para las Licenciaturas de Diseño, que satisfagan las necesidades del país, ha incluido en el Eslabón Instrumental de Métodos Matemáticos I del Tronco General de Asignaturas los temas: "Introducción a la Lógica Simbólica", "Teoría de los Conjuntos" y "Relaciones" como base de los nuevos conocimientos que adquirirán los alumnos para su formación como futuros diseñadores.

El entusiasmo que nuestro Director ha transmitido al grupo de profesores ha hecho posible la elaboración y publicación de antologías y guías temáticas de cada una de las asignaturas propuestas en los trimestres respectivos. La experiencia docente que se tiene en el campo de la enseñanza de las asignaturas relacionadas con la matemática nos motiva a conjuntar los conocimientos particulares con los métodos didácticos adecuados, tomando como parámetro los programas específicos de cada Licenciatura.

La formalización del diseño demanda una serie de necesidades de conocimientos relacionados con la matemática. El cuestionamiento permanente que sobre dichos conocimientos hemos tenido los profesores del Departamento de Procesos y Técnicas de Realización ha permitido seleccionar los contenidos de los eslabones instrumentales que encaucen al alumno hacia el análisis matemático de la forma.

El intercambio de conocimientos sobre la materia entre los profesores de Métodos Matemáticos y la asesoría de la Comisión de Apoyo y Desarrollo Académico de nuestra Unidad Azcapotzalco permitieron desarrollar los presentes apuntes.

Atentamente

Esteban Villasante Sánchez

Ma. Dolores González de Gay

INTRODUCCION

Una de las más primitivas y fundamentales necesidades humanas ha sido la comunicación. El hombre a través de la historia de su existencia en el Universo, ha empleado diferentes recursos naturales y artificiales para comunicarse en su entorno, bien consigo mismo, con la naturaleza o con otros seres racionales o irracionales.

El lenguaje oral o escrito, la percepción visual o auditiva, la mímica y el tacto han sido los principales medios que emplea el hombre para comunicarse y con ello, su mayor preocupación es hacerlo de la manera más breve y sencilla.

Es el símbolo, en cualquiera de sus expresiones, uno de los recursos que el hombre, en la búsqueda de nuevos instrumentos materiales o inmateriales para satisfacer sus necesidades de subsistencia y confort, emplea para comunicarse.

El lenguaje es el símbolo por excelencia y el análisis de su estructura es también una necesidad para expresarlo con claridad.

La lógica Simbólica, tema de este curso tiene como objetivo ofrecer los conceptos más importantes de la lógica formal, que nos permitan dirigir las operaciones sistemáticas de la mente con mayor facilidad y seguridad mediante un lenguaje a base de símbolos que si bien puede ser estrecho, en su expresión es breve y preciso.

El conocimiento de la lógica simbólica nos permitirá además construir y expresar con claridad formas lógicas de nuestro pensamiento, que nos conduzcan por un camino de razonamiento en la comunicación con nuestros semejantes.

LOGICA (del gr. logiké, relativo a la razón) Es la disciplina que estudia los principios formales del conocimiento humano, sin referencia a su contenido o a su origen.

En nuestra cultura el primer tratadista fue Aristóteles y por largo tiempo no se desarrolla ningún progreso hasta la aparición de Bacon y Descartes.

La Escuela Alemana contribuye notablemente al desarrollo de la lógica psicologista y a la epistemológica que se identifica con la teoría del conocimiento.

Estas son dos corrientes nuevas que se desprenden de la rigurosa concepción clásica filosófica de la lógica.

La lógica moderna que tiene su exponente más exacto en la matemática , va adoptando un simbolismo y un mecanismo operatorio semejante.

LOGICA SIMBOLICA. Disciplina de la lógica iniciada por Descartes y por Leibnitz a quien se le debe el nombre de Lógica Simbólica o Matemática. Actualmente ha sido desarrollada por Boole, Russell y Whitehead.

En la actualidad son dos las ciencias que se consideran formales: La Lógica y la Matemática, aunque algunos consideran a la Matemática como un capítulo de la Lógica y otros como materias equivalentes.

LOGICA (del gr. logiké, relativo a la razón). Es la disciplina que estudia los principios formales del conocimiento humano, sin referencia a su contenido o a su origen.

En nuestra cultura el primer tratadista fue Aristóteles y por largo tiempo no se desarrolló ningún progreso hasta la aparición de Bacon y Descartes.

La Escuela Alemana contribuye notablemente al desarrollo de la lógica psicologista, y a la epistemológica que se identifica con la teoría del conocimiento.

Estas son dos corrientes nuevas que se desprenden de la más concepción clásica filosófica de la lógica.

La lógica moderna que tiene su exponente más destacado en la matemática, va adoptando un simbolismo y un mecanismo operatorio semejante.

LOGICA SIMBOLICA: Disciplina de la lógica iniciada por Descartes y Leibnitz a quien se le debe el nombre de Lógica Simbólica o Matemática. Actualmente ha sido desarrollada por Boole, Russell y Whitehead.

En la actualidad son dos las ciencias que se consideran formales: la Lógica y la Matemática, aunque algunos consideran a la Matemática como un capítulo de la Lógica y otros como materias equivalentes.

CONTENIDO DEL CAPITULO I PROPOSICIONES

CAPITULO I PROPOSICIONES

1. PROPOSICIONES

1.1. Oración o proposición es el conjunto de palabras que expresan en forma oral o escrita un pensamiento.

Una proposición consta de dos elementos esenciales: sujeto y predicado.

Sujeto. Se llama sujeto a la persona o cosa de la cual se afirma o niega algo.

Predicado. Llámase predicado al sustantivo, adjetivo, pronombre, etc., que sirve para afirmar, negar o atribuir algo relacionado al sujeto.

1.2. Las proposiciones se dividen en simples y compuestas.

1.2.1. Las proposiciones simples, llamadas también elementales o atómicas son aquellas que encierran uno o varios sujetos, un predicado y una afirmación.

1.2.2. Las proposiciones compuestas o moleculares son aquellas que encierran dos o más proposiciones simples enlazadas entre sí.

1.3. Por razón de la cualidad, las proposiciones se dividen en afirmativas y negativas. Las primeras afirman algo relacionado con el sujeto y - las segundas lo niegan.

1.4. Por razón de la cantidad, las proposiciones se dividen en universales y particulares.

1.4.1. Universales son aquellas proposiciones que hacen referencia a "todos" los individuos de un grupo determinado ya sea en forma explícita o implícita.

1.4.2. Particulares son aquellas proposiciones que se refieren en forma expresa o sobreentendida, a uno o algunos individuos del conjunto. En el caso de un solo individuo, se tiene una proposición particular de tipo singular.

1.5. En cuanto a la verdad una proposición puede ser verdadera o falsa.

1.5.1. La verdad o falsedad de una proposición compuesta dependerá de la verdad o falsedad de su contenido.

1.5.2. El valor de verdad de una proposición compuesta dependerá de la verdad o falsedad de las proposiciones elementales y de las palabras de enlace empleadas.

2. SIMBOLIZACION

Se ha mencionado como una necesidad del hombre para comunicarse el empleo de símbolos. El lenguaje es una simbolización de expresión que puede ser fonética o escrita, cuyo contenido esencial lo forman las proposiciones.

Se va a establecer un lenguaje simbólico que represente las proposiciones elementales o compuestas; así convencionalmente se ha elegido representar una proposición elemental con una letra del alfabeto; sea A, B, C, D, E, etc., letras mayúsculas que representan una proposición con contenido particular y p, q, r, s, t, etc., letras minúsculas, si se hace referencia a una proposición elemental cualquiera sin contenido particular; estas letras minúsculas se conocen también con el nombre de variables, por poder sustituir en ellas una proposición determinada.

Ejemplos: Luis es estudiante, la letra mayúscula A podrá ser la representación de esta proposición.

Puede darse por sobreentendido el contenido de una proposición y en tal caso las letras P, Q, R, S, podrán ser útiles para su representación.

Su expresión oral será: sea una proposición P....*

* Algunos autores prefieren denominar a las proposiciones "sentencias" e incluso "oraciones".

2.1 CONECTIVOS LOGICOS

Una proposición compuesta contiene dos o más proposiciones elementales enlazadas por determinadas palabras, que en el lenguaje cotidiano suelen darle un sentido completo a la oración.

Llámase conectivo lógico al símbolo que representa a las palabras de enlace del lenguaje ordinario.

TABLA DE CONECTIVOS LOGICOS

SIMBOLO	PALABRAS DE ENLACE	U S O
$\sim$	No; es falso; no es cierto que; etc.	Negación de una proposición.
$\wedge$	y	Conjunción de dos proposiciones.
$\vee$	ó	Disyunción inclusiva de dos proposiciones (o no exclusiva)
$\underline{\vee}$	ó	Disyunción exclusiva de dos proposiciones
$\longrightarrow$	Si, . . . entonces . . .	Proposición condicional. (Implicación material)
$\longleftrightarrow$	... Si y sólo si	Proposición bicondicional.
$\equiv$	Lógicamente equivalente. . .	Proposiciones equivalentes.
$\vdash$	Por lo tanto, por consiguiente, de donde, etc.	Conclusión de argumentos.

Otros símbolos que se emplearán son los siguientes:

SIMBOLO	SIGNIFICADO EN EL LENGUAJE ORDINARIO	USO
( ), [ ], { }	Estar entre paréntesis	Agrupación de proposiciones.
1	Proposición verdadera	Valor de verdad de
0	Proposición falsa	una proposición.

3. SINTAXIS LOGICA

Sintaxis lógica (Del griego:syn,con; taxis, orden) es una serie de reglas que tratan de la concordancia y construcción adecuada de las proposiciones por medio de símbolos.

3.1. Fórmula

Una fórmula es una expresión literal o numérica sin contenido particular. Si p, q, r, s, t, etc. representan proposiciones elementales cualesquiera sin contenido particular, entonces p, q, r, s, t, son fórmulas que representan a una proposición elemental sin un contenido particular.

3.2. Fórmula bien formada

Una fórmula bien formada será una expresión literal que incluya variables y conectivos de acuerdo con las siguientes reglas:

3.3. Reglas de la sintaxis lógica

3.3.1. Una variable aislada es una fórmula bien formada, por ejemplo: p, q, r, s, t, etc.

3.3.2. Si (F) representa una fórmula bien formada, su negación $\sim$(F) también es una fórmula bien formada.

3.3.3. Si (F) y (G) representan fórmulas bien formadas entonces . . . . .

$$(F) \wedge (G)$$
$$(F) \vee (G)$$
$$(F) \underline{\vee} (G)$$
$$(F) \longrightarrow (G)$$
$$(F) \longleftrightarrow (G)$$
$$(F) \equiv (G)$$

. . . . son fórmulas bien formadas.

3.3.4. Se emplearán símbolos de agrupación de proposiciones para evitar ambigüedades en las proposiciones compuestas.

Por ejemplo: sea la fórmula: $p \longrightarrow q \longrightarrow r$ que representa a tres proposiciones elementales enlazadas entre sí por medio del conectivo lógico ($\longrightarrow$); ésta representa dos alternativas de interpretación, a saber

$(p \longrightarrow q) \longrightarrow r$ ó $p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$

lo que obliga al uso de paréntesis para indicar correctamente la estructura supuesta en una proposición dada.

3.3.5. Cuando en una fórmula se emplee un solo tipo de conectivo lógico ($\wedge$ ó $\vee$) no habrá necesidad del uso del paréntesis ya que dentro del lenguaje ordinario las palabras de enlace que representan, no son motivo de ambiguedad en su interpretación.

Por ejemplo $p \wedge q \wedge r$, $p \vee q \vee r$

4. REPRESENTACION DE PROPOSICIONES

4.1. Representación simbólica de proposiciones elementales

a)	Chopin fue músico	M
b)	El tabaco produce cáncer	C
c)	El éter es un gas	G
d)	Chopin no fue músico	M
e)	Stalin fue un estadista	E
f)	Aristóteles fue un filósofo	F
g)	No es cierto que el tabaco produce cáncer	$\sim$ C
h)	Hitler nació en Australia	A

i) No es cierto que Amado Nervo fue poeta $\sim P$

j) El alcohol es nocivo para la salud S

k) En Londres está nevando N

NOTA: Dependiendo del empleo de las proposiciones en un contexto dado, las expresiones d), g), i), pueden representarse sin el símbolo de negación.

4.2 Representación simbólica de proposiciones compuestas

a) Newton fue matemático y físico

$$M \wedge F$$

b) O el aire es un gas o Marte es un planeta.

$$G \vee P$$

c) El agua se congela o aumenta de volumen

$$C \vee V$$

d) Si esta planta no crece, entonces o necesita más agua o necesita mejor fertilizante.

$$\sim C \longrightarrow (A \vee F)$$

e) Si Enrique rinde declaración y dice la verdad, será encontrado culpable.

$$(D \wedge V) \longrightarrow C$$

f) Si el trabajo está escaso o la gente no quiere trabajar y si la gente si quiere trabajar, entonces el trabajo está escaso.

$$[(E \vee \sim T) \wedge T] \longrightarrow E$$

g) Si hay inflación, entonces el gobierno debe controlarla o el pueblo sufrirá.

$$I \longrightarrow (C \vee S)$$

h) Si la junta se reune el lunes, entonces designarán al comisionado y si Juan está fuera de México y no asiste a la junta el lunes, entonces o lo eligen en ausencia o no saldrá designado comisionado.

$$\left[(R \rightarrow C) \wedge (F \wedge \sim R) \right] \longrightarrow (A \vee \sim C)$$

i) Si Jorge se levanta temprano y pide prestado un carro, entonces, si toma la autopista y no hay embotellamiento, llegará antes del plazo dado.

$$(T \wedge C) \longrightarrow \left[(A \wedge \sim E) \rightarrow P \right]$$

j) Si el Sr. Torres descubre el complot y no avisa a la policía, entonces si estima su vida, o tendrá que esconderse o dejará la ciudad.

$$(C \wedge P) \longrightarrow \left[V \longrightarrow (E \vee D) \right]$$

k) Si la lluvia persiste, el río sube y si el río sube, el puente se caerá, entonces si la lluvia persiste, el puente se caerá.

$$\left[(P \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow C) \right] \longrightarrow (P \rightarrow C)$$

5. ARBOL LOGICO

Para conocer el valor de verdad de una proposición compuesta por dos o más proposiciones elementales será necesario conocer los valores de verdad de cada una de ellas y analizar en cada una de sus ocurrencias si alteran o no la verdad del significado.

Las posibilidades de alternativas, dependerán del número de proposiciones y del valor de verdad de las mismas. Una proposición elemental puede ser verdadera o falsa; sea (1) símbolo para verdadera y (0) para falsa, la representación de esta alternativa puede ser:

$p \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ en donde p, representa una proposición cualquiera.

En una proposición compuesta de dos proposiciones elementales sin contenido particular, las alternativas se duplicarán, a saber:

p	q									
1	1	si	p	=	1	;	q	=	1	1a. alternativa
	0	si	p	=	1	;	q	=	0	2a. alternativa
0	1	si	p	=	0	;	q	=	1	3a. alternativa
	0	si	p	=	0	;	q	=	0	4a. alternativa

En caso de tener tres variables, el número de alternativas se duplica nuevamente y al obtenerlas en forma ordenada se desarrolla una red llamada "árbol lógico".

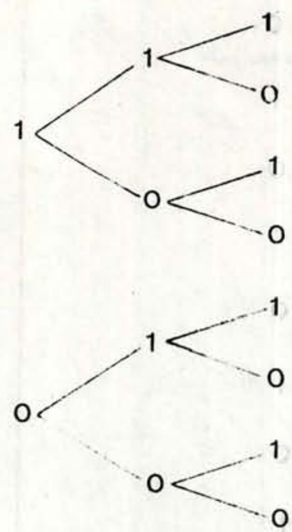
NOTA

Decir que $p = 1$

puede significar que "p" se está sustituyendo o puede sustituirse, por una proposición verdadera. Como sólo nos interesa el valor de verdad de la proposición en sí y no la proposición, se hace directamente esta sustitución del valor de verdad.

VARIABLES | ALTERNATIVAS | VALORES DE VERDAD

p q r



ALTERNATIVAS	p	q	r
1a.	1	1	1
2a.	1	1	0
3a.	1	0	1
4a.	1	0	0
5a.	0	1	1
6a.	0	1	0
7a.	0	0	1
8a.	0	0	0

Se puede deducir del árbol lógico una fórmula que nos permita conocer el número de alternativas que puede tener una fórmula compuesta de dos o más variables, a saber:

Como cada variable presenta dos alternativas de valores de verdad, la fórmula se formará con la constante 2 como base y una potencia n que represente el número de variables; esta expresión nos dará el número de alternativas.

$$2^n = \text{No. de alternativas.}$$

Por ejemplo: Sea una fórmula bien formada con cuatro variables p,q,r,s, $2^4 = 16$ alternativas, que en el orden que establece el árbol lógico se pueden arreglar en una tabla como la siguiente:

ALTERNATIVAS	p	q	r	s
1a.	1	1	1	1
2a.	1	1	1	0
3a.	1	1	0	1
4a.	1	1	0	0
5a.	1	0	1	1
6a.	1	0	1	0
7a.	1	0	0	1
8a.	1	0	0	0
9a.	0	1	1	1
10a.	0	1	1	0
11a.	0	1	0	1
12a.	0	1	0	0
13a.	0	0	1	1
14a.	0	0	1	0
15a.	0	0	0	1
16a.	0	0	0	0

Para p, 8 valores consecutivos verdaderos y 8 falsos.

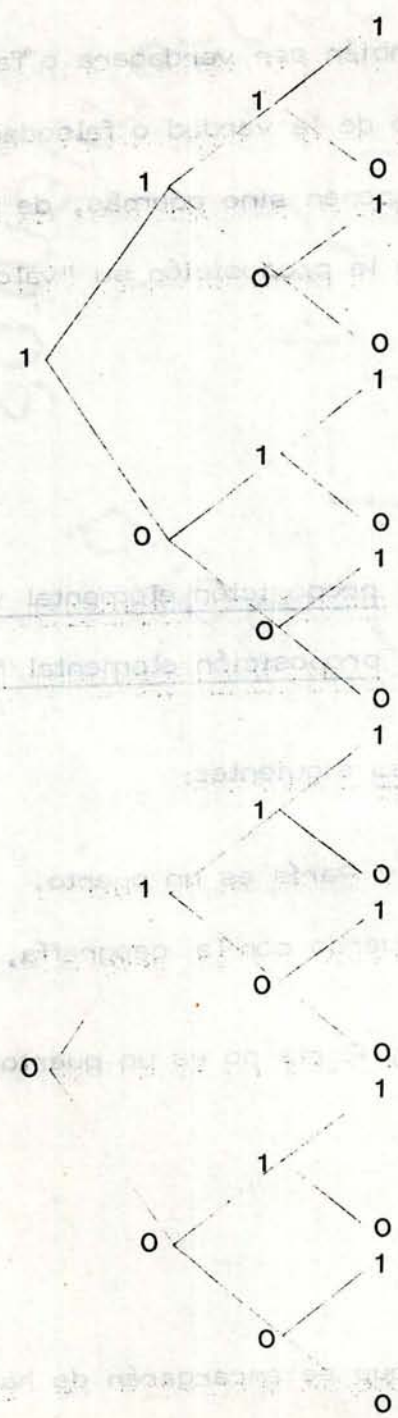
Para q, 16 valores alternados, cuatro verdaderos, cuatro falsos, cuatro verdaderos y cuatro falsos.

Para r, 16 valores alternados de dos en dos.

Para s, 16 valores alternados de uno en uno.

Puede verificarse con el árbol lógico.

p q r s



Alternativas	p	q	r	s
1a.	1	1	1	1
2a.	1	1	1	0
3a.	1	1	0	1
4a.	1	1	0	0
5a.	1	0	1	1
6a.	1	0	1	0
7a.	1	0	0	1
8a.	1	0	0	0
9a.	0	1	1	1
10a.	0	1	1	0
11a.	0	1	0	1
12a.	0	1	0	0
13a.	0	0	1	1
14a.	0	0	1	0
15a.	0	0	0	1
16a.	0	0	0	0

6. VALOR DE VERDAD

Una proposición elemental puede ser verdadera o falsa dependiendo de la verdad o falsedad asignada extralógicamente a su contenido*.

Una proposición compuesta puede también ser verdadera o falsa pero su "valor de verdad" no depende sólo de la verdad o falsedad de las proposiciones elementales que la componen sino además, de la forma de enlace entre ellas que dará a toda la proposición su "valor de verdad".

Sean las proposiciones elementales

a) París es una ciudad: proposición elemental verdadera

b) París es un puerto: proposición elemental falsa.

Al formar las proposiciones compuestas siguientes:

a) París es una ciudad y París es un puerto.

El contenido de esta proposición, de acuerdo con la geografía, es falso.

b) París es una ciudad y París no es un puerto.

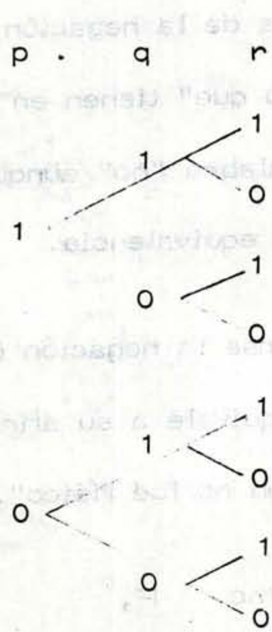
Es también una proposición verdadera.

* Son las ciencias naturales o de hechos las que se encargarán de hacer esta asignación.

7. TABLAS DE VERDAD

Los valores de verdad de una proposición compuesta se pueden arreglar en forma tabular en una "Tabla de Verdad" en la cual, de acuerdo a las alternativas derivadas del árbol lógico para cada proposición elemental, se infiera el valor de verdad de la proposición compuesta.

Así tendremos que en caso de 3 variables proposicionales p, q, r, la tabulación presenta la siguiente forma:



p	q	r	(F)	cl	(G)
1	1	1			
1	1	0			
1	0	1			
1	0	0			
0	1	1			
0	1	0			
0	0	1			
0	0	0			

El valor de verdad de cada alternativa de la proposición compuesta dependerá del conectivo lógico (cl) de enlace de las proposiciones elementales, siendo (F) y (G) fórmulas bien formadas.

8. NEGACION DE PROPOSICIONES

Una forma de negar una proposición es afirmar su negación. Por ejemplo: La proposición "El tabaco produce cáncer".

Para la negación de esta proposición se afirma su negación "El tabaco no produce cáncer".

Si C representa "El tabaco produce cáncer", $\sim C$ representará "El tabaco no produce cáncer".

En una oración suelen emplearse sinónimos de la negación, por ejemplo las palabras "es falso", "no es cierto que" tienen en la lógica el mismo significado de negación que la palabra "no" aunque en el lenguaje ordinario no sea tan determinante su equivalencia.

8.1. En una proposición puede presentarse la negación de la negación de una proposición, lo cual equivale a su afirmación. Por ejemplo: "No es cierto que Newton no fue físico".

Si Newton fue físico se representa como F,

Newton no fue físico se representa como $\sim F$,

No es cierto que Newton no fue físico se representa como $\sim \sim F$, lo que equivale a decir Newton fue físico F.

Por consiguiente una doble negación de la proposición equivale a la afirmación de la misma.

8.2 Esta situación puede extenderse a más de dos negaciones, por ejemplo una triple negación equivaldrá a una negación simple

$$\sim(\sim(\sim F)) \equiv \sim F$$

8.3. <u>Valor de verdad</u>

Si la afirmación de una proposición tal como: Liza es culta, presenta la alternativa de ser verdadera o falsa, su negación será respectivamente falsa, o verdadera.

Esto es, si la variable es p la representación de la afirmación de una proposición cualquiera, la representación de su negación será $\sim p$. De tal manera que:

si	$p = 1$	entonces	$\sim p = 0$
o si	$p = 0$	entonces	$\sim p = 1$
y viceversa si	$\sim p = 1$	entonces	$p = 0$
y si	$\sim p = 0$	entonces	$p = 1$

Esto lo podemos expresar en una tabla de verdad

p	$\sim$ p
1	0
0	1

ó

$\sim$ p	p
1	0
0	1

9. CONJUNCION DE LAS PROPOSICIONES

Para conjuntar las proposiciones se emplea la letra de enlace "y" con el fin de formar una proposición compuesta llamada conjunción de las proposiciones.*

El conectivo lógico de la conjunción se representa con el símlo " $\wedge$ ".

9.1. Valor de verdad

Para que el valor de verdad de la conjunción de dos proposiciones elementales sea verdadero debe ocurrir simultáneamente la verdad en ambas proposiciones.

Por ejemplo la proposición: Liza es culta y es atractiva, será verdadera si ambas proposiciones elementales son verdaderas.

9.2. Tabla de verdad

p y q es verdadera sólo si p es verdadera y q es verdadera, por lo que en el renglón correspondiente a esta alternativa todos los valores de verdad serán verdaderos.

* Las cuales pueden no ser afines en su contenido dado que la Lógica estudia únicamente la <u>forma lógica</u> de las proposiciones.

p	q	p ∧ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

10. DISYUNCION INCLUSIVA

La disyunción inclusiva de dos proposiciones es el enlace de dos proposiciones por medio de la letra "o".

El conectivo lógico se representa con la letra "V" (mayúscula)

10.1. Valor de verdad

El valor de verdad de la disyunción inclusiva de dos proposiciones dependerá de la verdad de por lo menos una de ellas.

Por ejemplo la proposición: Ernesto es intelectual o deportista, será verdadera si por lo menos una de las proposiciones es verdadera.

10.2. Tabla de verdad

Sea p ∧ q la fórmula de la representación de la disyunción inclusiva de dos proposiciones cualesquiera sin un contenido particular; en las alternativas de valores de verdad de p y de q, p ó q será falsa solamente cuando ambas sean falsas.

p	q	p V q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

11. <u>DISYUNCION EXCLUSIVA</u>

La disyunción exclusiva de dos proposiciones es el enlace de dos proposiciones con la letra "o" pero debido a que difieren las condiciones de su valor de verdad, la letra V (mayúscula) se subraya "$\underline{V}$" para diferenciarla de la empleada en la disyunción inclusiva.

11.1. <u>Valor de verdad</u>

La disyunción exclusiva de dos proposiciones presenta como característica fundamental el no poder ocurrir simultáneamente la verdad o falsedad de las proposiciones, de ahí su necesidad de diferenciarlas con la inclusiva.

Por ejemplo: El río Nilo está en Egipto o en Grecia.

Dada la descripción geográfica de estos países es evidente que no puede estar en ambos sitios a menos que fuera un límite común de ellos, lo cual no ocurre en este caso.

11.2. Tabla de verdad

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

12. PROPOSICION CONDICIONAL

Es una proposición compuesta de dos proposiciones tales que la primera llamada antecedente precede a la segunda llamada consecuente.

Algunas palabras de enlace que establece este tipo de proposiciones son: si .... entonces...., por lo tanto, en consecuencia, por consiguiente, de donde, etc.

En ocasiones el enlace en una proposición condicional se presenta de manera sobreentendida.

Por ejemplo: Estudiaste adecuadamente, aprobarás tu examen.

Su conectivo lógico se represente con una flecha ($\longrightarrow$)

12.1. Valor de verdad

Una proposición condicional solamente es falsa si el antecedente de la proposición es verdadero y su consecuente es falso. Por consiguiente en un análisis con tablas de verdad serán verdaderas todas las demás alternativas.

Por ejemplo: Sea la proposición condicional " Si un número es dígito entonces es mayor que diez".

Según la aritmética la proposición condicional anterior es falsa, ya que todo número dígito es menor que diez.

Analizando con un número "Si 4 es un número dígito, entonces 4 es mayor que 10" se observa que el antecedente es verdadero, y el consecuente falso, por lo que la proposición condicional es falsa.

12.2. Tabla de verdad

p	q	$p \longrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Análisis de los tres casos en que la proposición condicional es verdadera: Sea la proposición "si un número es dígito, entonces es menor que diez"

La proposición condicional será verdadera si el antecedente y el consecuente son ambos verdaderos.

a) "Si 9 es dígito entonces 9 es menor que 10". (Antecedente verdadero, consecuente verdadero).

Si el antecedente es falso, la proposición condicional será verdadera independientemente del valor de verdad del consecuente.

b) "Si 9.2 es dígito, entonces 9.2 es menor que 10" (Antecedente falso, consecuente verdadero)

c) "Si 12 es dígito, entonces 12 es menor que 10" (Antecedente falso, consecuente falso).

En una proposición condicional, es suficiente el antecedente para el consecuente, pero éste es necesario para el primero.

Es suficiente que un número sea dígito para que sea menor que 10, pero no es necesario.

Es necesario que un número sea menor que 10 para que sea dígito, pero no es suficiente.

13. PROPOSICION BICONDICIONAL

Se define una proposición bicondicional como la conjunción de dos proposiciones condicionales y recíprocas. En el lenguaje ordinario se expresa con las palabras de enlace "...si y solo si..."

La proposición bicondicional presenta como característica fundamental el requerimiento de ser suficiente y necesario simultáneamente el antecedente y el consecuente de la proposición.

Por ejemplo

"Un número es dígito, si y sólo si, es un número entero, positivo, menor que 10". (Antecedente: Un número es dígito; consecuente: es un número entero, positivo, menor que 10).

Es suficiente y necesario que un número sea dígito para que sea entero, positivo, menor que 10 y es suficiente y necesario que un número sea entero, positivo, menor que 10 para que sea dígito.

El conectivo lógico de esta proposición se representa con una flecha en ambos sentidos "$\longleftrightarrow$" como símbolo de las palabras de enlace "...si y sólo si..."

13.1 Valor de verdad

Una proposición bicondicional es verdadera si y sólo si ambas proposiciones que la componen son simultáneamente verdaderas o simultáneamente falsas. El valor de verdad enunciado se obtiene de la definición y valor de verdad de la proposición condicional, y del valor de verdad de la conjunción de dos proposiciones como lo podemos verificar con la ayuda de la tabla de verdad.

Fórmula de la definición de la proposición bicondicional:

(p	$\longrightarrow$	q)	$\wedge$	(q	$\longrightarrow$	p)	p	q
	1		1		1		1	1
1	0	0	0		1		1	0
	1		0	1	0	0	0	1
	1		1		1		0	0

Valor de verdad de la proposición condicional.

Valor de verdad de la conjunción de las proposiciones condicionales y recíprocas.

13.2. Tabla de verdad

Siendo $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p) = (p \longleftrightarrow q)$, la tabla de verdad de $(p \longleftrightarrow q)$ será:

p	q	$p \longleftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

14. TABLAS DE VERDAD DE FORMULAS DE PROPOSICIONES COMPUESTAS

En las reglas de la sintaxis lógica (F) y (G) representan fórmulas bien formadas y (F) y (G) enlazadas con algún conectivo lógico son también una fórmula bien formada.

Sea $(F) \wedge (G)$ y $(F) = (p \veebar q)$

y $(G) = (\sim p \longrightarrow q)$

Entonces $(p \veebar q) \wedge (\sim p \longrightarrow q)$ será una fórmula bien formada que representa una proposición compuesta sin contenido particular.

No conociendo los valores de verdad de las proposiciones representadas por las variables, los valores de verdad de la proposición compuesta dependerán de los valores de verdad que puedan asignarse a cada una de las variables y de los conectivos lógicos que las relacionen.

Como ayuda para conocer el valor de verdad de la proposición compuesta en todas sus alternativas se recurre a la tabla de verdad.

p	q	$(p \veebar q) \wedge (\sim p \longrightarrow q)$				
1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	0	0

1a. etapa

$(p \veebar q) \wedge (\sim p \longrightarrow q)$					
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0

2a. etapa

$(p \veebar q) \wedge (\sim p \longrightarrow q)$		
0	0	1
1	1	1
1	1	1
0	0	0

3a. etapa

15. TAUTOLOGIA

Cuando todas las alternativas de los valores de verdad de la fórmula de una proposición compuesta resultan verdaderas se dice que la fórmula es una tautología.

$$\sim (p \wedge q) \vee (p \longrightarrow q)$$

$\sim$	$\wedge$	$\vee$	$\longrightarrow$	
0	1	1	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	0	1	1	
2a.	1a.	3a.	1a.	ETAPAS

La fórmula $\sim (p \wedge q) \vee (p \longrightarrow q)$ es una tautología.

16. CONTRADICCION

Cuando todas las alternativas de los valores de verdad de la fórmula de una proposición compuesta resultan falsas se dice que la fórmula es una contradicción.

$(p \leftrightarrow q) \wedge (p \underline{\vee} q)$		
1	0	0
0	0	1
0	0	1
1	0	0
1a.	2a.	1a.

ETAPAS

La fórmula $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \underline{\vee} q)$ es una contradicción.

Se deduce que si una fórmula es una tautología su negación es una contradicción.

Por ejemplo: Sea la negación de la fórmula de la tabla de verdad de la página 38

$\sim [\sim (p \wedge q) \vee (p \rightarrow q)]$	
0	1
0	1
0	1
0	1
4a.	3a.

ETAPAS

En la cuarta y última etapa aparece la contradicción.

De igual forma si una fórmula es una contradicción su negación es una tautología. (del cuadro superior de la página 39)

$\sim [(p \longleftrightarrow q)$	$\wedge$	$(p \veebar q)]$
1	0	
1	0	
1	0	
1	0	
3a.	2a.	ETAPAS

17. IMPLICACION LOGICA

Cuando la fórmula de una proposición condicional resulta ser una tautología se dice que el antecedente implica lógicamente al consecuente.

$[(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$\sim p]$	$\longrightarrow$	q	
	1		0	0	1	1	
	1		0	0	1	0	
	1		1	1	1	1	
	0		0	1	1	0	
	1a.		2a.	1a.	3a.	1a.	ETAPAS

En la tercera y última etapa se comprueba la tautología por lo que la fórmula expuesta es una implicación lógica.

18. EQUIVALENCIA LOGICA

Cuando la fórmula de una proposición bicondicional resulta ser una tautología se dice que el antecedente equivale lógicamente al consecuente.

$(p \longrightarrow q)$	$\longleftrightarrow$	$(\sim$	p	$\vee$	$q)$
1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0
1a.	3a.	2a.	1a.	2a.	1a.

ETAPAS

En la tercera y última etapa se comprueba la tautología por lo que la fórmula expuesta es una equivalencia lógica.

Cuando la fórmula de una proposición bicondicional es una equivalencia lógica se puede sustituir el conectivo lógico del bicondicional ($\longleftrightarrow$) por el de la equivalencia lógica ($\equiv$)

$$(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (\sim p \vee q)$$

Equivale a $(p \longrightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

En la tabla anterior se observa como el valor de verdad de $(p \longrightarrow q)$ es igual al de $(\sim p \vee q)$

19. PRINCIPIO DE SUSTITUCION

Si en una fórmula bien formada se sustituye cualquiera de las variables por otra fórmula bien formada se obtiene una fórmula bien formada.

Por ejemplo

$$(p \vee q) \longrightarrow (p \wedge q)$$

Si p se sustituye por $(r \wedge \sim s)$

la fórmula resultante

$$[(r \wedge \sim s) \vee q] \longrightarrow [(r \wedge \sim s) \wedge q]$$

es también una fórmula bien formada.

Cuando una fórmula es una tautología y se transforma aplicando el principio de sustitución en otra fórmula, ésta seguirá siendo tautología.

Sea la tautología $[(p \longrightarrow q) \wedge p] \longrightarrow q$

Si p se sustituye por $r \vee \sim q$ y q por $\sim p$

La fórmula $\{[(r \vee \sim q) \longrightarrow \sim p] \wedge (r \vee \sim q)\} \longrightarrow \sim p$

seguirá siendo una tautología.

VERIFICACION CON LA TABLA DE VERDAD

p	q	r	{[(r	V	~q)	→	~p]	∧	(r	V	~q)}	→	~p
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
ETAPAS			1a.	2a.	1a.	3a.	1a.	4a.	1a;	2a.	1a.	5a.	1a.

T

La misma característica presentará una fórmula que sea una contradicción.

20. IGUALDAD POR DEFINICION

De todos los conectivos mencionados, se pueden elegir algunos de ellos para establecer fórmulas proposicionales equivalentes.

Algunas proposiciones pueden parafrasearse con el fin de establecer otra proposición de manera tal, que al verificar sus fórmulas proposicionales en una tabla de verdad resulten equivalentes.

Al definir convencionalmente la negación ($\sim$) y la disyunción inclusiva ($\vee$) como conectivos primitivos, se puede establecer para la fórmula de la conjunción ($p \wedge q$), otra fórmula proposicional equivalente en función de la disyunción, mediante un parafraseo. La fórmula proposicional resultante tendrá el mismo valor de verdad.

Se ha dicho que ($p \wedge q$) es verdadera si p y q son simultáneamente verdaderas, esto equivaldrá a decir: es falso que p ó q ó ambas sean falsas.

En base a esta nueva definición se ha establecido la fórmula $\sim(\sim p \vee \sim q)$ que es equivalente a la fórmula ($p \wedge q$), por lo que se puede afirmar su igualdad por definición, permutando en su representación el símbolo de equivalencia por = def. que indica que son iguales por definición.

1. $(p \wedge q) = \text{def.} \sim (\sim p \vee \sim q)$

Realizando la tabla de verdad, se obtiene una tautología como consecuencia de la equivalencia lógica de ambas fórmulas proposicionales.

$(p \wedge q)$	$= \text{def.} \sim($	$\sim p \vee \sim q)$
1	1	0
0	0	1
0	0	1
0	0	1

EQUIVALENCIA LOGICA

De la misma forma se han llegado a establecer las siguientes igualdades por definición:

2. $(p \underline{\vee} q) = \text{def.} \sim (p \longleftrightarrow q)$

3. $(p \longleftrightarrow q) = \text{def.} (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

4. $(p \longrightarrow q) = \text{def.} (\sim p \vee q)$

EJEMPLO DEL PRINCIPIO DE SUSTITUCION

Basándose en el principio de sustitución se puede transformar una fórmula proposicional en otra fórmula en función de los conectivos primitivos.

Sea $F_1 \wedge F_2$ la conjunción de dos fórmulas bien formadas y

$F_1 = \sim(p \underline{\vee} \sim q)$ y $F_2 = (p \longrightarrow \sim q)$

entonces $\sim (p \underline{\vee} \sim q) \wedge (p \longrightarrow \sim q)$ (A)

Aplicando las igualdades por definición 2 y 4 de la pag. 45 respectivamente se transforma la fórmula (A) en:

$\sim(\sim(p \longleftrightarrow \sim q)) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ (B)

Aplicando a (B) la igualdad del bicondicional 3 de la pag. 45, la fórmula resultante es:

$[(p \longrightarrow \sim q) \wedge (\sim q \longrightarrow p)] \wedge (\sim p \vee \sim q)$ (C)

Es necesario aplicar en (C) la igualdad 4 para las fórmulas condicionales.

$[(\sim p \vee \sim q) \wedge (q \vee p)] \wedge (\sim p \vee \sim q)$ (D)

Falta sustituir los conectivos de la conjunción, por lo que en (D) aplicaremos la igualdad 1 a la primera conjunción (utilizando un solo tipo de parentesis)

$\sim(\sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim(q \vee p)) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ (E)

Aplicando la misma igualdad a la segunda conjunción se obtiene:

$\sim (\sim(\sim (\sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim(q \vee p))) \vee \sim(\sim p \vee \sim q))$

20.1 REGLA DE LOS PARENTESIS

Se conviene en asignar la unidad positiva a los paréntesis que abren y la unidad negativa a los que cierran de tal manera que la suma de las unidades dé cero entre un paréntesis que abre y su correspondiente que cierre.

$$\sim(\sim(\sim(\sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim(q \vee p))) \vee \sim(\sim p \vee \sim q))$$

+1 +1 +1 +1 −1 +1 −1−1−1 +1 −1 −1

1−1=0 1−1=0 1−1=0

3−3=0

4−4=0

6−6=0

NOTA

Esta regla está tomada del libro <u>Introducción a la Lógica deductiva y teoría de los conjuntos</u> del Dr. Javier Salazar Resines.

HOJA DE TRABAJO CAPITULO I

I. D E F I N I C I O N E S

1. CONJUNCION DE DOS PROPOSICIONES

2. DISYUNCION INCLUSIVA DE DOS PROPOSICIONES

3. DISYUNCION EXCLUSIVA DE DOS PROPOSICIONES

4. PROPOSICION CONDICIONAL

5. PROPOSICION BICONDICIONAL

HOJA DE TRABAJO

II. De las siguientes expresiones, indique cruzando el número cuales son proposiciones. En el espacio inmediato haga su representación.

1) Si dos cantidades son iguales a una tercera, son iguales entre sí.

2) El ejercicio y el estudio son buenos para la salud.

3) La Unidad Azcapotzalco de la Universidad Autónoma Metropolitana.

4) Un triángulo equilátero tiene sus lados iguales o sus ángulos iguales.

5) Hoy es jueves 16 ó viernes 17

6) ¡Deténgase, no cruce la línea!

7) No es cierto que . . .

8)

9)

10)

11)

12)

13)

14)

15)

16)

17)

18)

19)

20)

HOJA DE TRABAJO

III. TABLA DE VERDAD DE LAS FORMULAS DE LAS PROPOSICIONES CON TODOS LOS CONECTIVOS LOGICOS

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$	$p \longrightarrow q$	$q \longrightarrow p$	$p \longleftrightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$
1	1								
1	0								
0	1								
0	0								

1.

HOJA DE TRABAJO

IV. Desarrollar la tabla de verdad de cada una de las siguientes fórmulas :

p	q	$(p \vee \sim q) \quad [(p \quad q) \vee \sim p]$
1		
1		
0		
0		

p	q	
1		
1		
0		
0		

p	q	r	
1			
1			
1			
1			
0			
0			
0			
0			

HOJA DE TRABAJO

V. Transformar una fórmula proposicional en otra fórmula en la que aparezcan únicamente los conectivos primitivos $\sim$ y $\vee$ y un sólo tipo de párentesis.

CONTENIDO DEL CAPITULO II ARGUMENTOS

CAPITULO II ARGUMENTOS

1. ARGUMENTO

Un argumento está formado por un conjunto de fórmulas bien formadas llamadas PREMISAS y otra fórmula bien formada llamada CONCLUSION. La conclusión puede identificarse por sí sola a través del razonamiento en un argumento, no obstante es común distinguirla por medio de las palabras de enlace: "por lo tanto", "luego","en consecuencia", "por consiguiente", etc. que se simbolizan con: $\vdash$

Por ejemplo

1a. premisa: El sol está brillando o hace frío.

2a. premisa: El sol no brilla.

$\vdash$

Conclusión: Hace frío

2. REPRESENTACION

Todo argumento con contenido particular puede representarse siguiendo las mismas normas establecidas para las proposiciones.

En el ejemplo anterior se identifican dos premisas y la conclusión; si se conviene en representar con las letras S y F las proposiciones elementales, el argumento quedará representado de la siguiente manera:

1a. premisa $S \vee F$

2a. premisa $\sim S$

$\vdash$

Conclusión F

3. EJERCICIOS DE REPRESENTACION

3.1. Si el agua se congela, sus moléculas forman cristales. Si las moléculas de agua forman cristales, el agua aumenta de volumen. Por lo tanto, si el agua se congela, aumenta de volumen.

(H, C, V)

1. $H \longrightarrow C$ (P)
2. $C \longrightarrow V$ (P)

$\vdash$

3. $H \longrightarrow V$ (C)

3.2. Si los edificios son altos, entonces necesitan estacionamiento amplio. Los edificios son altos o tienen poca superficie rentable. Si tienen poca superficie rentable, entonces no tienen muchos locales rentables. Tienen muchos locales rentables. En consecuencia, necesitan estacionamiento amplio.

(E, N, S, L)

1.	$E \longrightarrow N$	(P)
2.	$E \vee S$	(P)
3.	$S \longrightarrow \sim L$	(P)
4.	L	(P)
	$\vdash$	
5.	N	(C)

En estas representaciones se han empleado letras mayúsculas y en cada representación se encuentra implícito el contenido y la forma lógica del argumento.

En un argumento con contenido particular se puede aislar la forma lógica del contenido obteniéndose un argumento llamado FORMAL o FORMALIZADO, el cual consta de fórmulas bien formadas sin contenido

Sea la formalización del argumento 3.2.

1. $p \longrightarrow q$ (P)
2. $p \vee r$ (P)
3. $r \longrightarrow \sim s$ (P)
4. $s \vdash q$ (P, C)

4. METODOS PARA PROBAR LA VALIDEZ DE UN ARGUMENTO

Existen algunos argumentos en que es evidente que la conclusión se deduce de las premisas, sin embargo, otros requieren de un procedimiento que permita probar que la conclusión se obtiene de las premisas establecidas.

Para analizar este tipo de argumentos se conocen algunos métodos para demostrar si la conclusión se deduce o no de las premisas. Si en un argumento se demuestra que la conclusión se sigue de las premisas se dice que dicho argumento es VALIDO, en caso contrario el argumento será INVALIDO.

Las pruebas podrán realizarse directamente con los argumentos formalizados o bien con su representación. Los métodos que pueden utilizarse para probar la validez de un argumento son los siguientes:

4.1. REGLAS DE INFERENCIA

4.2. TABLAS DE VERDAD

4.3. REDUCCION AL ABSURDO EN UNA TABLA DE VERDAD

4.4. REDUCCION AL ABSURDO CON ANALISIS PARCIAL DE TABLAS DE VERDAD.

4.5. PRUEBA CONDICIONAL

4.6. PRUEBA CONDICIONAL CON NIVELES DE HIPOTESIS

4.7. PRUEBA CONDICIONAL POR REDUCCION AL ABSURDO

4.1. DEMOSTRACION DE ARGUMENTOS CON TABLAS DE VERDAD

Se ha definido como argumento formal o formalizado, el argumento en el que se aísla la forma lógica del contenido.

Sea un argumento formal cuyas premisas y conclusión son fórmulas bien formadas

$P_1\ (p,\ q,\ r\ \ldots)$ (P)

$P_2\ (p,\ q,\ r\ \ldots)$ (P)

$\ldots\ldots\ldots\ldots$ (P)

$P_n\ (p,\ q,\ r\ \ldots)$ (P)

$\vdash$

$C\ (p,\ q,\ r\ \ldots)$ (C)

Un argumento formal puede tomar la forma de una proposición condicional; la conjunción de las premisas establece el antecedente de la proposición y la conclusión su consecuente.

Así: $[P_1\ (p,q,r,\ldots) \wedge P_2\ (p,q,r,\ldots) \wedge P_3\ (p,q,r,\ldots) \wedge \ldots$

$\ldots \wedge P_n\ (p,q,r,\ldots)] \longrightarrow C\ (p,q,r,\ldots)$

Un ejemplo de argumento formal lo puede ser cualquier regla de inferencia.

Sea la ley del (mpp)

1. $p \longrightarrow q$ (P)
2. $p \quad \vdash q$ (P,C)

la cual en forma de proposición condicional se expresa

$$[(p \longrightarrow q) \wedge p] \longrightarrow q$$

El valor de verdad de una proposición condicional establece que ésta es falsa si el antecedente es verdadero y su consecuente falso. Basándose en esta definición se establece igualmente que un argumento es INVALIDO si y sólo si la conjunción de las premisas es verdadera y su conclusión falsa.

Si en una tabla de verdad de un argumento formalizado no existe un solo caso en el que la conjunción de las premisas sea verdadera y la conclusión falsa, entonces la fórmula resulta una implicación tautológica y el argumento es válido por lo que cualquier ejemplo de sustitución también es un argumento VALIDO.

Ejemplos de argumentos formales válidos

1) Sea el argumento formal 1. $p \longrightarrow q$

2. $p \vdash q$

y su tabla de verdad.....

p	q	$[(p \longrightarrow q)$	$\wedge$	$p]$	$\longrightarrow$	q
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0

.... una implicación tautológica.

La representación de un argumento

1. $P \longrightarrow Q$

2. $P \vdash Q$

es un ejemplo de sustitución del anterior por lo que también es un argumento VALIDO.

2. Sea el argumento formal:

1. $p \longrightarrow q$

2. $q \longrightarrow r$

$\vdash$

3. $p \longrightarrow r$

similar a la ley de transitividad

p	q	r	$[(p \longrightarrow q)$	$\wedge$	$(q \longrightarrow r)]$	$\longrightarrow$	$(p \longrightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1
ETAPAS			1a.	2a.	1a.	3a.	1a.

que nos demuestra que el argumento formal es VALIDO. (3a.ETAPA)

3. Demostrar con tabla de verdad la validez del argumento formal siguiente:

1. $p \longleftrightarrow q$
2. $p \wedge \sim r \vdash (p \wedge q) \vee (r \vee q)$

p	q	r	$[(p \longleftrightarrow q)$	$\wedge$	$(p \wedge$	$\sim r)]$	$\longrightarrow$	$[(p \wedge q)$	$\vee$	$(r \vee q)]$
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0

Como no se da un sólo caso en el que la conjunción de las premisas sea verdadera y la conclusión falsa el argumento formal es VALIDO y cualquier ejemplo de sustitución de este argumento será también VALIDO.

Ejemplo de un argumento formal inválido.

1. $p \longrightarrow q$

2. $q \vdash p$

p	q	$[(p \longrightarrow q)$	$\wedge$	$q]$	$\longrightarrow$	p
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0

La implicación en este condicional resulta falsa en el tercer renglón por lo que el argumento formal es inválido.

Demostrar la validez del siguiente argumento con tabla de verdad.

Si las refacciones son caras, entonces los automóviles son caros. Las refacciones son caras o hay muchas ventas. Si hay muchas ventas, entonces no hay excedentes. Hay excedentes. En consecuencia los automóviles son caros. (R, A, M, E)

REPRESENTACION			FORMALIZACION
1.	$R \longrightarrow A$	(P)	$p \longrightarrow q$
2.	$R \vee M$	(P)	$p \vee r$
3.	$M \longrightarrow \sim E$	(P)	$r \longrightarrow \sim s$
4.	$E \vdash A$	(P,C)	$s \vdash q$

p	q	r	s	$\{[(p \longrightarrow$	$q)$ $\wedge$	$(p \vee r)]$	$\wedge$	$[(r \longrightarrow$	$\sim s)$	$\wedge$	$s]\}$	$\longrightarrow$	q
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
ETAPAS				1a.	3a.	1a.	5a.	2a.	1a.	4a.	1a.	6a.	1a.

T

En la tabla de verdad se ha hecho una asociación arbitraria convencional para poder operar en forma binaria sin que ésta, como cualquier otra combinación modifique el valor de verdad del argumento formal.

4.2. REGLAS DE INFERENCIA

Para la deducción de un argumento existen algunas reglas útiles llamadas reglas de inferencia que tienen la cualidad de ser tautologías.

Dado un conjunto de fórmulas, las reglas de inferencia servirán para deducir otras fórmulas. El problema radica en aprender a utilizar las reglas adecuadas de manera tal que conduzcan con el menor número de pasos a la conclusión deseada.

En algunos argumentos pueden obtenerse diversas conclusiones que se sigan de las premisas o bien, conocida la conclusión de un argumento pueden encontrarse varios caminos que llevan a probar que la conclusión sí se deduce de las premisas.

Si en un argumento se deduce la conclusión de todas las premisas, es decir: si la conjunción de las premisas implica a la conclusión, entonces el argumento puede tomar la forma de una proposición condicional. $P \longrightarrow C$ siendo P la conjunción de todas las premisas y C la conclusión. $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n) \longrightarrow C$

NOTA: En general suelen utilizarse todas las premisas pero si alguna no se utiliza, deberá revisarse que no exista contradicción, haciendo la demostración con otro razonamiento.

Sea el siguiente argumento:

Si Pizarro fue español, entonces fue el conquistador de Perú.

Pizarro fue español. Por lo tanto, conquistó Perú.

Sea su representación:

1. $P \longrightarrow Q$ (P)

2. P (P)

$\vdash$

3. Q (C)

Esta regla llamada "modus ponendo ponens" (mpp) de hecho se basa en la afirmación del antecedente de una proposición condicional, pues para que dicha proposición sea verdadera debe afirmarse el consecuente.

Para dejar establecido este razonamiento como regla de inferencia, podemos verificar por medio de una tabla de verdad que es una tautología.

Si: $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n) \longrightarrow C$

entonces: $[(P \to Q) \wedge P] \longrightarrow Q$

y su tabla de verdad

p	q	$[(p \to q)$	$\wedge$	$p]$	$\longrightarrow$	q
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0

que nos demuestra que la fórmula de esta regla de inferencia es una implicación tautológica.

Siguiendo líneas de razonamiento similares, se pueden deducir y demostrar todas las reglas de inferencia que se presentan a continuación:

4.2.1. IMPLICACIONES LOGICAS: (estas leyes podrán aplicarse únicamente a fórmulas completas).

1. Modus ponendo ponens. (mpp)

1. $p \longrightarrow q$

2. $p \vdash q$

2. Modus Tollendo Tollens. (mtt)

1. $p \longrightarrow q$

2. $\sim q \vdash \sim p$

3. Modus tollendo ponens. (mtp)

1. $p \vee q$

2. $\sim p \vdash q$

4. Ley de la adición (ad)

1. $p \vdash p \vee q$

5. Ley de la conjunción (conj)

1. p

2. $q \vdash p \wedge q$

6. Ley de la simplificación (simpl)

1. $p \wedge q \vdash p$

7. Ley de la transitividad (trans)

1. $p \longrightarrow q$

2. $q \longrightarrow r \vdash p \longrightarrow r$

4.2.2 EQUIVALENCIAS LOGICAS: (estas leyes podrán ser aplicables a fórmulas parciales o completas).

8. Ley de la conmutatividad (conm)

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

9. Ley de la distributividad (distr)

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

10. Ley de De Morgan (DeM)

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

11. Ley de la exportación (exp)

$$(p \wedge q) \longrightarrow r \equiv p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$$

12. Ley de la contraposición (contr)

$$p \longrightarrow q \equiv \sim q \longrightarrow \sim p$$

13. Ley de la idempotencia (idem)

$$p \vee p \equiv p$$

$$p \wedge p \equiv p$$

14. Ley de equivalencia para el condicional (cond)

$$p \longrightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

15. Leyes de equivalencia para el bicondicional (bicond)

$$p \longleftrightarrow q \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$$

$$p \longleftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

4.2.3 DEMOSTRACION DE ARGUMENTOS CON REGLAS DE INFERENCIA.

Sea el argumento: Si sube el costo de la gasolina o las tarifas de luz, las industrias protestarán. Si las industrias protestan entonces el gobierno debe intervenir o la producción disminuirá. Si la producción disminuye, habrá despido de obreros. El gobierno no intervendrá y no habrá despido de obreros. Por lo tanto, no subirán las tarifas de luz. (C,T,I,G,P,D)

Representación del Argumento

1.	$(C \vee T) \longrightarrow I$	1a. premisa
2.	$I \longrightarrow (G \vee P)$	2a. premisa
3.	$P \longrightarrow D$	3a. premisa
4.	$\sim G \quad \wedge \sim D \vdash\!\!\!\longrightarrow \sim T$	4a. premisa, conclusión

De las premisas 1 y 2 podemos deducir el renglón 5 aplicando la ley de la transitividad.

Si	1.	$(C \vee T) \longrightarrow I$	(P)
	2.	$I \longrightarrow (G \vee P)$	(P)
	5.	$(C \vee T) \longrightarrow (G \vee P)$	se deduce de 1 y 2 por (trans)

El renglón 5 es el único en donde puede deducirse la conclusión ya que contiene a T, para tal efecto será necesario utilizar fórmulas que permitan obtener la negación de $(G \vee P)$ y aplicar la regla del (mtt) para obtener la negación de $(C \vee T)$. Teniendo $\sim(C \vee T)$ se utiliza la ley de De Morgan para cambiar los conectivos: $\sim (C \vee T) \equiv \sim C \wedge \sim T$

Al conmutar y simplificar se deduce la conclusión $\sim T$.

De lo anterior se establece como siguiente paso la obtención de $\sim (G \vee P)$ pudiendo obtenerse el renglón 6 $\sim G$ del renglón 4 mediante la ley de la simplificación; además del mismo renglón 4 se obtiene el renglón 7 $\sim D$ con las leyes de la conmutatividad y simplificación simultáneamente. De los renglones 3 y 7 se deduce el renglón 8 $\sim P$ aplicando la ley del (mtt).

De 6 y 8 por la ley de la conjunción se obtiene el renglón 9

$(\sim G \wedge \sim P)$

El razonamiento expuesto se expresa de la siguiente forma:

1.	$(C \vee T) \longrightarrow I$	(P)
2.	$I \longrightarrow (G \vee P)$	(P)
3.	$P \longrightarrow D$	(P)
4.	$\sim G \wedge \sim D \vdash \sim T$	(P,C)
5.	$(C \vee T) \longrightarrow (G \vee P)$	1,2 (trans)
6.	$\sim G$	4 (simpl)
7.	$\sim D$	4 (conm, simpl)
8.	$\sim P$	3,7 (mtt)
9.	$\sim G \wedge \sim P$	6,8 (conj)
10.	$\sim (G \vee P)$	9 (DeM)
11.	$\sim (C \vee T)$	5,10 (mtt)
12.	$\sim C \wedge \sim T$	11 (DeM)
13.	$\sim T$	12 (conm, simpl)

Se ha demostrado por medio de las reglas de inferencia que la conclusión se deduce de las premisas por lo que este argumento es VALIDO. En los siguientes ejemplos se demuestra el argumento utilizando la ley que se indica:

1. Ley del Modus Ponendo Ponens (mpp). Si esta planta no crece, entonces o necesita más agua o necesita mejor abono. Esta planta no crece. Por consiguiente . . . . .

1. $P \longrightarrow (A \vee M)$ (P)

2. P (P)

$\vdash$

3. $A \vee M$ 1,2 (mpp)

. . . . . necesita más agua o mejor abono.

2. Ley del Modus Tollendo Tollens (mtt). Si llovió anoche la tierra estará húmeda. La tierra no está húmeda. Por consiguiente. . . .

1. $L \longrightarrow H$ (P)

2. $\sim H$ (P)

$\vdash$

3. $\sim L$ 1,2 (mtt)

. . . . . no llovió anoche.

3. Ley del Modus Tollendo Ponens (mtp). Este hombre es político o es astronauta. Este hombre no es político. Por consiguiente. . . .

1. $P \vee A$ (P)

2. $\sim P$ (P)

$\vdash$

3. A 1,3 (mtp)

. . . . . es astronauta

4. Ley de la transitividad (trans). Si el agua se congela, entonces sus moléculas forman cristales. Si las moléculas forman cristales, entonces el agua aumenta de volumen. Por consiguiente, si el agua se congela, entonces aumenta de volumen.

1.	$P \longrightarrow Q$	(P)
2.	$Q \longrightarrow R$	(P)
	$\vdash$	
3.	$P \longrightarrow R$	1,2 (trans)

5. Ley de la simplificación (simpl), conmutatividad (conm), modus ponendo ponens (mpp) y conjunción (conj).

1.	$P \longrightarrow S$	(P)
2.	$P \wedge Q$	(P)
3.	$(S \wedge R) \longrightarrow \sim T$	(P)
4.	$Q \longrightarrow R \vdash \sim T$	(P,C)
5.	P	2 (simpl)
6.	Q	2 (conm, simpl).
7.	S	1,5 (mpp)
8.	R	4,6 (mpp)
9.	$S \wedge R$	7,8 (conj)
10.	$\sim T$	3,9 (mpp)

6. Ley de De Morgan (DeM), ley de la exportación (exp).

1.	$P \longrightarrow [Q \longrightarrow (R \wedge V)]$		(P)
2.	$\sim(\sim Q \vee \sim T)$		(P)
3.	$Q \longrightarrow S$		(P)
4.	$S \longrightarrow P \vdash R$		(P,C)
5.	$Q \longrightarrow P$	3,4	(trans)
6.	$Q \wedge T$	2	(DeM)
7.	Q	6	(simpl)
8.	P	5,7	(mpp)
9.	$P \wedge Q$	8,7	(conj)
10.	$(P \wedge Q) \longrightarrow (R \wedge V)$	1	(exp)
11.	$R \wedge V$	10,9	(mpp)
12.	R	11	(simpl)

7. Ley de la contraposición (contr)

1.	$P \longrightarrow [Q \longrightarrow (R \longrightarrow T)]$		(P)
2.	$\sim(\sim P \vee \sim Q) \vdash \sim T \longrightarrow \sim R$		(P,C)
3.	$P \wedge Q$	2	(DeM)
4.	$(P \wedge Q) \longrightarrow (R \longrightarrow T)$	1	(exp)
5.	$R \longrightarrow T$	4,3	(mpp)
6.	$\sim T \longrightarrow \sim R$	5	(contr)

8. Ley de la idempotencia (idem)

1. $P \longrightarrow (P \longrightarrow R)$ (P)

2. $(\sim R \longrightarrow \sim P) \longrightarrow [(S \vee T) \vee N]$ (P)

3. $\sim T \wedge \sim N \vdash S$ (P,C)

4. $(P \wedge P) \longrightarrow R$ 1 (exp)

5. $P \longrightarrow R$ 4 (idem)

6. $\sim R \longrightarrow \sim P$ 5 (contr)

7. $(S \vee T) \vee N$ 2,6 (mpp)

8. $S \vee (T \vee N)$ por asociatividad de la disyunción.

9. $\sim (T \vee N)$ 3 (DeM)

10. S 8,9 (conm,mtp)

9. Leyes de equivalencia para el condicional (cond) y bicondicional (bicond)

1. $\sim P \vee Q$ (P)

2. $Q \longrightarrow (Q \longrightarrow P) \vdash P \longleftrightarrow Q$ (P,C)

3. $P \longrightarrow Q$ 1 (cond)

4. $(Q \wedge Q) \longrightarrow P$ 2 (exp)

5. $Q \longrightarrow P$ 4 (idem)

6. $(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P)$ 3,5 (conj)

7. $P \longleftrightarrow Q$ 6 (bicond)

4.3. DEMOSTRACION DE ARGUMENTOS POR EL METODO DE REDUCCION AL ABSURDO EN UNA TABLA DE VERDAD.

Se ha visto que si en un argumento sucede que la conjunción de las premisas $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ es verdadera y la conclusión C es falsa, entonces el argumento es inválido.

El método de reducción al absurdo consiste en un sistema asociado a las tablas de verdad, para probar que no hay un solo caso en el que la conjunción de las premisas sea verdadera y la conclusión falsa, - para lo cual se parte de la hipótesis de suponer que el argumento - es inválido.

Como un argumento al pasarlo a una tabla de verdad toma la forma de un condicional, éste es falso solamente cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso, por lo que este método se basa en asignarle los valores de verdad verdadero a la conjunción de las premisas y falso a la conclusión que representan respectivamente al antecedente y consecuente del condicional.

$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$	C
1	0

Siendo el

$$\text{Argumento}\quad \begin{cases} P_1\ (p,\ q,\ r\ \ldots.) & (P) \\ P_2\ (p,\ q,\ r\ \ldots.) & (P) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (P) \\ P_n\ (p,\ q,\ r\ \ldots.) \vdash C\ (p,q,r,\ldots) & (P,C) \end{cases}$$

y su forma condicional $\quad \left[P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots \wedge P_n \right] \longrightarrow C$

Como un argumento puede constar de una o varias premisas y una sola conclusión al asignarle el valor de verdad verdadero a la conjunción de las premisas, cada una de las premisas tiene que ser verdadera. (recuerde la definición de la conjunción de proposiciones).

P_1	P_2	P_3	...... P_n	C
1	1	1	1	0

Como las premisas pueden estar formadas por proposiciones elementales o compuestas, entonces en una tabla de verdad se podrán tener fórmulas con una o más variables aisladas o ligadas por conectivos lógicos, según el tipo de proposiciones que representen.

El interés básico del método por reducción al absurdo consiste en partir de la suposición de que todas las premisas son verdaderas y la conclusión falsa y de allí determinar los valores de verdad de cada una de las variables.

Si al determinar todos y cada uno de los valores de las variables no existe contradicción alguna, entonces los valores asignados a las premisas y a la conclusión, son valores ADMISIBLES que demuestran la invalidez del argumento.

Sea el argumento formal:

1. $p \longrightarrow q$ (P)

2. $q \vdash p$ (P,C)

y su tabla de verdad

Argumento	1a. premisa	2a. premisa	Conclusión
Fórmulas	$p \longrightarrow q$	q	p
Valores asignados	1	1	0
Sustitución de valores asignados	0 1		
Valor deducido para la premisa	1		

Como entre el valor de verdad asignado a la 1a. premisa y el valor deducido no existe contradicción, los valores asignados a las premisas y a la conclusión son admisibles y verifican la hipótesis de invalidez del argumento en cuestión.

Al operar en una tabla de verdad se omiten los símbolos de la conjunción y de la implicación, bastando con separar por líneas rectas verticales las premisas y doble línea vertical a la conclusión, tal como se muestra en la tabla anterior.

Aplicación del método en un argumento formal de tres variables.

1. $(p \longrightarrow q) \lor r$ (P)
2. $p \longleftrightarrow q \quad \vdash \quad p \lor r$ (P,C)

	(p	→	q)	V	r	p	↔	q	p	V	r
Hipótesis de invalidez				1			1			0	
1a. deducción de valores.									0		0
1a. sustitución de valores.	0				0	0					
2a. deducción de valores.		1						0			
2a. sustitución de valores.			0								

Las líneas contínuas muestran los valores deducidos de las correspondientes definiciones de cada conectivo, sin existir contradicción con los valores asignados a las premisas. Por lo tanto el argumento es inválido ya que los valores asignados son admisibles al no existir contradicción entre ellos.

De lo anterior se concluye que si en un argumento formal, al quedar asig nados todos los valores de las variables no existe contradicción, el argumento formal es inválido.

Si en un argumento formal se presentan una o varias contradicciones con los valores asignados después de haber quedado asignado el valor de verdad de TODAS LAS VARIABLES es evidente que el argumento es válido y los valores asignados a las premisas y a la conclusión resultarán INADMISIBLES.

(ley del mpp) 1. $p \longrightarrow q$ (P)

2. $p \vdash q$ (P,C)

	$p \longrightarrow q$	p	q	
	1	1	0	hipótesis
contradicción	1 0			sustitución
	0			deducción

Al quedar asignados los valores de verdad de TODAS LAS VARIABLES y existir contradicción con el valor de verdad asignado a la 1a. premisa - el argumento es VALIDO y los valores de verdad asignados en la hipótesis son INADMISIBLES, pudiendo demostrarse en una tabla de verdad que en todas las alternativas de los valores de verdad no existe un solo caso en que las premisas sean simultáneamente verdaderas y la conclusión falsa.

Tabla de verdad del ejemplo anterior

p	q	$[(p \longrightarrow q)$	$\wedge$	$p]$	$\longrightarrow$	q
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0
ETAPAS		1a.	2a.	1a.	3a.	1a.

Al no existir un solo caso en que la conjunción de las premisas (antecedente del condicional 2a. etapa) sea verdadera y la conclusión (consecuente última columna) sea falsa, se puede afirmar que la fórmula es una implicación tautológica y el argumento que representa es VALIDO.

Sea el siguiente argumento formal:

	1a. premisa			2a. premisa			3a. premisa			4a. premisa	Conclusión
	p	$\longrightarrow$	$\sim q$	p	$\vee$	r	r	$\longrightarrow$	s	s	q
hip.		1			1			1		1	0
1a. s			0						1		
1a. d			1				?				
2a. d	?										

Nótese como en el renglón de la 1a. y 2a. deducción el valor de verdad de p en la 1a. premisa y r en la 3a. premisa puede ser verdadero o falso sin alterar el valor de verdad de las premisas, pero como el valor de verdad de la 2a. premisa depende de los valores de p y r será necesario realizar un análisis parcial de la tabla de verdad de p y r llamándose a este proceso: "METODO DE REDUCCION AL ABSURDO CON ANALISIS - PARCIAL DE TABLA DE VERDAD".

4.4. METODO DE REDUCCION AL ABSURDO CON ANALISIS PARCIAL DE TABLA DE VERDAD.

Si al emplear el método de reducción al absurdo para un argumento, no ha quedado asignado el valor de verdad de todas las variables, entonces se procede a realizar un análisis parcial de la tabla de verdad de las variables cuyo valor de verdad presente las alternativas de ser verdadero o falso.

Así en la tabla de verdad del argumento anterior no han quedado asignados los valores de verdad de las variables p y r para lo cual se tendrán que analizar sus diferentes alternativas.

Ensayando una combinación arbitraria de los valores de p y r

Si $p = 0$ y $r = 0$

		1a.premisa				2a. premisa			3a.premisa			4a.premisa	Conclusión
p	r	p	$\longrightarrow$	$\sim$	q	p	V	r	r	$\longrightarrow$	s	s	q
			1				1			1		1	0
					0						1		
				1									
0	0	0				0		0	0				
deducción							0						

En la 2a. premisa se ha presentado una contradicción, sin embargo no se puede afirmar que los valores asignados originalmente a las premisas y a la conclusión son inadmisibles. Ya que los valores de p y r constituyen sólo una de las posibles combinaciones de sus valores de verdad.

p	r	
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	Combinación considerada en el análisis.

Para poder asegurar que el argumento es válido, deberán existir contradicciones para las demás combinaciones de valores de verdad de p y r.

Incluyendo en la tabla otra combinación arbitraria de los valores de verdad de p y r:

		1a.premisa	2a.premisa	3a.premisa	4a.premisa	Conclusión
p	r	$p \longrightarrow \sim q$	$p \vee r$	$r \longrightarrow s$	s	q
		1	1	1	1	0
		0		1		
		1				
1	1	1	1 1	1		
deducción		1	1	1		

Como no se presentó contradicción alguna se puede asegurar que basta que exista un caso en el que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa para que un argumento sea INVALIDO.

4.5 PRUEBA CONDICIONAL.

Un caso particular en la demostración de argumentos es la prueba condicional, basada en la equivalencia lógica de la ley de exportación.

La prueba condicional se aplica usualmente a los argumentos cuya conclusión es una proposición condicional.

Si la definición de un argumento se expresa como . . . .

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \longrightarrow C$$

Al sustituir la conjunción de las premisas con P y a la conclusión con la proposición condicional $Q \longrightarrow R$, el argumento toma la forma de la ley de exportación . . . .

$$P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)$$

.... cuya equivalencia es:

$$(P \wedge Q) \longrightarrow R$$

Si P representa a la conjunción de las premisas, la ley de exportación agrega, como premisa adicional, el antecedente de la conclusión.

$$[(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \wedge Q] \longrightarrow R$$

Al aplicar en un argumento la prueba condicional, el antecedente de la conclusión se convierte en otra premisa y el consecuente será la conclusión.

P_1	(P)	
P_2	(P)	
- - - - -		
$P_n \vdash Q \longrightarrow R$	(P,C)	PRUEBA CONDICIONAL
$Q \vdash R$	(P,C)	

Demostración de la ley de transitividad empleando la prueba condicional.

Sea el argumento

1.	$Q \longrightarrow P$	(P)
2.	$P \longrightarrow R \vdash Q \longrightarrow R$	(P,C)
3.	$Q \qquad \vdash R$	prueba condicional
4.	P	1,3 (mpp)
5.	R	2,4 (mpp)

Ejemplos

Probar la validez de los siguientes argumentos formales

1.

1.	$(p \wedge q) \longrightarrow r$		(P)
2.	$(p \longrightarrow r) \longrightarrow s$		(P)
3.	$\sim q \vee t \vdash q \longrightarrow (s \wedge t)$		(P,C)
4.	$q \vdash (s \wedge t)$		(pr cond)
5.	t	3,4	(mtp)
6.	$(q \wedge p) \longrightarrow r$	1	(conm)
7.	$q \longrightarrow (p \longrightarrow r)$	6	(exp)
8.	$p \longrightarrow r$	7,4	(mpp)
9.	s	2,8	(mpp)
10.	$s \wedge t$	9,5	(conj)

2.

1.	$(p \vee q) \longrightarrow r$	(P)
2.	$r \longrightarrow (p \vee s)$	(P)
3.	$s \longrightarrow t \vdash (\sim p \wedge \sim t) \longrightarrow \sim q$	(P,C)
4.	$\sim p \wedge \sim t \vdash \sim q$	(pr cond)
5.	$(p \vee q) \longrightarrow (p \vee s)$	1,2 (trans)
6.	$\sim t$	4 (conm,simpl)
7.	$\sim s$	3,6 (mtt)
8.	$\sim p$	4 (simpl)
9.	$\sim p \wedge \sim s$	8,7 (conj)
10.	$\sim (p \vee s)$	9 (De M)
11.	$\sim (p \vee q)$	5,10 (mtt)
12.	$\sim p \wedge \sim q$	11 (De M)
13.	$\sim q$	12 (conm, simpl)

4.6. PRUEBA CONDICIONAL CON NIVELES DE HIPOTESIS

Una variante de la prueba condicional es realizarla partiendo de una hipótesis que puede estar contenida en la conclusión y demostrar que partiendo de dicha hipótesis y con las premisas del argumento se deduce la conclusión.

Es importante aclarar que un nivel de hipótesis es una prueba que se hace a nivel de ensayo, para tratar de acercarse a la conclusión. Si las consecuencias de la hipótesis llevan a la conclusión, se acepta y se descarga la prueba en forma de condicional.

Por ejemplo: Demostrar el siguiente argumento

1.		$(P \longrightarrow Q) \longrightarrow R$	(P)	
2.		$R \longrightarrow S$	(P)	
3.		$Q \vee R \vdash \sim S \longrightarrow (R \vee T)$	(P,C)	
	Nivel de hipótesis			
4.	4.1	$\sim S$	Hipótesis (antecedente de la conclusión)	
	4.2	$(P \longrightarrow Q) \longrightarrow S$	1,2	(trans)
	4.3	$\sim (P \longrightarrow Q)$	4.2,4.1	(mtt)
	4.4	$\sim (\sim P \vee Q)$	4.3	(cond)
	4.5	$P \wedge \sim Q$	4.4	(DeM)
	4.6	$\sim Q$	4.5	(conm,simpl)
	4.7	R	3,4.6	(mtp)
	4.8	$R \vee T$	4.7	(ad)
5.		$\sim S \longrightarrow (R \vee T)$	4.	(pr.cond)

Prueba Condicional

En la prueba condicional (nivel de hipótesis 4) se ha deducido $R \vee T$ (renglón 4.8) de la hipótesis $\sim S$ (renglón 4.1). En el renglón 5 fuera del nivel de hipótesis se expresa la prueba condicional realizada. Llámase a esta operación, descarga de la hipótesis.

Ejercicio

1.	$p \vee q$	(P)
2.	$q \longrightarrow (\sim r \wedge s) \vdash r \longrightarrow p$	(P)
3.	3.1 $\sim p$	hipótesis
	3.2 q	1,3.1 (mtp)
4.	$\sim p \longrightarrow q$	3 (pr.cond)
5.	5.1 q	hipótesis
	5.2 $\sim r \wedge s$	2,5.1 (mpp)
	5.3 $\sim r$	5.2 (simpl)
6.	$q \longrightarrow \sim r$	5 (pr.cond)
7.	$\sim p \longrightarrow \sim r$	4,6 (trans)
8.	$r \longrightarrow p$	7 (contr)

NOTAS

1) En este argumento formal se realizaron dos pruebas condicionales para su demostración, las cuales son independientes una de otra. Las descargas de cada nivel pueden utilizarse en toda la prueba, excepto - dentro de los niveles de hipótesis. En el ejercicio, los renglones 4 y 6.

2) Los renglones intermedios en cada nivel de hipótesis no podrán ser utilizados fuera del mismo. En el ejercicio, los renglones 3.2, 5.2 y 5.3

4.7. PRUEBA CONDICIONAL POR REDUCCION AL ABSURDO.

Este método consiste en elegir como hipótesis la negación de la conclusión. Si en el desarrollo de la prueba se obtiene alguna contradicción podrá suspenderse dando por válido el argumento sin necesidad de continuar su demostración.

1.		$p \rightarrow s$	(P)	
2.		$p \wedge q$	(P)	
3.		$(s \wedge r) \rightarrow \sim t$	(P)	
4.		$q \rightarrow r \vdash \sim t$	(P,C)	
5.	5.1.	$t \leftarrow$	(hip)	(negación de la conclusión)
	5.2.	p	2	(simpl)
	5.3.	s	1,5.2	(mpp)
	5.4.	q	2	(conm,simpl)
	5.5.	r	4,5.4	(mpp)
	5.6.	$s \wedge r$	5.3,5.5	(conj)
	5.7.	$\sim t \leftarrow$	3,5.6	(mpp)
6.		$t \rightarrow \sim t$	5	(pr cond)
7.		$\sim t \vee \sim t$	6	(cond)
8.		$\sim t$	7	(idem)

Contradicción

En la prueba de este argumento se tomó como hipótesis la negación de la conclusión, encontrando la contradicción de la hipótesis en el renglón 5.7 y la conclusión al final de la prueba. A este tipo de PRUEBA CONDICIONAL se le denomina POR REDUCCION AL ABSURDO.

Ejercicio.

1.		$(t \rightarrow m) \wedge (w \rightarrow n)$		(P)	
2.		$t \vee w \vdash m \vee n$		(P)	
3.	3.1.	$\sim (m \vee n)$		(hip)	
	3.2.	$\sim m \wedge \sim n$		3.1	(DeM)
	3.3.	$\sim m$		3.2	(simpl)
	3.4.	$t \rightarrow m$		1	(simpl)
	3.5.	$\sim t$		3.4,3.3	(mtt)
	3.6.	w		2,3.5	(mtp)
	3.7.	$w \rightarrow n$		1	(conm,simpl)
	3.8.	n	Contradicción	3.7,3.6	(mpp)
	3.9.	$\sim n$		3.2	(conm,simpl)
	3.10.	$\sim w$		3.7,3.9	(mtt)
	3.11.	$w \vee t$		2	(conm)
	3.12.	t		3.11,3.10	(mtp)
	3.13.	m		3.4,3.12	(mpp)
	3.14.	$m \wedge n$		3.13,3.8	(conj)
4.		$\sim (m \vee n) \rightarrow (m \wedge n)$		3	(pr. cond)
5.		$(m \vee n) \vee (m \wedge n)$		4	(cond)
6.		$(m \vee n \vee m) \wedge (m \vee n \vee n)$		5	(distr)
7.		$(m \vee m \vee n)$		6	(simpl, conm)
8.		$m \vee n$		7	(idem)

En este ejemplo se presentó una contradicción en los renglones 3.8 y 3.9. Sin embargo como ejercicio se ha continuado la prueba hasta obtener la conclusión del argumento.

HOJA DE TRABAJO CAPITULO II

I. DEMOSTRAR LOS SIGUIENTES ARGUMENTOS CON REGLAS DE INFERENCIA.

1. Si es un ácido o una base, es un producto químico. Si es vinagre, es un ácido. Por consiguiente, si no es un producto natural entonces, si es vinagre, es un producto químico.

1.	(P)
2.	(P,C)
3.	
4.	
5.	
6.	
.	
.	
.	

HOJA DE TRABAJO

2. 1. $(P \vee \sim M) \longrightarrow (R \wedge T)$ (P)

2. $\sim R \vdash \sim(\sim M \vee R)$ (P,C)

3. $\sim R \vee \sim T$ 2 (ad)

4. $\sim(R \wedge T)$ 3 (DeM)

5. $\sim(P \vee \sim M)$ 1,4 (mtt)

6. $\sim P \wedge M$ 5 (DeM)

7. M 6 (conm, simpl)

8. $M \wedge \sim R$ 7,2(conj)

9. $\sim(\sim M \vee R)$ 8 (DeM)

3. 1. $S \longrightarrow (P \vee \sim Q)$ (P)

2. $P \longrightarrow (R \wedge \sim Q)$ (P)

3. $Q \vdash \sim S$ (P,C)

HOJA DE TRABAJO

4.

1.	$(P \vee R) \wedge (P \vee Q)$	(P)
2.	$\sim(Q \wedge R)$	(P)
3.	$\sim P \vee (S \vee T)$	(P)
4.	$\sim(S \vee T) \longrightarrow M \vdash M$	(P,C)

5.

1.	$[P \longrightarrow (\sim P \vee Q)] \longrightarrow R$	(P)
2.	$\sim P \vdash R \vee S$	(P,C)
3.	$(\sim P \vee \sim P \vee Q) \longrightarrow R$	1 (cond)
4.	$(\sim P \vee Q) \longrightarrow R$	3 (idem)
5.	$\sim(\sim P \vee Q) \vee R$	4 (cond)
6.	$R \vee (P \wedge \sim Q)$	5 (conm, DeM)
7.	$(R \vee P) \wedge (R \vee \sim Q)$	6 (distr)
8.	$R \vee P$	7 (simpl)
9.	$P \vee R$	8 (conm)
10.	R	9,2 (mtp)
11.	$R \vee S$	10 (ad)

HOJA DE TRABAJO

6. 1. $R \longleftrightarrow S$ (P)

2. $R \longrightarrow (\sim S \vee \sim R) \vdash \sim (R \vee S)$ (P,C)

7. 1. $(P \longrightarrow Q) \vee (\sim Q \vee R)$ (P)

2. $\sim R \vee P$ (P)

3. $S \vee Q \vdash S$ (P,C)

HOJA DE TRABAJO

8. 1. $S \longrightarrow (Q \wedge R)$ (P)

2. $\sim Q$ (P)

3. $P \longrightarrow (S \vee Q) \vdash \sim P$ (P,C)

9. 1. $\sim P \vee Q$ (P)

2. $\sim R \longrightarrow \sim Q$ (P)

3. $\sim R \vee S$ (P)

4. $(\sim P \vee S) \longrightarrow (P \vee T)$ (P)

5. $\sim P \vdash T$ (P,C)

HOJA DE TRABAJO

II. DEMOSTRAR QUE LA LEY DE EXPORTACION ES UNA TAUTOLOGIA

	$[(p \wedge q) \longrightarrow r] \longleftrightarrow [p \longrightarrow (q \longrightarrow r)]$
	1
	1
	1
	1
	0
	0
	0
	0
ETAPAS	1a. 1a. 1a. 1a. 1a. 1a.

III. PROBAR LA VALIDEZ DEL SIGUIENTE ARGUMENTO POR EL METODO DE REDUCCION AL ABSURDO.

	Premisa	Premisa	Premisa	Premisa	Conclusión
	$S \longrightarrow I$	$I \longrightarrow (G \vee P)$	$P \longrightarrow Q$	$\sim G \wedge \sim Q$	$\sim S$
Ho	1	1	1	1	0

HOJA DE TRABAJO

IV. REALIZAR LA SIGUIENTE PRUEBA POR REDUCCION AL ABSURDO CON ANALISIS PARCIAL DE LA TABLA DE VERDAD DE LAS VARIABLES CUYOS VALORES NO SE DEDUZCAN DE LA HIPOTESIS.

1. INDICAR LOS VALORES DE ACUERDO A LA SECUENCIA EXPRESADA A PARTIR DE LOS VALORES DE VERDAD ASIGNADOS.

P	Q	T	$(P \longrightarrow Q) \wedge (R \longrightarrow S)$	$(T \wedge \sim Q) \vee (N \wedge \sim S)$	$(P \longrightarrow \sim T) \wedge (R \longrightarrow \sim N)$
			1	1	0
			1 1		
1	1	1	1 1	1 1	1 1

CONCLUSION: EL ARGUMENTO ES __________ Y LOS VALORES ASIGNADOS A LAS PREMISAS Y A LA CONCLUSION SON __________

HOJA DE TRABAJO

2. Realizar la misma prueba suponiendo otros valores de verdad para P, Q, T.

P	Q	T	$(P \longrightarrow Q) \wedge (R \longrightarrow S)$	$(T \wedge \sim Q) \vee (N \wedge \sim S)$	$(P \longrightarrow \sim T) \wedge (R \longrightarrow \sim N)$
			1	1	0
			1 1		

HOJA DE TRABAJO

V. Sea el argumento formal:

1. $p \longrightarrow q$

2. $(p \vee r) \wedge q$

$\vdash$

3. $p \wedge r$

Realizar la prueba de reducción al absurdo con análisis parcial de tabla de verdad.

HOJA DE TRABAJO

VI. DEMOSTRAR EL SIGUIENTE ARGUMENTO POR PRUEBA CONDICIONAL

1.	$(P \vee Q) \longrightarrow R$	(P)
2.	$S \longrightarrow P \vdash \sim T \longrightarrow (S \longrightarrow R)$	(P,C)
3.	$\sim T \vdash S \longrightarrow R$	(pr cond)
4.		
5.		
6.		
.		
.		
.		

VII. DEMOSTRAR CON NIVELES DE HIPOTESIS EL SIGUIENTE ARGUMENTO FORMAL .

1.	$(c \wedge \sim t) \longrightarrow p$	(P)
2.	$m \longrightarrow c$	(P)
3.	$m \wedge \sim p \vdash r \longrightarrow (m \wedge t)$	(P,C)
4.	4.1	(hip)
	4.2	
	4.3	
	.	
	.	
	.	
	.	
	.	
5.		

CONTENIDO DEL CAPITULO III TEORIA DE CONJUNTOS

CAPITULO III TEORIA DE CONJUNTOS

1. CONJUNTO

Un conjunto es una lista, colección o agrupamiento de individuos u objetos que pueden considerarse como una unidad.

2. ELEMENTO

Llámase elemento o miembro de un conjunto a los objetos o individuos que forman parte de un conjunto.

Por ejemplo: En un conjunto de letras, cada una de ellas es un elemento del conjunto.

3. DESCRIPCION

Un conjunto puede describirse enumerando sus elementos o bien - enunciando sus propiedades. A la primera se le llama DESCRIPCION EXTENSIONAL y a la segunda DESCRIPCION INTENSIONAL.

Por ejemplo: el conjunto de los números dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, se describe en forma extensional si se enumeran como en este caso todos los números que son dígitos; o bien su descripción intensional basada en sus propiedades a saber:

El conjunto de los números de una sola cifra.

4. REPRESENTACION

Es común denotar los conjuntos con letras mayúsculas iniciales del alfabeto tales como: A, B, C, D, E, ... para un conjunto determinado, y con letras finales del alfabeto para un conjunto cualquiera U, V, X, ...

De igual manera los elementos de un conjunto se representan con letras minúsculas iniciales del alfabeto para los elementos particulares y letras minúsculas finales para cualquier elemento del conjunto.

La descripción extensional de un conjunto se representa en forma tabular, es decir, escribiendo todos los elementos entre llaves $\{ \}$, separando cada elemento por comas.

$$D = \{ 2, 4, 6, 8 \}$$

D representa el conjunto de los números dígitos que son pares.

Si la descripción es intensional, es decir, que se refiere a los mismos números en el conjunto D pero sin enumerarlos sino haciendo mención a su propiedad, toma la siguiente representación:

$$D = \{ x/x \text{ es par y es dígito} \}$$

lo que se lee "D es el conjunto de las x, tales que x es un número dígito y es par"; a esta forma de representación se le denomina forma - por comprensión o constructiva.

La expresión literal "tales que" suele representarse con una barra vertical u oblicua.

Al referirse a un elemento o miembro de un conjunto se utiliza la siguiente representación: $x \in A$ y se lee " x pertenece a A" o bien - " x está en A". Si por el contrario un elemento x no es elemento del conjunto A, es decir que A no tiene a x entre sus elementos se representa en forma similar pero tachado el símbolo de pertenencia $x \notin A$.

En general para indicar lo contrario o la negación del significado de un símbolo se emplea una línea vertical u oblicua que tache el símbolo en cuestión.

Por ejemplo:

Si $D = \{2, 4, 6, 8\}$, representa la descripción extensional de los números dígitos que son pares. Entonces:

$1 \notin D$, $2 \in D$, $3 \notin D$, $4 \in D$, $5 \notin D$, $6 \in D$, $7 \notin D$, $8 \in D$, $9 \notin D$

o bien si $D = \{ x/x \text{ es dígito } y \cdot x \text{ es par} \}$, entonces

$1 \notin D$, $3 \notin D$, $5 \notin D$, $7 \notin D$, $9 \notin D$.

5. CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Se dice que un conjunto es finito si el número de elementos que lo componen es asignable.

Por ejemplo: el conjunto de los meses del año

$$L = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$$

Si el número de elementos no puede definirse por su magnitud, el conjunto es infinito.

Por ejemplo: el conjunto de todos los números naturales.

$$N = \{ 1, 2, 3, 4, 5, ... \infty \}$$

6. IGUALDAD DE CONJUNTOS

Un conjunto es igual a otro conjunto si tiene los mismos elementos, sin importar el orden y el número de veces que lo contenga.

$$A = B$$

Ejemplos:

Sean los conjuntos

a) $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ y $B = \{ 4, 2, 4, 3, 1 \}$

Son iguales, es decir $A = B$ ya que tienen los mismos elementos.

b) $E = \{ x/x$ es entero positivo y $x < 10 \}$ y
$D = \{ x/x$ es dígito $\}$

$$E = D$$

7. CONJUNTO VACIO

Se define como conjunto vacío o nulo al conjunto que carece de elementos y su representación es el símbolo $\emptyset$.

Ejemplos:

a) A Es el conjunto de los estudiantes con ojos rojos

$A = \{ x/x$ tienen ojos rojos $\}$

A es el conjunto vacío ($A = \emptyset$)

b) $B = \{ x/x^2 - 2 = 2 \wedge x$ es impar $\}$

B es el conjunto vacío ($B = \emptyset$)

c) C = x/x es capital de estado y puerto de la República Mexicana

C es el conjunto vacío ($C = \emptyset$)

8. SUBCONJUNTOS

Si cada elemento de un conjunto A es también un elemento de un conjunto B entonces se dice que el conjunto A es un subconjunto de B. Esto se puede representar como:

A es un subconjunto de B, si $(x \in A) \longrightarrow (x \in B)$

Para indicar que todos los elementos de A son elementos de B, se emplea la notación:

$$A \subset B$$

Y se lee "A está contenida en B".

Ejemplos:

a) El conjunto $A = \{ 2, 4, 6 \}$ es un subconjunto del conjunto $B = \{ 6, 5, 4, 3, 2, 1 \}$, ya que 2, 4, 6 de A pertenecen también a B.

b) Si $A = \{ x/x \text{ es animal} \}$ y $M = \{ x/x \text{ es mortal} \}$ entonces A es un subconjunto de M, es decir $A \subset M$

c) Si $A = \{ 1, 2, 3, 4, \}$ y $B = \{ 5, 6, 7, 8, 9 \}$ entonces A no es subconjunto de B, es decir $A \not\subset B$, pero si puede decirse que $\emptyset \subset B$, o sea que el conjunto vacío es un subconjunto de todo conjunto.

Cuando dos conjuntos A y B son iguales se puede expresar indicando que cada uno está contenido en el otro:

$$A \subset B \wedge B \subset A$$

9. SUBCONJUNTO PROPIO

Llámase subconjunto propio al conjunto de elementos tales que están contenidos en otro conjunto sin llegar a ser iguales.

Por ejem: $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

es decir $A \subset B$ y $A \neq B$ se representa solamente como

$A \subset B$ y se lee "A es un subconjunto propio de B".

10. SUBCONJUNTO IMPROPIO

Cuando un conjunto pertenece a otro conjunto y sus elementos son los mismos se llama subconjunto impropio.

Sea $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{2, 4, 8, 6, 2\}$

$$A \subseteq B$$

y se lee "A es un subconjunto impropio de B".

11. COMPARABILIDAD

Dos conjuntos son comparables si uno de los conjuntos es - subconjunto del otro, o sea si $A \subset B$ ó $B \subset A$

Sea $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$

Como A es subconjunto de B entonces ambos conjuntos son comparables.

12. CONJUNTOS DISJUNTOS O AJENOS

Cuando dos conjuntos no tienen elementos comunes entre ambos se dice que ambos conjuntos son disjuntos o ajenos.

Sea. $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$ A y B son -

disjuntos o ajenos.

13. CONJUNTO UNIVERSAL

Para poder establecer propiedades de los conjuntos es necesario definir el dominio o universo del conjunto, a este conjunto se le llama CONJUNTO UNIVERSAL y suele representarse con una u mayúscula o con una letra mayúscula que represente al universo del discurso o conjunto de referencia.

Por ejemplo:

$$A = \{ x/x \text{ es animal} \} \quad y \quad B = \{ x/x \text{ es hombre} \}$$

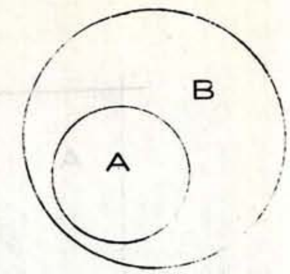
el universo del discurso es el de los mortales: la letra M representará el universo del discurso.

14. DIAGRAMAS DE EULER - VENN

Un conjunto se puede representar en una gráfica denominada diagrama de Euler - Venn en honor del matemático suizo alemán - Leonhard Euler (1707-1783) y del también matemático inglés del siglo XIX, Jonh Venn quien perfeccionó los diagramas iniciados por Euler. A todos los diagramas que se presentan a continuación, a base de intersección de círculos,se les llamará diagramas de Venn.

15. REPRESENTACIONES

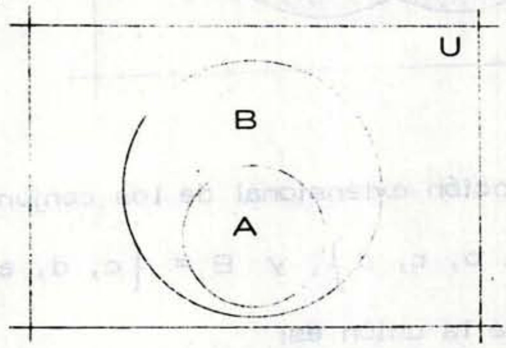
Un conjunto se representa con un área plana, por lo general delimitada por una circunferencia.



Por ejemplo:

Si $A \subset B$ y $A \neq B$

Al pertenecer estos conjuntos a un universo determinado, éste se repre senta con un rectángulo y dentro de él, los conjuntos mencionados.



16. OPERACIONES FUNDAMENTALES CON CONJUNTOS

Las principales operaciones con conjuntos son la UNION, INTERSECCION Y DIFERENCIA. Estas operaciones se comportan de manera semejante a las operaciones de aritmética de adición, multiplicación y sustracción de números. Existen otras operaciones tales como: COMPLEMENTO, LEY DE LA TRANSITIVIDAD, LEY DE DE MORGAN, LEY DE LA DISTRIBUTIVIDAD, etc.

16.1 UNION

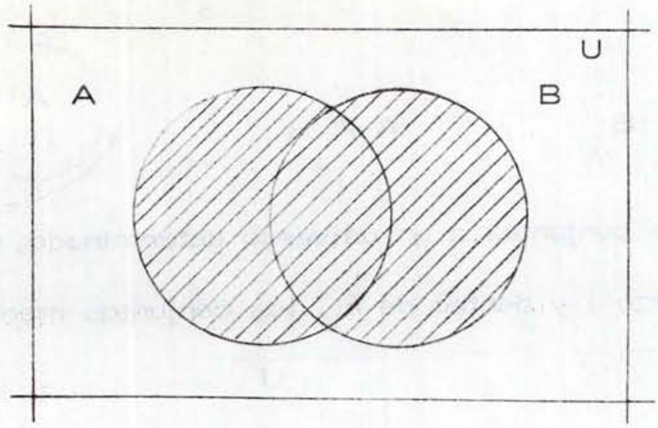
La unión de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A ó a B ó a ambos.

16.1.1. SIMBOLO

El símbolo que se emplea para representar la unión es una u mayúscula redondeada en su base. U

16.1.2. REPRESENTACION

La representación de la unión de dos conjuntos dentro de un universo determinado es mediante un achurado de dos círculos que expresan la unión de los conjuntos A y B.



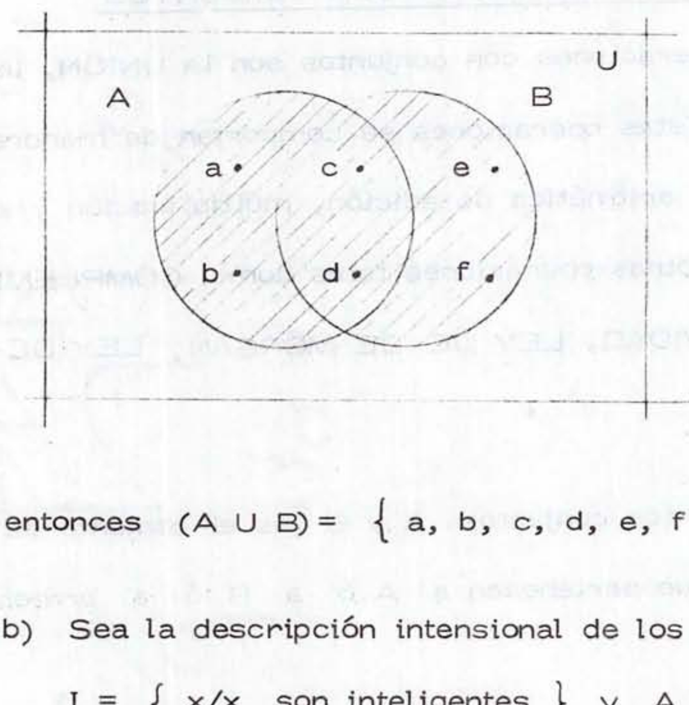
(A U B) y se lee "A unión B"

Ejemplos:

a) Sea la descripción extensional de los conjuntos

$$A = \left\{ a, b, c, d \right\} \text{ y } B = \left\{ c, d, e, f \right\}$$

el diagrama de la unión es:

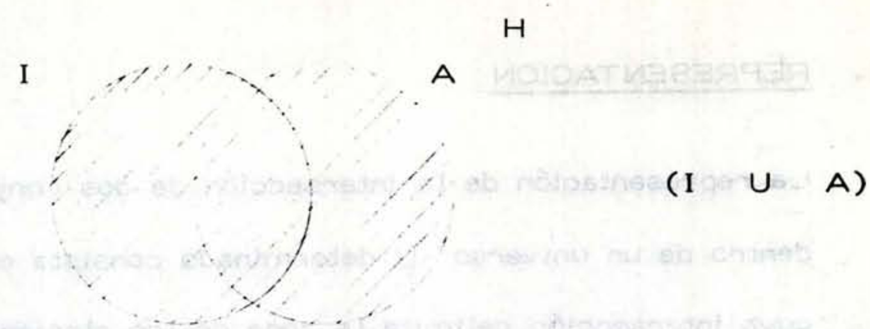


entonces $(A \cup B) = \left\{ a, b, c, d, e, f \right\}$

b) Sea la descripción intensional de los conjuntos

$I = \left\{ x/x \text{ son inteligentes} \right\}$ y $A = \left\{ x/x \text{ son amables} \right\}$ dentro del universo de los hombres.

El diagrama de la unión es:



Su expresión literal será:

$(I \cup A) = \left\{ x/x \text{ es inteligente o amable} \right\}$, si

$x \in (I \cup A) \longrightarrow (x \in I \vee x \in A)$

De la unión de dos conjuntos se deduce que $(A \cup B) = (B \cup A)$ es decir que A y B son subconjuntos de $(A \cup B)$, lo que puede expresarse como:

$$A \subset (A \cup B) \quad y \quad B \subset (A \cup B)$$

16.2. INTERSECCION

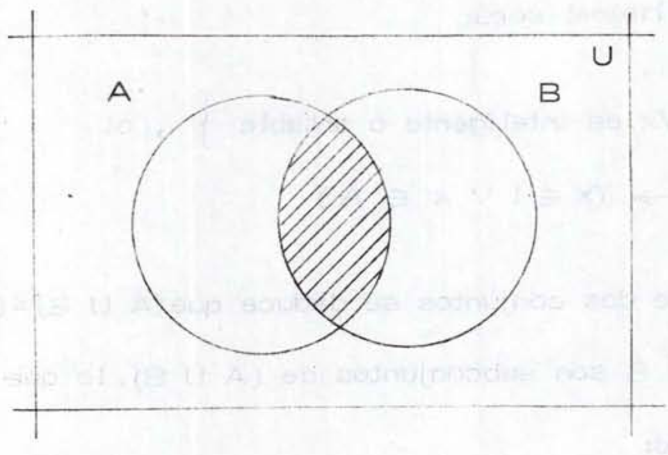
La intersección de dos conjuntos es el conjunto de los elementos que son comunes a los dos ,es decir aquellos elementos que pertenecen a ambos conjuntos.

16.2.1. SIMBOLO

El símbolo que se émplea para representar la intersección es una u mayúscula invertida. $\cap$

16.2.2. REPRESENTACION

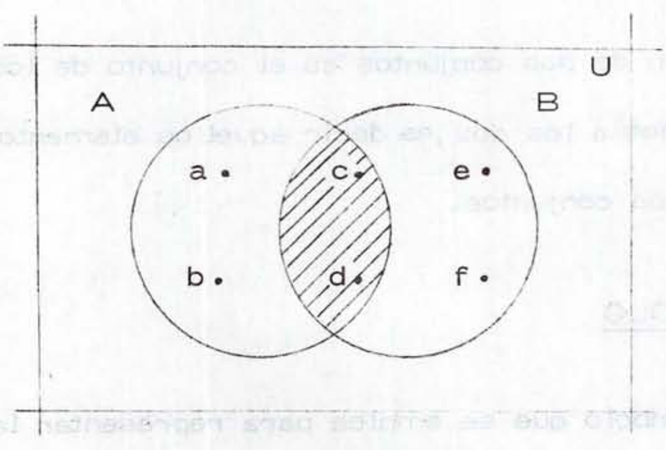
La representación de la intersección de dos conjuntos A y B dentro de un universo U determinado consiste en dos círculos cuya intersección delimita la zona de los elementos que son comunes a ambos conjuntos.



$(A \cap B)$ y se lee "A intersección B".

Ejemplos: a) Si $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{c, d, e, f\}$

Su diagrama.



entonces $(A \cap B) = \{c, d\}$

La intersección de A y B también se puede expresar como:

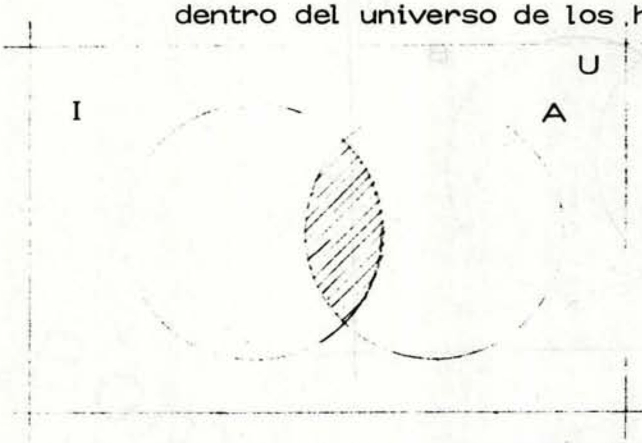
$(A \cap B) = \{ x/x \text{ está en } A \text{ y } x \text{ está en } B \}$, si

$x \in (A \cap B) \longrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$

b) $I = \{ x/x \text{ son inteligentes} \}$

$A = \{ x/x \text{ son amables} \}$

dentro del universo de los hombres.



$(I \cap A) = \{ x/x \text{ es inteligente y amable} \}$ si

$x \in (I \cap A) \longrightarrow (x \in I \wedge x \in A)$

16.3. DIFERENCIA

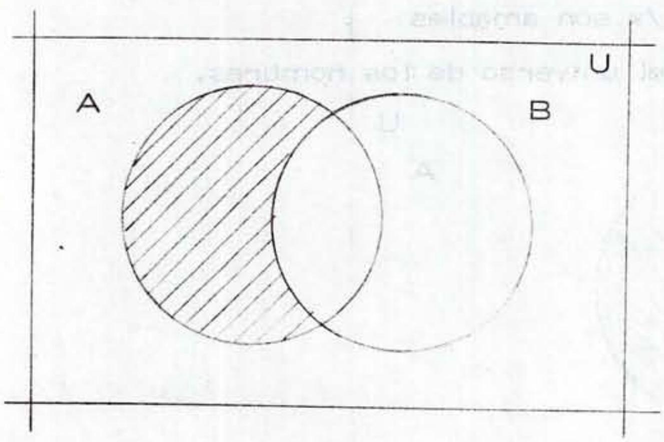
La diferencia de dos conjuntos es el conjunto de elementos que pertenecen sólo a uno de ellos.

16.3.1. SIMBOLO

El símbolo que se emplea para esta representación es el mismo de la sustracción. (-)

16.3.2. REPRESENTACION

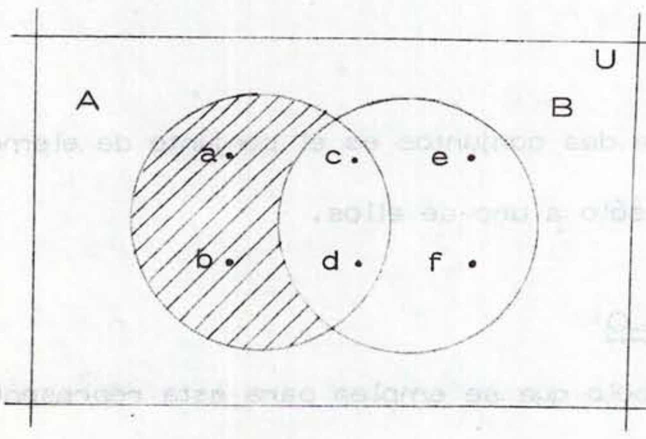
La representación de la diferencia de dos conjuntos dentro de un universo determinado consiste en achurar uno de los dos círculos sin tocar la zona de intersección.



$(A - B)$ y se lee "A diferencia B" ó "A menos B".

Ejemplos:

a) $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{c, d, e, f\}$



$(A - B) = \{a, b\}$

Se expresa también como:

$(A - B) = \{ x/x$ **está en** A **y no está en** $B \}$, si

$x \in (A - B) \longrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$

b) $I = \{ x/x$ **es inteligente** $\}$ y $A = \{ x/x$ **es amable** $\}$

dentro del universo de los hombres.

entonces:

$(I - A) = \{ x/x$ **es inteligente y no es amable** $\}$, si

$x \in (I - A) \longrightarrow (x \in I \wedge x \notin A)$

16.4. COMPLEMENTO

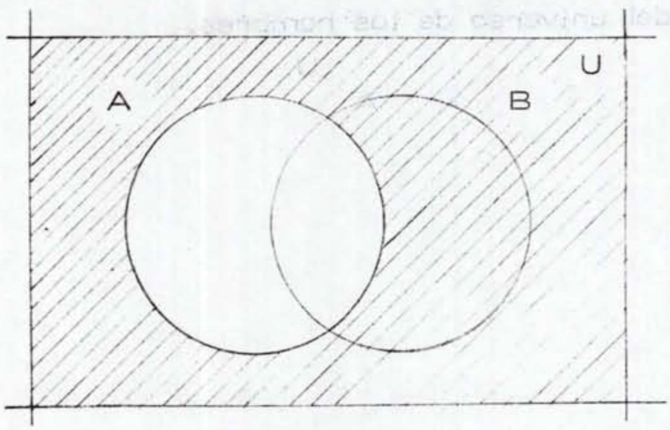
El complemento de un conjunto es el conjunto de los elementos que no pertenecen a dicho conjunto.

16.4.1. SIMBOLO

Se simboliza el complemento de un conjunto con una línea horizontal sobre la letra mayúscula que represente al conjunto, o sobre la operación en cuestión.

16.4.2. REPRESENTACION

La representación del complemento de un conjunto dentro de un universo determinado consiste en achurar toda la zona que no corresponda al conjunto de referencia.



$\overline{A}$ y se lee= "lo que no pertenece a A"

A este tipo de complemento que incluye al universo del discurso se le llama COMPLEMENTO ABSOLUTO

Por ejemplo: $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$ números pares,

entonces $\overline{A} = \{1, 3, 5, \ldots\}$ números impares

siendo el conjunto universal el de los números naturales

1, 2, 3, ...

Se puede definir también como $\overline{A} = \{x/x \in U \wedge x \notin A\}$

o bien $\overline{A} = \{x/x \notin A\}$

Existe otro tipo de complemento llamado COMPLEMENTO RELATIVO.

Se llama complemento relativo al complemento de un conjunto con respecto a otro que no sea el conjunto universal.

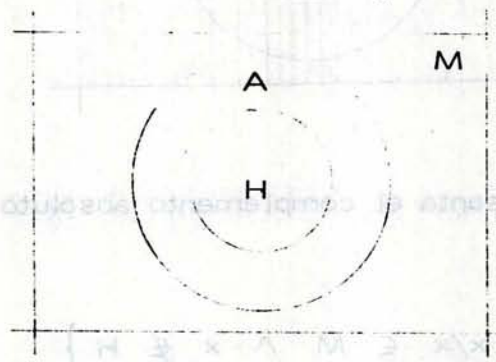
Por ejemplo:

Sea M = El universo de los mortales

A = El conjunto de los animales

H = El conjunto de los hombres

Su representación es:

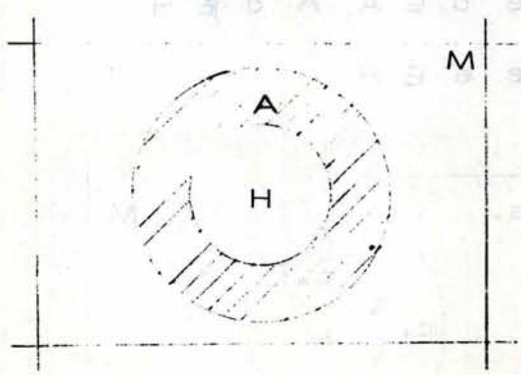


$(A - H)$ es el complemento relativo de H respecto a A y se expresa:

$$(A - H) = \{ x/x \in A \wedge x \notin H \}$$

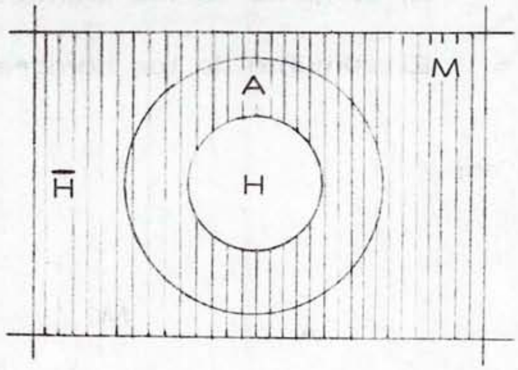
o bien

$$(A - H) = \{ x/A_x \wedge \sim H_x \}$$



El achurado inclinado representa el complemento relativo de H respecto a A.

El complemento absoluto de H es el conjunto de los mortales que no son hombres.

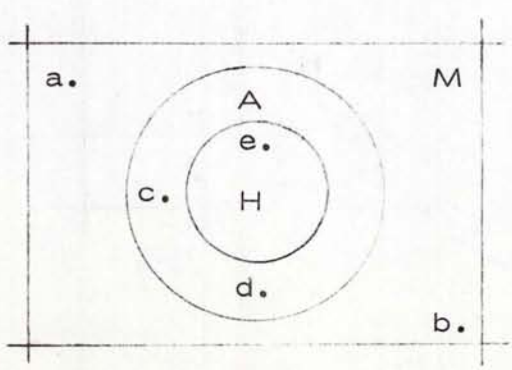


El achurado vertical representa el complemento absoluto de H y se expresa como:

$$\overline{H} = \{ x/x \in M \wedge x \notin H \}$$

Ejemplos de representación:

1. Un punto a, tal que $a \in \overline{H} \wedge a \notin A$
2. Un punto b, tal que $b \in \overline{A}$
3. Un punto c, tal que $c \in (A - H)$
4. Un punto d, tal que $d \in A \wedge d \notin H$
5. Un punto e, tal que $e \in H$



16.4.3. CARACTERISTICAS

a) La unión de cualquier conjunto A y su complemento $\overline{A}$ es el conjunto universal

$$A \cup \overline{A} = U$$

b) El conjunto A y su complemento $\overline{A}$ son disjuntos o sea que no tienen elementos comunes.

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

c) El complemento del conjunto universal (U) es el conjunto vacío ($\emptyset$), y viceversa, el complemento del conjunto vacío ($\emptyset$) es el conjunto universal (U).

$$\overline{U} = \emptyset \quad y \quad \overline{\emptyset} = U$$

d) El complemento del complemento de un conjunto A es el conjunto A mismo.

$$\left(\overline{\overline{A}} \right) = A$$

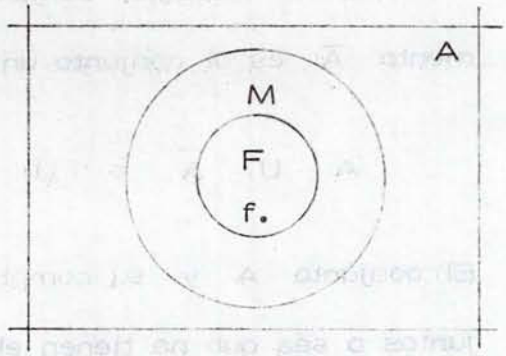
16.5. LEY DE LA TRANSITIVIDAD

Si A = El universo de los animales

M = El conjunto de los animales irracionales

F = El conjunto de los felinos

y su diagrama



F es un subconjunto de M, en términos de la inclusión puede expresarse verbalmente como: si x pertenece a F, entonces x pertenece a M, para toda x que pertenezca a A.

Por lo que se determina que $F \subset M$ y si $x \in F$, entonces $x \in M$ son expresiones equivalentes, es decir

$$F \subset M \equiv x \in F \longrightarrow x \in M$$

Si en el diagrama anterior, f representa un elemento cualquiera de F, entonces, de $f \in F$ se puede concluir que $f \in A$ por la ley de la transitividad.

En el diagrama se tiene que $F \subset M$ por lo que

si $f \in F$, entonces $f \in M$: $F_f \longrightarrow M_f$

pero también se tiene que $M \subset A$ por lo que

si $f \in M$, entonces $f \in A$: $M_f \longrightarrow A_f$

Es decir

si $F \subset M$ y $M \subset A$, entonces $F \subset A$; aplicando la ley de la transitividad en los esquemas se concluye que

si $F_f \longrightarrow M_f$ y $M_f \longrightarrow A_f$ entonces $F_f \longrightarrow A_f$

lo cual expresado como argumento queda de la siguiente forma

1. $F_f \longrightarrow M_f$
2. $M_f \longrightarrow A_f$

$\vdash$

3. $F_f \longrightarrow A_f$

y en términos de la inclusión como:

1. $F \subset M$
2. $M \subset A$

$\vdash$

3. $F \subset A$

16.6. EQUIVALENCIA

Sea

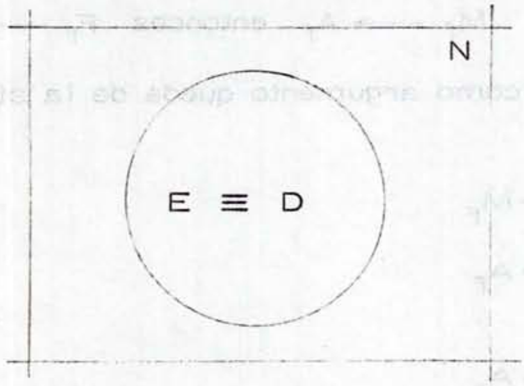
a) Todos los números enteros positivos menores que diez son dígitos

$$E \subseteq D$$

b) Todos los dígitos son números enteros positivos menores que diez

$$D \subseteq E$$

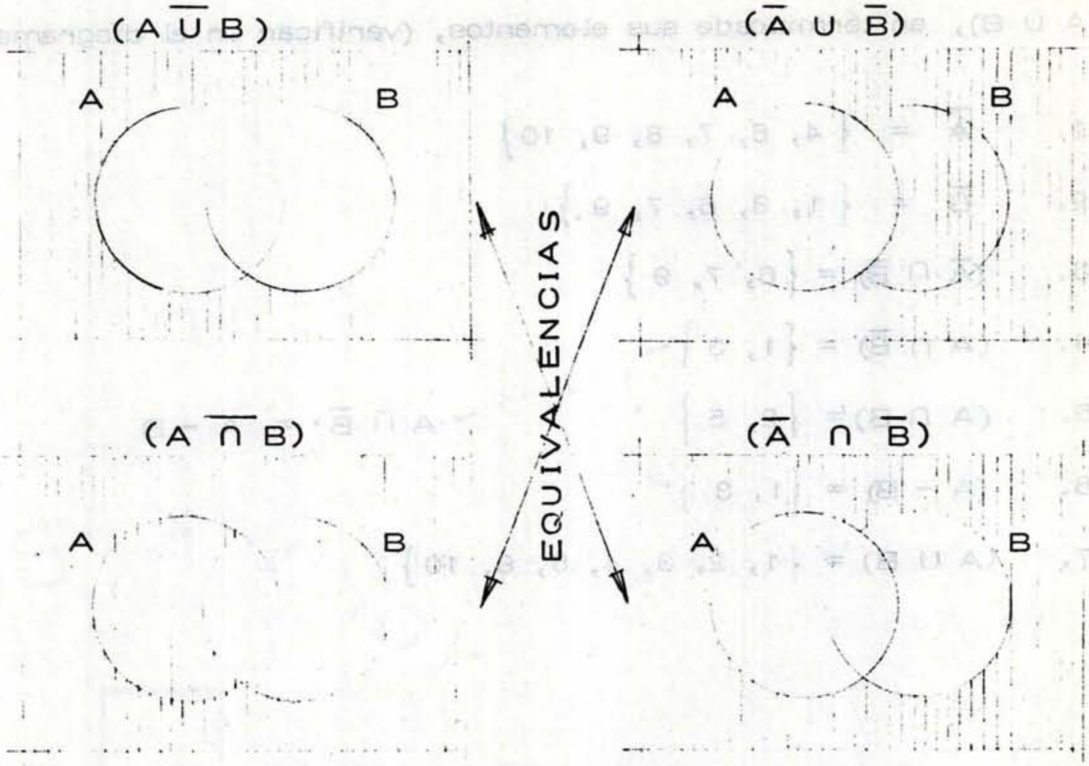
De estas inclusiones se deduce que: $E \equiv D$



es decir si $E \subseteq D$ y $D \subseteq E$ entonces $E \equiv D$

$(x \in E \longrightarrow x \in D) \wedge (x \in D \longrightarrow x \in E)$

16.7 LEYES DE DE MORGAN



$\sim(A \vee B) \equiv \sim A \wedge \sim B \quad ; \quad \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

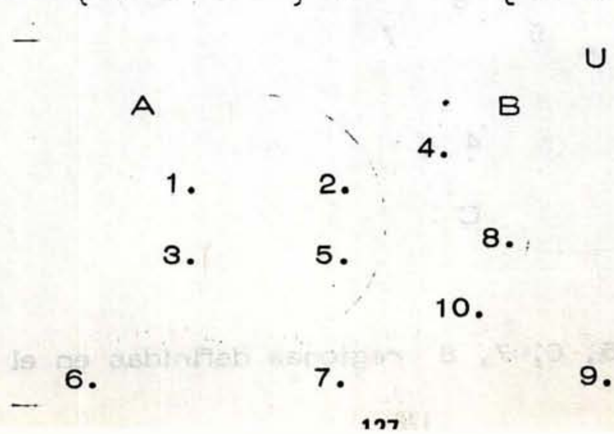
$\sim(A \wedge B) \equiv \sim A \vee \sim B \quad ; \quad \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

EJERCICIOS DE REPRESENTACION

INTERSECCION DE DOS CONJUNTOS

Si $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

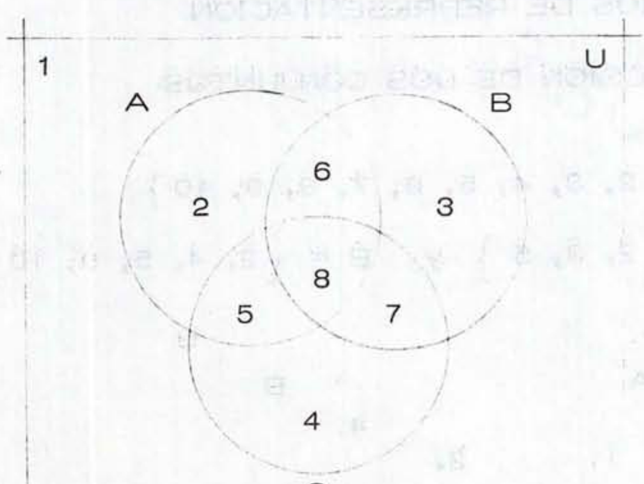
$A = \{1, 2, 3, 5\}$ y $B = \{2, 4, 5, 8, 10\}$



Expresión de los conjuntos $\overline{A}$, $\overline{B}$, $(\overline{A} \cap \overline{B})$, $(A \cap \overline{B})$, $(A \cap B)$, $(A - B)$, $(A \cup B)$, en términosde sus elementos, (verificar en el diagrama)

1. $\overline{A} = \{4, 6, 7, 8, 9, 10\}$
2. $\overline{B} = \{1, 3, 6, 7, 9\}$
3. $(\overline{A} \cap \overline{B}) = \{6, 7, 9\}$
4. $(A \cap \overline{B}) = \{1, 3\}$
5. $(A \cap B) = \{2, 5\}$ $\qquad A \cap \overline{B} = A - B$
6. $(A - B) = \{1, 3\}$
7. $(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 10\}$

INTERSECCION DE TRES CONJUNTOS



Siendo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 regiones definidas en el diagrama.

REGIONES QUE CONSTITUYEN A LOS PRINCIPALES CONJUNTOS DEL DIAGRAMA Y SUS RELACIONES

UNION				INTERSECCION
		A: 2,5,6,8		
	$A \cup B$: 2,3,5,6,7,8		$A \cap B$: 6,8	
$(A \cup B \cup C)$: 2,3,4,5,6,7,8	$A \cup C$: 2,4,5,6,7,8	B: 3,6,7,8	$A \cap C$: 5,8	$(A \cap B \cap C)$: 8
	$B \cup C$: 3,4,5,6,7,8		$B \cap C$: 7,8	
$A \cup \bar{B}$: 1, 2, 4, 5, 6, 8		C: 4,5,7,8		$A \cap \bar{B}$: 2,5
$A \cup \bar{C}$: 1, 2, 3, 5, 6, 8				$A \cap \bar{C}$: 2,6
$B \cup \bar{A}$: 1, 3, 4, 6, 7, 8				$B \cap \bar{A}$: 3,7
$B \cup \bar{C}$: 1, 2, 3, 6, 7, 8				$B \cap \bar{C}$: 3,6
$C \cup \bar{A}$: 1, 3, 4, 5, 7, 8				$C \cap \bar{A}$: 4,7
$C \cup \bar{B}$: 1, 2, 4, 5, 7, 8				$C \cap \bar{B}$: 4,5
		$\bar{A}$: 1,3,4,7		
	$\bar{A} \cup \bar{B}$: 1,2,3,4,5,7		$\bar{A} \cap \bar{B}$: 1,4	
$(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C})$: 1,2,3,4,5,6,7	$\bar{A} \cup \bar{C}$: 1,2,3,4,6,7	$\bar{B}$: 1,2,4,5	$\bar{A} \cap \bar{C}$: 1,3	$(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$: 1
	$\bar{B} \cup \bar{C}$: 1,2,3,4,5,6		$\bar{B} \cap \bar{C}$: 1,2	
		$\bar{C}$: 1,2,3,6		

$(A \cup B \cup C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = U$

$(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) \cup (A \cap B \cap C) = U$

III.

UNION

$A \cup B \cup \bar{C}$: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8

$A \cup \bar{B} \cup C$: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8

$\bar{A} \cup B \cup C$: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8

$A \cup \bar{B} \cup \bar{C}$: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8

$\bar{A} \cup B \cup \bar{C}$: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8

$\bar{A} \cup \bar{B} \cup C$: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8

A: 2, 5, 6, 8

B: 3, 6, 7, 8

C: 4, 5, 7, 8

$\bar{A}$: 1, 3, 4, 7

$\bar{B}$: 1, 2, 4, 5

$\bar{C}$: 1, 2, 3, 6

INTERSECCION

$A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$: 2

$A \cap B \cap \bar{C}$: 6

$\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$: 3

$A \cap \bar{B} \cap C$: 5

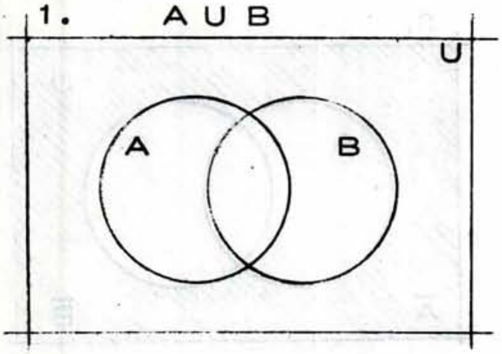
$\bar{A} \cap B \cap C$: 7

$\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$: 4

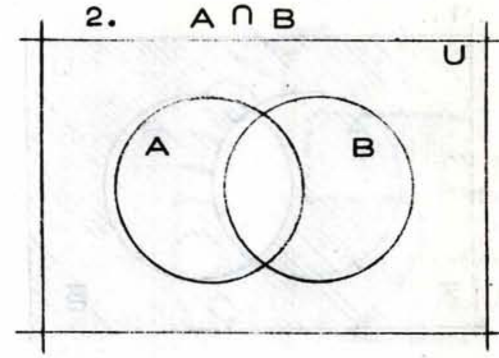
HOJA DE TRABAJO

I. REPRESENTAR LAS SIGUIENTES OPERACIONES DE DOS CONJUNTOS A Y B EN UN UNIVERSO U.

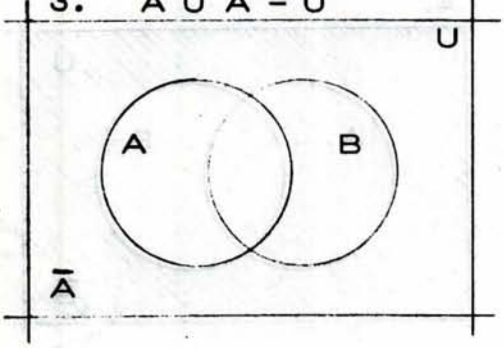
1. $A \cup B$



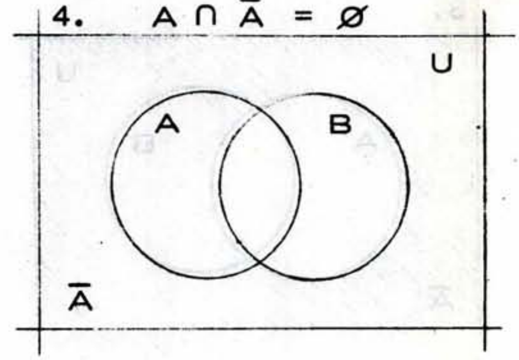
2. $A \cap B$



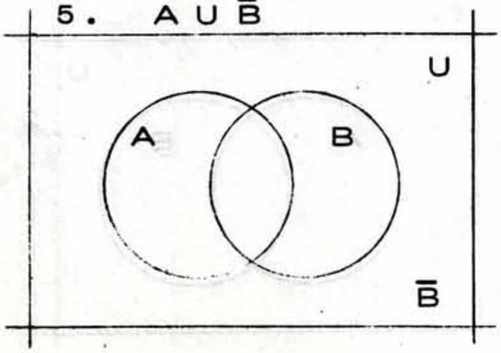
3. $A \cup \bar{A} = U$



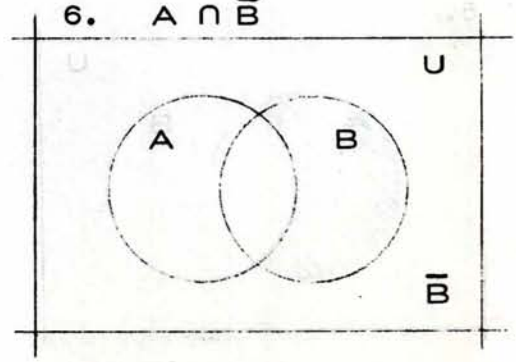
4. $A \cap \bar{A} = \varnothing$



5. $A \cup \bar{B}$



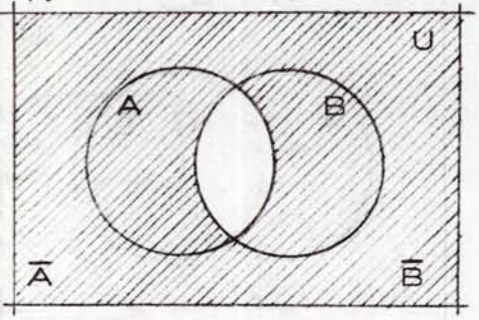
6. $A \cap \bar{B}$



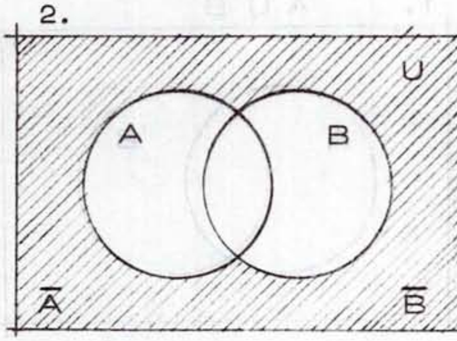
HOJA DE TRABAJO

II. EXPRESAR LA OPERACION QUE REPRESENTA CADA UNO DE LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS.

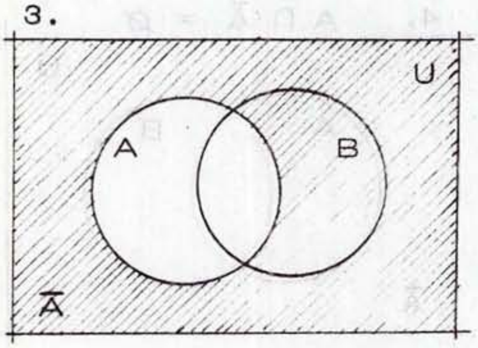
1.



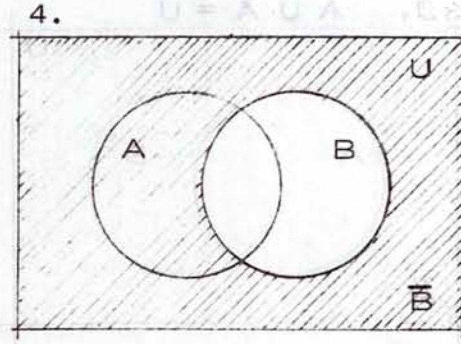
2.



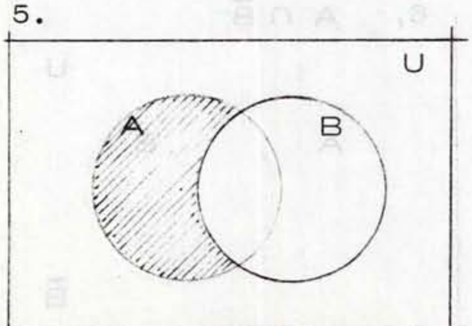
3.



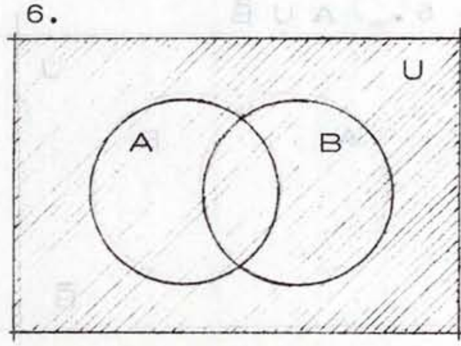
4.



5.



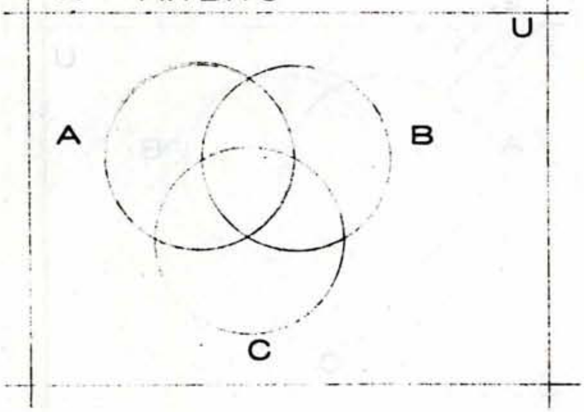
6.



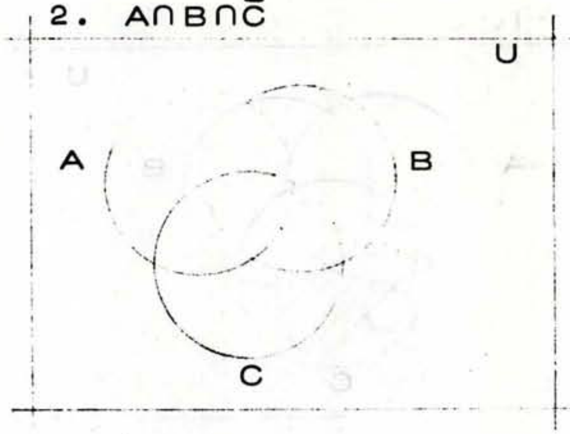
HOJA DE TRABAJO

III. REPRESENTAR EN LOS DIAGRAMAS LAS OPERACIONES INDICADAS

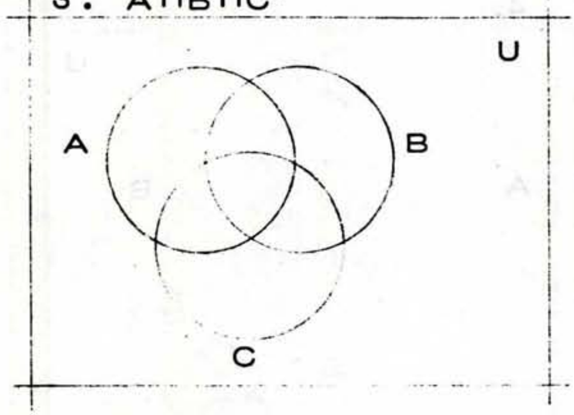
1. $A \cap B \cap C$



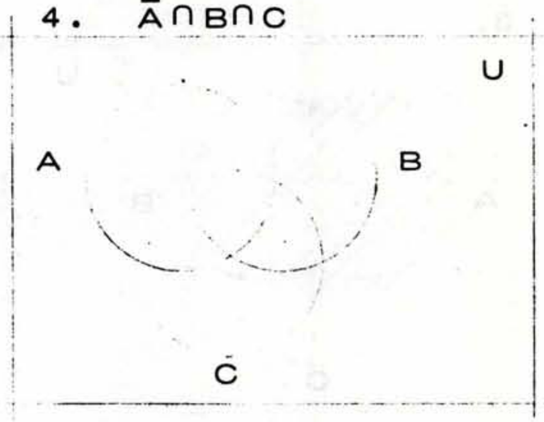
2. $A \cap B \cap \bar{C}$



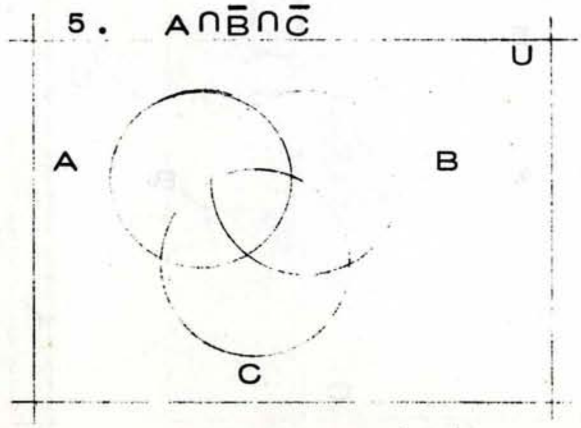
3. $A \cap \bar{B} \cap C$



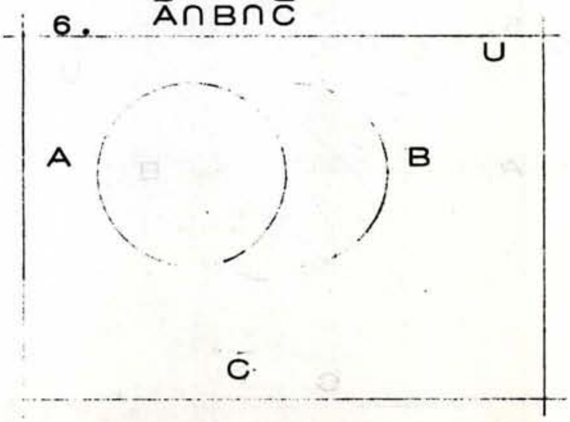
4. $\bar{A} \cap B \cap C$



5. $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$



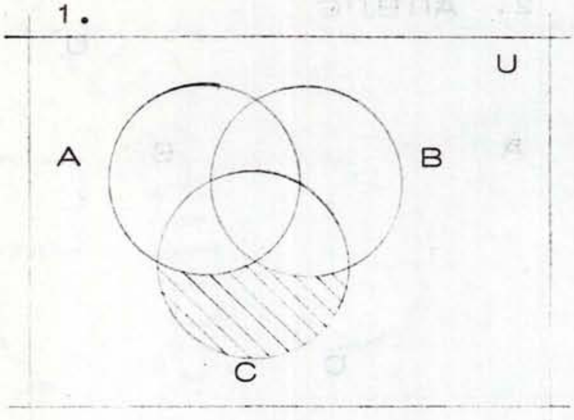
6. $\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$



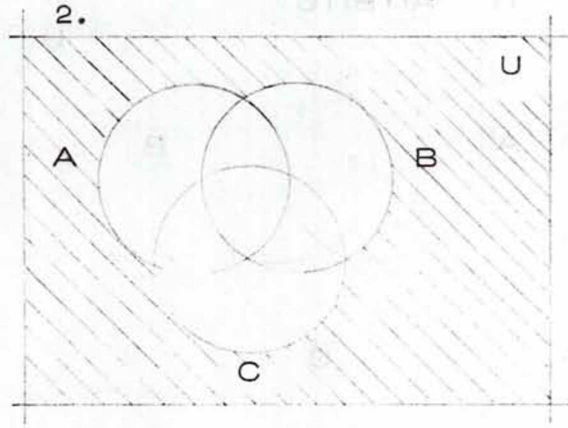
HOJA DE TRABAJO

IV. ¿QUE OPERACION REPRESENTA CADA DIAGRAMA?

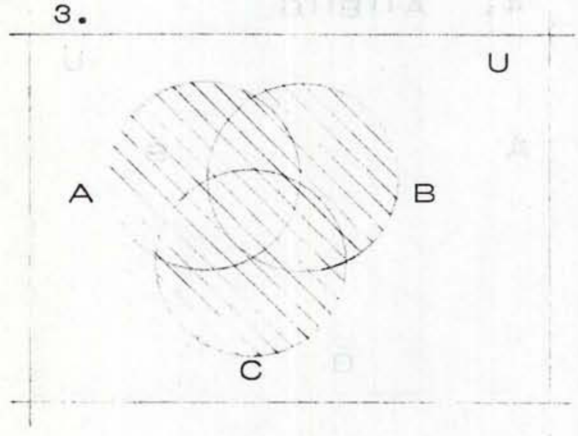
1.



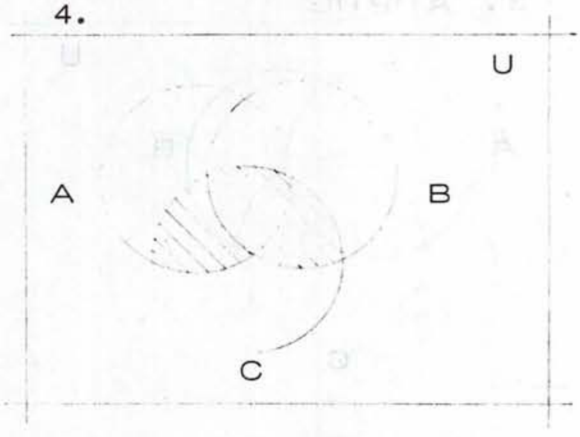
2.



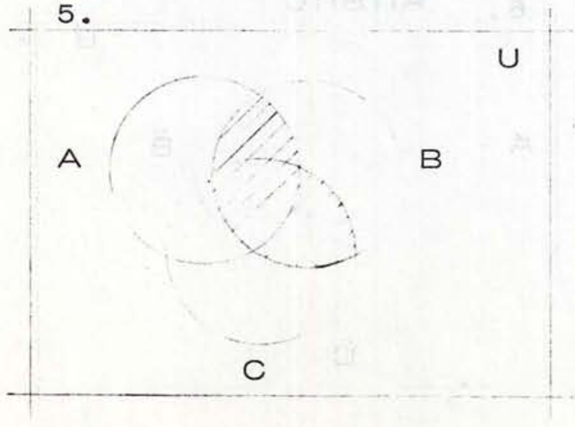
3.



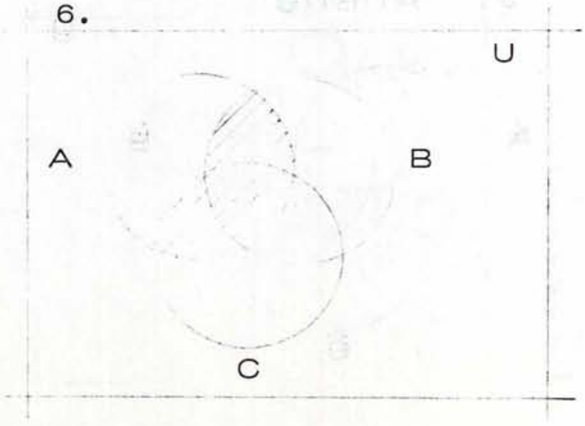
4.



5.



6.



BIBLIOGRAFIA

1.- Salazar Resines, Javier. Introducción a la lógica deductiva y teoría de los conjuntos. 2v. México, UNAM, 1972.

2.- Suppes, Patrick. Introducción a la lógica simbólica. 5a. reimpresión. México, CECSA, 1973.

3.- Copi, Irving M. Introducción a la lógica. 12a. ed. Buenos Aires, EUDEBA, 1972.

4.- National Council of Teachers of Mathematics. Gráficas, relaciones y funciones. México, Trillas, 1974.

5.- Lipschutz, Seymour. Theory and problems of Set theory. New York, McGraw-Hill, 1964 (Schaum's out line Series).

ESLABON INTERDISCIPLINARIO I (2a. Parte)

Teoría de los conjuntos y relaciones

CONTENIDO DEL CAPITULO IV LOGICA DE PREDICADOS

CAPITULO IV LOGICA DE PREDICADOS

1. ANALISIS DE LAS PROPOSICIONES

Al inferir o deducir en un argumento la conclusión de las premisas se ha considerado a las proposiciones elementales como unidades - indivisibles.

En un argumento como el siguiente...

Todos los estudiantes son inteligentes

Luis es estudiante

Por consiguiente:

Luis es inteligente

... no se pueden aplicar los métodos vistos anteriormente para su demostración, ya que está compuesto de proposiciones elementales y como tales son indivisibles.

Por lo que ahora se analizará una proposición elemental en cuanto a los elementos que la forman que son: el sujeto y el predicado.

En la segunda premisa del argumento anterior "Luis es estudiante", se atribuye a Luis (término sujeto) la propiedad de ser estudiante (término predicado) es decir a un individuo (término sujeto) se le atribuye una propiedad (término predicado).

Para la demostración de este tipo de argumentos es necesario introducir otra forma de representar las proposiciones de manera tal que se identifiquen los términos sujeto y predicado a saber:

a) Letras minúsculas para representar a los individuos (término sujeto).

b) Letras mayúsculas para representar a las propiedades (término predicado).

Por Ejemplo: Tampico es un Puerto

Tampico se representa con t (término sujeto) y puerto con P (término predicado), siendo la representación de la proposición P_t .

De la misma manera:

Newton fue matemático	M_n
Chopin fue pintor	P_c
Amado Nervo fue escultor	E_a

2. <u>ESQUEMAS PROPOSICIONALES</u>

Si nos referimos a un conjunto de estudiantes de una misma aula:

Carlos es estudiante	tendremos	E_c
Juan es estudiante	"	E_j
Irma es estudiante	"	E_i
Marcos es estudiante	"	E_m

Como el término predicado es el mismo, podemos establecer una fórmula de predicado constante y sujeto variable.

$$E_x$$

A esta fórmula se le llama también esquema proposicional o función proposicional.

a) Se le llama fórmula porque la variable individual x está libre.

b) Esquema proposicional porque no es una proposición puesto que no se habla de un individuo en particular.

c) Y función proposicional porque su valor de verdad no se conoce.

Ejemplo de esquemas proposicionales.

E_x , F_x , $P_x \longrightarrow M_x$, $N_x \wedge S_x$, $Q_a \vee S_x$, etc, donde

x representa la variable individual.

Cuando en una función proposicional se sustituye la variable x por algún individuo o sujeto, se obtendrá una proposición.

E_a , F_b , $P_t \longrightarrow M_t$, $N_o \wedge S_o$, donde

a, b, t, o, representan la <u>constante individual.</u>

Sea la proposición condicional.

Si Tampico está en México, entonces es un puerto.

$$M_t \longrightarrow P_t$$

t representa la constante individual, M y T sus propiedades.

En las proposiciones siguientes

Tampico es un puerto

Tampico está en México

Tampico es hermoso

representadas por

$$P_t$$

$$M_t$$

$$H_t$$

se observa como al sujeto Tampico se le atribuyen varias propiedades.

Por lo que puede establecerse una fórmula o esquema proposicional en el que la variable sea la propiedad (término predicado) y el individuo (término sujeto) sea la constante.

$$\varphi_i$$

Siendo φ la representación de la variable predicado e i la representación de la constante individual.

Otras representaciones de estos esquemas proposicionales

$$\alpha_t, \quad \gamma_c, \quad \varphi_a, \quad \psi_n, \quad \lambda_b, \quad \text{etc.}$$

Si se supone variable el término sujeto y el término predicado se obtiene un <u>meta esquema.</u>

$$\gamma_x, \quad \lambda_x, \quad \varphi_x$$

Se puede considerar que si A_x y φ_i son esquemas proposicionales, al sustituir en A_x , x por un individuo en particular y en φ_i , φ por una propiedad en particular, se obtendrá una proposición singular.

Es decir, una proposición elemental o compuesta cuando se refiere a un individuo en particular se llama proposición singular.

Si P_x representa un esquema o función proposicional, no puede ser verdadero ni falso, en cambio cualquier ejemplo de sustitución de P_x será una proposición singular que puede ser verdadera o falsa dependiendo de su contenido.

La demostración de argumentos cuyas premisas y conclusión sean proposiciones singulares, no difieren de las demostraciones vistas en los capítulos anteriores.

Por Ejemplo: Demostrar si la conclusión se deduce de las premisas, utilizando las reglas de inferencia en la representación de un argumento formado por proposiciones simples y compuestas del tipo singular.

1.	$P_b \longrightarrow Q_a$	(P)
2.	$Q_a \longrightarrow R_b$	(P)
3.	$P_b \vee S_a$	(P)
4.	$\sim R_b \vdash \sim M_a \longrightarrow S_a$	(P,C)
5.	$P_b \longrightarrow R_b$	1,2 (trans)
6.	$\sim P_b$	5,4 (mtt)
7.	S_a .	3,6 (mtp)
8.	$S_a \vee M_a$	7 (ad)
9.	$\sim S_a \longrightarrow M_a$	8 (cond)
10.	$\sim M_a \longrightarrow S_a$	9 (contr)

3. CUANTIFICADORES

A partir de un esquema o función proposicional del tipo P_x , se pueden formar proposiciones determinando la cantidad de individuos a los que se hace referencia. Se pueden establecer las siguientes expresiones:

Todas las x son P

Ninguna x es P

Alguna x es P

A estos determinativos gramaticales se les llama cuantificadores y son de dos tipos: UNIVERSALES los que hacen referencia a todos los individuos de un conjunto, ya sea para afirmar o negar su pertenencia; y EXISTENCIALES los que se refieren a una parte de los individuos del conjunto, el término "alguno" significa que existe por lo menos un individuo del que se puede afirmar o negar su pertenencia al conjunto dado.

3.1. SIMBOLIZACION

El cuantificador universal se simboliza (x) y en el lenguaje ordinario se expresa:

"Todos los individuos x", "Cualquier individuo x", ejemplo:

$(x)(Fx)$ Todos los individuos x son F

$(x)(Mx \wedge Px)$ Todas las x son M y son P

$(x)(Rx \longrightarrow \sim Sx)$ Ninguna R es S

$(x)\left[(Px \wedge Qx) \longrightarrow Rx\right]$ Todos los individuos que son P y son Q, entonces son R.

El cuantificador existencial se simboliza $(\exists_x)$ y se expresa como "Existe algún individuo".

Ejemplo:

$(\exists x)(Fx)$ Existe alguna x que es F

$(\exists_x)(Sx \wedge \sim Mx)$ Algunas S no son M

$(\exists x)\left[(Px \vee Qx) \longrightarrow Rx\right]$ Existen algunos individuos que si son P o son Q, entonces son R.

3.2. ALCANCE DE LOS CUANTIFICADORES

En la representación simbólica, el paréntesis después del cuantificador, indica que éste se aplica a todas las ocurrencias de la variable libre, es decir, el paréntesis marca el alcance del cuantificador, de manera que la expresión completa sea una proposición.

Ejemplo:

$(\exists_x)\left[(P_x \wedge Q_x) \vee (R_x \longrightarrow S_x)\right]$

$(x)(y)\left[(P_x \wedge R_y) \longrightarrow (M_x \vee \sim N_x)\right]$

4. PROPOSICIONES CATEGORICAS

Son proposiciones que contienen cuantificadores universales o existenciales y que hacen referencia a individuos de dos clases. En cada proposición se afirma o niega si los individuos de una clase están incluídos en la otra.

Para su estudio, a las proposiciones categóricas se les denomina con las primeras vocales de las palabras latinas AfIrmo y NEgo de la siguiente manera.

Proposiciones Categóricas	Universales	Afirmativa	A : $(x)(P_x \longrightarrow Q_x)$
		Negativa	E : $(x)(P_x \longrightarrow \sim Q_x)$
	Existenciales	Afirmativa	I : $(\exists_x)(P_x \wedge Q_x)$
		Negativa	O : $(\exists_x)(P_x \wedge \sim Q_x)$

4.1. PROPIEDADES DE LAS PROPOSICIONES CATEGORICAS

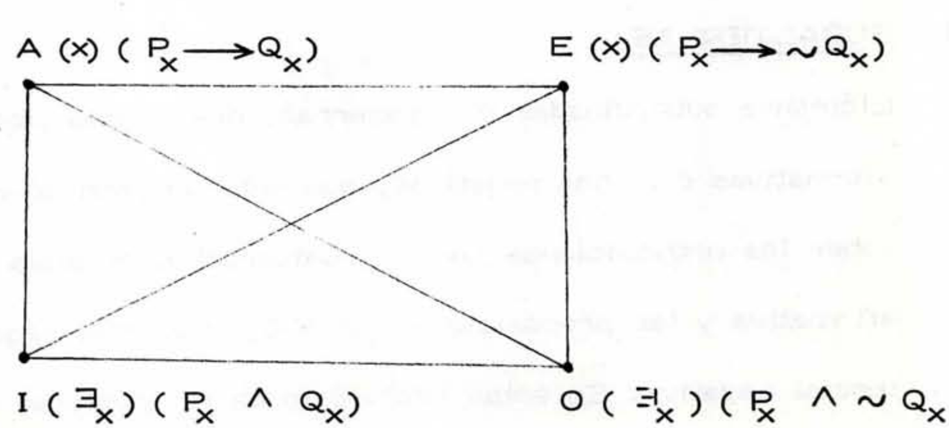
Son tres las principales propiedades: la oposición, la conversión y la equivalencia.

4.1.1. LA OPOSICION.

Llámanse proposiciones opuestas las que teniendo un mismo sujeto y un mismo predicado se oponen o excluyen mutuamente para diferir en calidad, (una afirmativa y otra negativa) o en cantidad (una universal y otro existencial) o en ambos casos.

Las proposiciones opuestas pueden ser CONTRARIAS, CONTRADICTORIAS, SUBCONTRARIAS y SUBALTERNAS o SUBORDINADAS, aunque no hay entre estas últimas verdadera oposición.

CUADRO DE OPOSICIONES



4.1.1.1 DEFINICIONES

a) CONTRADICTORIAS

Llámanse contradictorias, dos proposiciones que difieren a un mismo tiempo en cantidad y cualidad. Siendo A - O, la universal afirmativa y la existencial negativa y E - I, la universal negativa y la existencial afirmativa.

b) CONTRARIAS

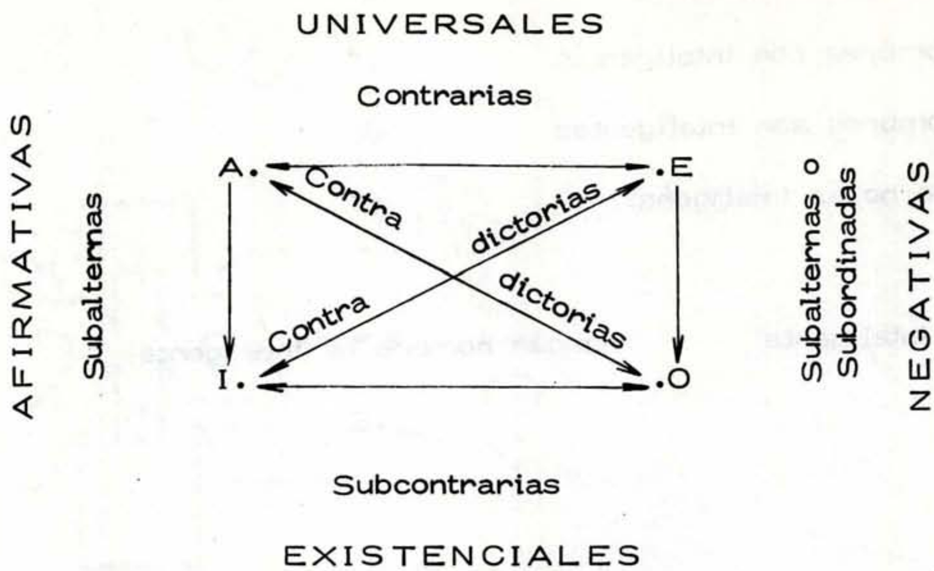
Llámanse contrarias, dos proposiciones universales que difieren en calidad, la una afirmativa y la otra negativa a saber: las proposiciones A - E, universal afirmativa y universal negativa.

c) SUBCONTRARIAS

Llámanse subcontrarias, dos proposiciones existenciales que difieren en cualidad a saber I - O, la existencial afirmativa y la existencial negativa.

d) SUBALTERNAS

Llámanse subordinadas o subalternas, dos proposiciones ambas - afirmativas o ambas negativas, que sólo difieren en cantidad; a saber las proposiciones A - I, universal afirmativa y existencial afirmativa y las proposiciones E - O, universal negativa y existencial negativa. En estas proposiciones la oposición es mínima y consiste solamente en ser la una universal y la otra existencial.



4.1.1.2. REGLAS DE LAS PROPOSICIONES OPUESTAS

a) REGLAS DE LAS PROPOSICIONES CONTRADICTORIAS.

1. En orden a la verdad, ni ambas pueden ser simultáneamente verdaderas, ni ambas falsas.

La razón es porque la existencial afirma o niega lo estrictamente necesario para que si ella es verdadera, la universal sea falsa; o si ella es falsa, la universal sea verdadera.

Por ejemplo si A es verdadera, O es falsa y viceversa:

A: Todos los hombres son inteligentes 1
O: Algún hombre no es inteligente 0

O: Algún hombre no es inteligente 1
A: Todos los hombres son inteligentes 0

Las deducciones de valores de verdad se obtendrán de proposiciones que contengan elementos.

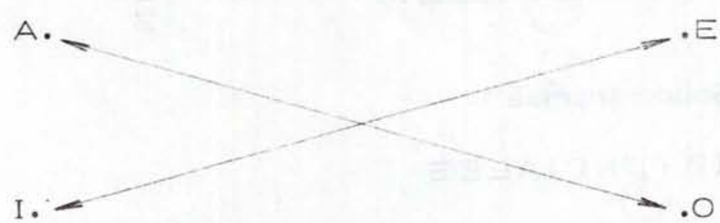
O: Algún hombre no es inteligente 0

A: Todos los hombres son inteligentes 1

A: Todos los hombres son inteligentes 0

O: Algún hombre no es inteligente 1

Todo hombre es inteligente — Ningún hombre es inteligente



Algún hombre es inteligente — Algún hombre no es inteligente

2. En orden al raciocinio, de la verdad de la una se sigue la falsedad de la otra; y de la falsedad de la una la verdad de la otra.

b) <u>REGLAS DE LAS PROPOSICIONES CONTRARIAS.</u>

1. En orden a la verdad:

a) No pueden ser ambas verdaderas, porque ello iría directamente contra el principio de contradicción; no es posible que a un tiempo todos los hombres sean inteligentes y que ninguno lo sea.

b) Pero ambas pueden ser falsas, porque habiendo entre las dos término medio, ocurre generalmente que este término medio encierra la verdad, así es falso que todos los hombres sean inteligentes y que ninguno lo sea; la verdad podrá estar en el término medio: algunos hombres son inteligentes, y otros no lo son.

2. En orden al raciocinio.

a) Ya que ambas no pueden ser verdaderas, de la verdad de la una se deduce la falsedad de la otra.

b) Pero ya que ambas pueden ser falsas, de la falsedad de la una no puede deducirse la verdad de la otra.

Ejemplos:

A:	Todos los hombres son inteligentes	1
E:	Ningún hombre es inteligente	O

E:	Ningún hombre es inteligente	1
A:	Todos los hombres son inteligentes	O

pero sí

E:	Ningún hombre es inteligente	O
A:	Todos los hombres son inteligentes	i

sí

A:	Todos los hombres son inteligentes	O
E:	Ningún hombre es inteligente	i

representando i, un valor de verdad indeterminado.

c) <u>REGLAS DE LAS PROPOSICIONES SUBCONTRARIAS</u>

1. En orden a la verdad.

a) Ambas pueden ser verdaderas, pues siendo las dos existenciales, a un sujeto puede convenirle el atributo, y al otro no.

b) Pero no pueden ser ambas falsas, porque sus respectivas contradictorias, que vienen a ser contrarias entre sí, serían ambas verdaderas, lo que va contra la regla de las contrarias:

si (I) es falsa, (E) será verdadera; y si (O) es falsa, (A) será verdadera.

Pero (A) y (E) (contrarias) no pueden ser ambas verdaderas, luego (I) y (O) no pueden ser ambas falsas.

Otro motivo para probar que ambas no pueden ser falsas, es que negada la verdad de la una, por ese mismo hecho se afirma la verdad de la otra.

Así si se niega que la proposición "Algún hombre no es inteligente", sea verdadera, por el mismo hecho se afirma como verdadero que "algún - hombre es inteligente".

2. En orden al raciocinio.

   a) Como ambas no pueden ser falsas, de la falsedad de la una se sigue la verdad de la otra.

   b) Pero como ambas pueden ser verdaderas, de la verdad de la una no se deduce la falsedad de la otra.

Ejemplos:

I : Algún hombre es inteligente 1

O: Algún hombre no es inteligente i

O: Algún hombre no es inteligente 1

I : Algún hombre es inteligente i

O: Algún hombre no es inteligente o

I : Algún hombre es inteligente 1

I : Algún hombre es inteligente o

O: Algún hombre no es inteligente 1

d) REGLAS DE LAS PROPOSICIONES SUBALTERNAS

Son cuatro reglas las que miran a un tiempo a la verdad y al raciocinio.

1. De la verdad de la proposición universal se deduce la verdad de la existencial; es claro que el predicado que conviene a todos con mayor razón conviene a alguno.

2. Pero de la verdad de la existencial no se sigue la verdad de la universal, porque el predicado que conviene a algunos puede no convenir a todos. Así de que algunos hombres sean inteligentes, no se sigue que todos lo sean.

3. De la falsedad de la universal no se deduce la falsedad de la existencial, por el mismo motivo; del hecho de que un predicado no convenga a todos, no se deduce que no convenga a algunos.

4. Pero de la falsedad de la existencial se deduce la falsedad de la universal, porque si el predicado no le conviene a unos pocos, es claro que mucho menos le podrá convenir a todos.

En síntesis, de la verdad de la universal se deduce la verdad de la existencial, pero no viceversa. De la falsedad de la existencial, se deduce la falsedad de la universal, pero no viceversa.

Por ejemplo

Si	A :	Todo hombre es inteligente	1	es verdadera
	I :	Algún hombre es inteligente	1	es verdadera
Pero si	I :	Algún hombre es inteligente	1	es verdadera
	A :	Todo hombre es inteligente	i	es indeterminada

I :	Algún hombre es inteligente	0
A :	Todo hombre es inteligente	0
A :	Todo hombre es inteligente	0
I :	Algún hombre es inteligente	i
E :	Ningún hombre es inteligente	1
O :	Algún hombre no es inteligente	1
O :	Algún hombre no es inteligente	1
E :	Ningún hombre es inteligente	i
O :	Algún hombre no es inteligente	0
E :	Ningún hombre es inteligente	0
E :	Ningún hombre es inteligente	0
O :	Algún hombre no es inteligente	i

EJERCICIO

A : Todos son artistas	1	0
E : Ninguno es artista	0	i
I : Alguno es artista	1	i
O : Alguno no es artista	0	1

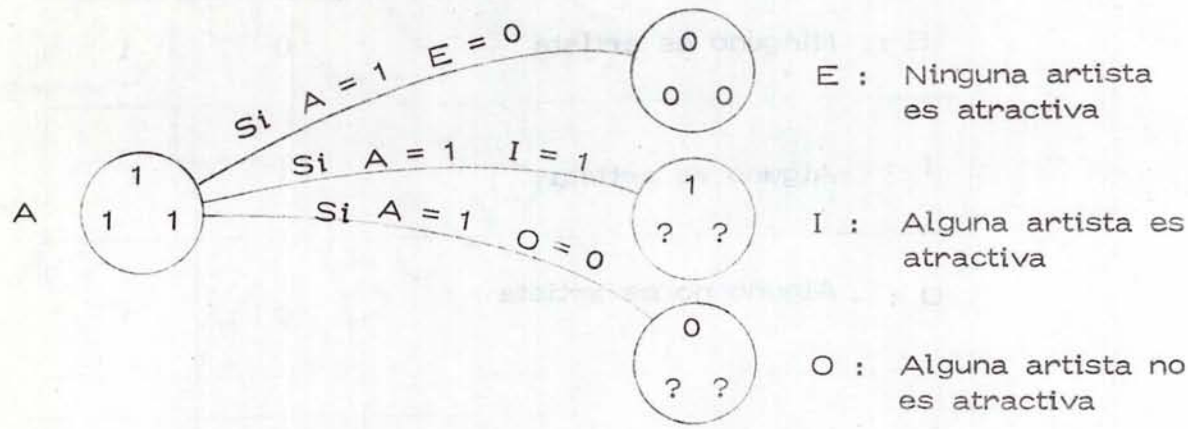
E : Ninguno es artista	1	0
A : Todos son artistas	0	i
I : Alguno es artista	0	1
O : Alguno no es artista	1	i

Ejemplo de deducción de los valores de verdad que aparecen en el cuadro.

Si se representa cada una de las proposiciones categóricas con tres individuos, se establece un esquema para determinar sus valores de verdad. Convencionalmente se asignará para cada uno de los tres individuos el símbolo 1 ó 0 según afirmen o nieguen la proposición y el símbolo de interrogación para aquellos individuos no cuantificados por la misma proposición.

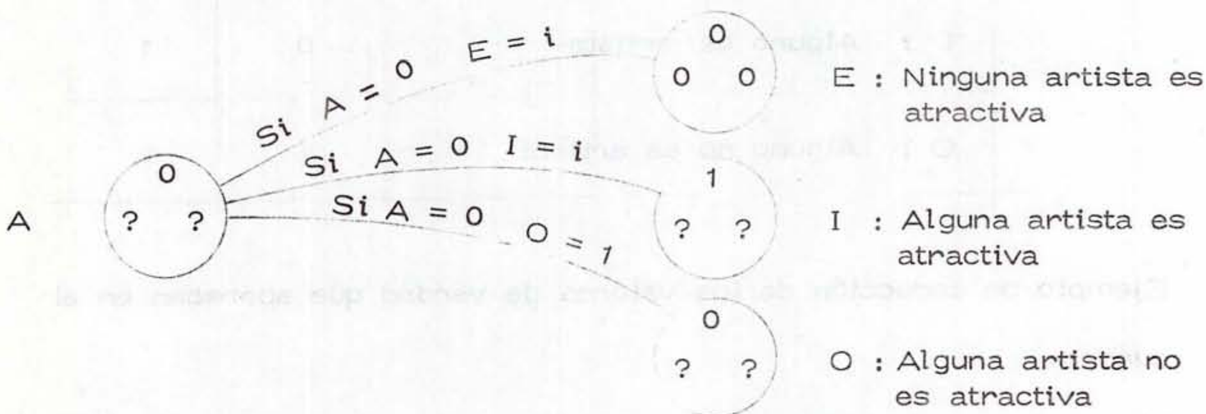
a) Sea verdadera la proposición de la forma A

"Todas las artistas son atractivas"



b) Sea falsa la proposición de la forma A

"Todas las artistas son atractivas"

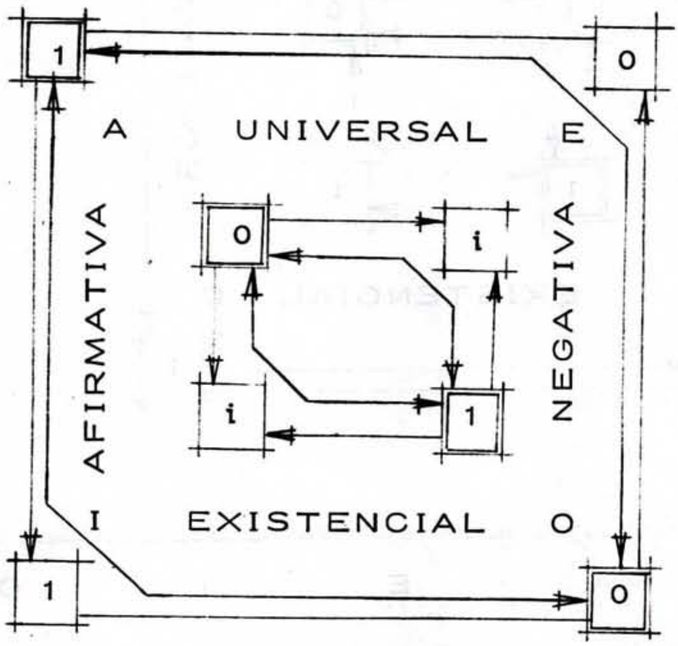


En la proposición de la forma A, es suficiente con un individuo que no cumpla con la proposición para que ésta sea falsa, desconociéndose si los otros individuos la cumplen o no; por lo que en las proposiciones de la forma E e I no puede determinarse el valor de verdad, quedando éste indeterminado.

De igual manera se podrán deducir los valores de verdad de las proposiciones de las formas A, I, O a partir de E; A, E, O, a partir de I y A, E, I, a partir de O.

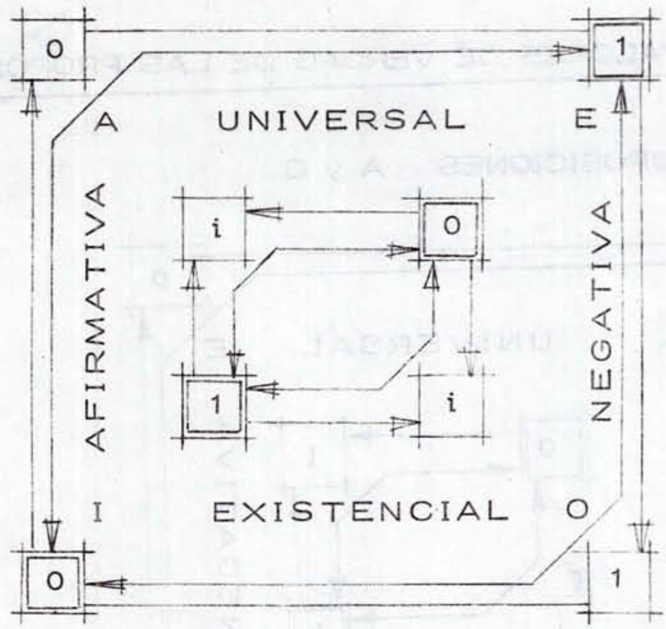
4.1.1.3. CUADRO DE VALORES DE VERDAD DE LAS PROPOSICIONES

a) PROPOSICIONES A y O



	A	E	I	O
A	1	0	1	0
	0	i	i	1
E				
I				
O	0	i	i	1
	1	0	1	0

b) PROPOSICIONES E e I



	A	E	I	O
A				
E	0 i	1 0	0 1	1 i
I	i 0	0 1	1 0	i 1
O				

4.1.2. CONVERSION

La conversión es la propiedad de poder invertir los términos de una proposición, es decir, que el sujeto pase a ser predicado y el predicado sujeto, sin que se altere el sentido de la proposición.

La conversión debe ser tal que al efectuarla no cambie el cuantificador ni la extensión de los individuos a que hace referencia el término sujeto y el término predicado de la proposición, por lo que sólo es aplicable a las proposiciones de la forma E: universal negativa y la de la forma I: existencial afirmativa, ya que en ambas se hace referencia a la misma cantidad de individuos, por ejemplo

E : Ningún felino es racional se puede convertir en
Ningún racional es felino.

I : Algún mamífero es animal en :
Algún animal es mamífero.

4.1.3. EQUIVALENCIA

La equivalencia es la propiedad de poder operar con una u otra de las fórmulas equivalentes de las proposiciones.

Las fórmulas equivalentes resultan de la negación de una de las dos proposiciones contradictorias.

Así tenemos

$$(x)\ P_x \equiv \sim (\exists_x)(\sim P_x) \quad ó \quad (\exists_x)(\sim P_x) \equiv \sim (x)\ P_x$$

es decir que (A) $\equiv \sim$ (O) ó (O) $\equiv \sim$ (A)

de igual manera sucede con (E) , (I)

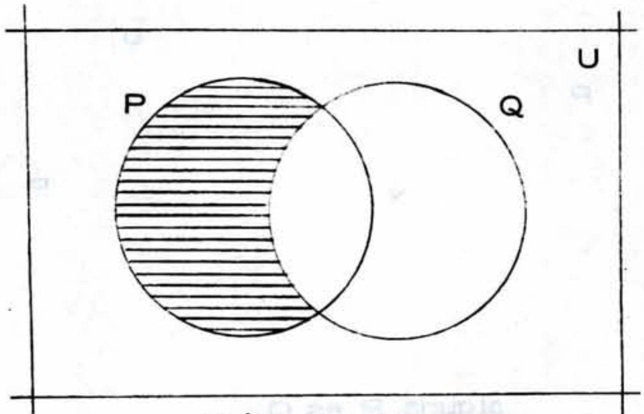
$$(x)(\sim P_x) \equiv \sim (\exists_x)\ P_x \quad ó \quad (\exists_x)\ P_x \equiv \sim (x)(\sim P_x)$$

(E) $\equiv \sim$ (I) ó (I) $\equiv \sim$ (E)

5. REPRESENTACION DE PROPOSICIONES CATEGORICAS CON DIAGRAMAS DE VENN.

Se ha convenido en representar las proposiciones categóricas con diagramas de Venn mediante una notación convencional, que consiste en un achurado horizontal en las regiones en las que no hay elementos e indicar por medio de una cruz en las regiones en la que existe por lo menos uno.

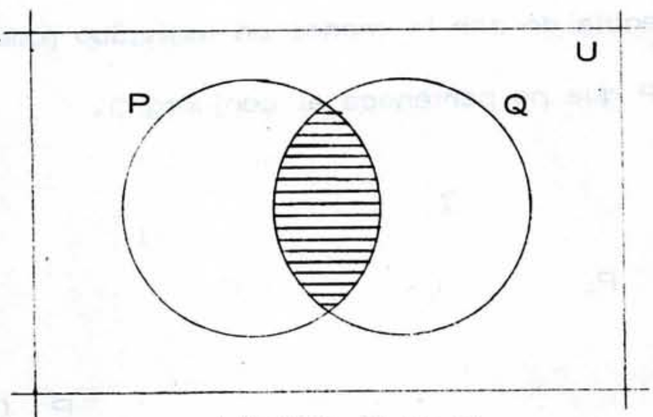
Sea la proposición universal afirmativa "toda P es Q" en un universo determinado; el conjunto vacío en un diagrama de Venn basado en esta proposición, es la región correspondiente a las P que no son Q. Es decir, de la proposición dada se deduce que en la región formada por el conjunto P intersectado por el complemento de Q no hay elementos, es el conjunto vacío.



$P \cap \overline{Q} = \emptyset$

toda P es Q

Sea la proposición universal negativa"toda P no es Q"o su equivalencia "ninguna P es Q," en un universo determinado. El conjunto vacío en un diagrama de Venn basado en esta proposición es la región de todas las P que son simultáneamente Q.

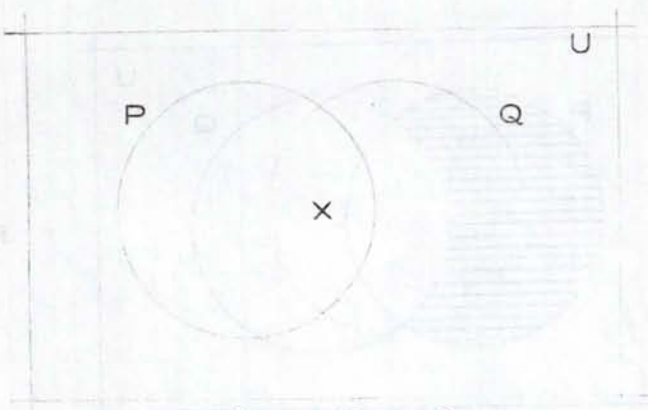


$P \cap Q = \emptyset$

ninguna P es Q

Se deduce de la proposición que la región formada por la intersección del conjunto P y el conjunto Q es el conjunto vacío.

La proposición existencial afirmativa "alguna P es Q" en un universo determinado se representa como:

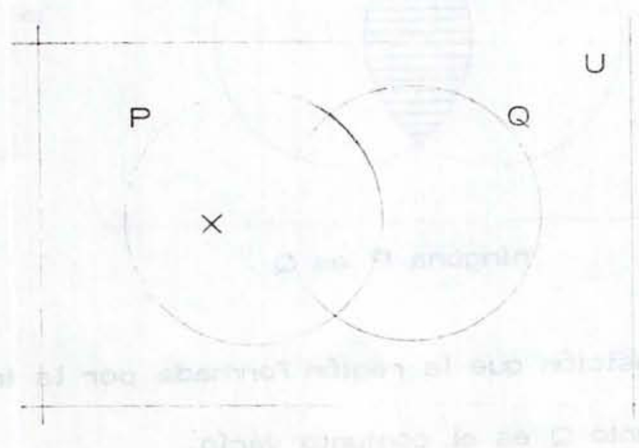


$P \cap Q \neq \emptyset$

alguna P es Q

En el diagrama, de acuerdo a la afirmación de la proposición, sólo se hace referencia a la existencia de por lo menos un individuo que pertenece simultáneamente a los dos conjuntos, por lo tanto la región correspondiente a la intersección de los dos conjuntos no está vacía.

Finalmente la proposición existencial negativa "alguna P no es Q" hace referencia a la existencia de por lo menos un individuo (que no son todos) del conjunto P que no pertenece al conjunto Q.

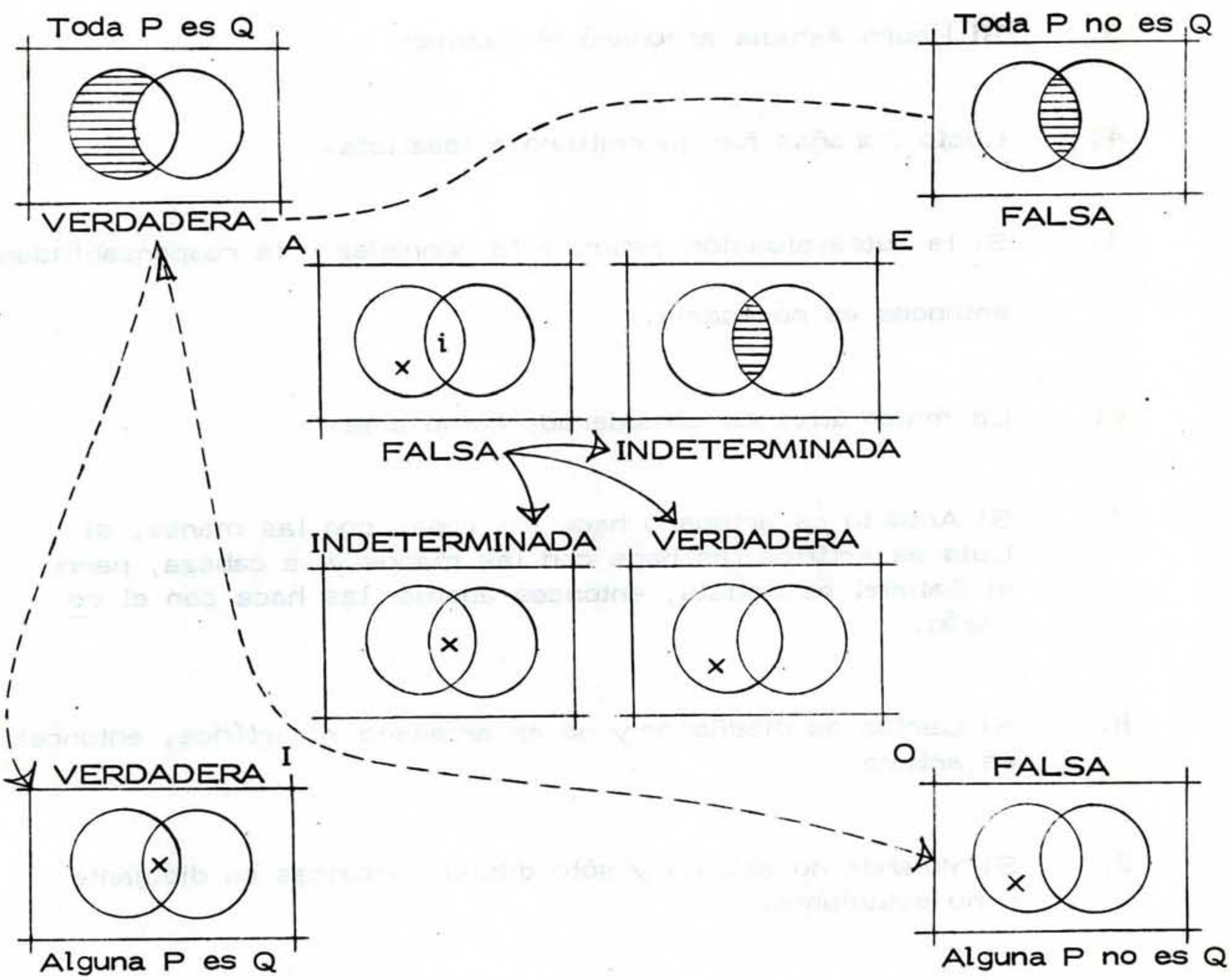


$P \cap \bar{Q} \neq \emptyset$

Se deduce del diagrama que la región definida por el conjunto P y el complemento de Q no está vacía.

6. CUADRO DE VALORES DE VERDAD CON DIAGRAMA DE VENN

Deducción de los valores de verdad de las proposiciones del tipo E, I, O, a partir de los valores de verdad asignados a la propo sición tipo A.



De la misma manera se pueden deducir los valores de verdad de las proposiciones tipo A, I, O, a partir de E; A, E, O, a partir de I; y A, E, I a partir de O.

HOJA DE TRABAJO CAPITULO IV

I REPRESENTAR LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES SINGULARES

1. José Luis es inteligente y educado.

2. La ciudad de Puebla es hermosa.

3. Si Laura estudia aprobará el examen.

4. Lucio Cabañas fue guerrillero e idealista.

5. Si la autoevaluación estimula la honradez y la responsabilidad, entonces es necesaria.

6. La matemática es considerada como arte.

7. Si Antonio es artesano hace las cosas con las manos, si Luis es artífice las hace con las manos y la cabeza, pero si Gabriel es artista, entonces además las hace con el corazón.

8. Si Carlos es diseñador y no es artesano ni artífice, entonces es artista.

9. Si Yolanda no estudia y sólo dibuja, entonces es dibujante y no estudiante.

10. El día es caluroso, o si hace frío entonces nevará.

11. El teniente Harrison es un farsante o es un soldado raso mentiroso.

HOJA DE TRABAJO No.

II DEMOSTRAR EL SIGUIENTE ARGUMENTO CON REGLAS DE INFERENCIA.

1. Si Kennedy fue presidente entonces fue asesinado. Kennedy fue presidente o fue un filósofo. Si Kennedy fue filósofo, entonces no fue estadista. Kennedy fue estadista. En consecuencia, fue asesinado.

1. $P_k \longrightarrow A_k$ (P)

2. $P_k \vee F_k$ (P)

3. $F_k \longrightarrow \sim E_k$ (P)

4. $E_k \quad \vdash \quad A_k$ (P,C)

5.

6.

7.

.

.

.

HOJA DE TRABAJO

III. DEMOSTRAR EL SIGUIENTE ARGUMENTO CON REGLAS DE INFERENCIA.

1. $(A_p \vee C_q) \longrightarrow R_n$ (P)

2. $\sim C_q \longrightarrow \sim A_p$ (P)

3. $\sim R_n \vee M_b$ (P)

4. $\sim M_b \vdash \sim A_p \vee L_s$ (P,C)

5.

6.

.

.

.

.

.

IV. DEMOSTRAR EL SIGUIENTE ARGUMENTO CON UNA PRUEBA CONDICIONAL Y REGLAS DE INFERENCIA.

1. $Q_a \longrightarrow (P_a \vee \sim T_c)$ (P)

2. $\sim (N_b \wedge \sim Q_a)$ (P)

3. $N_b \vdash S_m \longrightarrow (T_c \longrightarrow P_a)$ (P,C)

HOJA DE TRABAJO

V. SIMBOLIZAR LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES CATEGORICAS

1. Algunos paraguas son negros.

2. Todas las aves tienen pico.

3. Algunos árboles no dan fruta.

4. No todos los insectos tienen alas.

5. Casi ningún autobús es puntual.

6. Las aulas tienen pizarrón y bancas.

7. Ningún piso de la UAM es de mármol.

8. Todas las religiones son buenas.

9. Casi todos los comerciantes son ambiciosos.

10. Los diseñadores son creadores.

CONTENIDO DEL CAPITULO V SILOGISMOS CATEGORICOS.

CAPITULO V SILOGISMOS CATEGORICOS

1. INTRODUCCION

Un silogismo categórico tiene dos premisas y una conclusión, cada una de las cuales es una proposición categórica. En cada proposición categórica intervienen únicamente dos clases, la primera a la que se le - llama término sujeto y la segunda a la que se le llama término predicado.

Un silogismo categórico independientemente de los tipos de proposiciones categóricas que intervienen en él, tiene un arreglo invariable entre los términos de las premisas y la conclusión a saber:

El término predicado de la conclusión se denomina término mayor y el término sujeto de la conclusión se denomina término menor.

El término que aparece en las dos premisas y no aparece en la conclusión se denomina término medio.

La premisa que aparece en primer lugar es llamada premisa mayor y debe contener precisamente al término mayor (B).

La segunda premisa es llamada premisa menor y en ella debe aparecer el término menor (C).

Como la posición del término medio es variable su ubicación en relación con los demás términos da lugar a cualquiera de las siguientes figuras

1a. figura	2a. figura	3a. figura	4a. figura
A — B	B — A	A — B	B — A
C — A	C — A	A — C	A — C
⊢——	⊢——	⊢——	⊢——
C — B	C — B	C — B	C — B

Por lo que la forma lógica de un silogismo depende en primer lugar de las proposiciones categóricas que lo componen y en segundo lugar de la posición de los términos (figura)

2. <u>DISTRIBUTIVIDAD</u>

TERMINOS DISTRIBUIDO E INDISTRIBUIDO

Se dice que un término está distribuido en una clase si hace referencia a todos los individuos de la misma, bien sea el término sujeto o el término predicado. (Capítulo IV página 153).

Sea la proposición "Todos los felinos son mamíferos". El término "todos los felinos" define la cantidad de elementos que pertenecen al conjunto de los felinos, se dice entonces, que este término está DISTRIBUIDO.

En la misma proposición no se hace referencia a todos los mamíferos ya que los felinos son un subconjunto de los mamíferos, en este caso como no se precisa la cantidad de elementos de dicha clase, se dice que el término está INDISTRIBUIDO.

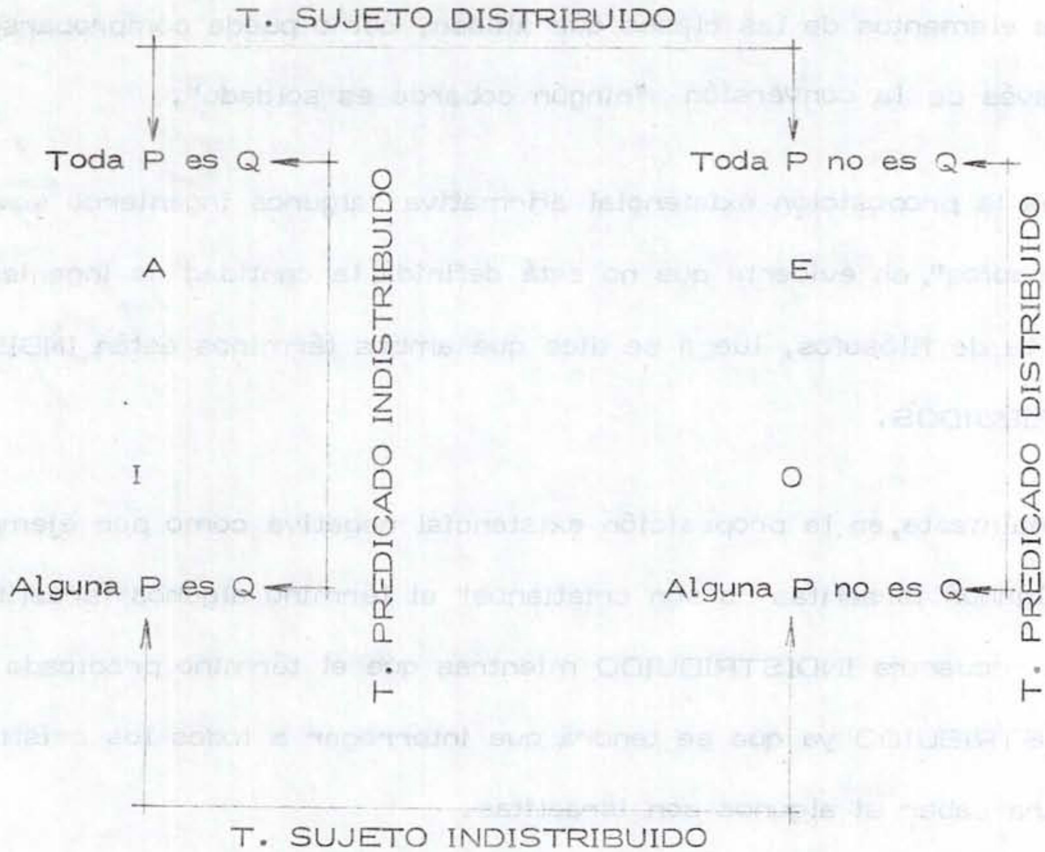
En la proposición,"ningún soldado es cobarde", los términos sujeto y predicado están DISTRIBUIDOS, ya que hacen referencia a todos los elementos de las clases que aluden, como puede comprobarse a través de la conversión "ningún cobarde es soldado".

Sea la proposición existencial afirmativa "algunos ingenieros son filósofos", es evidente que no está definida la cantidad de ingenieros ni la de filósofos, luego se dice que ambos términos están INDISTRIBUIDOS.

Finalmente, en la proposición existencial negativa como por ejemplo "algunos israelitas no son cristianos" el término algunos israelitas se encuentra INDISTRIBUIDO mientras que el término predicado DISTRIBUIDO ya que se tendrá que interrogar a todos los cristianos para saber si algunos son israelitas.

Una síntesis de este análisis se presenta en el siguiente cuadro llamado de distribución.

CUADRO DE DISTRIBUCION



Por ejemplo:

Sea el siguiente silogismo de la forma AII - 3a. figura:

La 1a. premisa "todos los artistas son vanidosos" es una proposición universal afirmativa (A) que puede abreviarse como "toda A es V". La segunda premisa "algunos artistas son pobres" es una proposición existencial afirmativa (I) abreviándose como "alguna A es P". La conclusión "algunos pobres son vanidosos" es también una proposición existencial afirmativa (I), que se abrevia como "alguna P es V".

V

Este silogismo se puede sintetizar de la siguiente manera:

1. Toda A es V

2. Alguna A es P

$\vdash$

3. Alguna P es V

En las dos premisas el término que no aparece en la conclusión es el término medio (A) , (V) es el término mayor que aparece en la primera premisa y en la conclusión y (P) el término menor que aparece en la segunda premisa y en la conclusión.

3. VALIDEZ DE UN SILOGISMO

La validez de un silogismo no depende de la verdad o falsedad de las premisas sino de su forma lógica.

Siendo cuatro las proposiciones categóricas y cuatro el número de figuras el número de combinaciones que pueden presentarse está en - función de la siguiente fórmula; 4^n = No. de combinaciones, siendo n el número de proposiciones, dándonos en este caso 256 diferentes combinaciones, de las cuales no todas corresponden a argumentos válidos, ya que algunos violan las reglas del silogismo categórico que se enumeran a continuación.

4. REGLAS DEL SILOGISMO

Las reglas del silogismo servirán para diagnosticar la validez o la invalidez de algunos silogismos. Después de haber visto las cuatro figuras de un silogismo categórico y el cuadro de distribución de las proposiciones, se presentan las reglas del silogismo y algunos ejemplos de aplicación de las mismas.

Un silogismo categórico es válido si cumple las siguientes reglas:

1. El término medio debe estar distribuido en una sola de las premisas.
2. Los términos de la conclusión deben estar distribuidos de la misma forma que en las premisas.
3. Cuando menos una premisa debe ser universal.
4. Si la conclusión es existencial, por lo menos una de las premisas debe ser existencial.

5. VALIDEZ O INVALIDEZ DE UN SILOGISMO.

Sea el siguiente silogismo de la forma E A E - 1a. figura.

Ningún artista es policía. Todos los bailarines son artistas. Por lo tanto ningún bailarín es policía.

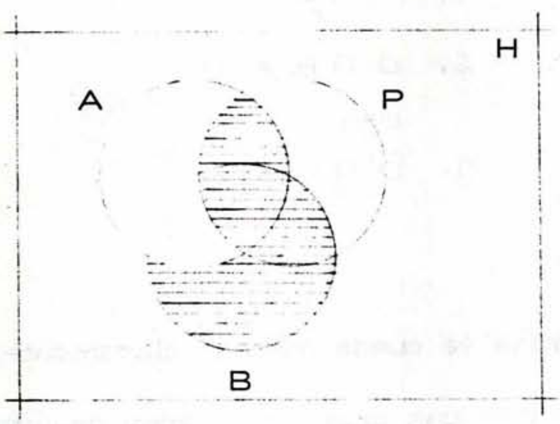
Se simboliza:

1. $(x)\,(A_x \longrightarrow \sim P_x)$
2. $(x)\,(B_x \longrightarrow A_x)$

$\vdash$

3. $(x)\,(B_x \longrightarrow \sim P_x)$

y su representación con diagramas de Venn es:



1. $A \cap P = \emptyset$
2. $B \cap \bar{A} = \emptyset$

$\vdash$

3. $B \cap P = \emptyset$

Al marcar las zonas indicadas por las dos premisas, queda perfectamente marcada la zona indicada por la conclusión, por lo que el silogismo es <u>VALIDO</u>.

Sea otro silogismo de forma AII-2a. figura.

Todos los franceses beben vino en la comida. Algunos diputados beben vino en la comida. Entonces algunos diputados son franceses.

Y su simbolización:

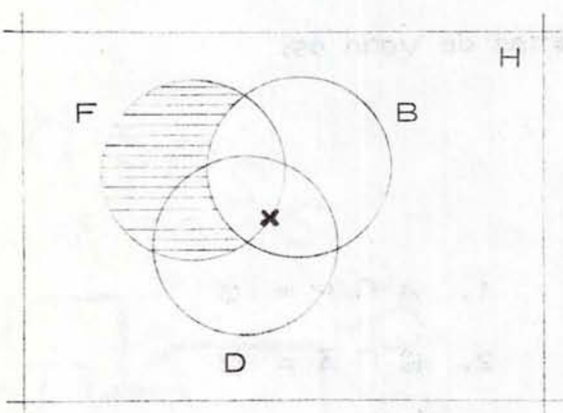
1. $(x)\ (F_x \longrightarrow B_x)$

2. $(\exists_x)\ (D_x \wedge B_x)$

$\vdash$

3. $(\exists_x)\ (D_x \wedge F_x)$

Por medio de los diagramas de Venn



1. $F \cap \bar{B} = \emptyset$

2. $D \cap B \neq \emptyset$

$\vdash$

3. $D \cap F \neq \emptyset$

Se observa que la primera premisa se puede marcar claramente, pero para marcar la segunda se necesita poner una cruz en la zona de intersección de B y D, zona que está dividida; no se indica claramente en la premisa a cual de las dos zonas debe pertenecer la cruz, tampoco se deben poner dos cruces pues sería asegurar más información de la que se ha dado; en este caso que existe ambigüedad, la cruz se colocará en la línea divisoria. Ahora, se analiza si la conclusión queda marcada en el diagrama; como la cruz no está definida en alguna de las dos zonas al existir esta ambigüedad, el silogismo es INVALIDO.

Por medio de las reglas de los silogismos, se analizarán las causas de invalidez.

Toda F es B

Alguna D es B

$\vdash$

Alguna D es F

Viola la 1a. regla pues el término medio (B) está distribuido en las dos premisas.

Viola la 2a. regla pues el término mayor (F) en la conclusión no está distribuido igual que en las premisas.

6. DEMOSTRACION DE SILOGISMOS CON DIAGRAMAS DE VENN

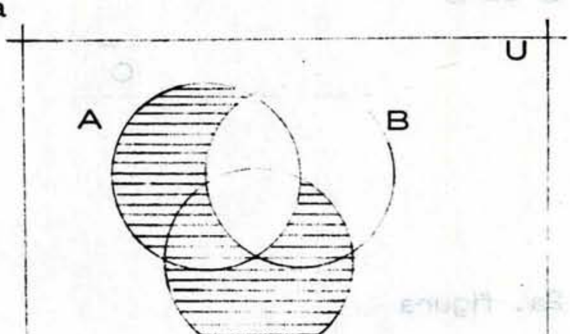
1. AAA - 1a. figura

Toda A es B

Toda C es A

$\vdash$

Toda C es B



$A \cap \overline{B} = \emptyset$

$C \cap \overline{A} = \emptyset$

$C \cap \overline{B} = \emptyset$

es válido

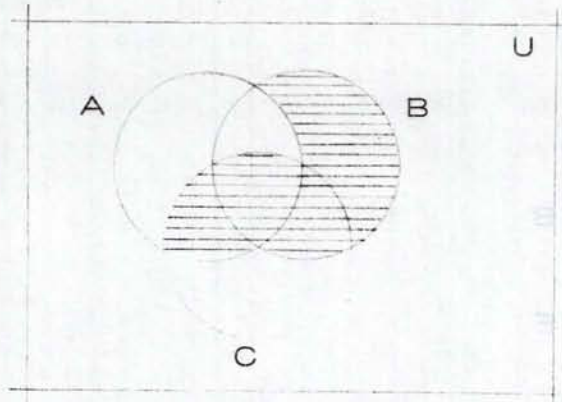
2. AEE - 2a. figura

Toda B es A

Ninguna C es A

$\vdash$

Ninguna C es B



$B \cap \bar{A} = \varnothing$

$C \cap A = \varnothing$

$\vdash$

$C \cap B = \varnothing$

es válido

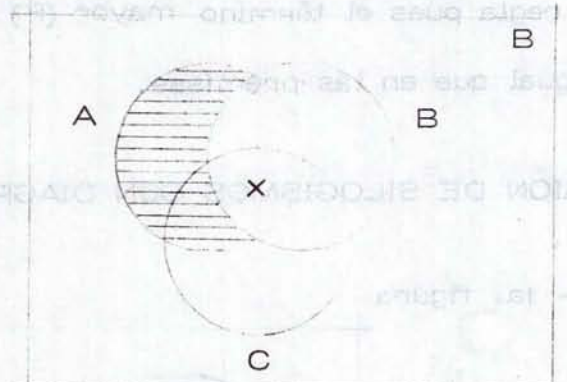
3. AII - 3a. figura

Toda A es B

Alguna A es C

$\vdash$

Alguna C es B



$A \cap \bar{B} = \varnothing$

$A \cap C \neq \varnothing$

$\vdash$

$C \cap B \neq \varnothing$

es válido

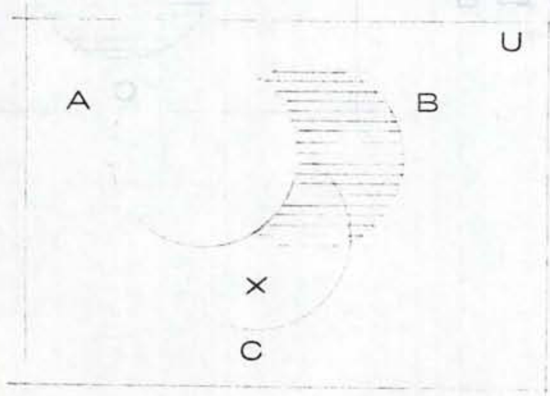
4. AOO - 2a. figura

Toda B es A

Alguna C no es A

$\vdash$

Alguna C no es B



$B \cap \bar{A} = \varnothing$

$C \cap \bar{A} \neq \varnothing$

$\vdash$

$C \cap \bar{B} \neq \varnothing$

es válido

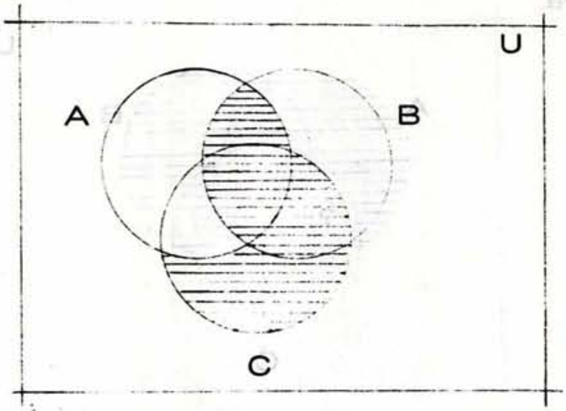
5. EAE - 2a. figura

Ninguna B es A

Toda C es A

$\vdash$

Ninguna C es B



$B \cap A = \emptyset$

$C \cap \overline{A} = \emptyset$

$\vdash$

$C \cap B = \emptyset$

es válido

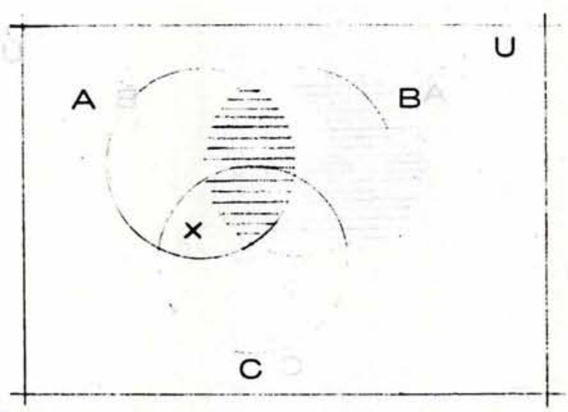
6. EIO - 4a. figura

Ninguna B es A

Alguna A es C

$\vdash$

Alguna C no es B



$B \cap A = \emptyset$

$A \cap C \neq \emptyset$

$\vdash$

$C \cap \overline{B} \neq \emptyset$

es válido

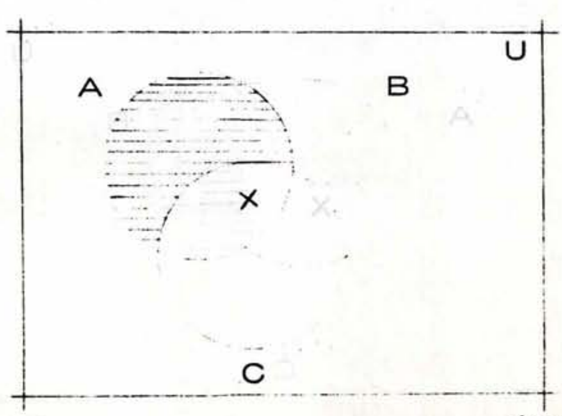
7. IAI - 3a. figura

Alguna A es B

* Toda A es C

$\vdash$

Alguna C es B



$A \cap B \neq \emptyset$

$A \cap \overline{C} = \emptyset$

$\vdash$

$C \cap B \neq \emptyset$

es válido

* (Primero se marcan las proposiciones universales)

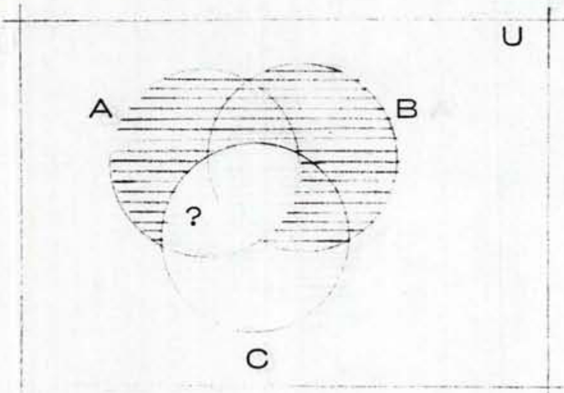
8. AAA - 4a. figura

Toda B es A

Toda A es C

⊢

Toda C es B



$B \cap \bar{A} = \emptyset$

$A \cap \bar{C} = \emptyset$

⊢

$C \cap \bar{B} = \emptyset$

es inválido
(viola la 2a. regla)

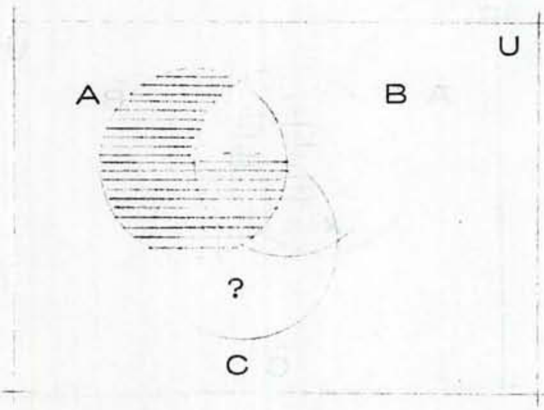
9. AEO - 3a. figura

Toda A es B

Ninguna A es C

⊢

Alguna C no es B



$A \cap \bar{B} = \emptyset$

$A \cap C = \emptyset$

⊢

$C \cap \bar{B} \neq \emptyset$

es inválido
(viola la 1a.,2a. y 4a. reglas)

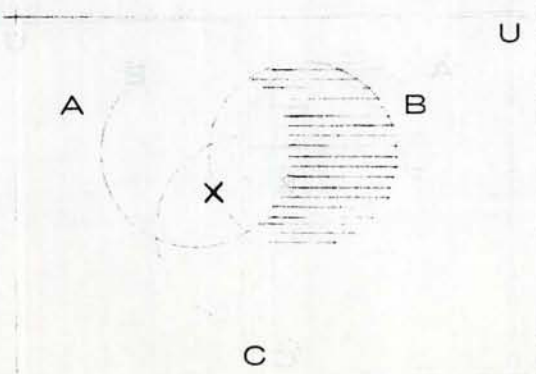
10. AII - 2a. figura

Toda B es A

Alguna C es A

⊢

Alguna C es B



$B \cap \bar{A} = \emptyset$

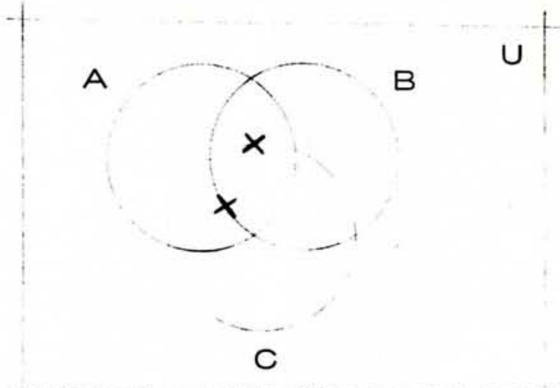
$C \cap A \neq \emptyset$

⊢

$C \cap B \neq \emptyset$

es inválido
(viola la 1a. y 2a. reglas)

11. IOI - 2a. figura



Alguna B es A — $B \cap A \neq \emptyset$

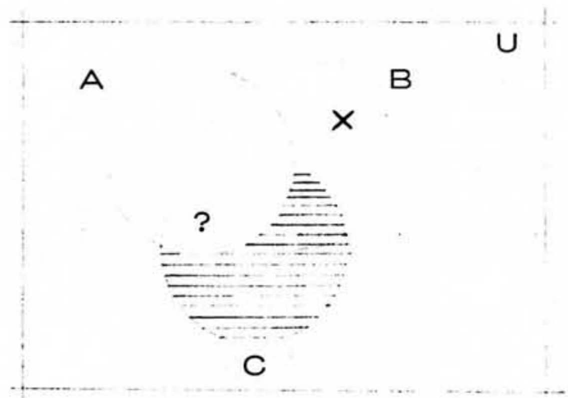
Alguna C es A — $C \cap A \neq \emptyset$

$\vdash$

Alguna C es B — $C \cap B \neq \emptyset$

es inválido
(viola la 1a. y 3a. reglas)

12. OAO - 2a. figura



Alguna B no es A — $B \cap \overline{A} \neq \emptyset$

Toda C es A — $C \cap \overline{A} = \emptyset$

$\vdash$

Alguna C no es B — $C \cap \overline{B} \neq \emptyset$

es inválido
(viola la 2a. regla)

HOJA DE TRABAJO

I .- DIGA QUE REPRESENTA CADA UNA DE LAS EXPRESIONES ENUMERADAS:

1. $p \longrightarrow q$ ____________________

2. $P_x \longrightarrow Q_x$ ____________________

3. $P_a \wedge Q_a$ ____________________

4. $(x)(P_x \longrightarrow \sim Q_x)$ ____________________

5. $\varphi_x \longrightarrow \Psi_x$ ____________________

II .- ENTRE LAS DOS COLUMNAS RELACIONE CON LINEAS RECTAS TODAS LAS EXPRESIONES QUE SEAN EQUIVALENTES

1.	$(\exists_x)(B_x \wedge \sim C_x)$.	. $B \cap \overline{C} = \emptyset$
2.	$B \subseteq C$.	. $\sim(x)(B_x \longrightarrow \sim C_x)$
3.	$(x)(B_x \longrightarrow C_x)$.	. $\{x/x$ está en B y x está en $C\}$
4.	$B \cap C \neq Q$.	. $\{x/x \in B \wedge x \in \overline{C}\}$
5.	$\{x/x \in B \wedge x \notin C\}$.	. $\sim(\exists_x)(B_x \wedge \sim C_x)$

III .- SIMBOLICE LAS SIGUIENTES EXPRESIONES:

1. A es el conjunto de las "y" que tienen la propiedad de ser mayores que 10 ____________________

2. Algunos canguros tienen alas ____________________

HOJA DE TRABAJO

3. Ningún astronauta es músico ______________________

4. Todos los zopilotes son verdes ______________________

5. El elemento a no pertenece al conjunto B ______________________

IV.- SEA $U = \{+, \times, \div, \square, \triangle, -, *, 0, \$\}$, $A = \{+, \times, \div, -, *\}$

y $B = \{\times, \square, *, \triangle, -\}$

DAR LA DESCRIPCION EXTENSIONAL DE LOS SIGUIENTES CONJUNTOS:

1. $A \quad B = \{$

2. $A \quad B = \{$

3. $A \quad B = \{$

4. $A \quad \bar{B} = \{$

5. $\bar{A} = \{$

V .- DEFINIR LAS ZONAS CORRESPONDIENTES A LOS CONJUNTOS ENUMERADOS DE ACUERDO CON EL DIAGRAMA:

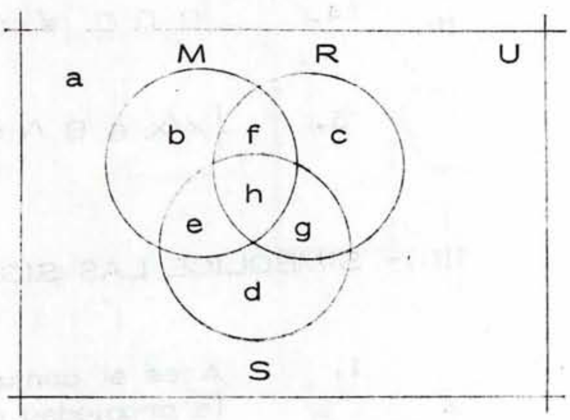
1. $M \cap \bar{R}$: ______________________

2. $\bar{S} \cap \bar{R}$: ______________________

3. $\bar{S}$: ______________________

4. $M \cap \bar{R} \cap \bar{S}$: ______________________

5. $\bar{M} \cap \bar{R} \cap \bar{S}$: ______________________



HOJA DE TRABAJO

VI.- INDICAR EL VALOR DE VERDAD CORRESPONDIENTE A LA PROPOSICION DE LA DERECHA RESPECTO AL VALOR DE VERDAD ASIGNADO A LA DE LA IZQUIERDA:

1. Algún político es ratón		Ningún político es ratón	
2. Todos los comerciantes son honrados		Algún comerciante es honrado	
3. Ningún loco es inteligente		Algún loco no es inteligente.	
4. Algunas aves no vuelan		Ninguna ave vuela	
5. Ningún perro es blanco		Todos los perros son blancos.	

VII .- INDIQUE SI LOS SIGUIENTES SILOGISMOS SON INVALIDOS Y SI LO SON QUE REGLAS VIOLAN.

1.- ____________ los conejos corren rápido

2.- ____________ caballos corren rápido

⊢

3.- ____________ ____________ son ________________

1.- ____________ D es F

2.- ____________ D es H

⊢

3.- ____________ H es F

HOJA DE TRABAJO

1.- Todas las niñas bonitas son buenas

2.- Todas las niñas bonitas no son presumidas

$\vdash$

3.- Todas las ______________ son __________

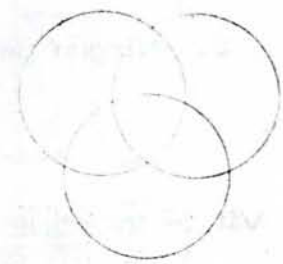
VIII.- DEMOSTRAR LOS SIGUIENTES SILOGISMOS CON DIAGRAMAS DE VENN.

a) 1.- Algunos comunistas son socialistas

2.- Algunos socialistas son demagogos

$\vdash$

3.- ________________ son ____________

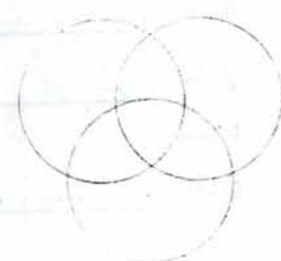


b) 1.- __________ científicos son egoístas

2.- __________ diseñadores no son egoístas

$\vdash$

3.- __________ diseñadores no son científicos



CONTENIDO DEL CAPITULO VI DEMOSTRACION DE ARGUMENTOS QUE CONTENGAN PROPOSICIONES CATEGORICAS.

CAPITULO VI DEMOSTRACION DE ARGUMENTOS QUE CONTENGAN PROPOSICIONES CATEGORICAS.

1. DEMOSTRACION CON REGLAS DE INFERENCIA.

Para poder aplicar las reglas de inferencia a argumentos que contengan proposiciones categóricas universales y existenciales, será necesario conocer dos reglas que permitan eliminar los cuantificadores de las proposiciones antes de operar con las reglas de inferencia, y otras dos de introducción de dichos cuantificadores como final de la demostración.

Estas reglas están basadas en un razonamiento lógico tal que permite la eliminación o la introducción de los cuantificadores según los casos que se satisfagan para cada regla.

2. REGLAS PARA LA ELIMINACION DE LOS CUANTIFICADORES

2.1. EJEMPLIFICACION UNIVERSAL.

Se ha visto que el símbolo (x) cuantifica universalmente todas las ocurrencias libres de x en F(x) por lo que el cuantificador comprende toda la función proposicional o esquema proposicional.

Si $A_x \longrightarrow B_x$ representa un esquema proposicional de (x) $(A_x \longrightarrow B_x)$ éste puede expresarse como una función de x, F(x), de tal manera que si la proposición universal (x) $(A_x \longrightarrow B_x)$ es verdadera, cualquier ejemplo de sustitución de su esquema proposicional $(A_x \longrightarrow B_x)$ será verdadero.

Es evidente que si es verdadera la proposición de que todos los individuos de un universo determinado tienen una propiedad, entonces cualquier individuo del mismo universo satisface esa proposición.

Por ejemplo: La forma lógica de la proposición

Todos los hombres son mortales

es $(x)\ (H_x \longrightarrow M_x)$

El esquema de la proposición es

$$H_x \longrightarrow M_x$$

Si la proposición $(x)\ (H_x \longrightarrow M_x)$ es verdadera, entonces $H_i \longrightarrow M_i$ también es verdadera, representando i a cualquier individuo del universo de x en el esquema proposicional $H_x \longrightarrow M_x$.

Si $H_i \longrightarrow M_i$ es verdadera, entonces $H_c \longrightarrow M_c$ será también verdadera, siendo c la constante individual que representa al sujeto (por ejemplo: Carlos)

Esta secuencia nos demuestra la regla de inferencia llamada EJEMPLIFICACION UNIVERSAL (EU):

$$(x)\ F\ (x) \vdash F\ (y) \qquad (EU)$$

en la cual la (y) afirma que podemos sustituir con cualquier individuo del universo.

Si	$(x)\,(H_x \longrightarrow M_x)$	$(x)\ F\ (x)$	Proposición Universal Verdadera.
	$H_x \longrightarrow M_x$	$F\ (x)$	Esquema Proposicional
	$H_i \longrightarrow M_i$	$F\ (i)$	Sustitución
entonces	$H_c \longrightarrow M_c$	$F\ (c)$	Sustitución Caso Particular

Ejemplo de aplicación de la regla de ejemplificación universal (EU)

1. Todos los físicos son científicos.
2. Einstein fue físico

$\vdash$

3. Einstein fue científico

Representación del argumento:

1. $(x)\,(F_x \longrightarrow C_x)$ (P)
2. $F_e \quad \vdash \quad C_e$ (P,C) (P,C)
3. $F_e \longrightarrow C_e$ del renglón 1 aplicando la regla (EU)
4. C_e de los renglones 3,2 (mpp)

La aplicación de esta regla puede extenderse a esquemas proposicionales, siempre que se refieran a los individuos del mismo universo pues se ha deducido que si es verdadera una proposición que cuantifica a todos los individuos, se infiere que es verdadera para cualquier individuo y/o para un individuo en particular (c).

En el siguiente argumento, se aplica la regla (EU)

1.-	$(x)\,(F_x \longrightarrow C_x)$	(P)
2.-	$(x)\,(C_x \longrightarrow D_x) \vdash (x)\,(F_x \longrightarrow D_x)$	(P,C)
3.-	$F_y \longrightarrow C_y$	1 (EU)
4.-	$C_y \longrightarrow D_y$	2 (EU)
5.-	$F_y \longrightarrow D_y$	3,4 (trans)
6.-	....	

siendo los renglones 3 y 4, ejemplos de sustitución de proposiciones (esquemas proposicionales) que satisfacen la regla de ejemplificación universal.

Obsérvese que dentro del desarrollo de la prueba pueden presentarse proposiciones o esquemas proposicionales, pero las premisas y la conclusión de un argumento deberán ser proposiciones.

2.2 EJEMPLIFICACION EXISTENCIAL (EE)

Esta regla se utiliza para eliminar el cuantificador existencial y su demostración se basa en el siguiente razonamiento:

en la proposición $(\exists x)\, F(x)$ no puede afirmarse que si esta proposición es verdadera, cualquier ejemplo de sustitución de $F(x)$ sea verdadero, ya que el alcance del cuantificador es limitado (algunos).

Si en cambio, si hay por lo menos un caso $F(c)$ que sea verdadero, entonces $(\exists x)\, F(x)$ resultará verdadero.

Esta regla se expresa como $(\exists_x)\ F\ (x) \vdash F\ (w)$ en donde "w" indica la sustitución por algunos individuos de un universo determinado o por uno solo.

Por ejemplo: La proposición "algunos hombres son inteligentes" pertenece a la forma $(\exists_x)(H_x \wedge I_x)$ y su interpretación será: "Existe por lo menos una "x" tal que x es H y x es I". El esquema de la proposición es

$$(H_x \wedge I_x)$$

Si la proposición $(\exists_x)(H_x \wedge I_x)$ es verdadera, entonces sólo la satisfacen algunos individuos o por lo menos uno que tenga la propiedad de ser hombre e inteligente, con lo que el esquema de algunos individuos se transforma a $(H_w \wedge I_w)$

Por ejemplo: Todos los comerciantes son ambiciosos. Algunos españoles son comerciantes. Por consiguiente algunos españoles son ambiciosos.

1.	$(x)(C_x \longrightarrow A_x)$	(P)
2.	$(\exists_x)(E_x \wedge C_x) \vdash (\exists_x)(E_x \wedge A_x)$	(P,C)
3.	$E_w \wedge C_w$	2 (EE)
4.	$C_w \longrightarrow A_w$	1 (EU)
5.	C_w	3 (conm,simpl)
6.	A_w	4,5 (mpp)
7.	E_w	3 (simpl)
8.	$E_w \wedge A_w$	7,6 (conj)
9.	....	

Si la premisa 1 es una proposición universal verdadera, cualquier ejemplo de sustitución será verdadero, por lo que se elige a los individuos que hace referencia la proposición 2, la que sólo será verdadera si existe por lo menos un individuo w que satisface ambas propiedades, obviamente w satisface a la proposición universal y de esta manera se tiene la seguridad de referirse en la prueba a los mismos individuos.

3. REGLAS PARA INTRODUCIR CUANTIFICADORES.

3.1. GENERALIZACION EXISTENCIAL Y UNIVERSAL.

El objetivo de estas reglas consiste en introducir cuantificadores a las funciones proposicionales deducidas en la prueba, de tal manera que la conclusión sea una proposición.

En el argumento anterior se ha llegado a la función proposicional $E_w \wedge A_w$ que asevera que algunos individuos w tienen la propiedad de ser E y A simultáneamente, por lo que puede introducirse el cuantificador existencial; llamándose a esta regla GENERALIZACION EXISTENCIAL (GE).

9. $(\exists_x)(E_x \wedge A_x)$ del renglón 8 por la regla (GE).

Sea el siguiente argumento:

Los ácidos y las bases son productos químicos. Los vinagres son ácidos. Por consiguiente, los vinagres son productos químicos.

y su representación:

1.	$(x)\left[(A_x \vee B_x) \longrightarrow Q_x\right]$ *		(P)
2.	$(x)(V_x \longrightarrow A_x) \vdash (x)(V_x \longrightarrow Q_x)$		(P,C)
3.	$(A_y \vee B_y) \longrightarrow Q_y$	1	(EU)
4.	$V_y \longrightarrow A_y$	2	(EU)
5.	$\sim (A_y \vee B_y) \vee Q_y$	3	(cond)
6.	$(\sim A_y \wedge \sim B_y) \vee Q_y$	5	(De M)
7.	$Q_y \vee (\sim A_y \wedge \sim B_y)$	6	(conm)
8.	$(Q_y \vee \sim A_y) \wedge (Q_y \vee \sim B_y)$	7	(distr)
9.	$(\sim A_y \vee Q_y) \wedge (\sim B_y \vee Q_y)$	8	(conm)
10.	$(A_y \longrightarrow Q_y) \wedge (B_y \longrightarrow Q_y)$	9	(cond)
11.	$A_y \longrightarrow Q_y$	10	(simpl)
12.	$V_y \longrightarrow Q_y$	4,11	(trans)
13.	....		

Al establecer un esquema en función de la variable "y", ésta representa a cualquier individuo dentro del universo de referencia; al concluir en el - argumento otro esquema en función de la misma variable se puede introducir el cuantificador universal generalizando la función proposicional. - Parafraseando se concluye: Lo que conviene a cualquier individuo(y)conviene a todos los individuos (x).

13. $(x)(V_x \longrightarrow Q_x)$ del renglón 12 por la regla (GU) llamada GENERALIZACION UNIVERSAL.

* Note que la primera premisa lleva el conectivo V pues la expresión "los ácidos y las bases son ...." no implica que un elemento sea -

simultáneamente ácido y base.

4. EJERCICIOS DE APLICACION DE LAS REGLAS

A 1. Ningún artista es policía. Todos los cantantes son artistas. Por consiguiente, ningún cantante es policía.

1. $(x)(A_x \longrightarrow \sim P_x)$
2. $(x)(C_x \longrightarrow A_x) \vdash (x)(C_x \longrightarrow \sim P_x)$
3. $A_y \longrightarrow \sim P_y$ 1 (EU)
4. $C_y \longrightarrow A_y$ 2 (EU)
5. $C_y \longrightarrow \sim P_y$ 4,3 (trans)
6. $(x)(C_x \longrightarrow \sim P_x)$ 5 (GU)

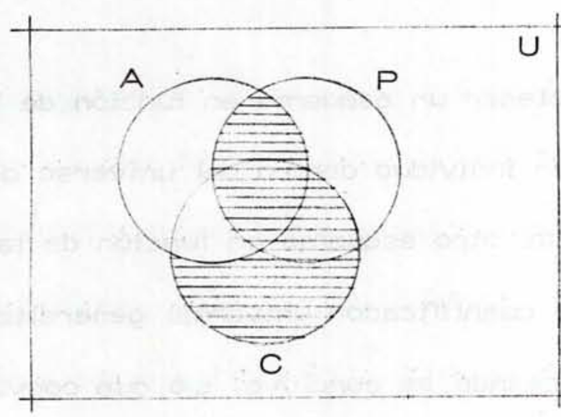
Como en este caso el argumento es un silogismo, puede demostrarse con diagramas de Venn. (forma EAE, 1a. figura)

1. $A \cap P = \varnothing$

2. $C \cap \overline{A} = \varnothing$

$\vdash$

3. $C \cap P = \varnothing$



Como la conclusión está contenida en la representación de las premisas, el silogismo es válido.

A 2. Ser un estafador es ser ladrón. Algunos menesterosos no son ladrones. Por consiguiente algunos menesterosos no son estafadores.

1.	$(x)(E_x \longrightarrow L_x)$	(P)
2.	$(\exists_x)(M_x \wedge \sim L_x) \vdash (\exists_x)(M_x \wedge \sim E_x)$	(P,C)
3.	$M_w \wedge \sim L_w$	2 (EE)
4.	$E_w \longrightarrow L_w$	1 (EU)
5.	$\sim L_w$	3 (conm,simpl)
6.	$\sim E_w$	4,5 (mtt)
7.	M_w	3 (simpl)
8.	$M_w \wedge \sim E_w$	7,6 (conj)
9.	$(\exists_x)(M_x \wedge \sim E_x)$	8 (GE)

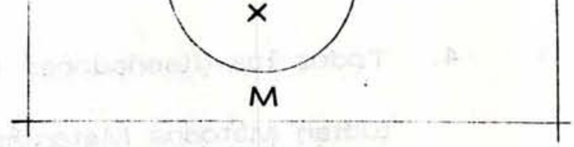
Con los diagramas de Venn.(silogismo de la forma A O O 2a. figura)

1. $E \cap \bar{L} = \emptyset$

2. $M \cap \bar{L} \neq \emptyset$

$\vdash$

3. $M \cap \bar{E} \neq \emptyset$



La conclusión está contenida en la representación de las premisas por lo tanto el silogismo es válido.

A 3. Todos los empleados que no son interinos están presentes.

Todos los archivistas son empleados.

Algunos archivistas no están presentes.

Por consiguiente

Algunos archivistas son interinos.

1.	$(x)\,[(E_x \wedge \sim I_x) \longrightarrow P_x]$	(P)
2.	$(x)\,(A_x \longrightarrow E_x)$	(P)
3.	$(\exists_x)\,(A_x \wedge \sim P_x) \vdash (\exists_x)\,(A_x \wedge I_x)$	(P,C)
4.	$A_w \wedge \sim P_w$	3 (EE)
5.	$(E_w \wedge \sim I_w) \longrightarrow P_w$	1 (EU)
6.	$A_w \longrightarrow E_w$	2 (EU)
7.	A_w	4 (simpl)
8.	$\sim P_w$	4 (conm,simpl)
9.	$\sim (E_w \wedge \sim I_w)$	5,8 (mtt)
10.	$\sim E_w \vee I_w$	9 (De M)
11.	E_w	6,7 (mpp)
12.	I_w	10,11 (mtp)
13.	$A_w \wedge I_w$	7,12 (conj)
14.	$(\exists_x)\,(A_x \wedge I_x)$	13 (GE)

A 4. Todos los diseñadores industriales y de la comunicación estudian Métodos Matemáticos y Geometría Descriptiva. Por lo tanto, los diseñadores industriales estudian Métodos Matemá ticos. (Ver nota de la página 192).

1. $(x)\left[(I_x \vee C_x) \longrightarrow (M_x \wedge G_x)\right] \vdash (x)(I_x \longrightarrow M_x)$ (P)

2. $(I_y \vee C_y) \longrightarrow (M_y \wedge G_y)$ 1 (EU)

3. | 3.1 I_y hip

| 3.2 $I_y \vee C_y$ 3.1 (ad)

| 3.3 $M_y \wedge G_y$ 2,3.2 (mpp)

| 3.4 M_y 3.3 (simpl)

4. $I_y \longrightarrow M_y$ 3 (pr.cond)

5. $(x)(I_x \longrightarrow M_x)$ 4 (GU)

A 5. Algún boxeador será derrotado si entrena esporádicamente.

Olivares entrena esporádicamente. Por lo tanto, si Olivares es boxeador, él será derrotado.

1. $(\exists_x)(B_x \wedge E_x) \longrightarrow D_x$ (P)

2. $E_o \vdash B_o \longrightarrow D_o$ (P,C)

3. $(B_o \wedge E_o) \longrightarrow D_o$ 1 (EE)

4. $(E_o \wedge B_o) \longrightarrow D_o$ 3 (conm)

5. $E_o \longrightarrow (B_o \longrightarrow D_o)$ 4 (exp)

6. $B_o \longrightarrow D_o$ 5,2 (mpp)

A 6. Carlos es aviador. Si hay algún aviador, entonces será contratado y trabajará por tres años. Por lo tanto, alguien trabajará por tres - años.

1. A_c (P)

2. $(\exists_x)\left[A_x \rightarrow (C_x \wedge T_x)\right] \vdash (\exists_x)\ T_x$ (P,C)

3. $A_c \longrightarrow (C_c \wedge T_c)$ 2 (EE)

4. $C_c \wedge T_c$ 3,1 (mpp)

5. T_c 4 (conm,simpl)

6. $(\exists_x)\ T_x$ 5 (GE)

A 7. Todos los animales son racionales o irracionales. Todos los animales irracionales no piensan. Alberto piensa. Por lo tanto, Alberto es racional.

1. $(x)\ (R_x \vee I_x)$ (P)

2. $(x)\ (I_x \longrightarrow \sim P_x)$ (P)

3. $P_a \vdash R_a$ (P,C)

4. $R_a \vee I_a$ 1 (EU)

5. $I_a \longrightarrow \sim P_a$ 2 (EU)

6. $\sim I_a$ 5,3 (mtt)

7. $I_a \vee R_a$ 4 (conm)

8. R_a 7,6 (mtp)

A 8. Ningún alumno saldrá reprobado si estudia. Algún alumno saldrá reprobado. Por lo tanto, algún alumno no estudiará.

1. $(x)\ \left[(A_x \wedge E_x) \longrightarrow \sim R_x\right]$ (P)

2. $(\exists_x)(A_x \wedge R_x) \vdash (\exists_x)(A_x \wedge \sim E_x)$ (P,C)

3. $A_w \wedge R_w$ 2 (EE)

4. $(A_w \wedge E_w) \longrightarrow \sim R_w$ 1 (EU)

5. R_w 3 (conm, simpl)

6. $\sim(A_w \wedge E_w)$ 4,5 (mtt)

7. $\sim A_w \vee \sim E_w$ 6 (De M)

8. A_w 3 (simpl)

9. $\sim E_w$ 7,8 (mtp)

10. $A_w \wedge \sim E_w$ 8,9 (conj)

11. $(\exists_x)(A_x \wedge \sim E_x)$ 10 (GE)

A 9. Todos los profesionistas desean servir a los grandes negocios o servir a la clase necesitada. Ningún profesionista honrado desea servir a los grandes negocios. Por lo tanto, si todos los profesionistas son honrados, entonces todos ellos desean servir a la clase necesitada.

1. $(x)\ [P_x \longrightarrow (G_x \vee C_x)]$ (P)

2. $(x)\ [(P_x \wedge H_x) \longrightarrow \sim G_x] \vdash (x)\ [(P_x \wedge H_x) \longrightarrow C_x]$ (P,C)

3. $P_y \longrightarrow (G_y \vee C_y)$ 1 (EU)

4. $(P_y \wedge H_y) \longrightarrow \sim G_y$ 2 (EU)

5. | 5.1 $P_y \wedge H_y$ hip
   | 5.2 $\sim G_y$ 4,5.1 (mpp)
   | 5.3 P_y 5.1 (simpl)
   | 5.4 $G_y \vee C_y$ 3,5.3 (mpp)
   | 5.5 C_y 5.4,5.2 (mtp)

6. $(P_y \wedge H_y) \longrightarrow C_y$ 5 (pr.cond)

7. $(x)\ [(P_x \wedge H_x) \longrightarrow C_x]$ 6 (GU)

A 10. Ley del (mpp)

1.	$(x)\ P_x$		(P)
2.	$(x)\ (P_x \longrightarrow Q_x) \vdash (x)\ Q_x$		(P,C)
3.	P_y	1	(EU)
4.	$P_y \longrightarrow Q_y$	2	(EU)
5.	Q_y	4,3	(mpp)
6.	$(x)\ Q_x$	5	GU

A 11. Ley del (mtt)

1.	$(x)\ (P_x \longrightarrow Q_x)$		(P)
2.	$(x)\ (\sim Q_x) \vdash (x)\ (\sim P_x)$		(P,C)
3.	$P_y \longrightarrow Q_y$	1	(EU)
4.	$\sim Q_y$	2	(EU)
5.	$\sim P_y$	3,4	(mtt)
6.	$(x)\ (\sim P_x)$	5	(GU)

A 12. Ley del (mtp)

1.	$(x)\ (P_x \lor Q_x)$		(P)
2.	$(x)\ (\sim P_x) \vdash (x)\ Q_x$		(P,C)
3.	$P_y \lor Q_y$	1	(EU)
4.	$\sim P_y$	2	(EU)
5.	Q_y	3,4	(mtp)
6.	$(x)\ Q_x$	5	(GU)

A 13. Ley de la adición (ad)

1.	$(x)\, P_x \vdash (x)\,(P_x \vee Q_x)$	(P,C)
2.	P_y	1 (EU)
3.	$P_y \vee Q_y$	2 (ad)
4.	$(x)\,(P_x \vee Q_x)$	3 (GU)

A 14. Ley de la conjunción (conj)

1.	$(x)\, P_x$	(P)
2.	$(x)\, Q_x \vdash (x)\,(P_x \wedge Q_x)$	(P,C)
3.	P_y	1 (EU)
4.	Q_y	2 (EU)
5.	$P_y \wedge Q_y$	3,4 (conj)
6.	$(x)\,(P_x \wedge Q_x)$	5 (GU)

A 15. Ley de la simplificación (simpl)

1.	$(x)\,(P_x \wedge Q_x) \vdash (x)\, P_x$	(P,C)
2.	$P_y \wedge Q_y$	1 (EU)
3.	P_y	2 (simpl)
4.	$(x)\, P_x$	3 (GU)

A 16. Ley de la transitividad (trans)

1. $(x)(P_x \longrightarrow Q_x)$ (P)
2. $(x)(Q_x \longrightarrow R_x) \vdash (x)(P_x \longrightarrow R_x)$ (P,C)
3. $P_y \longrightarrow Q_y$ 1 (EU)
4. $Q_y \longrightarrow R_y$ 2 (EU)
5. $P_y \longrightarrow R_y$ 3,4 (trans)
6. $(x)(P_x \longrightarrow R_x)$ 5 (GU)

A 17. Ley de la exportación. (exp) $F_1 \equiv F_2$

1. $(x)\left[(P_x \wedge Q_x) \longrightarrow R_x\right] \vdash (x)\left[P \rightarrow (Q_x \rightarrow R_x)\right]$ (P,C)
2. $(P_y \wedge Q_y) \longrightarrow R_y$ 1 (EU)
3. $\sim(P_y \wedge Q_y) \vee R_y$ 2 (cond)
4. $\sim P_y \vee \sim Q_y \vee R_y$ 3 (De M)
5. $\sim P_y \vee (\sim Q_y \vee R_y)$ 4 Asociatividad
6. $P_y \longrightarrow (\sim Q_y \vee R_y)$ 5 (cond)
7. $P_y \longrightarrow (Q_y \longrightarrow R_y)$ 6 (cond)
8. $(x)\left[P_x \longrightarrow (Q_x \longrightarrow R_x)\right]$ 7 (GU)

A 18. Ley de la exportación (exp) $F_1 \equiv F_2$

Prueba condicional con niveles de hipótesis.

1. $(x)\left[(P_x \wedge Q_x) \longrightarrow R_x\right] \vdash (x)\left[P_x \rightarrow (Q_x \rightarrow R_x)\right]$ (P,C)
2. $(P_y \wedge Q_y) \longrightarrow R_y$ 1 (EU)
3. 3.1. P_y hip

3.2	$P_y \longrightarrow (Q_y \longrightarrow R_y)$	2	(exp)
3.3	$Q_y \longrightarrow R_y$	3.2,3.1	(mpp)

4. $P_y \longrightarrow (Q_y \longrightarrow R_y)$ 3 (Pr.cond)

5. $(x)\ [P_x \longrightarrow (Q_x \longrightarrow R_x)]$ 4 (GU)

A 19.

1. $(x)\ (P_x \longrightarrow Q_x)$ (P)
2. $\sim Q_b \vdash \sim P_b$ (P,C)
3. $P_b \longrightarrow Q_b$ 1 (EU)
4. $\sim P_b$ 3,2 (mtt)

A 20 Ley de exportación (exp) $F_2 \equiv F_1$

Prueba condicional con niveles de hipótesis

1. $(x)\ [P_x \longrightarrow (Q_x \longrightarrow R_x)] \vdash (x)\ [(P_x \wedge Q_x) \longrightarrow R_x]$ P,C
2. $P_y \longrightarrow (Q_y \longrightarrow R_y)$ 1 (EU)
3.

3.1	$P_y \wedge Q_y$		hip
3.2	P_y	3.1	(simpl)
3.3	$Q_y \longrightarrow R_y$	2,3,2	(mpp)
3.4	Q_y	3.1	(conm,simpl)
3.5	R_y	3,3,3.4	(mpp)

4. $(P_y \wedge Q_y) \longrightarrow R_y$ 3 (Pr.cond)
5. $(x)\ [(P_x \wedge Q_x) \longrightarrow R_x]$ 4 (GU)

A 21.

1. $(x)\,(P_x \wedge Q_x)$ (P)
2. $\sim P_b \vdash R_b$ (P,C)
3. $P_b \wedge Q_b$ 1 (EU)
4. P_b 3 (simpl)
5. $P_b \vee R_b$ 4 (ad)
6. R_b 5,2 (mtp)

A 22. Prueba condicional

1. $(x)\,(P_x \longrightarrow Q_x) \vdash P_c \longrightarrow (R_c \longrightarrow Q_c)$ (P,C)
2. $P_c \vdash R_c \longrightarrow Q_c$ (Pr. cond)
3. $P_c \longrightarrow Q_c$ 1 (EU)
4. Q_c 3,2 (mpp)
5. $Q_c \vee \sim R_c$ 4 (ad)
6. $R_c \longrightarrow Q_c$ 5 (conm, cond)

A 23. Prueba condicional con niveles de hipótesis

1. $(x)\,(P_x \longrightarrow Q_x) \vdash P_c \longrightarrow (R_c \longrightarrow Q_c)$ (P,C)
2. $P_c \longrightarrow Q_c$ 1 (EU)
3. | 3.1 $P_c \wedge R_c$ (hip)
   | 3.2 P_c 3.1 (simpl)
   | 3.3 Q_c 2,3.2 (mpp)
4. $(P_c \wedge R_c) \longrightarrow Q_c$ 3 (Pr.cond)
5. $P_c \longrightarrow (R_c \longrightarrow Q_c)$ 4 (exp)

A 24.

1.	$(\exists_x)(P_x \wedge Q_x) \vdash (\exists_x)(P_x \vee Q_x)$	(P,C)
2.	$P_w \wedge Q_w$	1 (EE)
3.	P_w	2 (simpl)
4.	$P_w \vee Q_w$	3 (ad)
5.	$(\exists_x)(P_x \vee Q_x)$	4 (GE)

A 25.

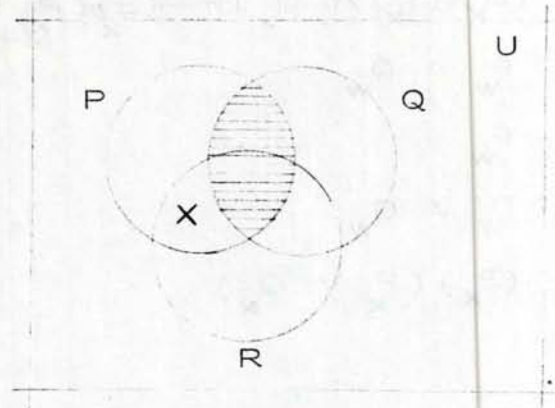
1.	$(\exists_x) P_x$	(P)
2.	$(x)\, Q_x \vdash (\exists_x)(P_x \wedge Q_x)$	(P,C)
3.	P_w	1 (EE)
4.	Q_w	2 (EU)
5.	$P_w \wedge Q_w$	3,4 (conj)
6.	$(\exists_x)(P_x \wedge Q_x)$	5 (GE)

A 26

1.	$(x)(P_x \longrightarrow \sim Q_x)$	(P)
2.	$(\exists_x)(R_x \wedge P_x) \vdash (\exists_x)(R_x \wedge \sim Q_x)$	(P,C)
3.	$R_w \wedge P_w$	2 (EE)
4.	$P_w \longrightarrow \sim Q_w$	1 (EU)
5.	P_w	3 (conm,simpl)
6.	$\sim Q_w$	4,5 (mpp)
7.	R_w	3 (simpl)
8.	$R_w \wedge \sim Q_w$	7,6 (conj)
9.	$(\exists_x)(R_x \wedge \sim Q_x)$	8 (GE)

FORMA EIO 1a. figura

1. $P \cap Q = \varnothing$
2. $R \cap P \neq \varnothing$
3. $R \cap \bar{Q} \neq \varnothing$



VALIDO

A 27.

1.	$(x)(P_x \longrightarrow Q_x)$	(P)
2.	$(\exists_x) P_x \vdash (\exists_x)(P_x \wedge Q_x)$	(P,C)
3.	P_w	2 (EE)
4.	$P_w \longrightarrow Q_w$	1 (EU)
5.	Q_w	4,3 (mpp)
6.	$P_w \wedge Q_w$	3,5 (conj)
7.	$(\exists_x)(P_x \wedge Q_x)$	6 (GE)

A 28.

1.	$P_a \longrightarrow Q_a$	(P)
2.	$\sim Q_a \vdash (\exists_x)(\sim P_x)$	(P,C)
3.	$\sim P_a$	1,2 (mtt)
4.	$(\exists_x)(\sim P_x)$	3 (GE)

5. DEMOSTRACION POR REDUCCION AL ABSURDO

La demostración de argumentos formados con proposiciones categóricas sigue el mismo razonamiento visto en el capítulo II aplicando las siguientes reglas.

1). Si la conclusión es una proposición existencial, al realizar la prueba será suficiente con ejemplificar para un individuo en particular y se dará por VALIDO el argumento si al deducir los valores de verdad de todas las variables se ha encontrado alguna contradicción o contradicciones en todas las alternativas de valores de verdad que obligue a un análisis parcial de tabla de verdad.

2). Si la conclusión es una proposición existencial y al realizar la prueba con un individuo en particular y deducir todos los valores de verdad de las variables se presenta un caso en que no haya contradicción, se aplicará la EXPANSION PROPOSICIONAL, ejemplificando con dos o más individuos, en la forma que se indica en el inciso 5.1. pudiendo resultar la prueba ilimitada.

3). Si la conclusión es una proposición universal las premisas deberán estar formadas por proposiciones universales, ejemplificando inicialmente con un individuo en particular, de no encontrar alguna contradicción después de quedar asignados todos los valores de las variables se podrá suspender la prueba dando por INVALIDO el argumento.

4). Si las premisas y conclusión son proposiciones universales y al realizar la prueba ejemplificando con un individuo en particular se presenta alguna contradicción deberá aplicarse la EXPANSION PROPOSICIONAL ejemplificando con dos o más individuos pudiendo resultar la prueba ilimitada.

5.1 EXPANSION PROPOSICIONAL

La proposición categórica universal (x) F (x) se refiere a todos los individuos, entonces puede expanderse esta proposición a todos y cada uno de los individuos del universo a que se refiere.

Por ejemplo: Sea (x)(Fx) una proposición universal, y su expansión

$$F(a_1) \wedge F(a_2) \wedge \ldots \wedge F(a_n) \wedge \ldots$$

siendo a_1, a_2, ... a_n los individuos enumerados en el universo de referencia de la proposición, pudiendo conjuntar los no enumerados.

Para que la EXPANSION PROPOSICIONAL de una proposición universal (x) F (x) sea verdadera, todos y cada uno de los elementos deben tener la propiedad asignada por la proposición, de ahí que el conectivo lógico sea el de la conjunción.

Sea $(\exists_x)\ F(x)$ una proposición existencial

Como la proposición categórica existencial se refiere solamente a algunos individuos es suficiente con que un solo individuo tenga la propiedad asignada en la proposición, por lo que su EXPANSION PROPOSICIONAL se hará utilizando el conectivo de la disyunción inclusiva:

$$F(a_1) \vee F(a_2) \vee F(a_3) \vee \ldots \vee F(a_n) \vee \ldots$$

Sea el argumento inicial del capitulo IV. página 133:

Todos los estudiantes son inteligentes. Luis es estudiante. Por consi guiente, Luis es inteligente. Es evidente, la validez del argumento por los conocimientos adquiridos en el curso, ya que su representa ción tiene la forma de la regla de inferencia " modus ponendo ponens (mpp)!'

1. $(x)(E_x \longrightarrow I_x)$ P (proposición universal)

2. $E_l \vdash I_l$ (P,C) (proposiciones singulares)

La prueba de reducción al absurdo nos demuestra su validez al en- contrar una contradicción en la primera premisa.

	$E_l \longrightarrow I_l$	E_l	I_l
Contradicción	1	1	0
	1 0		
	0		

argumento válido

Si en el argumento anterior se cambia la 2a. premisa: Todos los estudiantes son inteligentes, Luis es inteligente, por consiguiente, Luis es estudiante, el argumento es inválido como lo demuestra la siguiente tabla de verdad en la cual no hay contradicción con los valores asignados a las premisas y la conclusión.

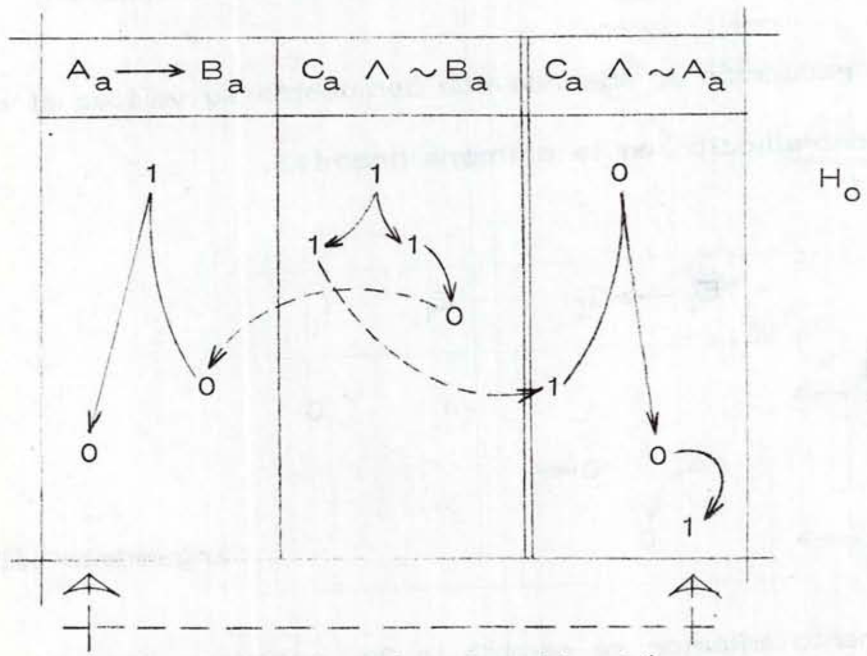
$E_l \longrightarrow I_l$	I_l	E_l	
1	1	0	hip
0 1			no hay contradicción el argumento es inválido

Sea el siguiente argumento formal:

1. $(x)\ (A_x \longrightarrow B_x)$ (P)

2. $(\exists_x)\ (C_x \wedge \sim B_x) \vdash (\exists_x)\ (C_x \wedge \sim A_x)$ (P,C)

y su prueba por reducción al absurdo considerando a un individuo (a) de su universo la siguiente:



Contradicción

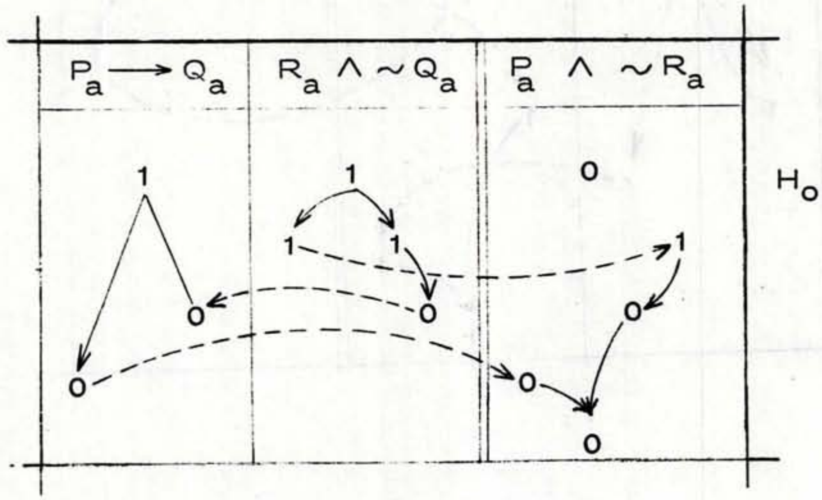
Existe una contradicción habiendo deducido todos los valores de verdad de las variables, por lo que siendo la conclusión una PROPOSICION EXISTENCIAL, se puede afirmar que el argumento es válido sin necesidad de aplicar la EXPANSION PROPOSICIONAL y que los valores asignados a las premisas y a la conclusión son inadmisibles.

Sea la representación de un argumento formado por una proposición universal y una existencial como premisas y una proposición existencial como conclusión.

1. $(x)\ (P_x \longrightarrow Q_x)$ (P)

2. $(\exists_x)\ (R_x \wedge \sim Q_x) \vdash (\exists_x)\ (P_x \wedge \sim R_x)$ (P,C)

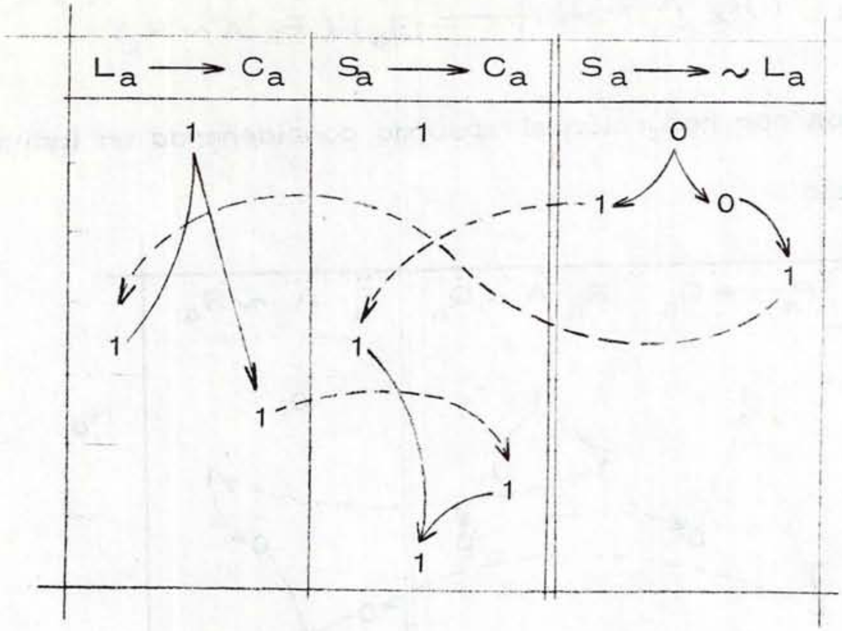
y su prueba por reducción al absurdo considerando un individuo (a) del universo



No existe contradicción en la prueba en la cual de acuerdo a lo visto anteriormente se ha considerado a un individuo del universo del argumento, por lo que no puede afirmarse que el argumento sea inválido, debiendo aplicar la EXPANSION PROPOSICIONAL pudiendo - resultar la prueba ilimitada.

Sea el siguiente argumento:

Toda L es C. Toda S es C por consiguiente ninguna S es L.



Al quedar asignados todos los valores de las variables y no presentarse contradicción puede asegurarse que el argumento es inválido siendo admisibles los valores asignados en la hipótesis -- inicial.

Sea el siguiente argumento.

Ser un estafador es ser ladrón. Algunos menesterosos no son ladrones. Por consiguiente. Ningún estafador es menesteroso. (Universo: seres humanos)

1. $(x)\ (E_x \longrightarrow L_x)$ (P)

2. $(\exists_x)\ (M_x \wedge \sim L_x) \vdash (x)\ (E_x \longrightarrow \sim M_x)$ (P,C)

Considerando a un solo individuo a.

$E_a \longrightarrow L_a$	$M_a \wedge \sim L_a$	$E_a \longrightarrow \sim M_a$	
1	1	0	hip
	1 1	1	
0	0	0	
0		1	

Contradicción

Para demostrar la invalidez de un argumento basta considerar a un solo individuo y que se presente un solo caso en que no exista contradicción para afirmar la hipótesis inicial de invalidez.

Pero, para asegurar lo contrario no basta considerar a un solo individuo en el mismo universo y encontrar una contradicción en la prueba, será necesario extender la prueba a un mayor número de individuos.

Aplicando la EXPANSION PROPOSICIONAL a las proposiciones universales y existencial del argumento se realiza la prueba considerando a dos individuos.

EXPANSION PROPOSICIONAL	cl
1. $(E_a \longrightarrow L_a) \wedge (E_b \longrightarrow L_b)$	(conjunción)
2. $(M_a \wedge \sim L_a) \vee (M_b \wedge \sim L_b)$	(disyunción)
$\vdash$	
$(E_a \longrightarrow \sim M_a) \wedge (E_b \longrightarrow \sim M_b)$	(conjunción)

	1a. Premisa	2a. Premisa	Conclusión	
	$(E_a \longrightarrow L_a) \wedge (E_b \longrightarrow L_b)$	$(M_a \wedge \sim L_a) \vee (M_b \wedge \sim L_b)$	$(E_a \longrightarrow \sim M_a) \wedge (E_b \longrightarrow \sim M_b)$	
	1	1	0	hip
1a. deducción	1 1	? ?	? ?	
	? ? ? ?			

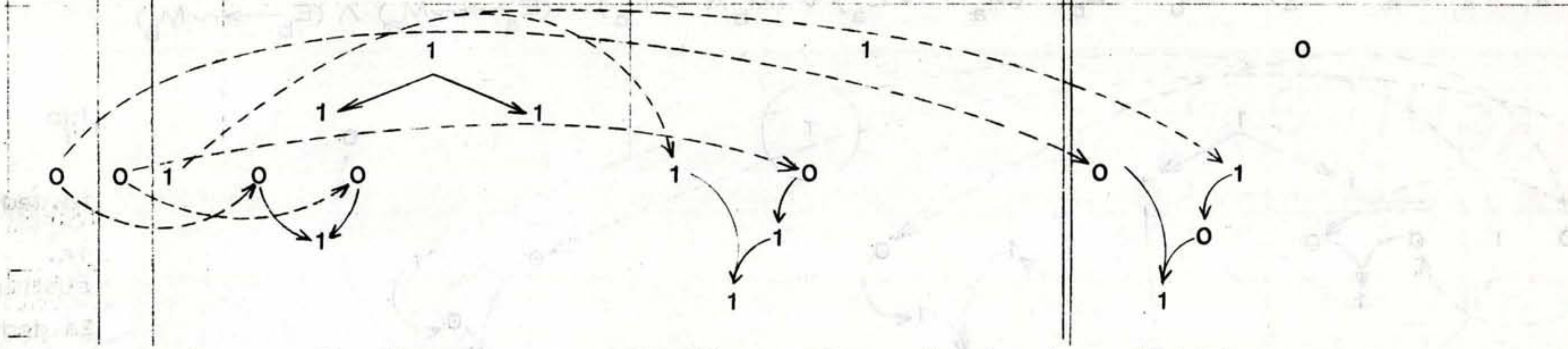
Al no poderse deducir más valores de verdad a partir de la definición de cada proposición, será necesario realizar la prueba mediante un análisis parcial de tabla de verdad, pudiendo elegir arbitrariamente los valores de las variables, o en forma ordenada de acuerdo a las alternativas del árbol lógico, o también eligiendo los valores de verdad a las variables en las que visiblemente no exista contradicción en la proposición correspondiente.

La selección de las variables en el análisis parcial se hace según la necesidad de asignación de su valor de verdad de cada una de ellas.

En el tanteo preliminar se eligen E_a, L_a y M_a, cuyos valores de verdad pueden ser:

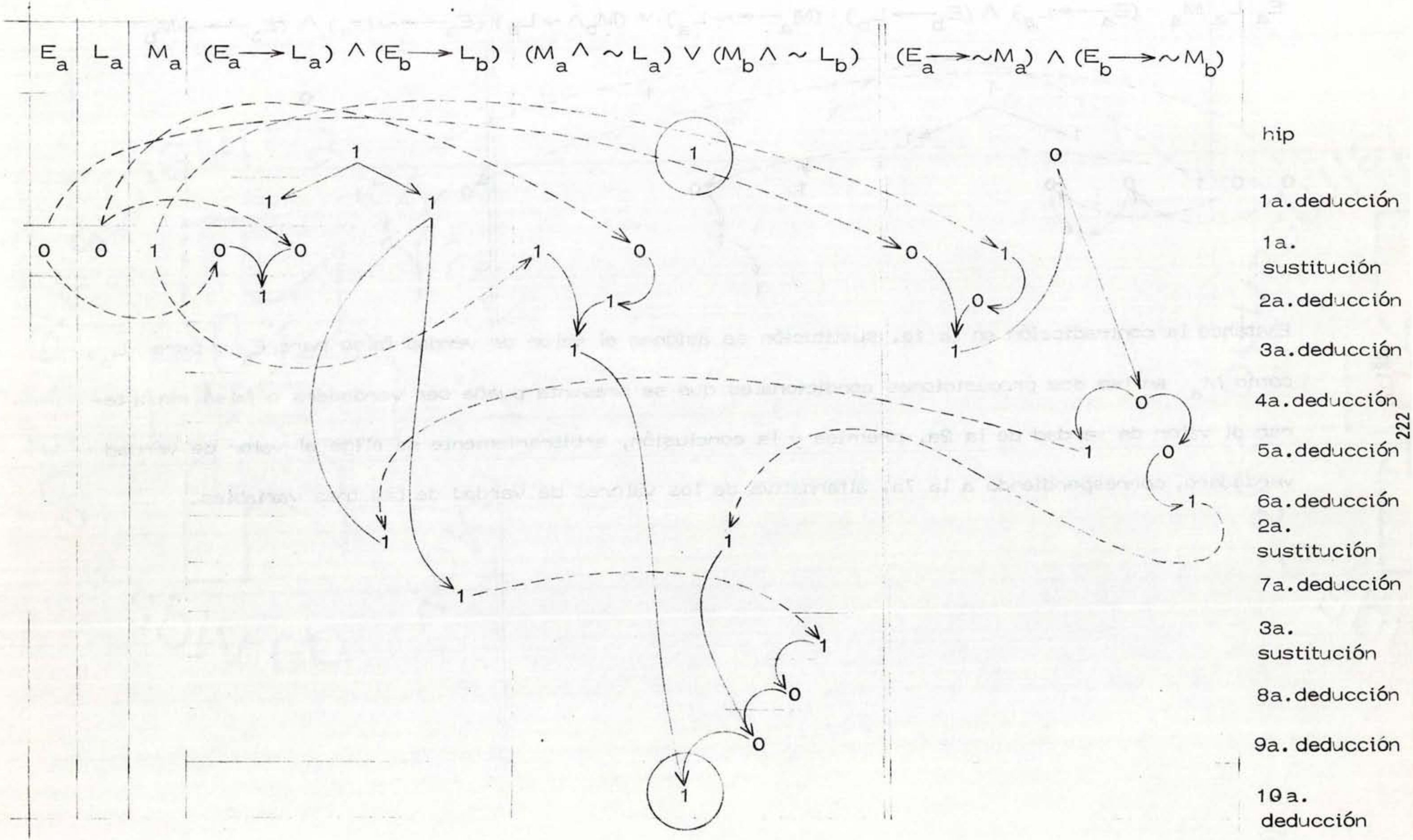
	E_a	L_a	M_a
1a.	1	1	1
2a.	1	1	0
3a.	1	0	1
4a.	1	0	0
5a.	0	1	1
6a.	0	1	0
7a.	0	0	1
8a.	0	0	0

$E_a \; L_a \; M_a \quad (E_a \longrightarrow L_a) \wedge (E_b \longrightarrow L_b) \quad (M_a \longrightarrow \sim L_a) \vee (M_b \wedge \sim L_b) \quad (E_a \longrightarrow \sim M_a) \wedge (E_b \longrightarrow \sim M_b)$



Evitando la contradicción en la 1a. sustitución se asignan el valor de verdad falso para E_a y para L_a, como M_a en las dos proposiciones condicionales que se presenta puede ser verdadera o falsa sin alterar el valor de verdad de la 2a. premisa y la conclusión, arbitrariamente se elige el valor de verdad verdadero, correspondiendo a la 7a. alternativa de los valores de verdad de las tres variables.

VI.



E_a L_a M_a $(E_a \rightarrow L_a) \wedge (E_b \rightarrow L_b)$ $(M_a \wedge \sim L_a) \vee (M_b \wedge \sim L_b)$ $(E_a \rightarrow \sim M_a) \wedge (E_b \rightarrow \sim M_b)$
hip
1a.deducción
1a. sustitución
2a.deducción
3a.deducción
4a.deducción
5a.deducción
6a.deducción
2a. sustitución
7a.deducción
3a. sustitución
8a.deducción
9a. deducción
10 a. deducción

Al quedar asignados todos los valores de verdad de las proposiciones, no se encontró contradicción alguna por lo que se puede afirmar que el argumento es inválido dado que si algún individuo no cumple las propiedades señaladas por el argumento no podrá generalizarse universalmente conforme a la conclusión descrita.

En caso de encontrar alguna contradicción, se continuará la prueba con otras alternativas.

EJERCICIO

Aplicando el método de reducción al absurdo con expansión proposicional realizar el análisis parcial de tabla de verdad en sus ocho alternativas para el siguiente argumento formal indicando en un cuadro cruzado los valores de verdad que presenten contradicción, como se ejemplifica en los dos primeros renglones, en los cuales las deducciones y sustituciones se han realizado en el mismo renglón.

1. $(x)\ (M_x \longrightarrow P_x)$ (P)

2. $(x)\ (K_x \longrightarrow \sim P_x) \vdash (x)\ (M_x \longrightarrow \sim K_x)$ (P,C)

M_a	M_b	K_b	$(M_a \rightarrow P_a) \wedge (M_b \rightarrow R_b)$	$(K_a \rightarrow \sim P_a) \wedge (K_b \rightarrow \sim P_b)$	$(M_a \rightarrow \sim K_a) \wedge (M_b \rightarrow \sim K_b)$	
			1	1	0	Ho
			1 1	1 1		
1	1	1	1 1 1 1 1 1	0 1 0 1 1 0 1	1 1 1 0 0 1 0 0 1	
1	1	0	1 1 1 1 1 1	0 1 0 1 1 0 1 0 1	1 0 0 1 0 1 1 1 0	
1	0	1				
1	0	0				
0	1	1				
0	1	0				
0	0	1				
0	0	0				

HOJA DE TRABAJO

I. DEMOSTRAR CON REGLAS DE INFERENCIA EL SIGUIENTE ARGUMENTO

1. **Todos los diseñadores son hábiles para dibujar. Algunos artistas no son hábiles para dibujar. Por consiguiente, algunos artistas no son diseñadores.**

FIGURA 2 FORMA: O

1. $(\quad)(\qquad\qquad)$ (P)
2. $(\quad)(\qquad\qquad) \vdash (\exists_x)(A_x \wedge \sim D_x)$ (P,C)
3.
4.

.

.

.

.

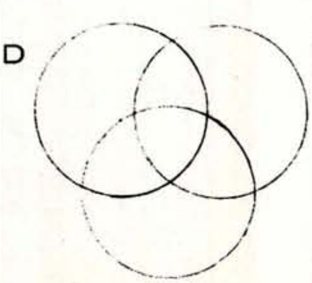
.

.

DEMOSTRAR SU VALIDEZ CON EL DIAGRAMA DE VENN

1. $D \cap \overline{H} = \emptyset$
2. $\cap \quad = \emptyset$
3. $\cap \quad = \emptyset$

D H



A

EL ARGUMENTO ES ______

HOJA DE TRABAJO

II. DEMOSTRAR CON REGLAS DE INFERENCIA LOS SIGUIENTES ARGUMENTOS.

1) Todos los aviones comerciales tienen alas. Algunos vehículos no tienen alas. Por consiguiente, algunos vehículos no son aviones comerciales.

2) Los diseñadores y los escultores son artistas. Los arquitectos son diseñadores. Por consiguiente, los arquitectos son artistas.

HOJA DE TRABAJO

3) Ningún ladrón es policía. Todos los maleantes son ladrones.

Por consiguiente, ningún maleante es policía.

4) Los animales que no son amables están encerrados.

Las serpientes son animales.

Algunas serpientes no están encerradas.

Por consiguiente.

Algunas serpientes son amables.

HOJA DE TRABAJO

5) María Elena es bonita. Si alguien es bonita entonces se casará y tendrá hijos. Por lo tanto, alguien se casará.

6) Todos los ciudadanos desean traer contrabando o ser políticos.

Ningún ciudadano honrado desea traer contrabando.

Por consiguiente, si todos los ciudadanos son honrados, entonces desean ser políticos.

HOJA DE TRABAJO

III. DEMOSTRAR CON REGLAS DE INFERENCIA LOS SIGUIENTES ARGUMENTOS.

1. 1. $(x)\left[(P_x \wedge Q_x) \longrightarrow \sim R_x\right]$ (P)

2. $(\exists_x)(P_x \wedge R_x) \vdash (\exists_x)(R_x \wedge \sim Q_x)$ (P,C)

2. 1. $(x)(A_x \vee \sim B_x)$ (P)

2. $(x) B_x \vdash (x)(A_x \vee C_x)$ (P,C)

HOJA DE TRABAJO

IV DEMOSTRAR LOS SIGUIENTES ARGUMENTOS CON REGLAS DE INFERENCIA Y NIVELES DE HIPOTESIS.

1. 1. $(x)\ [A_x \longrightarrow (B_x \lor C_x)]$ (P)

2. $(x)\ [(A_x \land D_x) \longrightarrow \sim B_x] \vdash (x)\ [A_x \longrightarrow (D_x \longrightarrow C_x)]$ (P,C)

2. 1. $(x)\ (N_x \longrightarrow M_x) \vdash (N_a \land H_a) \longrightarrow M_a$ (P,C)

HOJA DE TRABAJO

V. DEMOSTRAR LOS SIGUIENTES ARGUMENTOS POR REDUCCION AL ABSURDO APLICANDO LA EXPANSION PROPOSICIONAL.

1. Todos los diseñadores son hábiles para dibujar.

Algunos artistas no son hábiles para dibujar. Por consiguiente, todos los artistas no son diseñadores.

1. $(x)\ (D_x \longrightarrow H_x)$ (P)

2. $(\exists_x)\ (A_x \wedge \sim H_x) \vdash (x)\ (A_x \longrightarrow \sim D_x)$ (P,C)

$D_a \longrightarrow H_a$	$A_a \wedge \sim H_a$	$A_a \longrightarrow \sim D_a$
1	1	0

Se ha realizado la prueba para un individuo "a" y como se presenta una contradicción en la conclusión, aparentemente el argumento es válido, sin embargo, no es suficiente esta contradicción para afirmar su validez dado que el argumento no se refiere a un solo individuo, por lo que aplicando la expansión proposicional se deberá realizar la prueba con dos o más individuos hasta poder deducir la validez o invalidez del argumento, cabe aclarar que si se supone que el argumento es inválido y la prueba de reducción al absurdo resulta demasiado larga, al tener que realizarla con un número mayor de dos individuos,lo recomendable es optar por otro método tal como reglas de inferencia o diagramas de Venn.

HOJA DE TRABAJO

Considere para la prueba a los individuos "a" y "b"

D_a	H_a	A_a	$(D_a \rightarrow H_a) \wedge (D_b \rightarrow H_b)$	$(A_a \wedge \sim H_a) \vee (A_b \wedge \sim H_b)$	$(A_a \rightarrow \sim D_a) \wedge (A_b \rightarrow \sim D_b)$
			1	1	0
			1 1		
1					

HOJA DE TRABAJO

2. 1. $(x)\,(D_x \longrightarrow R_x)$ (P)

2. $(\exists_x)\,(M_x \wedge R_x) \vdash (\exists_x)\,(M_x \wedge \sim D_x)$ (P,C)

$D_w \longrightarrow R_w$	$M_w \wedge R_w$	$M_w \wedge \sim D_w$

3. 1. Ninguna pantera es doméstica. Todos los leones son feroces.

Por consiguiente, ningún león es doméstico.

$(P_y \longrightarrow \sim D_y)$	$(L_y \longrightarrow F_y)$	$(L_y \longrightarrow \sim D_y)$

CONTENIDO DEL CAPITULO VII RELACIONES

CAPITULO VII RELACIONES

1. PAREJAS ORDENADAS

Se llama par o pareja ordenada a dos objetos o cosas distinguibles dados en determinado orden.

1.1 SIMBOLO. Se emplea generalmente un paréntesis angular para denotar las parejas ordenadas.

Por ejemplo: $\langle x, y\rangle$; es una pareja ordenada cuyo primer elemento o componente de la pareja es x y el segundo es y.

1.2 IDENTIDAD. Dos parejas ordenadas son idénticas, si y solo si el primer elemento de la primera pareja es idéntico al primer elemento de la segunda pareja y el segundo elemento de la primera pareja es idéntico al segundo elemento de la segunda pareja.

Lo cual se expresa como:

$$\langle x, y\rangle = \langle u,v\rangle \longleftrightarrow (x = u \wedge y = v)$$

En el siguiente ejemplo:

El conjunto $\{1,2\}$ es igual al conjunto $\{2,1\}$ pero la pareja $\langle 1,2\rangle$ no es igual a la pareja $\langle 2,1\rangle$ ya que sus elementos no conservan el mismo ordenamiento.

Debe distinguirse que por la definición de conjunto y la de pareja ordenada ambos no son iguales aunque tengan los mismos elementos.

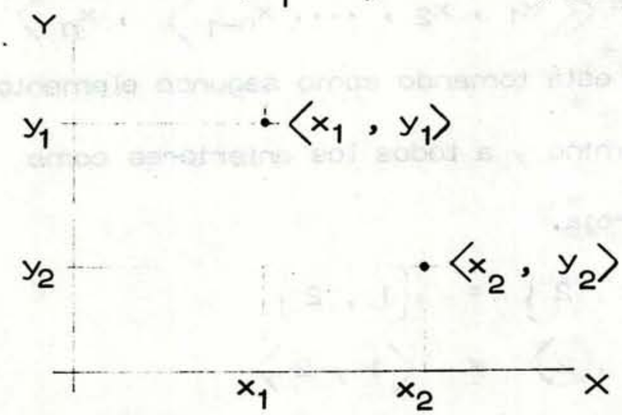
Por ejem: $\{1, 2\} \neq \langle 1, 2 \rangle$

pues el conjunto $\{1, 2\} = \{2, 1\} \neq \langle 1, 2 \rangle$

1.3 <u>REPRESENTACION GRAFICA.</u>

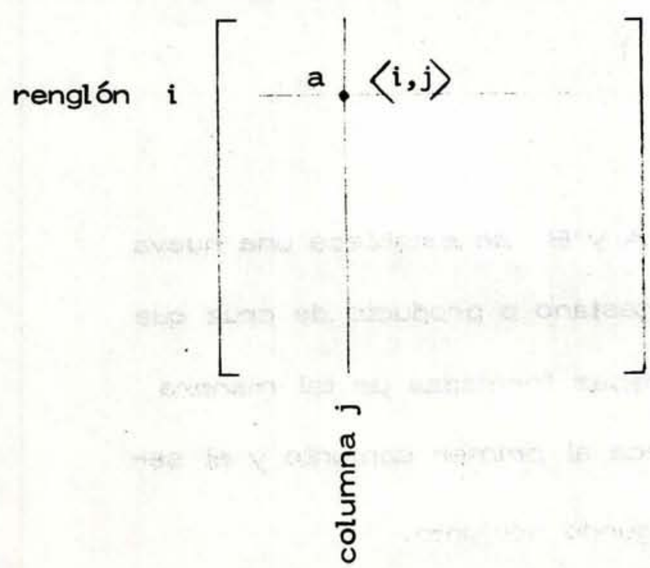
a) En un plano de coordenadas cartesianas.

Sea las parejas $\langle x_1, y_1 \rangle$ y $\langle x_2, y_2 \rangle$



b) En una matriz

Sea la matriz $[A] = [a_{ij}]$



1.4 ENTUPLES ORDENADOS

Se pueden definir triples ordenados, cuádruples ordenados y en general n-tuples, en función de parejas ordenadas. Un triple ordenado, por ejemplo, es una pareja ordenada cuyo primer - elemento es una pareja ordenada.

Por ejemplo: $\langle x , y , z \rangle = \langle\langle x , y \rangle , z \rangle$

Con cuádruples ordenados: $\langle w , x , y , z \rangle = \langle\langle w , x , y \rangle , z \rangle$

y en general n-tuples ("éntuples") ordenados

$$\langle x_1 , x_2 , \ldots , x_n \rangle = \langle\langle x_1 , x_2 , \ldots , x_{n-1} \rangle , x_n \rangle$$

En forma convencional se está tomando como segundo elemento de la pareja al último término y a todos los anteriores como primer elemento de la pareja.

Sea el conjunto $\{ 1 , 2 , 2 \} = \{ 1 , 2 \}$

y las parejas $\langle 1 , 2 , 2 \rangle \neq \langle 1 , 2 \rangle$

puesto que $\langle 1 , 2 , 2 \rangle = \langle\langle 1 , 2 \rangle , 2 \rangle$, donde se observa que el primer elemento $\langle 1 , 2 \rangle$ de la primera pareja es diferente del primer elemento de la segunda pareja 1

Es decir $\langle 1 , 2 \rangle \neq 1$

2. PRODUCTO CARTESIANO.

Dados dos conjuntos o clases A y B se establece una nueva operación llamada producto cartesiano o producto de cruz que es el conjunto de parejas ordenadas formadas de tal manera que el primer elemento pertenece al primer conjunto y el segundo elemento pertenece al segundo conjunto.

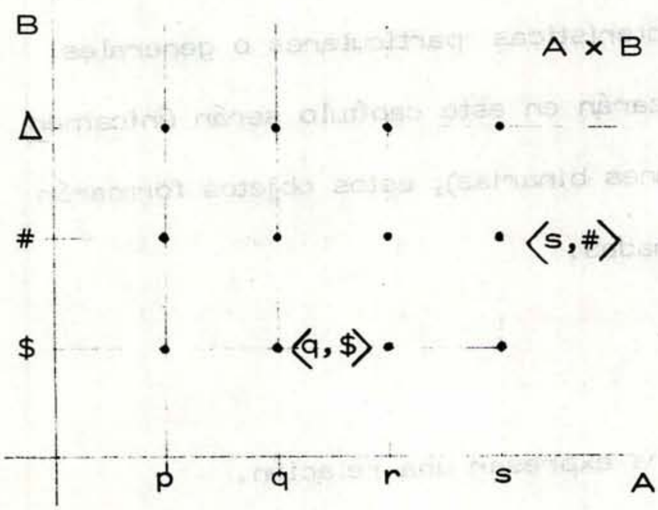
Esto se puede expresar simbólicamente de la siguiente manera:

$$A \times B = \left\{ \langle a , b \rangle \ / \ a \in A \wedge b \in B \right\}$$

La representación del producto cartesiano se puede dar sobre un sistema de ejes ortogonales.

Sea $A = \{ p , q , r , s \}$, $B = \{ \$, \# , \Delta \}$

$$A \times B = \{ \langle p,\$ \rangle , \langle p,\# \rangle , \langle p,\Delta \rangle , \langle q,\$ \rangle , \langle q,\# \rangle , \langle q,\Delta \rangle , \langle r,\$ \rangle , \langle r,\# \rangle , \langle r,\Delta \rangle , \langle s,\$ \rangle , \langle s,\# \rangle , \langle s,\Delta \rangle \}$$



Los puntos representados en el plano son las parejas que forman el conjunto $A \times B$.

Debe distinguirse que $A \times B \neq B \times A$ ya que cambia el orden de los elementos de cada pareja ordenada.

El producto cartesiano se puede efectuar de un conjunto por sí mismo

$A \times A = A^2 = \left\{ \langle x,y \rangle \;/\; x \in A \wedge y \in A \right\}$

Sea el conjunto $A = \left\{ 1, 2, 3 \right\}$ y el producto cartesiano del conjunto A por sí mismo $A \times A = A^2 = \left\{ \langle 1,1 \rangle , \langle 1,2 \rangle , \langle 1,3 \rangle , \langle 2,1 \rangle , \langle 2,2 \rangle , \langle 2,3 \rangle , \langle 3,1 \rangle , \langle 3,2 \rangle , \langle 3,3 \rangle \right\}$

El producto cartesiano puede abarcar más de dos conjuntos

$$A \times B \times C = \left\{ \langle a, b, c \rangle \;/\; a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C \right\}$$

3. DEFINICION DE RELACIONES.

Puede darse como idea de relación, la comparación de dos objetos o cosas en base a sus características particulares o generales. Las relaciones que se analizarán en este capítulo serán únicamente entre dos objetos (relaciones binarias); estos objetos formarán un conjunto de parejas ordenadas.

3.1 SIMBOLIZACION

La letra R se utilizará para expresar una relación.

Sea $\langle a,b \rangle \in R$ o bien $a\,R\,b$ lo que indica que a y b están en relación o bien a está en relación con b. Cuando una pareja no está en la relación se expresa como

$\langle a,b \rangle \notin R$ o bien $\sim a\,R\,b$ o también $a \not R\, b$

Una relación generalmente asocia elementos de un conjunto con elementos del mismo conjunto, entonces se dice que la relación está definida sobre ese conjunto.

Sea la relación R definida sobre el conjunto A

$$R = \left\{ \langle x , y \rangle \;/\; \langle x , y \rangle \in A^2 \right\}$$

en donde queda definido que una relación es un conjunto de parejas ordenadas que pertenecen a un producto cartesiano, por lo que una relación es un subconjunto del producto cartesiano, o sea:

$$R \subseteq A^2$$

Sea R la relación "es mayor que" definida sobre el conjunto de los dígitos; R será el conjunto de parejas ordenadas en las cuales los dos elementos ordenados son dígitos y el primer elemento sea mayor que el segundo.

Una relación también puede asociar elementos de dos conjuntos diferentes en el orden establecido.

$$R = \left\{ \langle x , y \rangle \;/\; \langle x , y \rangle \in A \times B \right\}$$

$$\text{y} \qquad R \subseteq A \times B$$

Sea R la relación Río Frío "está situado sobre el nivel del mar a" 3196 m. y se simboliza

Río Frío R 3196 m.

3.2. REPRESENTACIONES

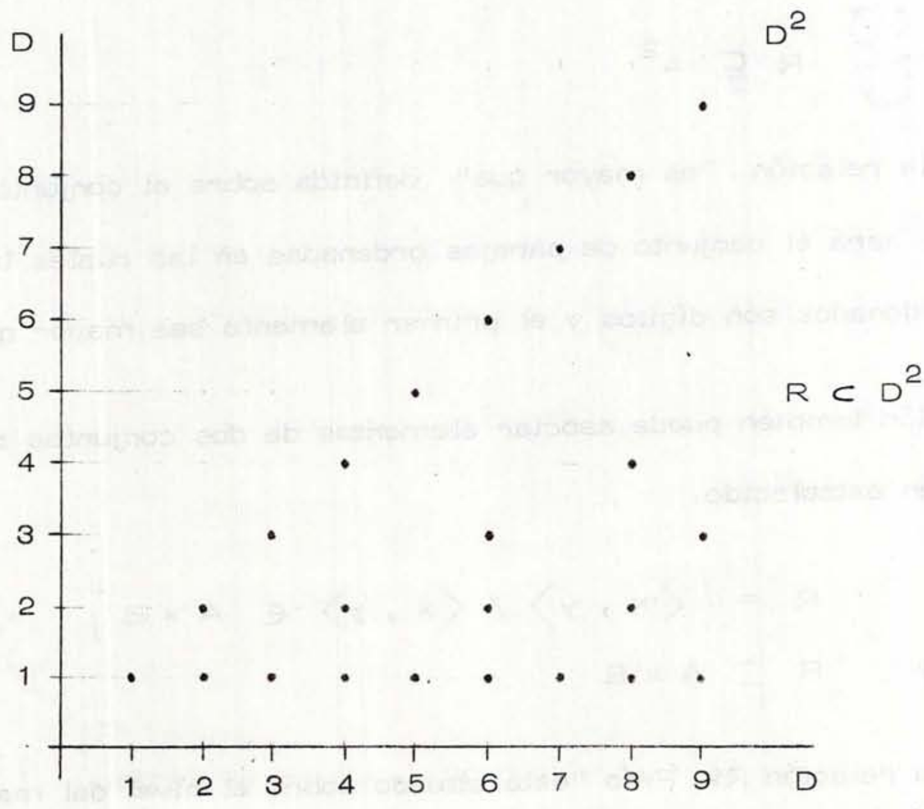
3.2.1. REPRESENTACION GRAFICA

Consiste en indicar en un sistema de ejes ortogonales por medio de puntos, las parejas ordenadas que están en la relación dada.

Sea R la relación "es un múltiplo de" definida sobre el conjunto de los dígitos.

Su simbolización es $R = \left\{ \langle x,y \rangle \ / \ \langle x,y \rangle \in D^2 \wedge xR_y \right\}$

y su representación gráfica....

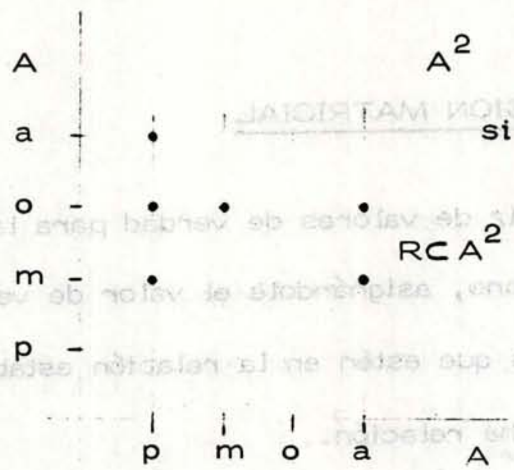


$$R = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,1 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 5,1 \rangle, \langle 5,5 \rangle, \langle 6,1 \rangle, \langle 6,2 \rangle, \langle 6,3 \rangle, \langle 6,6 \rangle, \langle 7,1 \rangle, \langle 7,7 \rangle, \langle 8,1 \rangle, \langle 8,2 \rangle, \langle 8,4 \rangle, \langle 8,8 \rangle, \langle 9,1 \rangle, \langle 9,3 \rangle, \langle 9,9 \rangle \}$$

En el caso de relaciones no númericas se sigue el mismo procedimiento para elaborar la gráfica.

Sea la relación R: "tiene el pelo más claro que" definido sobre el conjunto de los miembros de una familia.

$A = \{$ Papá, mamá, hijo, hija $\}$ o bien $A = \{ p, m, o, a \}$



si p ; blanco

m ; castaño

o ; negro

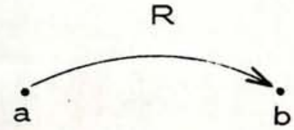
a ; rubio

$R = \{ \langle p,m \rangle , \langle p,o \rangle , \langle p,a \rangle , \langle m,o \rangle , \langle a,m \rangle , \langle a,o \rangle \}$

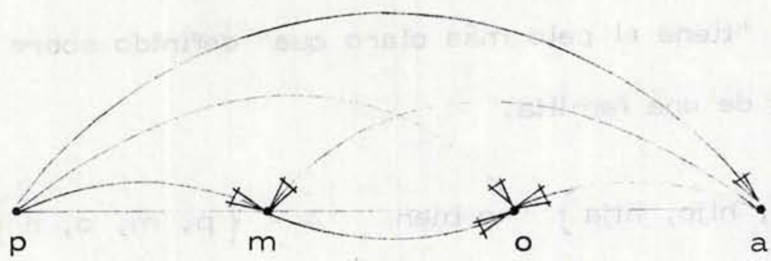
3.2.2 REPRESENTACION CON DIAGRAMA DE FLECHAS

Esta representación consiste en elegir arbitrariamente puntos para cada uno de los individuos y por medio de líneas contínuas enlazar los puntos que correspondan a los individuos que están en la relación. Una cabeza de flecha en cada línea indicará el sentido de la relación.

a R b , se representa con una flecha de a hacia b



Del ejemplo anterior:



3.2.3. REPRESENTACION MATRICIAL

Consiste en elaborar una matriz de valores de verdad para las parejas ordenadas del producto cartesiano, asignándole el valor de verdad verdadero a las parejas ordenadas que estén en la relación establecida y falso a las que no cumplan dicha relación.

Sea R la relación "es más alto que" dada en el conjunto $A = \{ p, i, n, c, m, v, k, a \}$ en la que los elementos expresados con letras minúsculas representan volcanes de la República Mexicana, cuyas alturas sobre el nivel del mar se enlistan a continuación.

	mts		p	i	n	c	m	v	k	a
Popocatépetl	5450	p	0	1	1	0	1	1	1	1
Iztaccíhuatl	5280	i	0	0	1	0	1	1	1	1
Nevado de Toluca	4558	n	0	0	0	0	1	1	1	1
Citlaltépetl	5594	c	1	1	1	0	1	1	1	1
Malinche	4115	m	0	0	0	0	0	0	0	1
Cofre de Perote	4248	v	0	0	0	0	1	0	0	1
Nevado de Colima	4265	k	0	0	0	0	1	1	0	1
Cerro Ajusco	3950	a	0	0	0	0	0	0	0	0

4. DOMINIO, CONTRADOMINIO Y CAMPO DE UNA RELACION

Dada una relación binaria $R = \{ \langle x,y \rangle \ / \ x R y \}$, se define como DOMINIO de la relación R el conjunto de todos los elementos (x) que están en relación con los elementos (y).

Se simboliza el dominio de una relación con: D(R)

Se define como CONTRADOMINIO de una relación a todos los elementos (y)que cumplen la relación con (x).

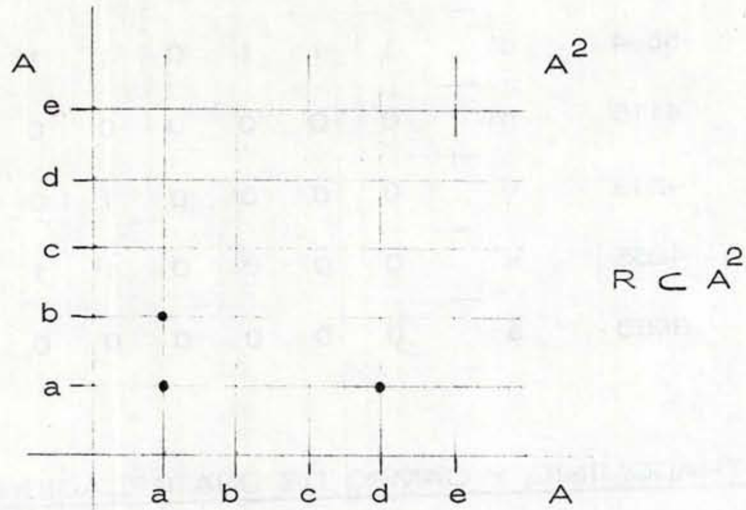
Se simboliza el contradominio de una relación con: C (R)

En las parejas ordenadas que están en la relación establecida,el primer elemento forma parte del dominio y el segundo elemento del contradominio.

El CAMPO de una relación es la unión del dominio y contradominio; se simboliza el campo de una relación con $\mathcal{F}$ (R) = D (R) U C (R)

Ejemplo: Sea la relación $R = \{ \langle a,a \rangle , \langle a,b \rangle , \langle d,a \rangle \}$

definida sobre el conjunto $A = \{ a, b, c, d, e \}$



El dominio de la relación es: $D(R) = \{ a,d \}$

El contradominio de la relación es: $C(R) = \{ a,b \}$

Por consiguiente, el campo de la relación es la unión del dominio y del contradominio: $\{ a,d \} \cup \{ a,b \}$

$\mathcal{F}(R) = \{ a, b, d \}$

5. PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

Las principales propiedades de las relaciones son:

SIMETRIA, REFLEXIVIDAD Y TRANSITIVIDAD.

5.1 SIMETRIA. La propiedad de simetría presenta los siguientes casos particulares: simetría, asimetría, antisimetría y no simetría

5.1.1. SIMETRIA. Se dice que la relación definida sobre un conjunto A es simétrica si al elegir dos elementos del conjunto tales que el primero esté en relación con el segundo, entonces el segundo debe estar en relación con el primero.

Si a y b son elementos del conjunto A y a R b entonces b R a

Si esto se verifica para todas las parejas que están en la relación entonces se dice que la relación es simétrica.

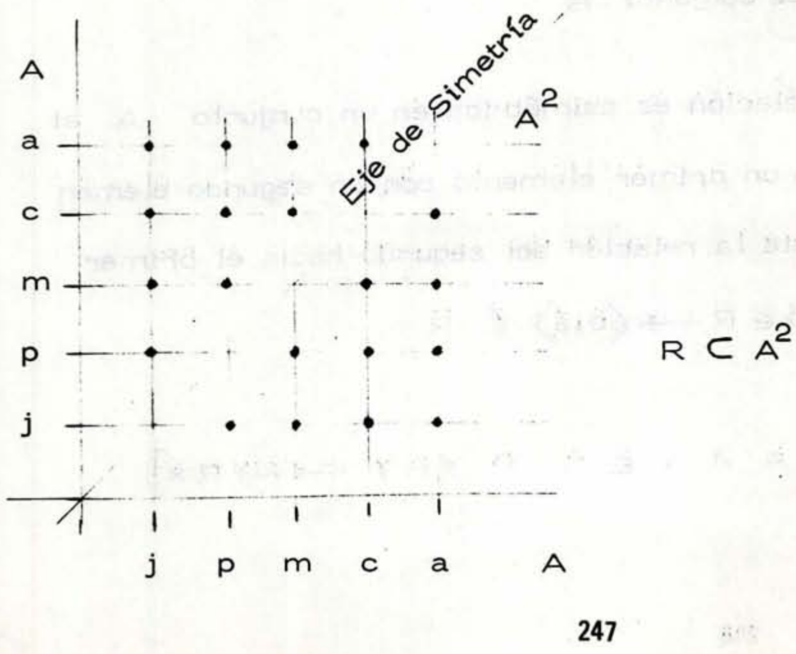
Simbolización:

R es simétrica en

$A \longleftrightarrow (x)(y)\left[(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy) \longrightarrow yRx\right]$

Ejemplos:

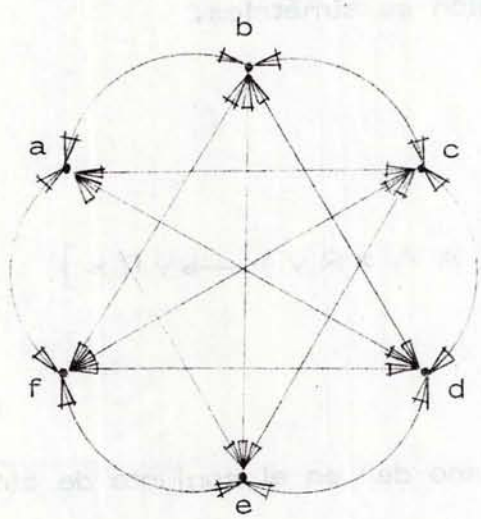
1. Sea la relación R; "es hermano de" en el conjunto de cinco hermanos pertenecientes a una familia. A = $\{ j, p, m, c, a \}$



En la gráfica se observa la simetría por ejemplo de $\langle j,p \rangle$ con $\langle p,j \rangle$, de $\langle j,m \rangle$ con $\langle m,j \rangle$, etc.

Si la relación tiene la propiedad de ser simétrica, entonces la gráfica es simétrica presentando un eje de simetría formado por los puntos de intersección de cada elemento con sí mismo.

2. Sea la relación R; "es compañero de" en el conjunto de seis alumnos de una clase. $A = \{ a, b, c, d, e, f \}$



R es simétrica en el conjunto A

5.1.2. ASIMETRIA. Una relación es asimétrica en un conjunto A si al estar en relación un primer elemento con un segundo elemento, entonces no existe la relación del segundo hacia el primer elemento si $\langle a,b \rangle \in R \longrightarrow \langle b,a \rangle \notin R$

R es asimétrica en

$A \longleftrightarrow (x)\ (y) \left[(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \longrightarrow \sim yRx \right]$

Sea la relación R "tiene más alto rango que" en el conjunto F de 5 empleados de una fábrica.

$$F = \{ m, r, s, g, d \}$$

Siendo:

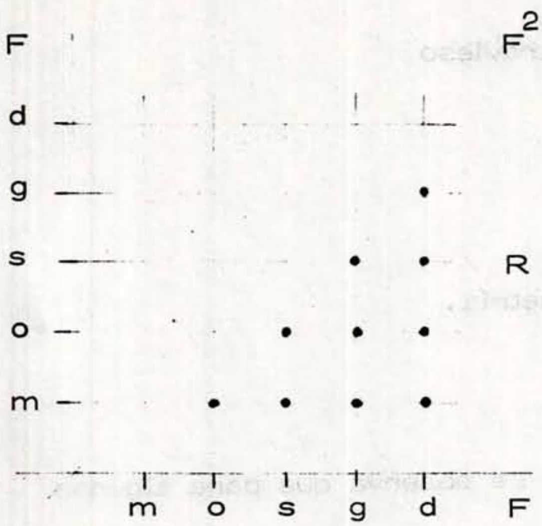
m - mozo

o - obrero calificado

s - supervisor

g - gerente

d - director general



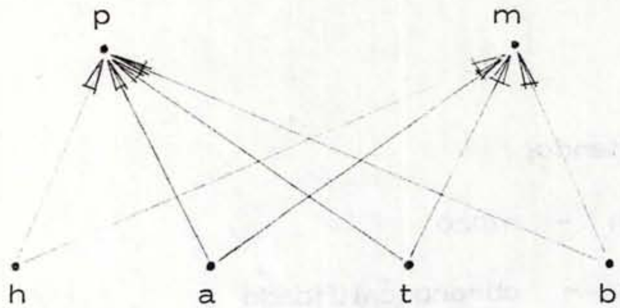
$$R \subset F^2$$

$$R = \{ \langle o,m \rangle , \langle s,m \rangle , \langle g,m \rangle , \langle d,m \rangle , \langle s,o \rangle , \langle g,o \rangle , \langle d,o \rangle , \langle g,s \rangle , \langle d,s \rangle , \langle d,g \rangle \}$$

En la gráfica se puede observar que para cada pareja ordenada que está en la relación su simétrica no está en la relación, como esto se verifica para todos los casos, la relación es asimétrica.

Otros ejemplos de relación asimétrica serán en un contexto familiar, "es hijo de", "es de mayor estatura que", etc.

Representando con un diagrama de flechas la relación "es hijo de" en el - conjunto de una familia de 6 personas:



p Padre

m Madre

h Hijo mayor

a Hija mayor

t Hijo travieso

b Bebé

En esta relación se observa que hay asimetría.

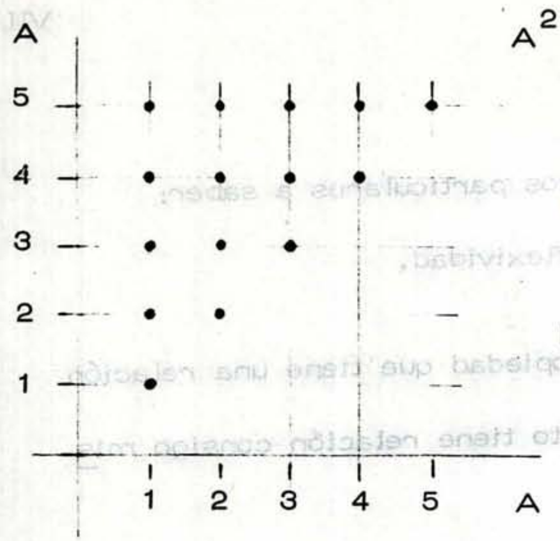
5.1.3 ANTISIMETRIA. Si en una relación dada se observa que para algunas de las parejas no se verifica la simetría y para otras no se verifica la asimetría, entonces, si en los casos que se verifica la simetría se trata de los mismos elementos, se dice que la relación es antisimétrica.

R es antisimétrica en

$A \longleftrightarrow (x)\ (y)\ \left[(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx) \longrightarrow x = y \right]$

Sea la relación R "igual o menor que" en el conjunto de los números del 1 al 5.

$C = \left\{ 1, 2, 3, 4, 5 \right\}$



$R \subset A^2$

$$R = \{ \langle 1,1\rangle , \langle 1,2\rangle , \langle 2,2\rangle , \langle 1,3\rangle , \langle 2,3\rangle , \langle 3,3\rangle , \langle 1,4\rangle , \langle 2,4\rangle , \langle 3,4\rangle , \langle 4,4\rangle , \langle 1,5\rangle , \langle 2,5\rangle , \langle 3,5\rangle , \langle 4,5\rangle , \langle 5,5\rangle \}$$

En este ejemplo se encuentran casos de asimetría como son: $\langle 1,4\rangle \in R$ y $\langle 4,1\rangle \notin R$, $\langle 3,4\rangle \in R$ y $\langle 4,3\rangle \notin R$, pero también se encuentran casos de simetría como son $\langle 1,1\rangle \in R$ y $\langle 1,1\rangle \in R$ pero en todos estos casos de simetría se trata de los mismos elementos que comprueban que: $x R y \wedge y R x \longrightarrow x = y$

por lo que esta relación es antisimétrica.

5.1.4. NO SIMETRIA

Puede darse el caso de una relación que no cumpla ninguna de las tres propiedades anteriores es decir: no sea simétrica, no sea asimétrica y no sea antisimétrica en este caso se dice que la relación es NO SIMETRICA.

Por ejemplo: La relación "esta enamorado de", no cumple la simetría pues en un contexto amplio, generalmente no todos los individuos son correspondidos en su amor. Tampoco es asimétrica pues no se puede asegurar que ninguno corresponda y no es antisimétrica pues el amor en este grado no se da consigo mismo. Por lo que la relación es NO SIMETRICA.

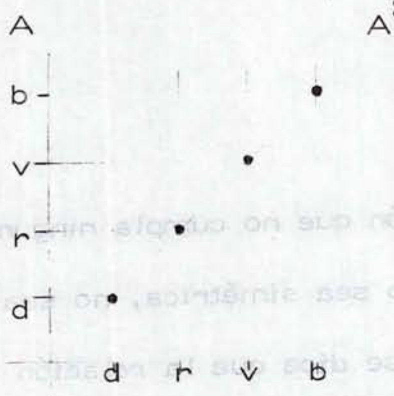
5.2 <u>REFLEXIVIDAD</u>. Presenta tres casos particulares a saber: Reflexividad, irreflexividad y no reflexividad.

5.2.1 <u>REFLEXIVIDAD</u>. Es la propiedad que tiene una relación si todo elemento del conjunto tiene relación consigo mismo.

Se simboliza como:

R es reflexiva en $A \longleftrightarrow (x)\ (x \in A \longrightarrow x R x)$

Por ejem: 1. Sea la relación R; "es igual a" en el conjunto de cuatro automóviles de distintas marcas. $A = \{ d, r, v, b \}$

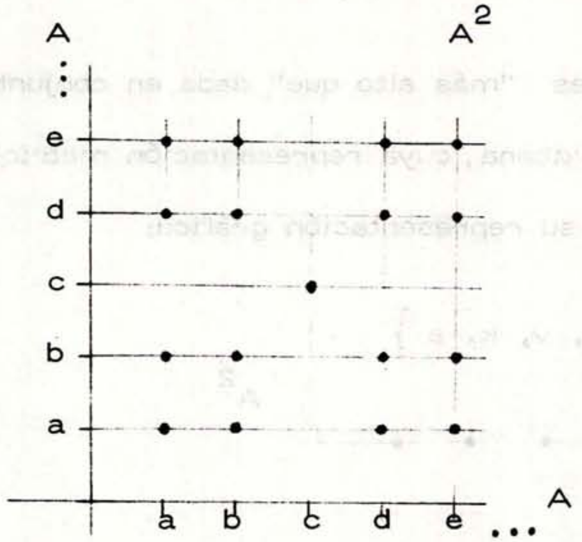


$R \subset A^2$

En este ejemplo sólo se da el caso de que los individuos son iguales consigo mismos, lo cual se verifica en la gráfica.

2. Sea la relación R "es tan atractiva como" en el conjunto de las participantes a un certamen de belleza, en donde todas ellas pueden ser tan atractivas como las demás pero también como ellas mismas.

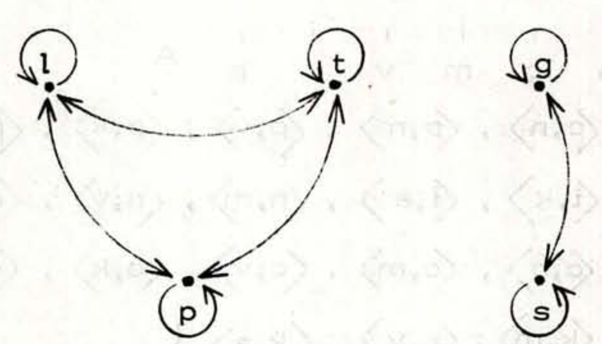
$A = \{a, b, c, d, e, \ldots, n\}$, suponga que c es tan atrac_
tiva como sí misma pero no tan atractiva como las demás.



NOTA: Esta relación es simultáneamente reflexiva y simétrica como puede verificarse en la gráfica.

3. Sea la relación R "es tan feroz como" en el conjunto de algunos felinos $A = \{ l, t, g, p, s \}$

representando respectivamente a los leones, tigres, gatos de angora, panteras y gatos siameses.

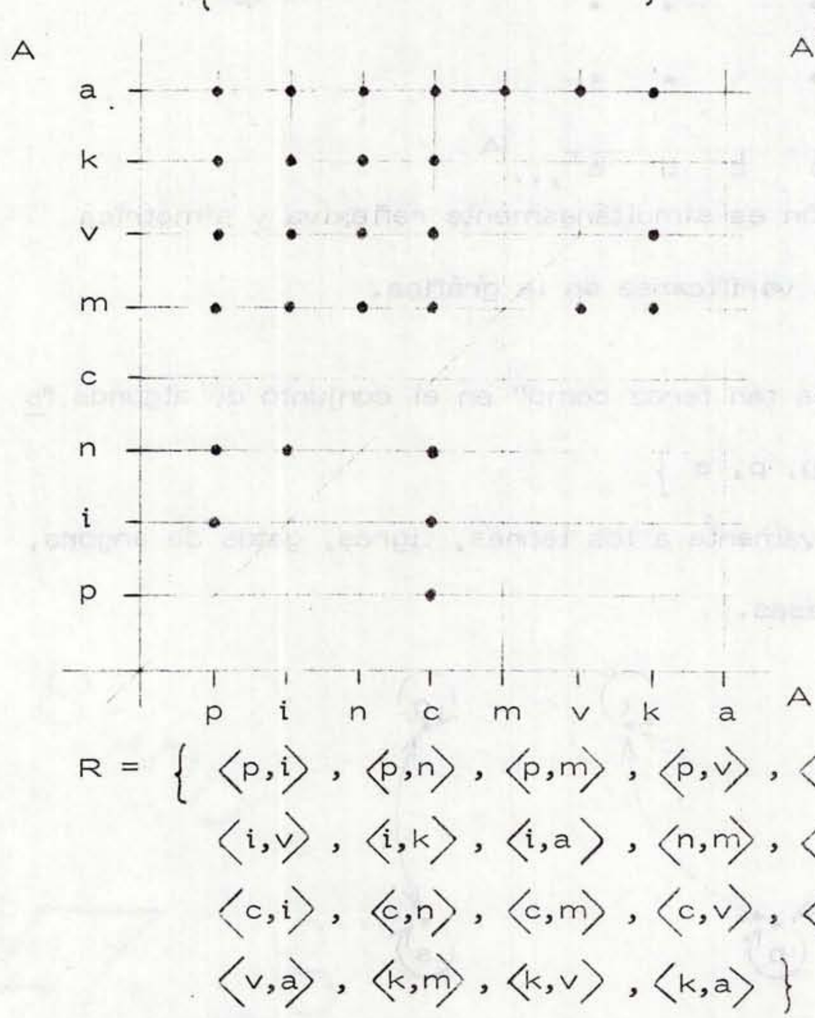


5.2.2 <u>IRREFLEXIVIDAD</u>. Si en una relación se consideran todos los individuos del conjunto y para cada uno de ellos no existe la relación consigo mismos, se dice que la relación es irreflexiva.

R es irreflexiva en $A \longleftrightarrow (x)\ (x \in A \longrightarrow \sim x\, R\, x)$

Sea la relación es "más alto que" dada en conjuntos de volcanes de la República Mexicana, cuya representación matricial está en la página 236, ahora en su representación gráfica:

$A = \{ p, i, n, c, m, v, k, a \}$



$R \subset A^2$

$R = \{ \langle p,i\rangle, \langle p,n\rangle, \langle p,m\rangle, \langle p,v\rangle, \langle p,k\rangle, \langle p,a\rangle, \langle i,n\rangle, \langle i,m\rangle$
$\langle i,v\rangle, \langle i,k\rangle, \langle i,a\rangle, \langle n,m\rangle, \langle n,v\rangle, \langle n,k\rangle, \langle n,a\rangle, \langle c,p\rangle$
$\langle c,i\rangle, \langle c,n\rangle, \langle c,m\rangle, \langle c,v\rangle, \langle c,k\rangle, \langle c,a\rangle, \langle m,a\rangle, \langle v,m\rangle$
$\langle v,a\rangle, \langle k,m\rangle, \langle k,v\rangle, \langle k,a\rangle \}$

En esta relación se observa que ningún elemento se relaciona consigo mismo por lo que la relación es irreflexiva, además se observa que es no simétrica.

Otros ejemplos de relaciones irreflexivas son:

"menor que" , "más inteligente que".

5.2.3. NO REFLEXIVIDAD

En algún caso puede aparecer una relación que no cumpla la reflexividad pero tampoco cumpla la irreflexividad para todos los elementos del conjunto, entonces se dice que la relación es NO REFLEXIVA.

Sea la relación $R = \{ \langle a,a \rangle , \langle e,e \rangle , \langle u,i \rangle , \langle o,o \rangle , \langle i,u \rangle \}$

en el conjunto de las vocales.

en la representación con flechas para la relación se observa que algunos elementos se relacionan consigo mismos pero otros no. Por lo tanto si la relación no es reflexiva ni es irreflexiva, entonces es un caso de relación NO REFLEXIVA.

5.3 TRANSITIVIDAD. Los casos particulares de esta propiedad son: Transitividad, Intransitividad y no Transitividad.

5.3.1. TRANSITIVIDAD. Una relación es transitiva en un conjunto A, si dados tres elementos del conjunto, tales que el primero está en relación con el segundo y el segundo está en relación con el tercero, entonces el primero está en relación con el tercero.

Se simboliza como:

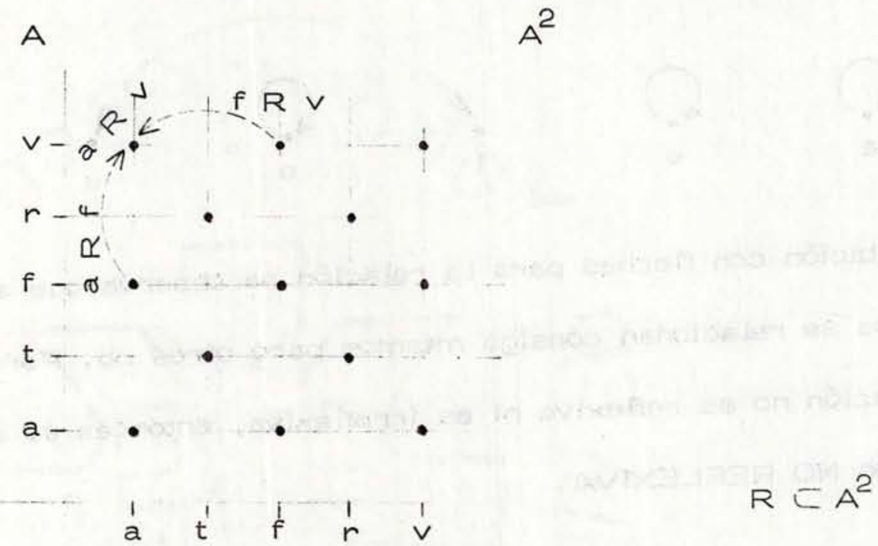
R es transitiva en

$A \Longleftrightarrow (x)\,(y)\,(z)\left[(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz) \longrightarrow xRz\right]$

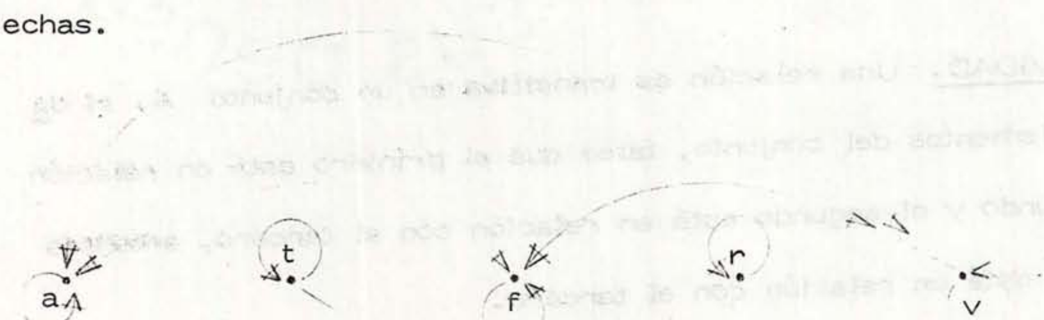
1. En la relación R "es tan importante como" en el conjunto de las partes de un automóvil.

$$A = \{a, t, f, r, v\}$$

que representan respectivamente; acelerador, tacómetro, freno, radio y volante.



Este ejemplo se verifica de manera más clara con su diagrama de flechas.



5.3.2 INTRANSITIVIDAD

Una relación es intransitiva en un conjunto A si dados tres elementos del conjunto, tales que el primero esté en relación con el segundo y el segundo en relación con el tercero, entonces el primero NO está en relación con el tercero.

R es intransitiva en

$$A \longleftrightarrow [(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz) \longrightarrow \sim xRz]$$

Por ejemplo: la relación "es profesor de" en un contexto universitario, donde los alumnos (A) tienen sus profesores (L) a nivel de licenciatura pero estos profesores asisten a cursos de postgrado en donde tienen a su vez profesores (P).

Si P es profesor de L y L es profesor de A, esto no implica que P sea profesor de A, por lo que la relación es intransitiva.

5.3.3 NO TRANSITIVIDAD

Si en algún caso para cierta relación no se verifica la transitividad pero tampoco la intransitividad se dice que la relación es NO TRANSITIVA.

Por ejemplo la relación "es amiga de" no se verifica la transitividad pero tampoco la intransitividad.

6. RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Cualquier relación puede tener o no alguna de las propiedades, pero si tiene las de simetría, reflexividad y transitividad simultáneamente, entonces se dice que es una RELACION DE EQUIVALENCIA.

Ejemplo:

La relación R "es igual a" definida sobre el conjunto de los enteros:

a) si $x = y \longrightarrow y = x$

para cualquiera de los enteros que sustituyan a las variables por lo que la relación es simétrica.

b) si $x \in E \longrightarrow x = x$

es reflexiva la relación ya que cualquier número es igual a sí mismo.

c) si $x = y \wedge y = z \longrightarrow x = z$

es transitiva pues se verifica lo anterior con cualquier entero.

La relación R : "es igual a" cumple con las tres propiedades por lo que se dice que es una relación de equivalencia.

En síntesis si $x = y$ entonces $y = x$ (simetría)

si $x = x$ (reflexividad)

si $x = y \wedge y = z$ entonces $x = z$ (transitividad)

7. ARGUMENTOS CON PREDICADOS RELACIONALES.

7.1 INTRODUCCION

Existen casos de argumentos en cuyo contenido se presentan relaciones entre los sujetos de las proposiciones. Algunas de las relaciones pueden presentarse en forma clara, sin embargo existen formas del lenguaje en las que se presenta sobrentendida dicha relación. Es importante para poder simbolizar precisar la relación mediante parafraseos equivalentes cuidando de no cambiar el sentido de la proposición.

Una vez simbolizado un argumento se procede a su demostración utilizando cualquiera de los métodos vistos anteriormente.

Sea el siguiente argumento:

Sólo aquellos que apuestan le deben algo a cada amigo.
Los protestantes no apuestan. Por consiguiente, ningún protestante le debe algo a nadie.

En la primera premisa se presenta la necesidad de parafrasear para poder definir con mayor claridad la relación que guardan entre sí cada uno de los individuos y la clase a la que pertenecen.

"Sólo aquellos que apuestan le deben algo a cada amigo", es equivalente a "Todos los que le deben algo a sus amigos son apostadores."

Quedando el argumento parafraseado como sigue:

1. Todos los que deben algo a sus amigos son apostadores.

2. Todos los protestantes no son apostadores.

Por lo tanto

3. Todos los protestantes no le deben nada a nadie

Estableciendo como relación D: "le deben algo a", se procede á simbolizar:

Si (x) representa a todos los individuos que pueden ser apostadores y (y) a todos los individuos que pueden ser amigos.

1.	$(x)\ (y)\ (x D y \longrightarrow A_x)$		(P)
2.	$(x)\ (P_x \longrightarrow \sim A_x) \vdash (x)\ (y)\ (P_x \longrightarrow \sim x D y)$		(P,C)
3.	$(y)\ (x D y \longrightarrow A_x)$	1	(EU)
4.	$x D y \longrightarrow A_x$	3	(EU)
5.	$P_x \longrightarrow \sim A_x$	2	(EU)
6.	$A_x \longrightarrow \sim P_x$	5	(contr)
7.	$x D_y \longrightarrow \sim P_x$	4,6	(trans)
8.	$P_x \longrightarrow \sim x D y$	7	(contr)
9.	$(y)\ (P_x \longrightarrow \sim x D y)$	8	(GU)
10.	$(x)\ (y)\ (P_x \longrightarrow \sim x D y)$	9	(GU)

7.2 DEMOSTRACION DE ARGUMENTOS CON PREDICADOS RELACIONALES

1. Juan ama a Alicia. Alicia es bella. Por consiguiente, Juan ama a alguien que es bella.

1. Juan ama a Alicia

2. Alicia es bella $\vdash$ Juan ama a alguien que es bella.

RELACION

R : "ama a"

REPRESENTACION

1.	$j R a$		(P)
2.	$B_a \vdash (\exists_w)(B_w \wedge j R w)$		(P,C)
3.	$B_a \wedge j R a$	1,2	(conj)
4.	$(\exists_w)(B_w \wedge j R w)$	3	(G.E)

2. Ricardo posee todo lo que es valioso. Este anillo es valioso. Por consiguiente, Ricardo debe poseer este anillo.

RELACION

R : "posee"

REPRESENTACION

1.	$(x)(V_x \longrightarrow r R x)$		(P)
2.	$V_a \vdash r R a$		(P,C)
3.	$V_a \longrightarrow r R a$	1	(EU)
4.	$r R a$	3,2	(mpp)

En algunos casos, es necesario incluir la fórmula de la propiedad a que se hace referencia para poder demostrar el argumento.

Sea el argumento:

1. El Popocatépetl es más alto que el Iztaccíhuatl.

2. El Iztaccíhuatl es más alto que el nevado de Toluca.

$\vdash$

3. El Popocatépetl es más alto que el Nevado de Toluca.

y R la relación "es más alto que".

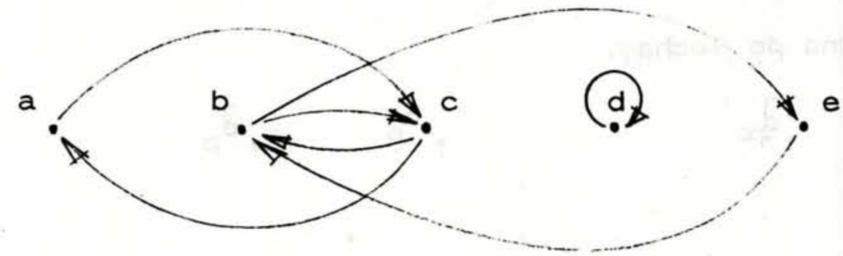
Como las premisas y la conclusión se refieren a individuos particulares hay que incluir otra premisa que sería la fórmula de la transitividad.

1.	$p R i$		(P)
2.	$i R n \vdash p R n$		(P,C)
3.	$(x)(y)(z)[(x R y \wedge y R z) \longrightarrow x R z]$		(P)
4.	$(y)(z)[(p R y \wedge y R z) \longrightarrow p R z]$	3	(EU)
5.	$(z)[(p R i \wedge i R z) \longrightarrow p R z)]$	4	(EU)
6.	$(p R i \wedge i R n) \longrightarrow p R n$	5	(EU)
7.	$p R i \wedge i R n$	1.2	conj
8.	$p R n$	6,7,	mtp

HOJA DE TRABAJO

1. Sea R_1 una relación dada sobre el conjunto

$A = \{ a, b, c, d, e \}$ y su diagrama de flechas:



a) Dar la descripción extensional de R_1

$R_1 = \{ \langle a,c \rangle$, ______

______

______

b) Representar R_1 en una gráfica de dos ejes ortogonales

c) La relación R_1 cumple las siguientes propiedades:

______

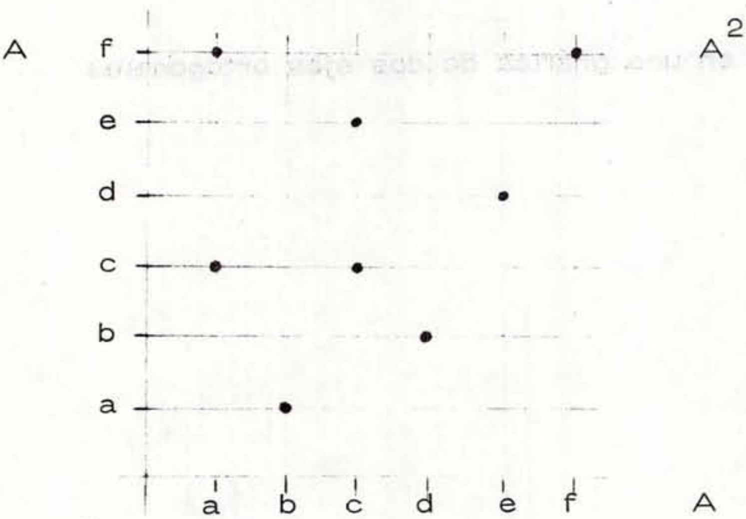
HOJA DE TRABAJO

2. Sea una familia formada por cuatro abuelos, dos padres y tres hijos $A = \{ a_m , \partial_m , a_p , \partial_p , p, m, h_1 , h_2 , h_3 \}$ determinar la relación R : "es padre de" dada sobre el conjunto A, en cuanto a sus parejas ordenadas. $R = \{ \langle h,m \rangle,$

$\langle \quad \rangle, \langle$

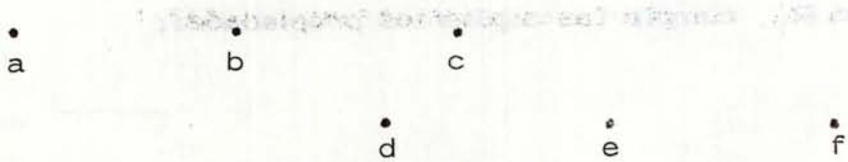
Hacer el diagrama de flechas.

3. Sea la gráfica de una relación R, enunciar la relación como conjunto de parejas ordenadas, trazar su diagrama de flechas y verificar las propiedades que cumpla.



R A^2

$R = \{$



HOJA DE TRABAJO

La relación R, cumple con las siguientes propiedades:

____

Porque ____

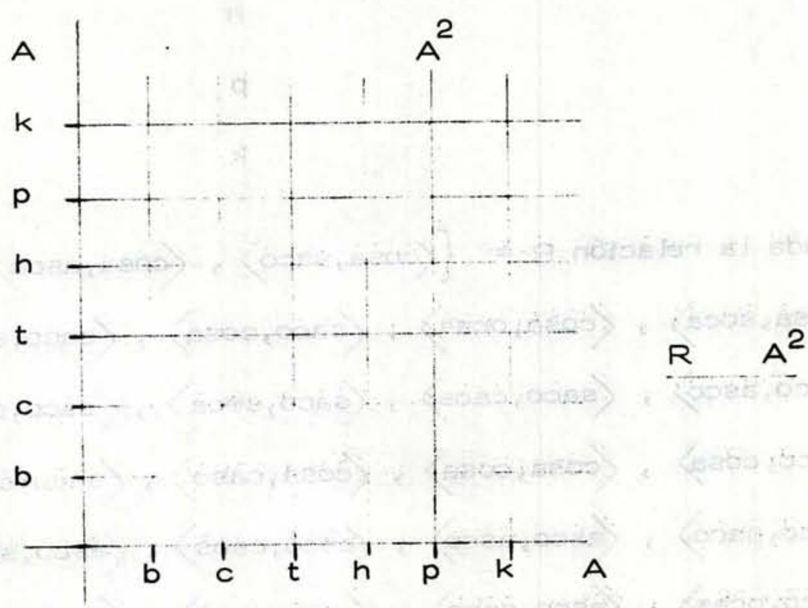
____

____

____

4. Sea la relación R : "es más antiguo que" en un conjunto A de edificios de la Ciudad de México: Palacio de Bellas Artes (b), La Catedral de México (c), La Torre Latino Americana (t), El Hotel de México (h), El Palacio de los Deportes (p), El Castillo de Chapultepec (k).

a) GRAFICA

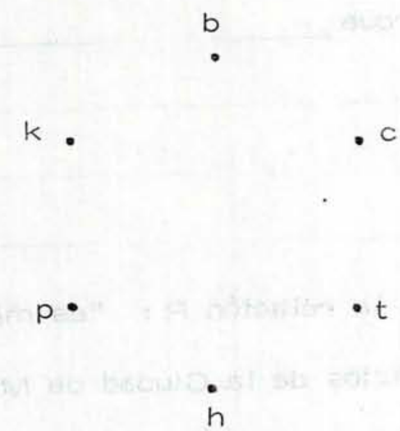


HOJA DE TRABAJO

b) R = {

c) La relación cumple con la propiedad de

d) DIAGRAMA DE FLECHAS



e) REPRESENTACION MATRICIAL

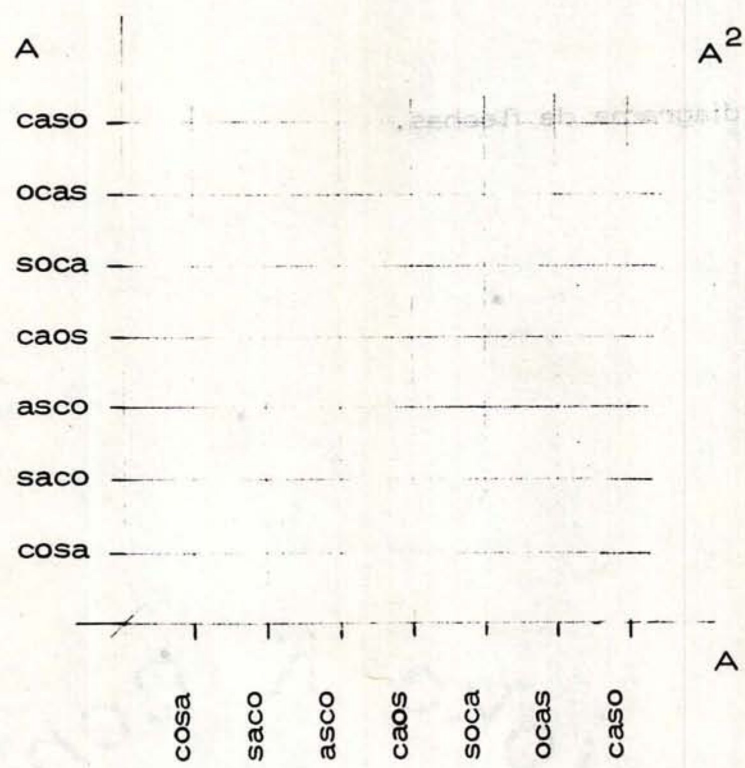
	b	c	t	h	p	k
b						
c						
t						
h						
p						
k						

5. Dada la relación R = {⟨cosa,saco⟩ , ⟨cosa,asco⟩ , ⟨cosa,caos⟩
⟨cosa,soca⟩ , ⟨cosa,ocas⟩ , ⟨saco,cosa⟩ , ⟨saco,saco⟩ ,
⟨saco,asco⟩ , ⟨saco,caos⟩ , ⟨saco,soca⟩ , ⟨saco,ocas⟩ ,
⟨asco,cosa⟩ , ⟨cosa,cosa⟩ , ⟨cosa,caso⟩ , ⟨saco,caso⟩ ,
⟨asco,saco⟩ , ⟨asco,asco⟩ , ⟨asco,caos⟩ , ⟨asco,soca⟩ ,
⟨asco,ocas⟩ , ⟨asco,caso⟩ , ⟨caos,caso⟩ , ⟨caos,ocas⟩ ,
⟨caos,soca⟩ , ⟨caos,caos⟩ , ⟨caos,asco⟩ , ⟨caos,saco⟩ ,
⟨caos,cosa⟩ , ⟨soca,cosa⟩ , ⟨soca,asco⟩ , ⟨soca,soca⟩ ,

HOJA DE TRABAJO

⟨soca, caso⟩ , ⟨soca, saco⟩ , ⟨soca, caos⟩ , ⟨soca, ocas⟩ , ⟨ocas, cosa⟩
⟨ocas, asco⟩ , ⟨ocas, caso⟩ , ⟨ocas, saco⟩ , ⟨caso, soca⟩ , ⟨caso, ocas⟩
⟨caso, asco⟩ , ⟨caso, caos⟩ , ⟨ocas, caos⟩ , ⟨caso, cosa⟩ , ⟨ocas, soca⟩
⟨caso, caso⟩ , ⟨ocas, ocas⟩ , ⟨caso, saco⟩ }

a) GRAFICA



$R \quad A^2$

HOJA DE TRABAJO

b) Establecer el enunciado de la relación R

c) Qué propiedades cumple la relación R

d) Trazar el diagrama de flechas.

HOJA DE TRABAJO

6- Demostrar el siguiente argumento:

Todos los hombres aman a Isela Vega. Por consiguiente si todos fueran hombres entonces todos deberían amarla.

RELACION

R: "aman a"

REPRESENTACION

CONTENIDO DEL CAPITULO VIII FUNCIONES

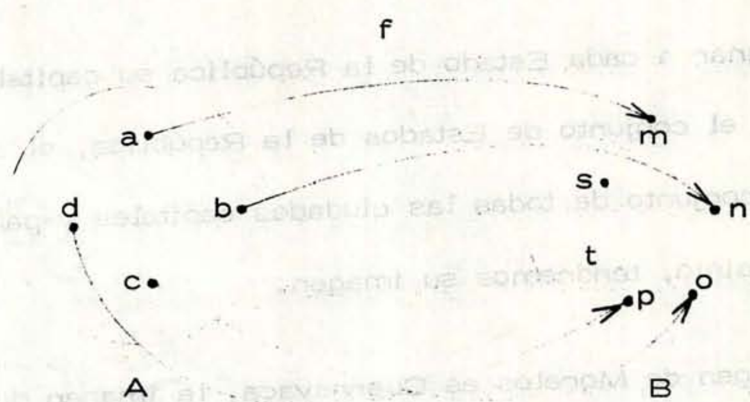
CAPITULO VIII FUNCIONES

1. INTRODUCCION

Función es un caso particular de las relaciones; es un conjunto de parejas ordenadas en donde todos los primeros elementos son diferentes.

Función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos que asocia a cada elemento del primer conjunto (A) uno y sólo un elemento del segundo conjunto (B)

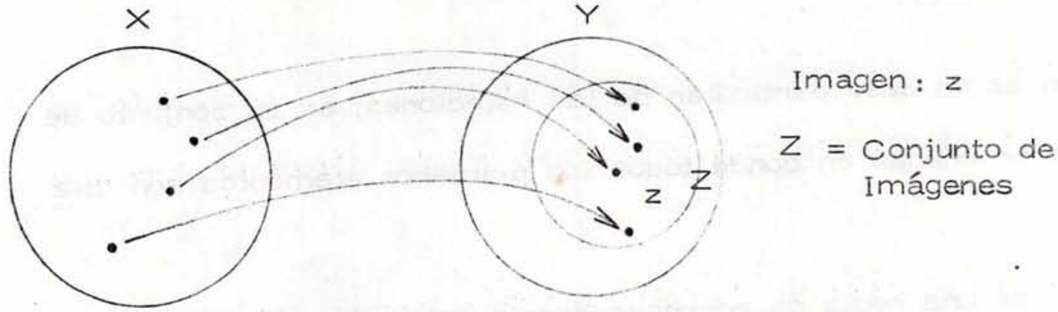
$\langle a, m \rangle \in f$



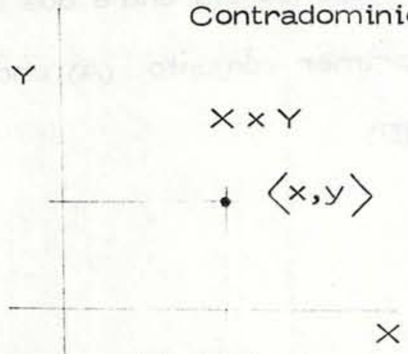
Al primer conjunto se le llama DOMINIO de la función y al segundo CONTRADOMINIO. A cualquier elemento del conjunto A le corresponde de uno y sólo un elemento del conjunto B que se le denomina IMAGEN.

Sea $a \in A$ y $m \in B$, entonces m es la imagen de a y se expresa como $f(a)$

Funciones



Dominio $D(f) = X$ Contradominio $C(f) = Y$



Por ejemplo:

Sea f "asignar a cada Estado de la República su capital". El dominio de f es el conjunto de Estados de la República, el contradominio de f es el conjunto de todas las ciudades capitales y para cada elemento del dominio, tendremos su imagen.

Por ejemplo:

La imagen de Morelos es Cuernavaca, la imagen de Nuevo León es Monterrey, etc.

Una relación asocia elementos del dominio con elementos del contradominio, pero de la función se tiene un concepto más amplio: es una regla que nos permite obtener segundos componentes a partir de los primeros componentes de una pareja, es decir, es un enunciado que nos indica operaciones que se van a realizar. También se entiende por función una transformación o mapeo. La palabra mapeo tiene su origen en la realización de mapas pues esto significa que a cada lugar físico en la tierra se le asigna un punto sobre el papel donde se está trazando el mapa, es decir la función de hacer mapas consiste en transformar los puntos físicos de la tierra en puntos dibujados para representar el mapa.

$$A \xrightarrow{f} B$$

(La función f mapea el conjunto A en el conjunto B).

Una función también se puede indicar como subconjunto de un producto cartesiano.

$$f \subseteq X \times Y$$

(Pudiendo emplearse cualquier otra letra mayúscula como A, B, C, etc en lugar de X, Y, Z, etc).

o bien como conjunto:

$$f = \left\{ \langle x, y \rangle \ / \ x R y \ \wedge \ \text{todas las } x \text{ son diferentes entre sí} \right\}$$

Si una pareja ordenada $\langle x,y \rangle$ pertenece a la función, entonces

$$\langle x,y \rangle \in f.$$

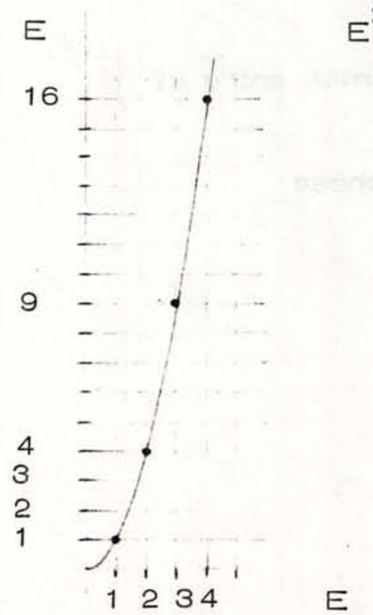
y se dice que y es función de x: $y = f(x)$.

Ejemplos:

Sea la relación $R = \{ \langle x,y \rangle \ / \ x$ es menor que $y \}$ dada sobre el conjunto de los números enteros positivos. Se observa que para un valor cualquiera del dominio tal como $x = 5$, habrá muchos valores del contradominio tales como $y = 6$, $y = 7$, $y = 8$, etc que harán que $x < y$ sea verdadera es decir las parejas: $\langle 5,6 \rangle$ $\langle 5,7 \rangle$ $\langle 5,8 \rangle$, etc., pertenecen a la relación y por lo tanto no es una función.

Sea la relación $R = \{ \langle x,y \rangle \ / \ x$ elevada al cuadrado es $y \}$ en el mismo conjunto de los números enteros positivos. Ahora dando un valor cualquiera del dominio como $x = 4$, en el contradominio sólo habrá un valor $y = 16$, imagen de x en f que corresponda a la relación $x^2 = y$ descrita, por lo que en este caso sí se trata de una función.

Una función también se puede representar con una gráfica. Sea la relación anterior $R = \{ \langle x,y \rangle \ / \ x^2 = y \}$ y su representación gráfica:



E^2

$y = x^2$

$y = f(x)$

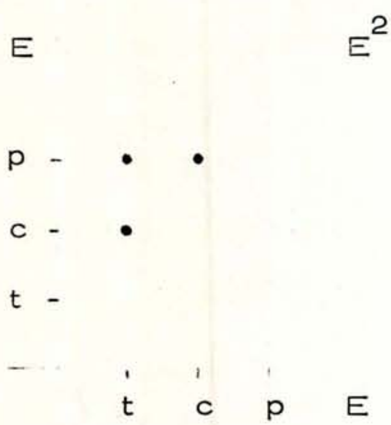
La representación gráfica de esta función es una curva que se prolonga indefinidamente por lo que algunas de las parejas ordenadas son:

$f = \{ \langle 1,1 \rangle , \langle 2,4 \rangle , \langle 3,9 \rangle , \langle 4,16 \rangle , \ldots.. $

En una gráfica se puede observar cuando una relación es función y cuando no lo es. Si los puntos en una gráfica aparecen alineados verticalmente, cada uno de estos puntos tendrá el primer componente común, por lo tanto por definición no es una función.

Sea la relación "es más alto que" en el conjunto de tres edificios de la ciudad de México.

$$A = \{ \text{Torre Latinoamericana, Catedral Metropolitana, Palacio Nacional} \}$$



En la representación observamos que no es función ya que dos puntos aparecen alineados en forma vertical.