DIVISION DE CIENCIAS Y ARTES PARA EL DISEÑO

DEPARTAMENTO DE PROCESOS Y TECNICAS DE REALIZACION

GEOMETRIA DESCRIPTIVA II

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA–AZCAPOTZALCO

Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
UNIDAD AZCAPOTZALCO
DIVISION DE CIENCIAS Y ARTES PARA EL DISEÑO

C. Y A. D.

GEOMETRIA II

TALLER DE TECNICAS DE EXPRESION II

PROLOGO:

El eslabón instrumental: Taller de Técnicas de Expresión II está compuesto de dos partes, la correspondiente a Geometría II y la de Dibujo II.

Este eslabón instrumental forma parte de nuestro "Sistema de eslabones " en que está fundamentada nuestra estructura académica.

Los apuntes de Geometría II han sido elaborados por los profesores del Departamento de Procesos y Técnicas de Realización teniendo en cuenta los temas fundamentales y los objetivos del curso, siendo el principal, capacitar al alumno para que pueda conocer y representar gráficamente las superficies geométricas simples, así como las secciones planas que de estas superficies se puedan generar.

Estos apuntes servirán como material de apoyo para uso de los alumnos, quienes encontrarán una referencia a las fuentes constituídas por los libros que se mencionan en la bibliografía correspondiente, a los cuales deberán acudir para complementar su preparación.

Profr. Jaime Lezama T.

GEOMETRIA II

I INTERSECCIONES DE RECTAS Y PLANOS

Todos los volúmenes formados con superficies planas o generados por líneas rectas o curvas pueden ser intersectados por rectas y planos que definen secciones, las que podrán ser estudiadas por procedimientos geométricos y que tienen una infinidad de aplicaciones prácticas.

En grado de dificultad se estudiarán en primer término las intersecciones de rectas con planos, cuyo lugar común es un punto.

1 INTERSECCIONES DE RECTAS CON PLANOS

De acuerdo con la posición que un plano tenga en el espacio, se podrá definir el punto de intersección con alguna recta.

A continuación se indican algunos casos de intersección cuando la proyección del plano sobre algunos de los planos de proyección es una línea recta.

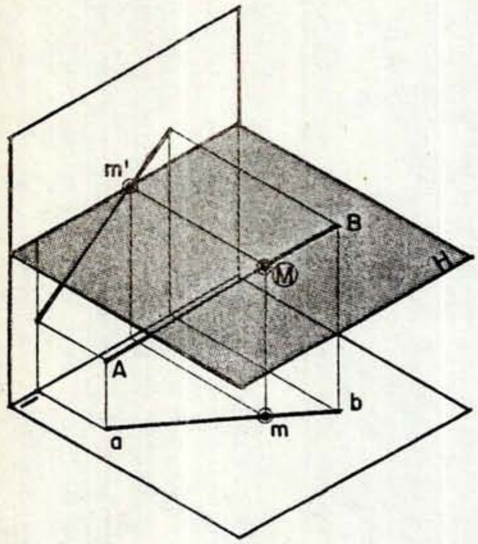
a) Plano horizontal con recta oblícua cualquiera

La proyección vertical de todo plano horizontal es una línea recta horizontal y por lo tanto la intersección de éste con una recta cualquiera queda definida en el cruce de ambos en el plano de proyección vertical. Para encontrar la otra proyección del punto de intersección será suficiente referir hasta la proyección horizontal de la recta.

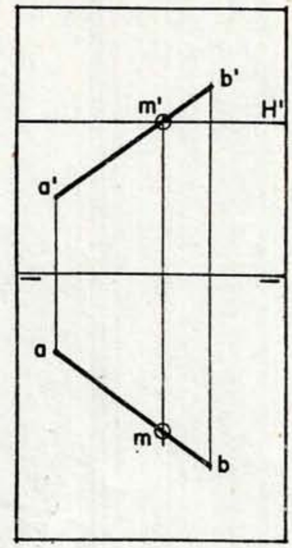
b) Plano de canto con recta cualquiera.

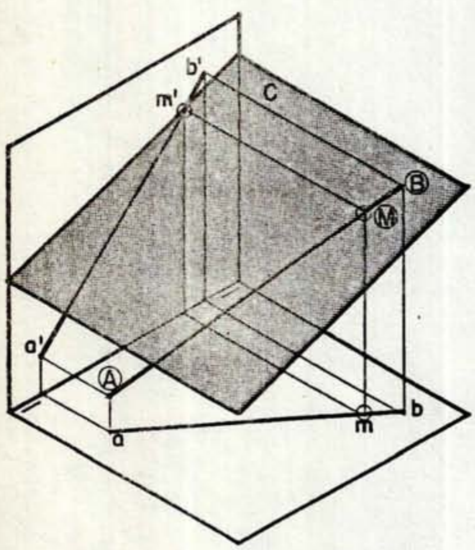
Un plano de canto tiene también su proyección vertical en una línea recta, y su intersección con una recta cualquiera quedará definida de la misma forma que el plano horizontal; o sea, en el cruce de la proyección vertical del plano de canto y de la recta cualquiera.

En forma análoga se puede resolver la intersección de una recta cualquiera con un plano frontal o vertical.

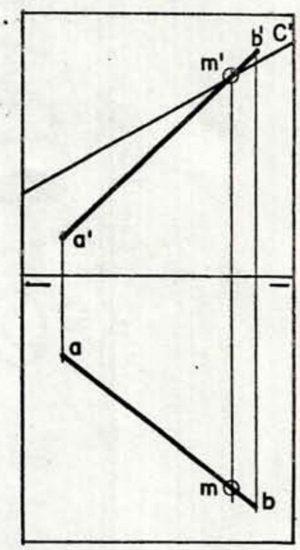


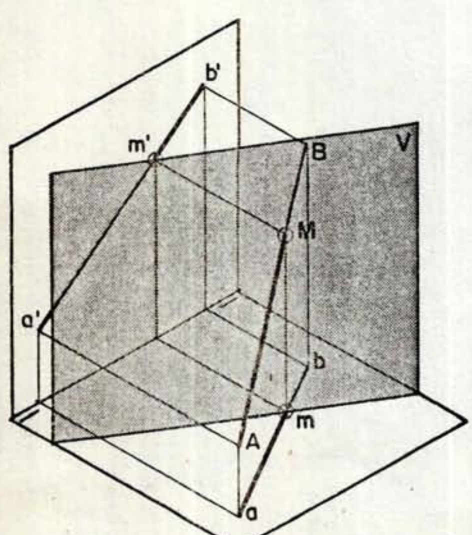
INTERSECCION RECTA CUALQUIERA CON PLANO HORIZONTAL.



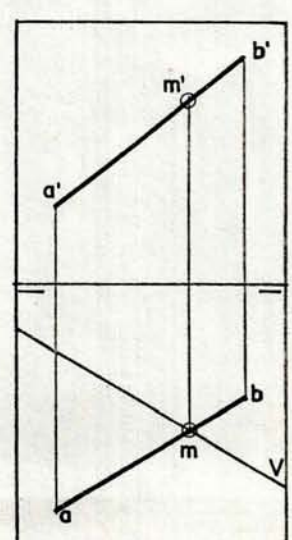


INTERSECCION RECTA CUALQUIERA CON PLANO DE CANTO.





INTERSECCION RECTA CUALQUIERA CON PLANO VERTICAL.



GEOMETRIA II

2. INTERSECCIONES DE 2 PLANOS

a) Intersección de plano cualquiera con plano horizontal

La intersección de dos planos es siempre una recta, y una recta queda definida por dos puntos, de manera que si el plano horizontal corta al plano cualquiera en dos de sus rectas, se tendrán los dos puntos necesarios que determinarán la recta de intersección. Si se tienen más planos horizontales, las rectas de intersección con el mismo plano cualquiera son rectas horizontales paralelas y se les denomina horizontales del plano cualquiera.

b) Intersección de plano cualquiera con plano de canto

Para determinar la intersección, será suficiente encontrar la intersección del plano de canto con dos de las rectas del plano cualquiera.

Los dos puntos encontrados, unidos, darán la recta de intersección buscada.

c) Intersección de plano cualquiera con plano frontal

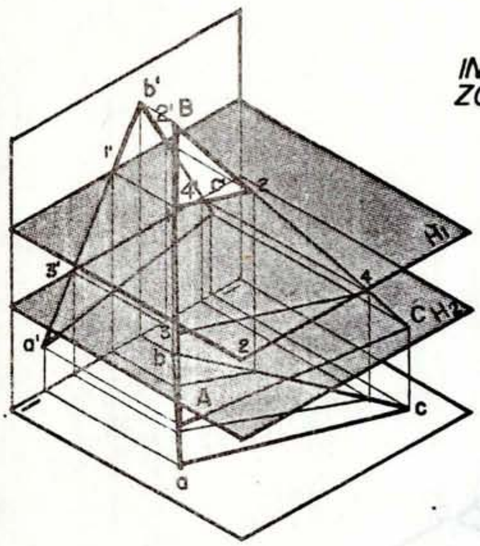
La proyección horizontal de todo plano frontal es una recta paralela a la línea de tierra y la intersección de uno de éstos planos frontales con un plano cualquiera se determina en la misma proyección horizontal, al cortar a dos de las rectas del plano cualquiera. Las rectas de intersección de planos frontales paralelos con un mismo plano cualquiera resultan entre sí paralelas y se les llama frontales del plano cualquiera.

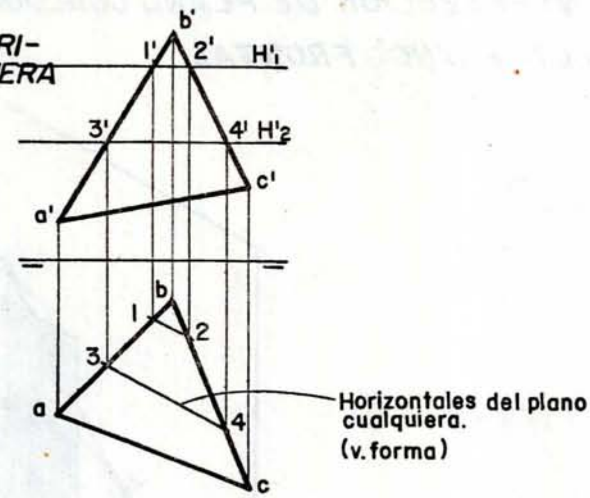
d) Intersección de plano cualquiera con plano vertical

Es suficiente que el plano vertical corte a dos de las rectas del plano cualquiera dentro del segmento conocido o su prolongación.

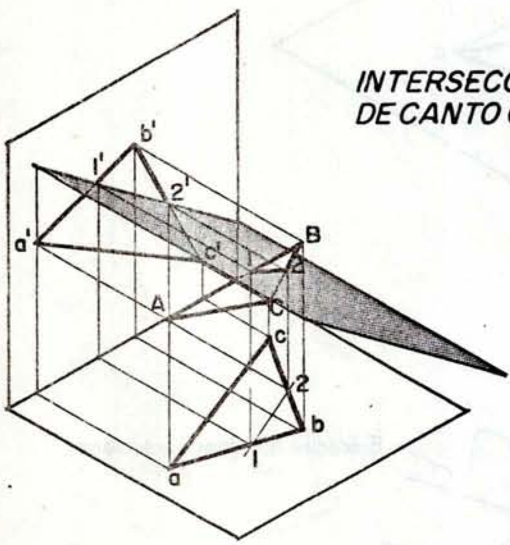
Los dos puntos encontrados definen la recta de intersección buscada.

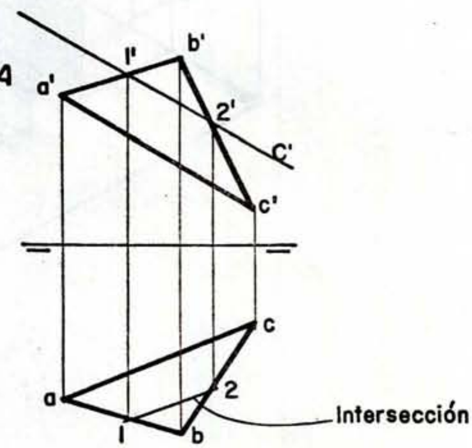
INTERSECCION DE PLANO HORIZONTAL CON PLANO CUALQUIERA



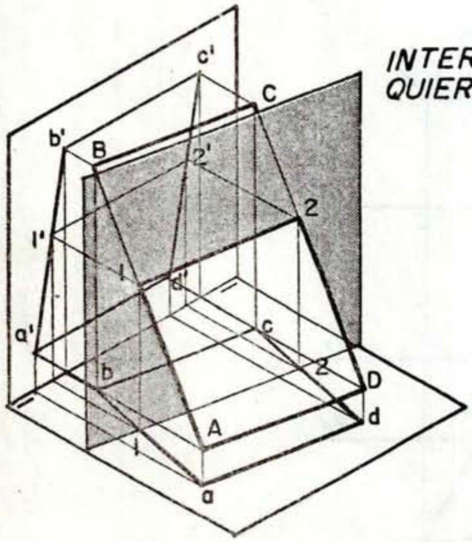


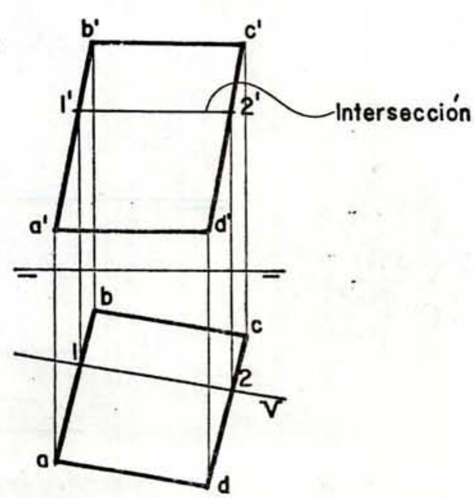
INTERSECCION DE PLANO DE CANTO CON PLANO CUALQUIERA



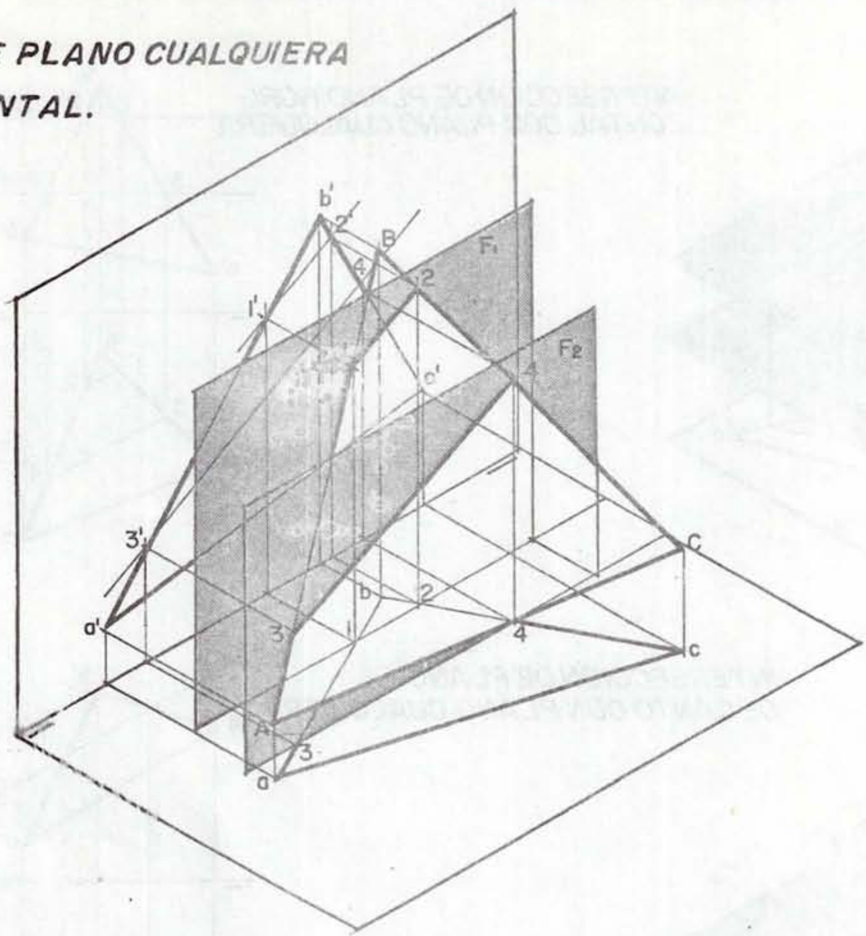


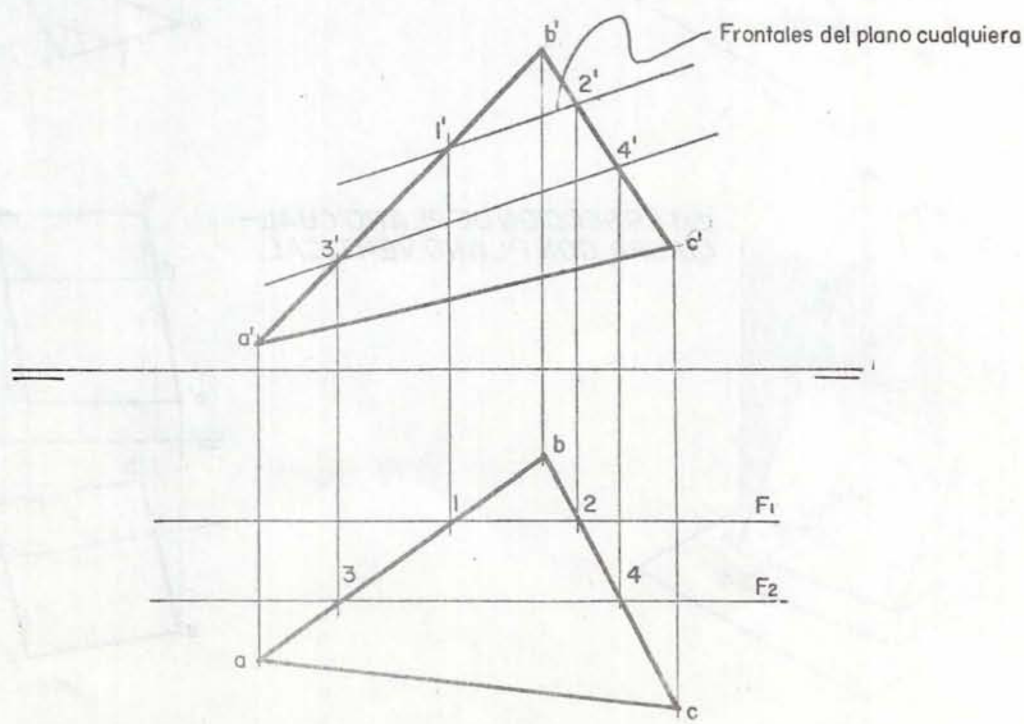
INTERSECCION DE PLANO CUALQUIERA CON PLANO VERTICAL.



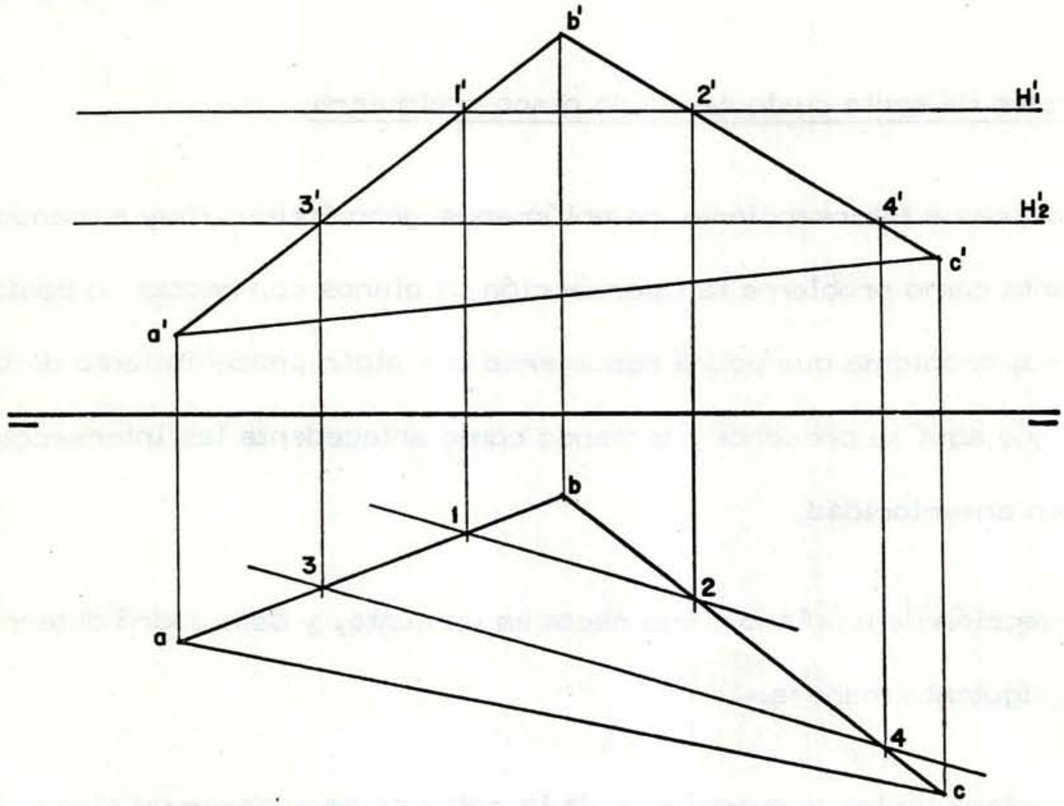


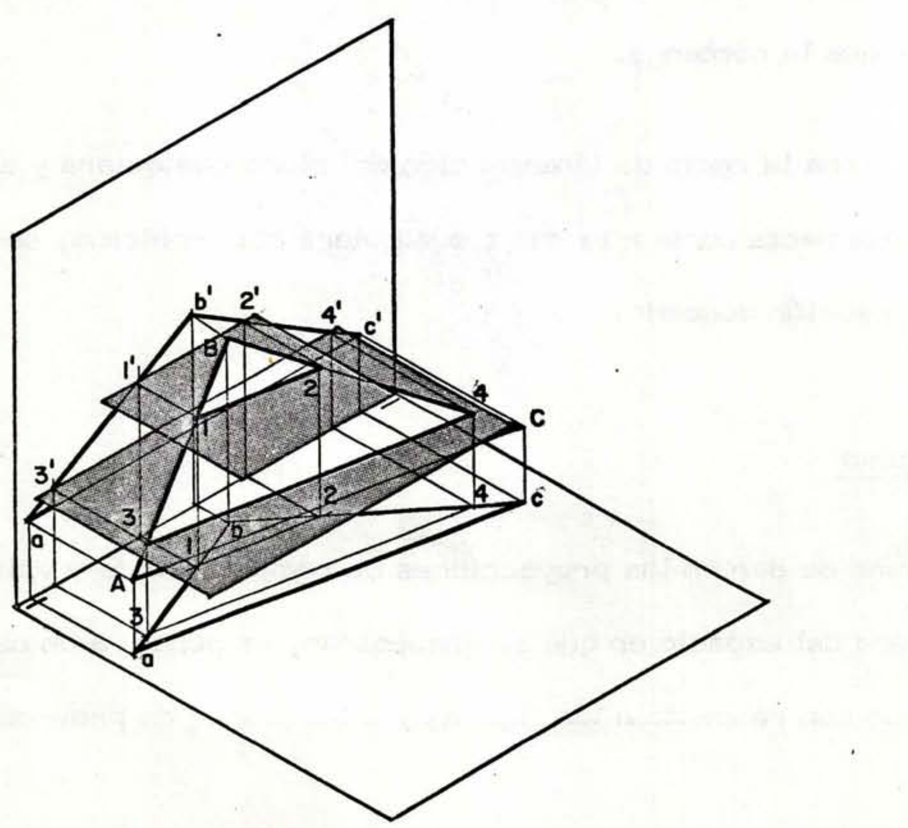
INTERSECCION DE PLANO CUALQUIERA CON PLANO FRONTAL.





INTERSECCION DE PLANO CUALQUIERA CON PLANO HORIZONTAL





GEOMETRIA II

Intersección de recta cualquiera con plano cualquiera

En las uniones e intersecciones de volúmenes geométricos muy a menudo se presenta como problema la intersección de planos con rectas en posición cualquiera; problema que podrá resolverse por algún procedimiento de trazo como el que aquí se presenta y tomando como antecedente las intersecciones vistas con anterioridad.

La intersección de un plano y una recta es un punto, y éste podrá determinarse de la siguiente manera:

Por cualquiera de las proyecciones de la recta se hace pasar un plano auxiliar que la contenga.

Se encuentra la recta de intersección del plano cualquiera y el plano auxiliar; donde esta recta corte a la recta cualquiera del problema, se tendrá el punto de intersección buscado.

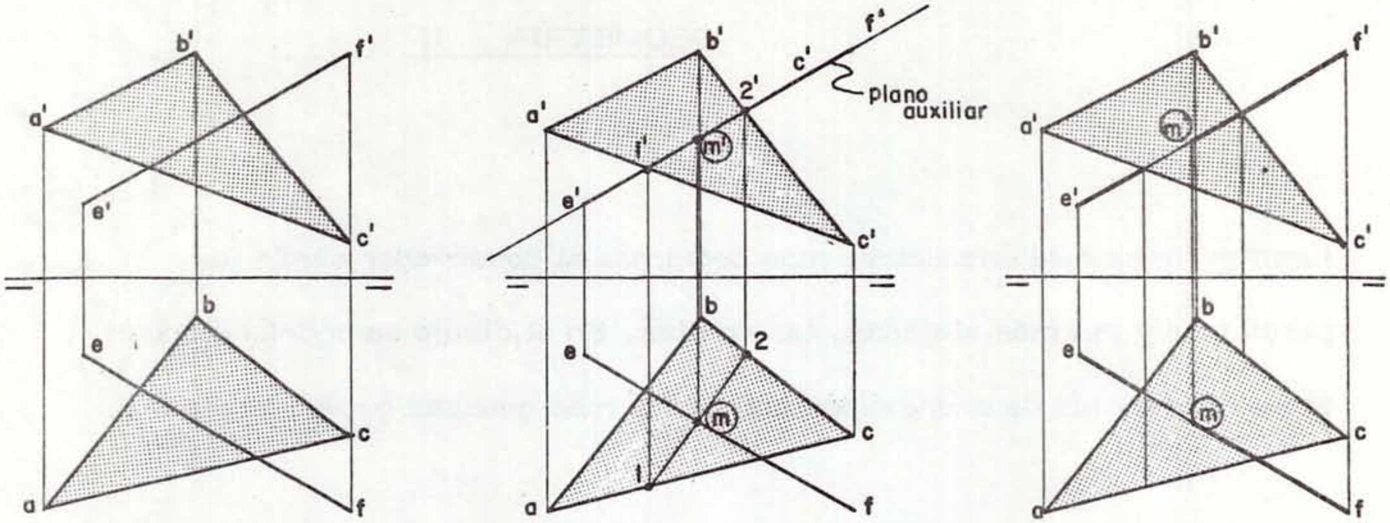
Visibilidad

Una forma de dar en las proyecciones de rectas, planos y volúmenes una idea más clara del espacio en que se encuentran, es poner a un observador alejado y elevado con respecto a las figuras y a los planos de proyección.

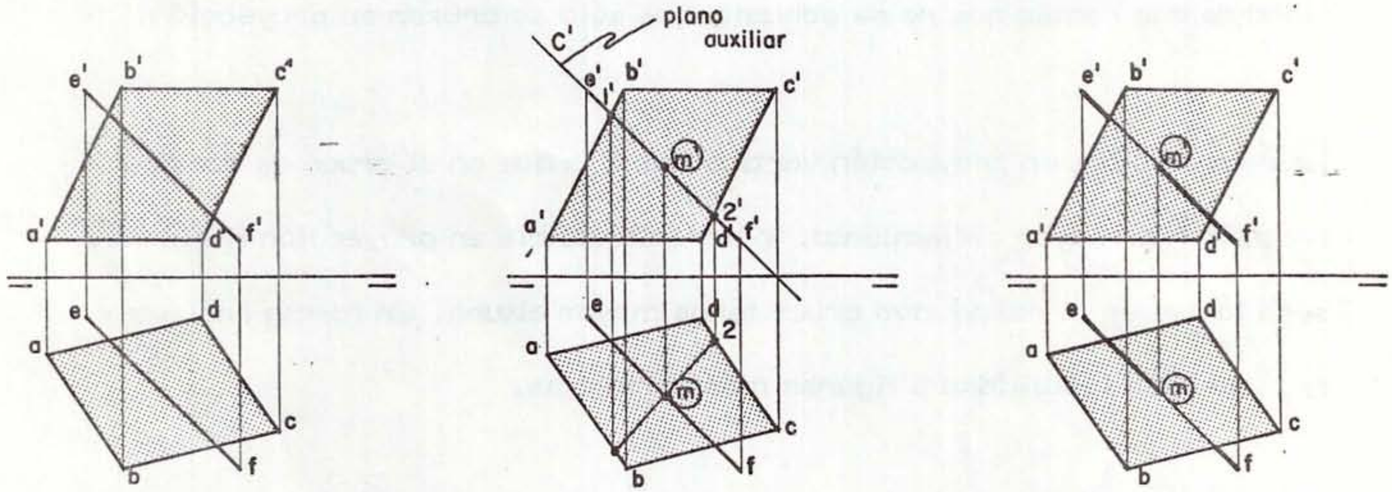
Las figuras que se encuentren más próximas al observador serán las percibidas y las más alejadas, las ocultas. En el dibujo se podrán marcar estas diferencias de profundidad con líneas más gruesas o más delgadas.

Un ejemplo que puede ser de fácil comprensión, es la verificación de profundidad de dos rectas que no se cortan y que sólo se cruzan en proyección.

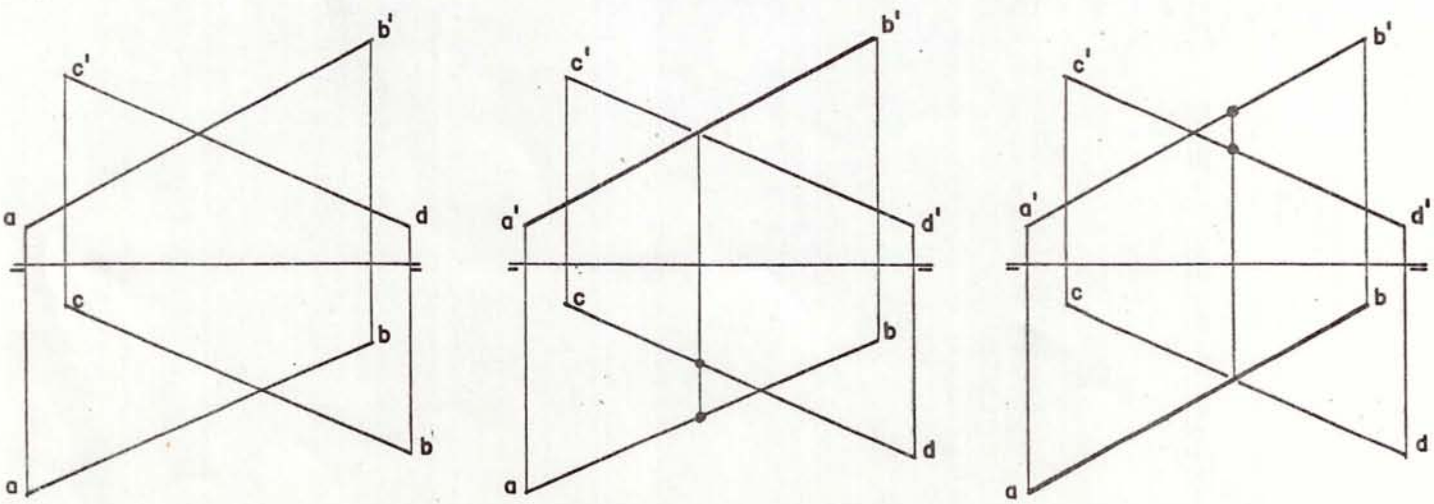
La recta visible en proyección vertical será la que en el cruce de las dos rectas tenga mayor alejamiento. Y la recta visible en proyección horizontal será la que en el respectivo cruce tenga mayor altura. En forma análoga se puede dar visibilidad a figuras más complejas.



INTERSECCION DE RECTA CUALQUIERA
CON PLANO CUALQUIERA



VISIBILIDAD DE 2 RECTAS



Intersección de dos planos cualquiera

La recta de intersección de dos planos cualquiera se puede obtener por el siguiente procedimiento geométrico: se hace pasar un primer plano auxiliar que corte a los dos planos cualquiera, dando por intersección de rectas, y donde estas se corten se tendrá un punto de la intersección de los dos planos cualquiera; en caso de que las dos rectas resulten paralelas, existe la posibilidad de que los dos planos no se corten.

Se pasa un segundo plano auxiliar que corte a los dos planos cualquiera dando por intersección otras dos rectas y donde se corten se tendrá otro punto de la intersección de los dos planos cualquiera. Si nuevamente resultaran paralelas, se podrá comprobar que los dos planos cualquiera son paralelos y por lo tanto no hay intersección.

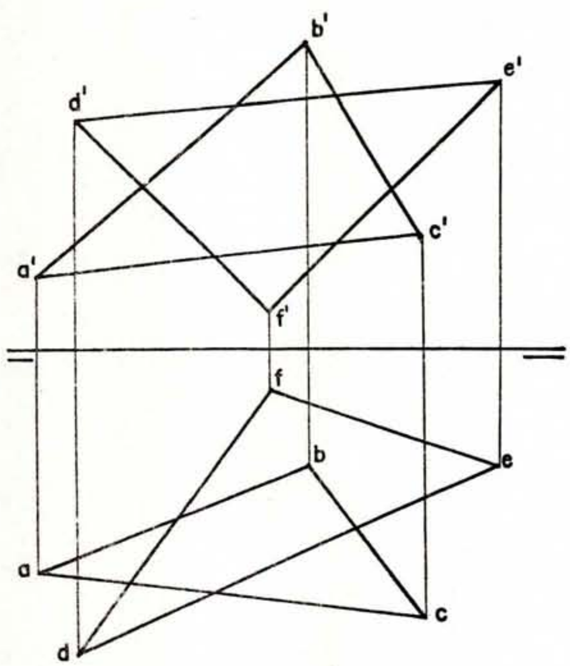
Uniendo los dos puntos encontrados se tendrá la recta de intersección buscada.

En el caso de que con el segundo plano auxiliar no se obtuviera otro punto de intersección, se deberá recurrir a un tercer plano auxiliar que dé un segundo punto que defina a la recta de intersección.

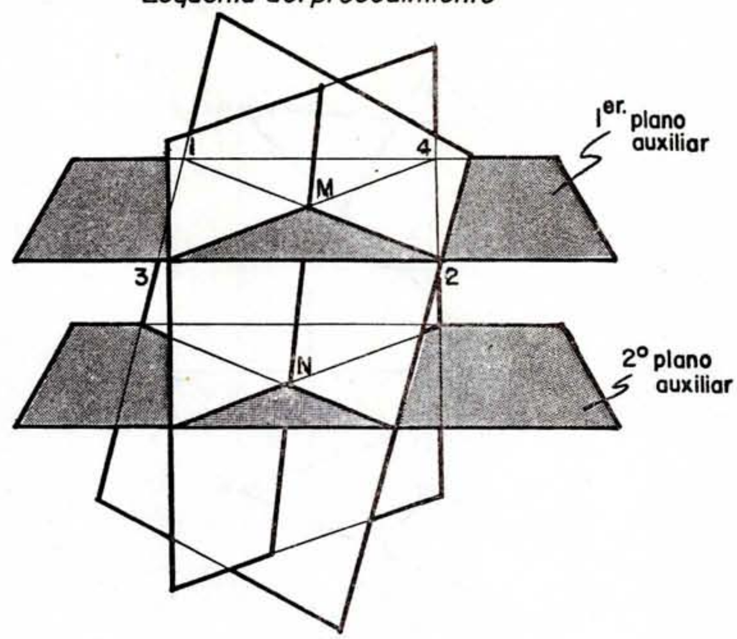
Es muy conveniente hacer pasar los planos auxiliares sobre las rectas conocidas del plano cualquiera con el objeto de simplificar el problema, evitando el trazo de referencias ya dibujadas.

Para tener con mayor claridad los planos cualquiera con su intersección deberá dárseles visibilidad con el procedimiento visto.

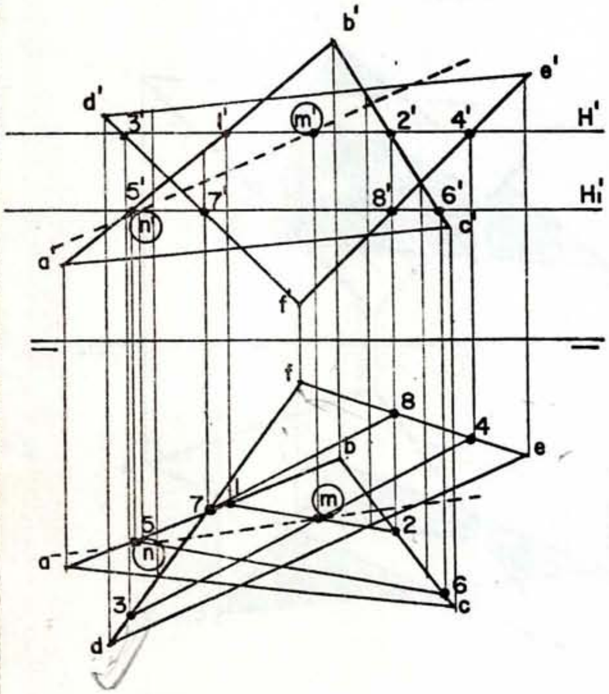
INTERSECCION DE DOS PLANOS CUALQUIERA



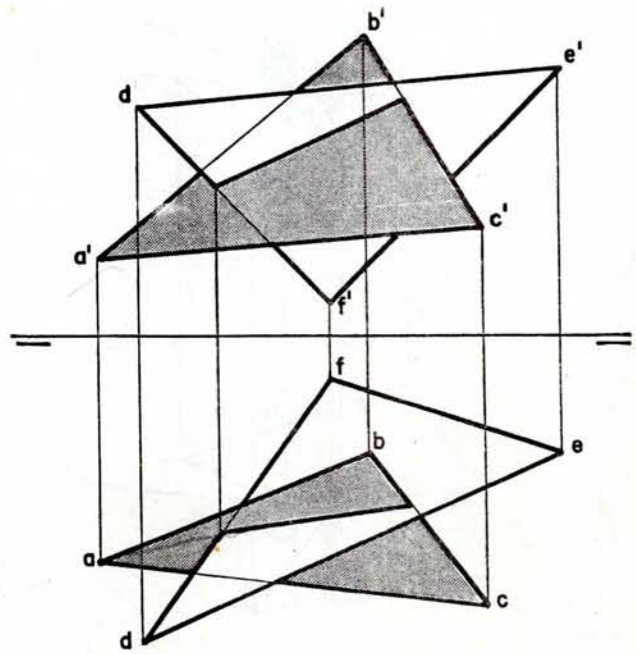
Esquema del procedimiento



Proceso

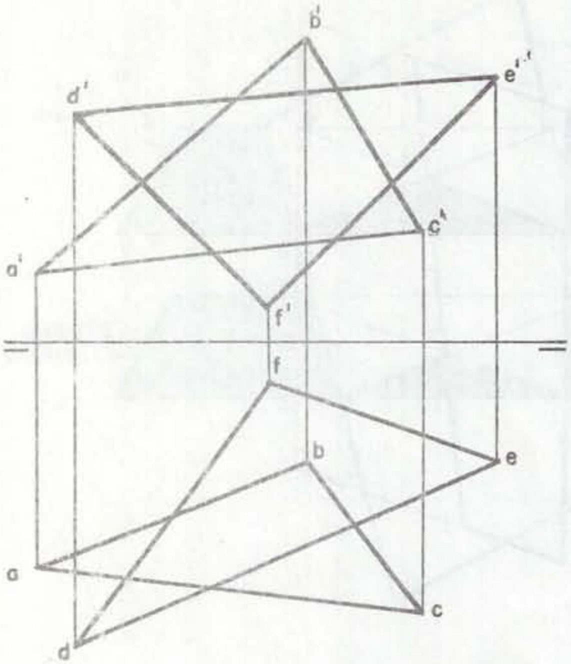


Visibilidad

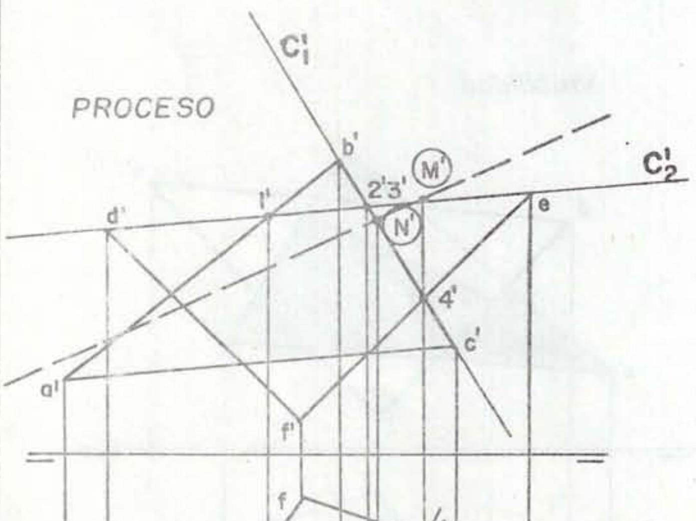


$$\overline{MN} = \widehat{ABC} \cap \widehat{DEF}$$

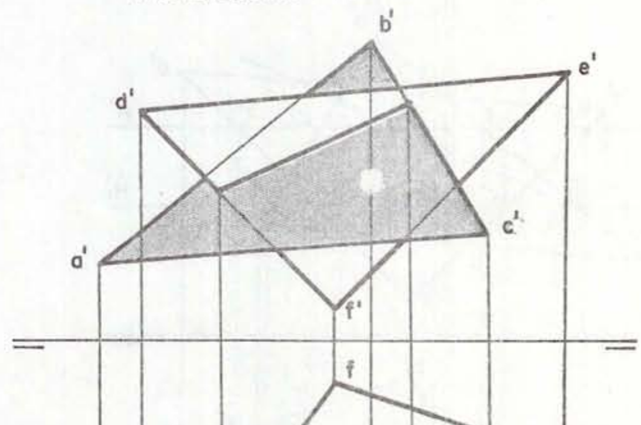
INTERSECCION DE DOS PLANOS CUALQUIERA



PROCESO

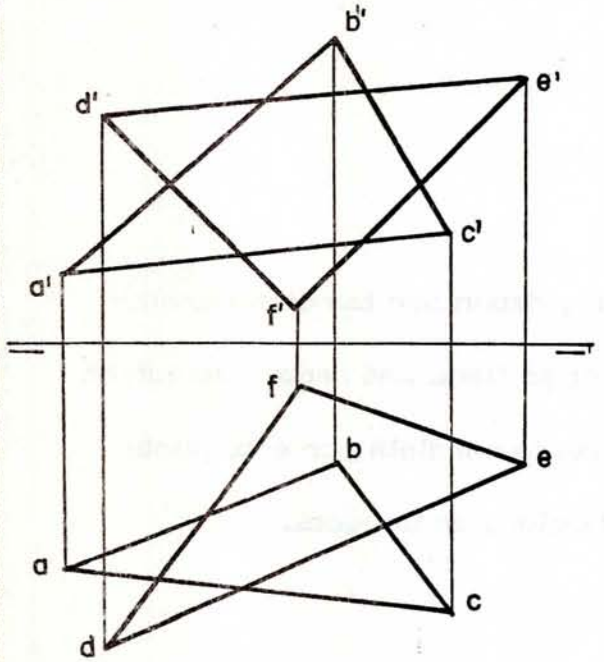


VISIBILIDAD



$\overline{MN} = \widehat{ABC} \cap \widehat{DEF}$

INTERSECCION DE 2 PLANOS CUALQUIERA

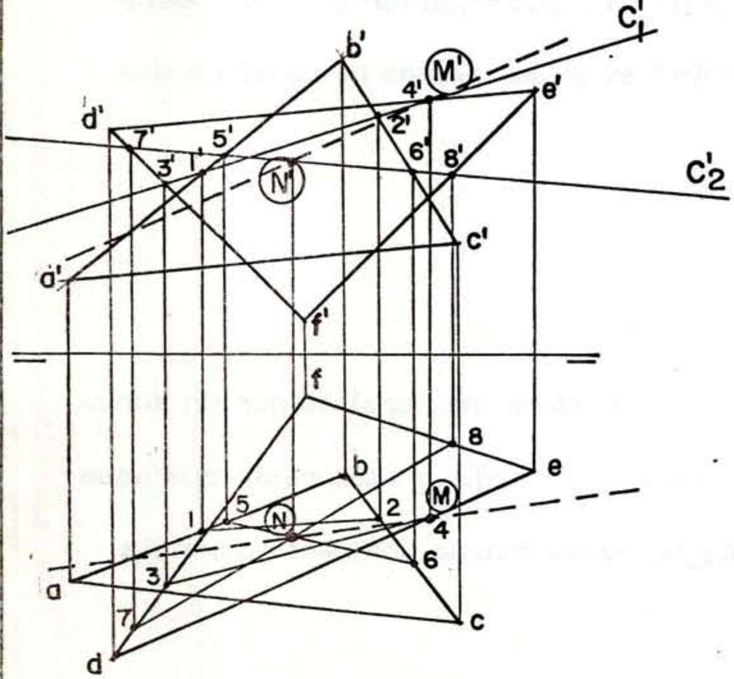


$\widehat{ABC} \cap \widehat{DEF}$

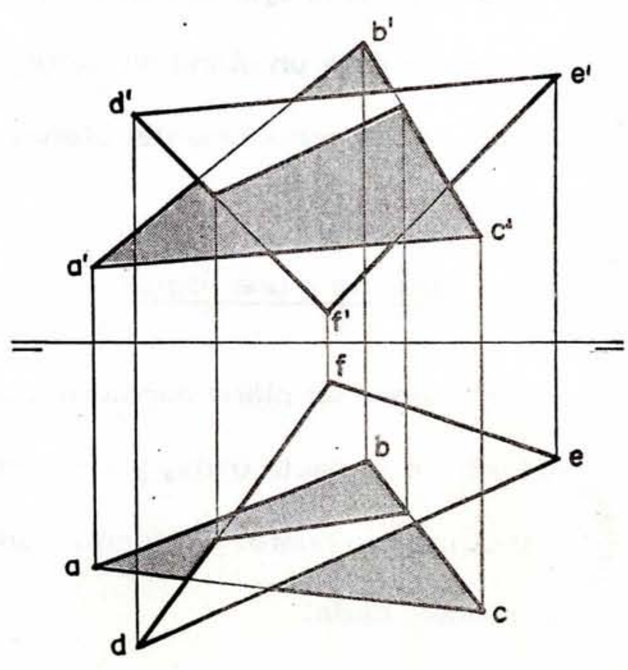
PLANO AUXILIAR DE CANTO C_1

PLANO AUXILIAR DE CANTO C_2

PROCESO



VISIBILIDAD



$\overline{MN}$ $\widehat{ABC} \cap \widehat{DEF}$

Paralelismo de rectas y planos

Dos rectas paralelas

Para que dos rectas sean paralelas en el espacio, deben ser también paralelas en todas sus proyecciones. En esta forma, si se tiene una recta cualquiera y un punto exterior a ella, se podrá trazar una recta paralela por este punto con sólo llevar paralelas a las proyecciones conocidas de la recta.

Dos planos cualquiera paralelos

Conocidas las proyecciones de un plano y de un punto exterior a él, se puede trazar por éste un plano paralelo, con sólo llevar dos rectas paralelas a dos de las rectas conocidas del plano.

Plano paralelo a una recta

Para obtener un plano paralelo a una recta, se traza una paralela por un punto exterior a la recta dada, y se forma el plano con cualquier otra recta que pase por el mismo punto. En forma semejante se puede trazar una recta paralela a un plano dado.

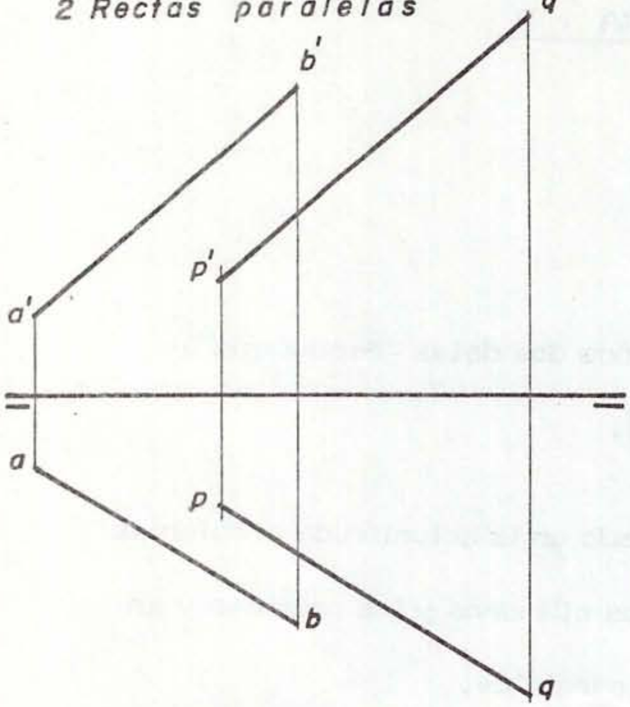
Plano paralelo a dos rectas

Un plano es paralelo a dos rectas dadas cuando dos delas rectas que lo forman son paralelas a las rectas conocidas.

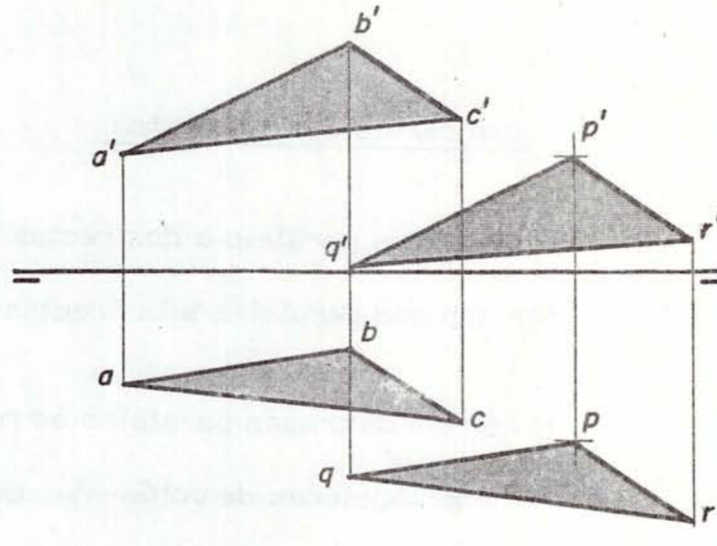
Este tipo de trazos paralelos es muy empleado en la solución de problemas de intersecciones de volúmenes como son los cilindros y los prismas y en las figuras compuestas por rectas y planos paralelos.

PARALELISMO

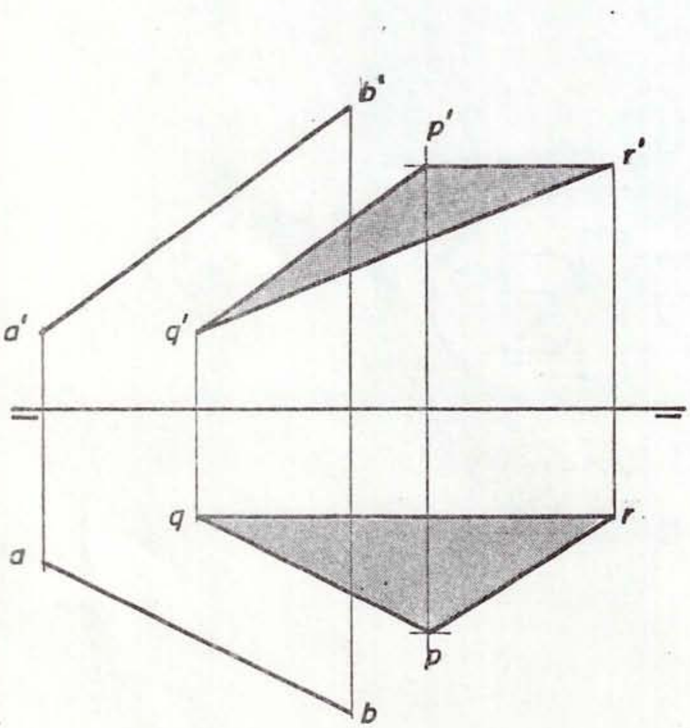
2 Rectas paralelas



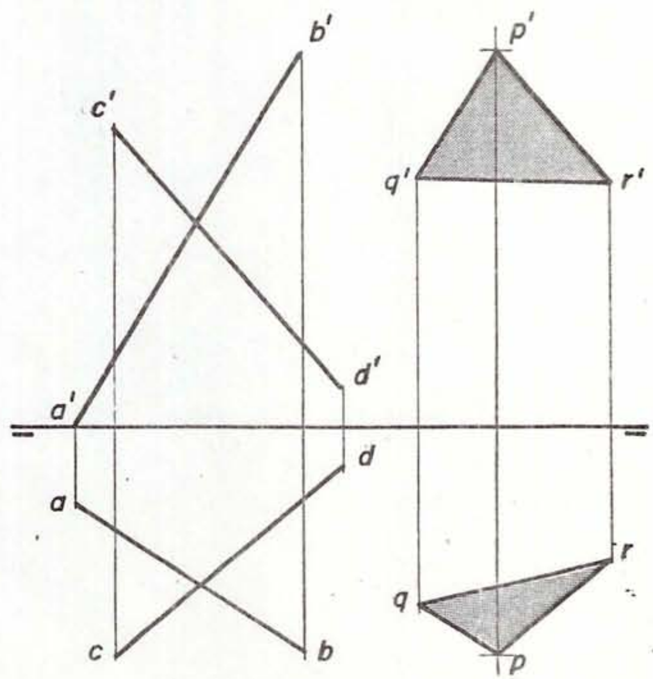
2 Planos cualquiera paralelos



Plano paralelo a una recta



Plano paralelo a dos rectas



GEOMETRIA II

Perpendicularidad de rectas y planos

Cuando un ángulo recto tiene uno de sus lados paralelo al plano en que se proyecta, el ángulo en la proyección será igualmente recto. De lo anterior se deduce que una recta es perpendicular a un plano, cuando es igualmente perpendicular a las rectas horizontales y frontales del mismo.

Recta perpendicular a un plano

Para trazar una recta perpendicular a un plano cualquiera desde un punto exterior al plano, se trazan por lo menos una recta horizontal y una recta frontal del mismo y desde el punto exterior se llevan las perpendiculares correspondientes.

Distancia mínima de un punto a un plano.

Siguiendo el proceso anterior, una vez determinada la recta perpendicular al plano, se encuentra la intersección de la recta y el plano, siguiendo el camino señalado anteriormente. Si se desea obtener la distancia en verdadera forma; se lleva por medio de un giro o un cambio de plano a posición horizontal o frontal.

Distancia mínima entre dos rectas

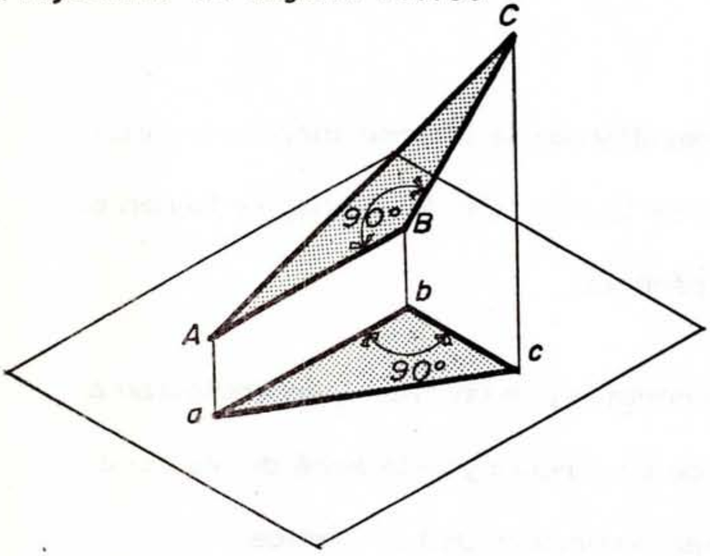
Conocidas las proyecciones de dos rectas cualquiera, se puede obtener la distancia mínima entre ellas, o sea su perpendicular común, llevando por algún proceso geométrico, una de las dos rectas a posición de punta, junto con los puntos que definen a la otra recta.

En la proyección de punta de la recta, se puede observar la distancia mínima, que además se encuentra en verdadera forma.

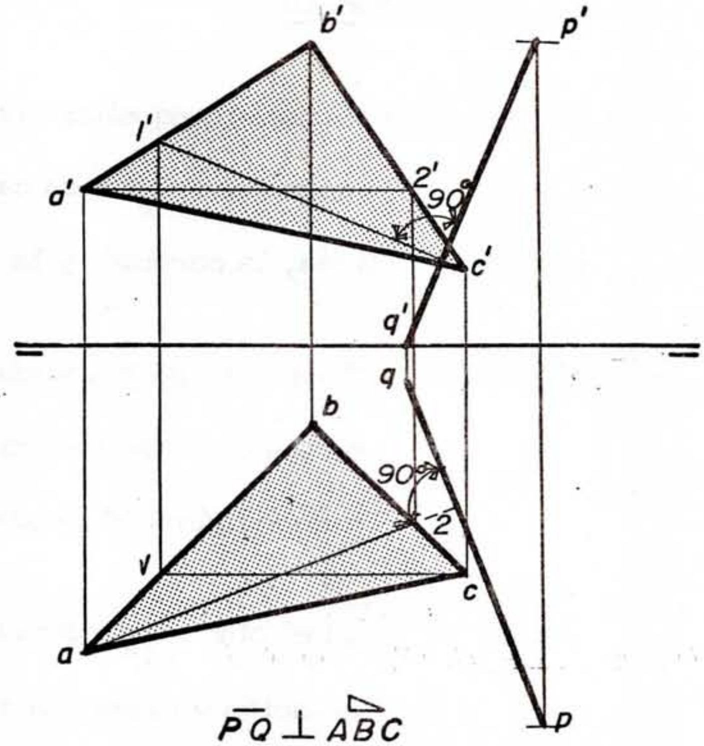
Si se desea tener esta distancia mínima sobre las proyecciones iniciales de la recta, bastará referirla conservando las alturas y los alejamientos correspondientes.

PERPENDICULARIDAD

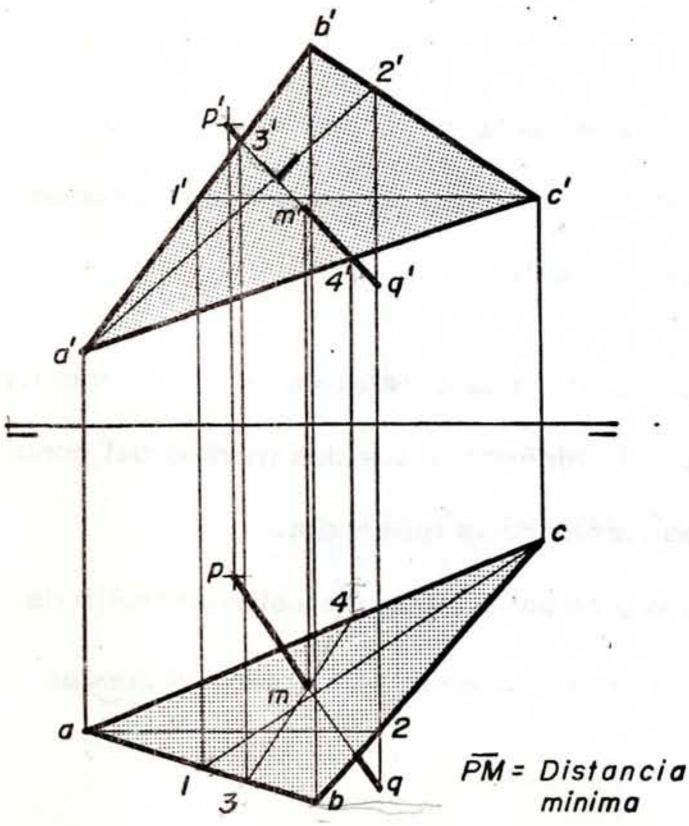
Proyección de ángulos rectos



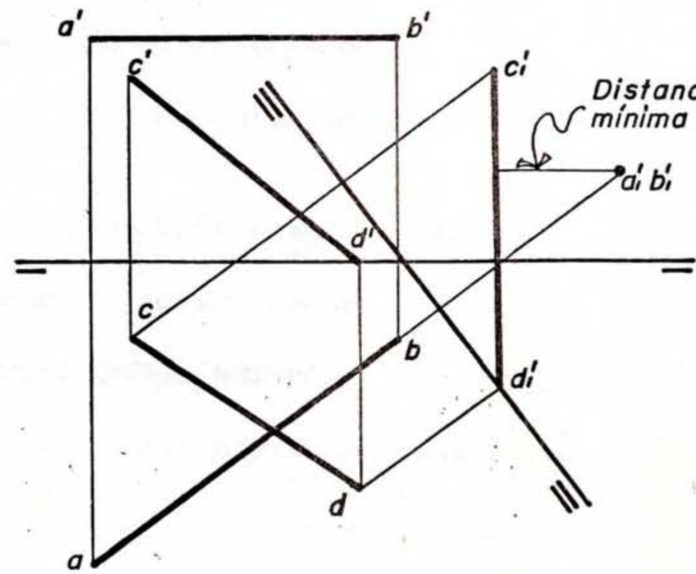
Recta perpendicular a un plano



Distancia mínima de un punto a un plano



Distancia mínima entre dos rectas



Las curvas cónicas

Las curvas cónicas son aquellas que resultan de la intersección de un plano con un cono; dependiendo en cada caso de la posición del plano, se tienen el círculo, la elipse, la parábola y la hipérbola.

Círculo — Todo cono de revolución cortado por un plano perpendicular a su eje de rotación produce un círculo y éste será de mayor o menor diámetro según sea su proximidad al vértice.

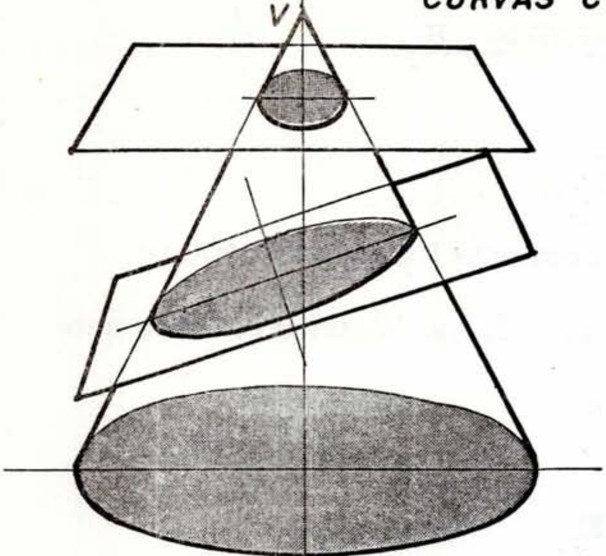
Elipse — Si el plano que corta al cono es oblicuo con respecto a su eje de rotación y lo secciona completamente, la curva que se obtiene es una elipse cuyo centro no coincide con el eje de revolución del cono.

Parábola — En el caso de que el plano que corte al cono sea paralelo a cualquiera de las generatrices de éste, la curva que se produce en la intersección es una parábola.

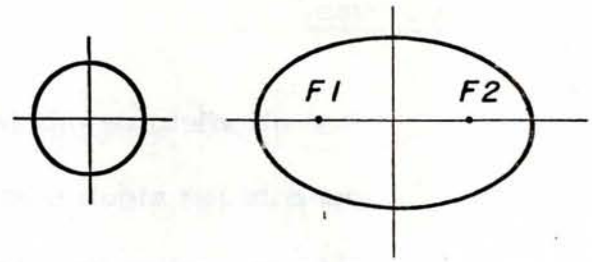
Hipérbola — Cuando el plano que corta al cono es paralelo a su eje, o secciona a sus mantos, se produce la hipérbola; los dos mantos del cono permiten definir las dos ramas de la hipérbola.

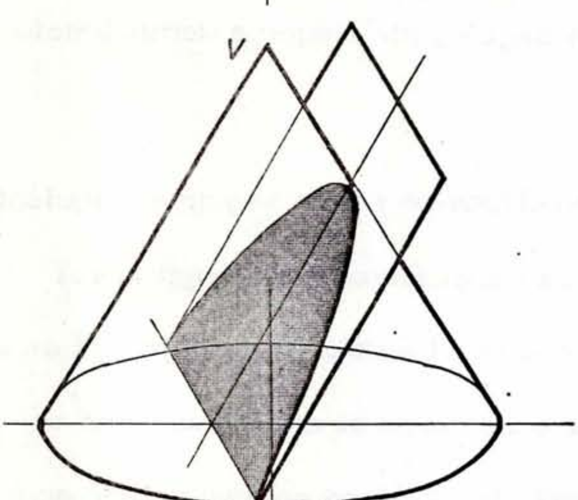
Para tener una forma de trazo precisa y poder aplicarla en el desarrollo de problemas geométricos, señalamos algunas maneras de dibujar las curvas cónicas.

CURVAS CONICAS

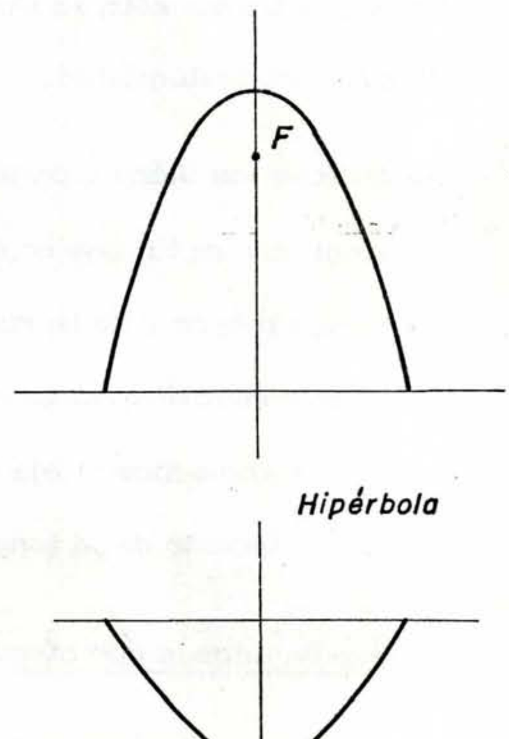


Circulo y Elipse

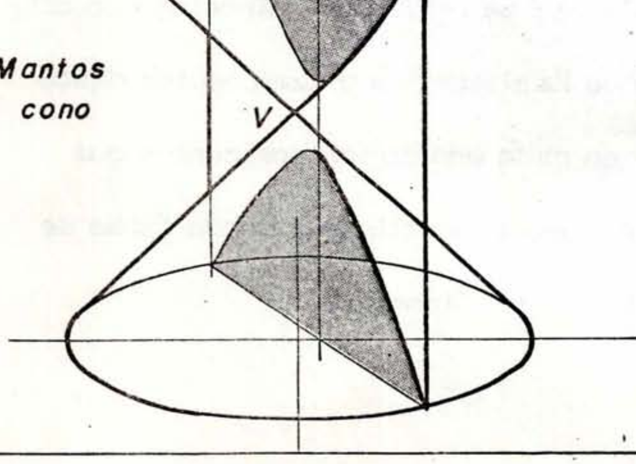




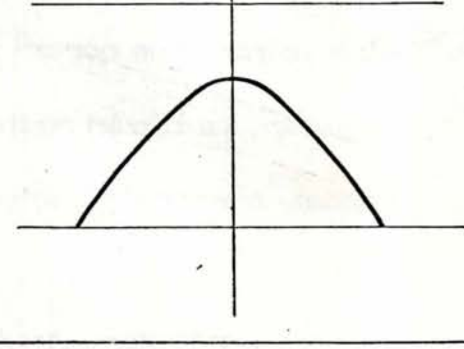
Parábola



Hipérbola



2 Mantos del cono



Trazo de curvas

Elipse

Con el objeto de dibujar correctamente las curvas cónicas durante los siguientes temas, se incluyen algunos de los trazos más conocidos de estas curvas.

Trazo de elipses por diferencia de semi-ejes

En estos trazos sólo se indican los pasos a seguir, sin llegar a demostraciones de tipo matemático.

Conocidos los diámetros principales de una elipse se puede seguir el siguiente procedimiento: En una regla o en una tira de papel se toma la longitud del semi-eje mayor y se le resta el semi-eje menor. La diferencia obtenida es un segmento rectilíneo que se apoya en un extremo sobre el eje menor y en el otro extremo sobre el eje mayor. Los puntos de la elipse se encuentran en el extremo opuesto de la longitud tomada.

Trazo de elipses por círculos principales

Tomando como centro, el centro de la elipse, se trazan dos círculos con diámetro igual a los diámetros principales de la elipse; se trazan rectas desde dicho centro que corten a los círculos y en cada uno de los dos puntos que resultan, se llevan rectas paralelas a los ejes de la elipse y donde éstas se cortan, quedan definidos diferentes puntos de la elipse.

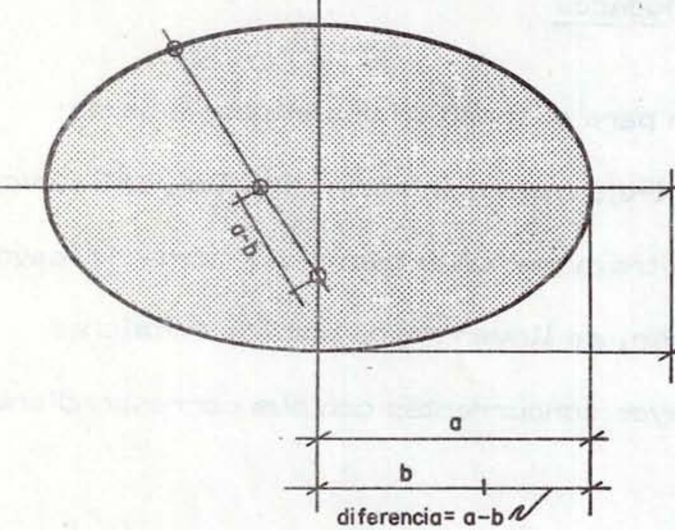
Trazo de elipses a partir de ejes conjugados

Este procedimiento es válido también para el trazo de una elipse, a partir de ejes principales. Se divide el semi-eje mayor en partes iguales, así como la recta paralela al eje menor que se traza por un extremo del diámetro mayor, y por los extremos del diámetro menor, se llevan rayos por las divisiones efectuadas. Donde se corten éstos rayos concurrentes con sus correspondientes, se tienen puntos de la elipse.

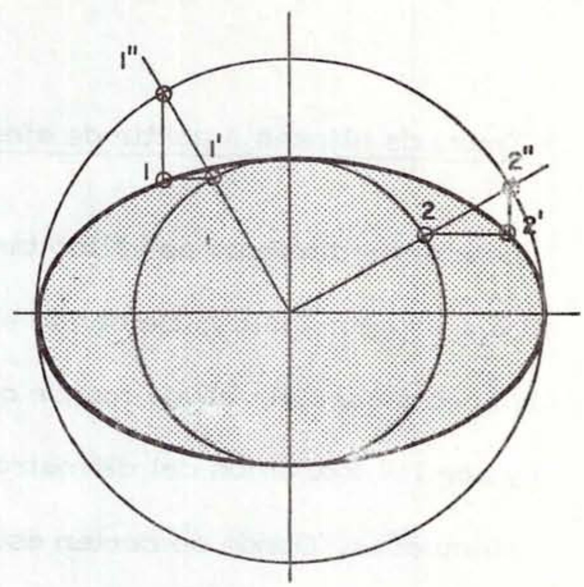
TRAZOS DE CURVAS

Elipse

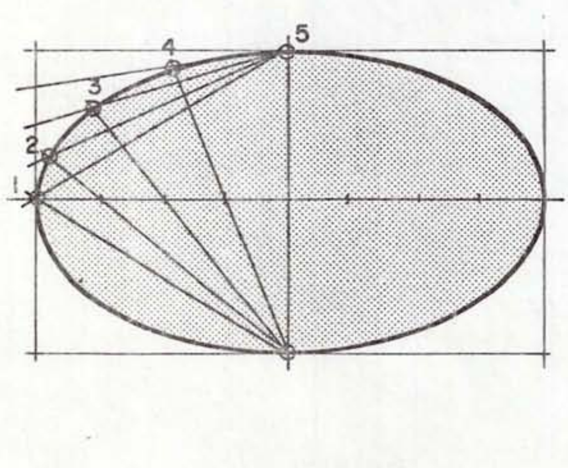
Diferencia de semi-ejes



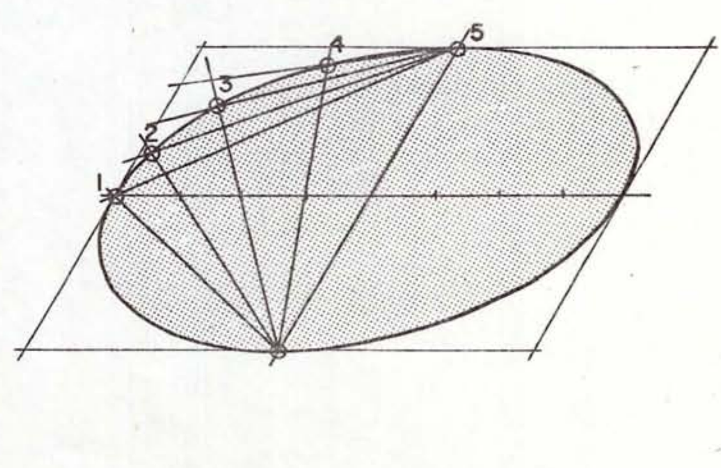
Circulos principales



Division de diametros



Ejes conjugados



Parábola

Para obtener en forma precisa una parábola, se indican dos procedimientos gráficos.

1. Conocido el eje focal de una parábola y un eje transversal, se forma un cuadrilátero con rectas paralelas a dicho eje focal y con otra recta paralela al eje transversal por el vértice de la parábola. Se dividen dichas paralelas en partes iguales y se llevan otras paralelas al eje focal. Por las otras divisiones se trazan rectas que concurran al vértice y donde éstas se cortan con las anteriores se encuentran puntos de la parábola.

2. Se traza una diagonal desde el punto conocido de la parábola hasta su vértice; se toman divisiones iguales o diferentes por una recta paralela al eje focal y se llevan rectas hasta la diagonal para regresarlas a otra recta que va al vértice, obteniéndose de ésta manera puntos de la parábola en los cruces correspondientes.

Hipérbola

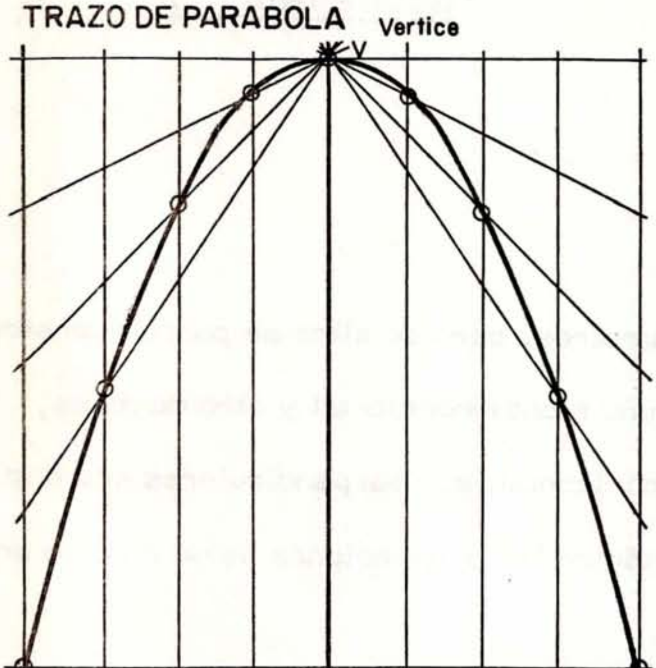
Una forma de trazo de hipérbola consiste en encerrar en un rectángulo con rectas paralelas al eje focal y al eje transversal a partir de cuatro puntos conocidos de la curva. Se dividen en partes iguales estas paralelas y se llevan rectas concurrentes al vértice opuesto; donde éstas se corten con las rectas que concurren al otro vértice, se tienen puntos de la hipérbola.

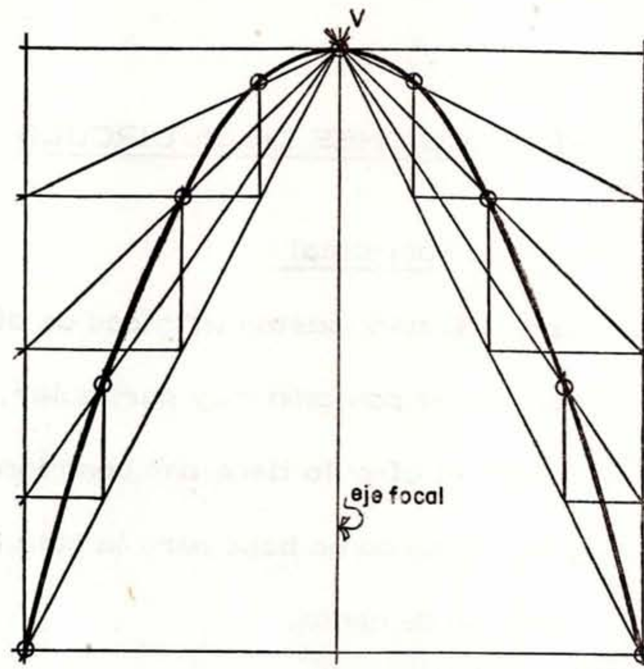
Focos y asíntotas de la hipérbola

Para obtener gráficamente las asíntotas, se traza un arco de círculo por el centro de la hipérbola, y con radio igual a la distancia de este punto al corte de la paralela al eje transversal por uno de los vértices; se determina la intersección de este arco con el eje focal de la hipérbola y desde este punto de intersección se lleva una paralela al eje transversal hasta cortar a la hipérbola; se traza un segundo círculo con radio igual a la distancia del centro de la hipérbola al vértice hasta cortar el eje transversal, y desde este punto se traza una paralela al eje focal a cortar el primer círculo, desde aquí se lleva una paralela al eje transversal hasta cortar la primera paralela que se trazó en la hipérbola; este cruce dará un punto de la asíntota y bastará unirlo con el centro de la curva.

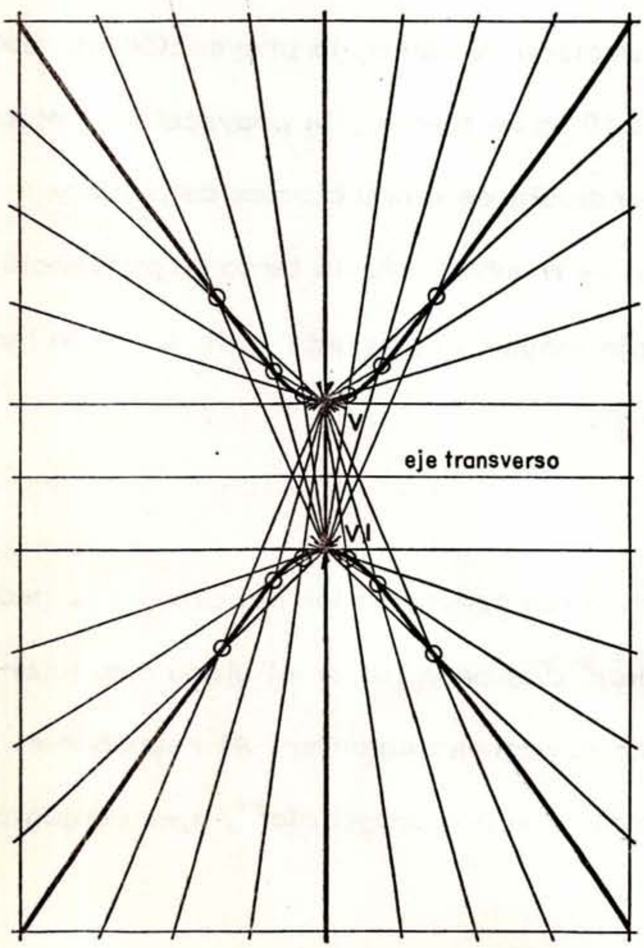
Para encontrar el foco se traza un tercer círculo con radio igual a la distancia del centro de la curva al cruce de la asíntota con la paralela al eje transversal por el vértice; donde este círculo corte al eje focal, se tienen los focos de la hipérbola.

TRAZO DE PARABOLA

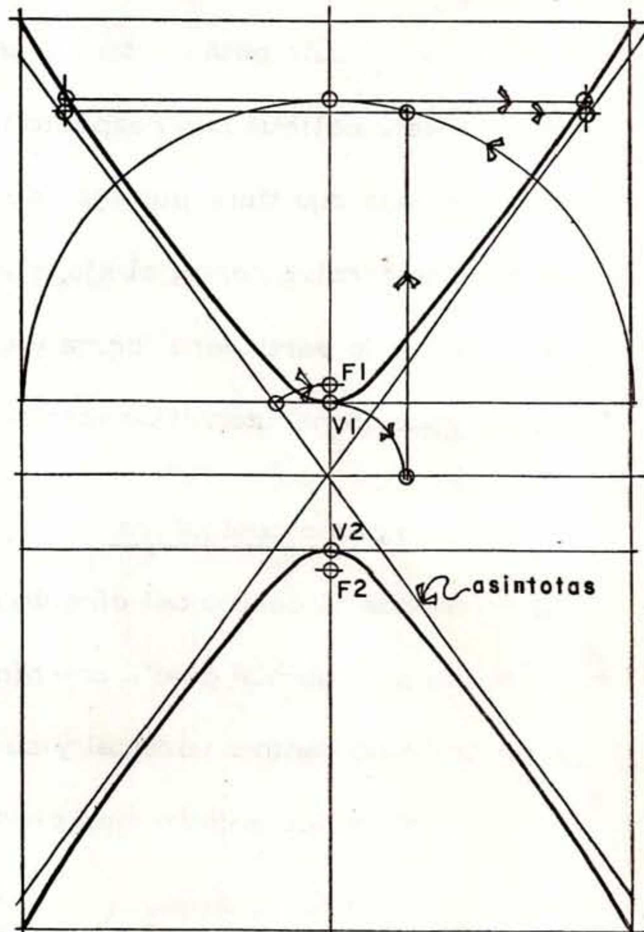




TRAZO DE HIPERBOLA



FOCOS Y ASINTOTAS



PROYECCIONES DE UN CIRCULO

Círculo horizontal

En un círculo existen infinidad de diámetros, pero de ellos se pueden considerar dos de posición muy particular, uno fronto-horizontal y otro de punta, cuando el círculo tiene una posición horizontal; son perpendiculares entre sí y se toman como base para la obtención de las proyecciones de un círculo en posición de canto.

Círculo de canto

Cuando un círculo está contenido en un plano de canto, la proyección vertical es una recta oblicua con respecto a la línea de tierra y la proyección horizontal es una elipse que tiene sus ejes perpendiculares o principales de punta y frontal respectivamente; el eje menor es frontal y por lo tanto su proyección vertical es de verdadera forma y el eje mayor es de punta y tiene por lo tanto su proyección horizontal de forma real.

Círculo en plano cualquiera

Si se conoce el centro del círculo sobre las proyecciones del plano y el radio se puede efectuar un giro o cambio de planos para llevar el plano cualquiera a posición de canto o vertical y seguir el proceso anterior. Al regresar el movimiento se obtendrán ejes principales en una proyeccion y ejes conjugados en la proyección opuesta.

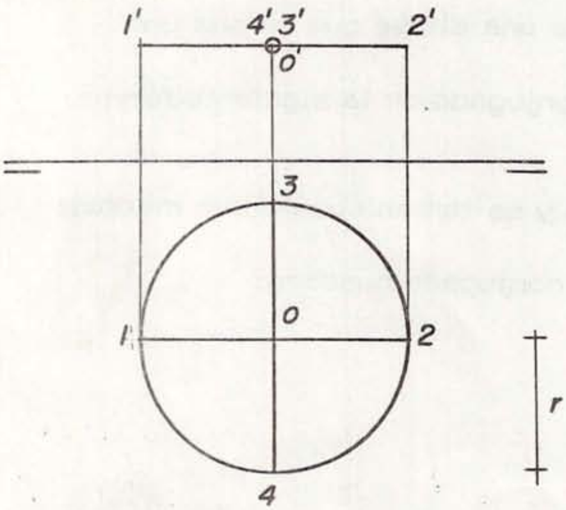
Ejes conjugados

Si se conoce un eje o diámetro cualquiera de una elipse que no sea uno de los principales, se puede encontrar su conjugado de la siguiente forma:

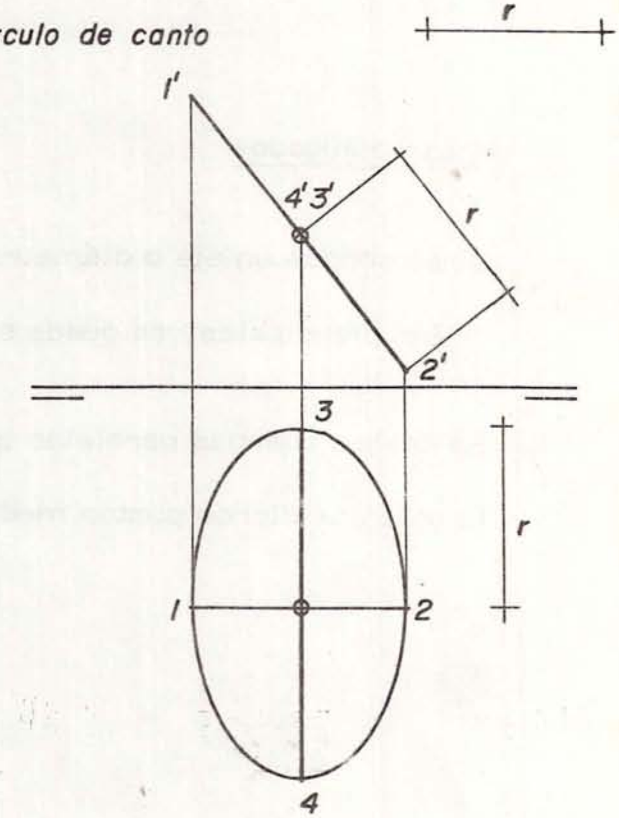
Se trazan cuerdas paralelas al eje conocido y se toman sus puntos medios; la unión de dichos puntos medios, define el conjugado buscado.

PROYECCIONES DE UN CIRCULO

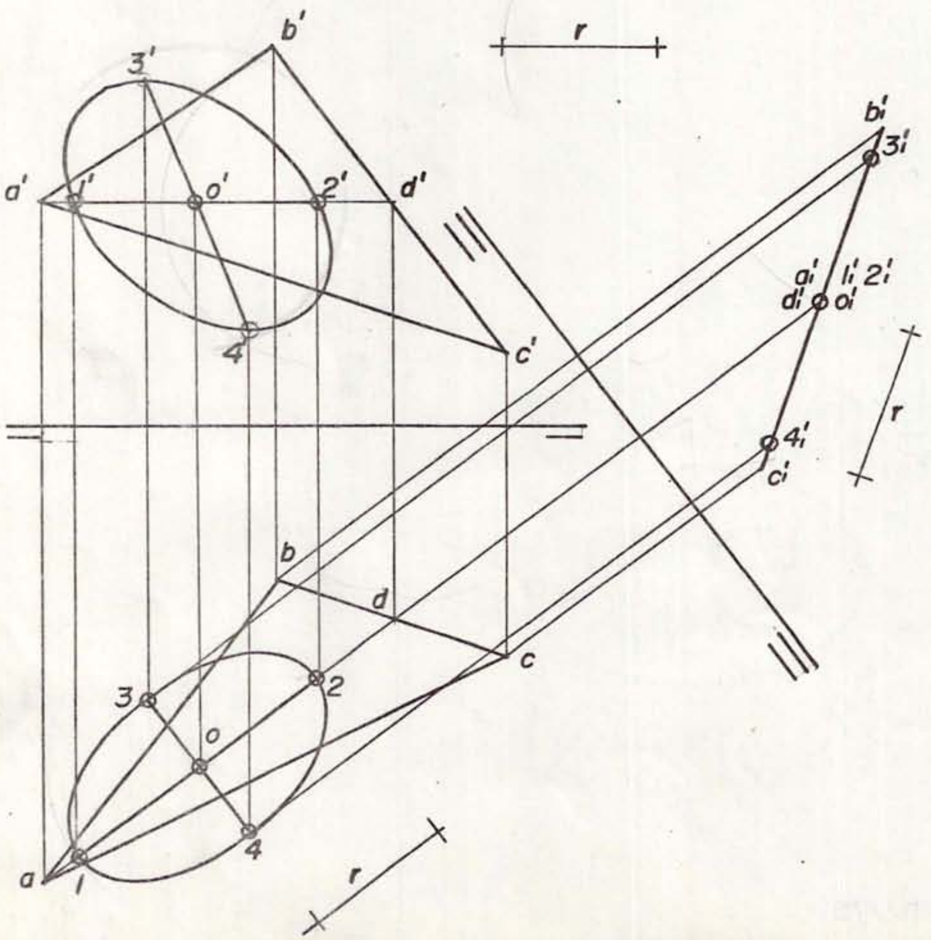
Circulo horizontal



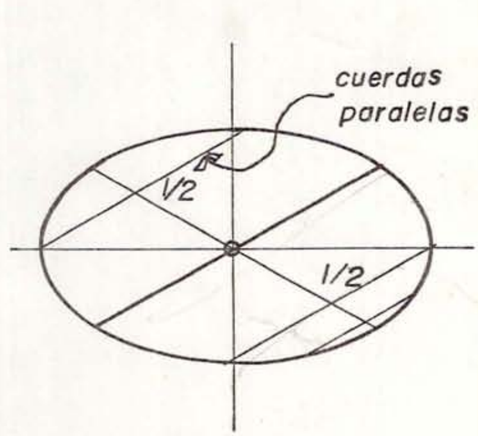
Circulo de canto



Circulo en plano cualquiera



Ejes conjugados



SUPERFICIES REGLADAS

Las superficies regladas son aquellas que se generan por el movimiento de una recta que se apoya en otras líneas rectas o curvas y cumple determinadas condiciones.

Superficies regladas alabeadas

Son aquellas que por su generación propia, no pueden llevarse a un plano en toda su magnitud, es decir, no es posible obtener de ellas una plantilla.

Hiperboloide de un manto

Es una superficie reglada alabeada que se genera por el movimiento de una recta que se apoya constantemente en tres directrices rectas.

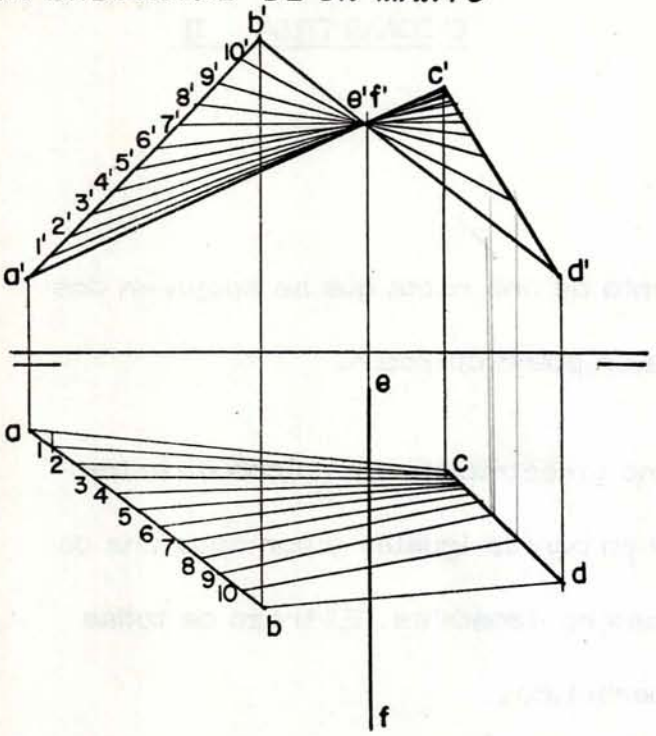
Para su trazo se puede proceder de la siguiente manera: dos de las rectas directrices pueden ser rectas cualquiera, pero es necesario que la tercera directriz tenga una posición de punta o vertical con el objeto de precisar que todas las generatrices corten a las tres directrices. Se puede dividir una de las directrices en partes iguales y por cada una de éstas pasar una generatriz que toque a las otras 2 directrices; el trazo de todas ellas formará el hiperboloide.

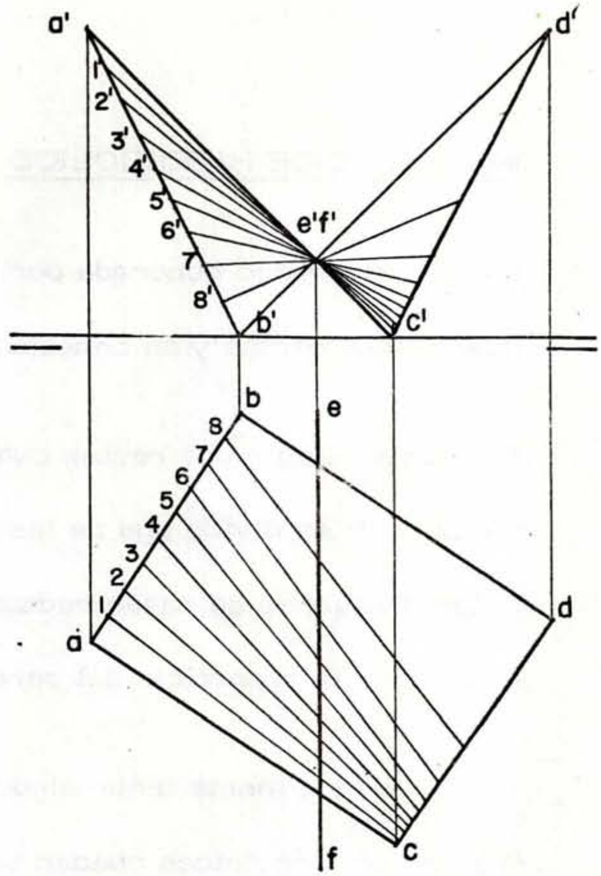
Se pueden obtener hiperboloides de un manto con alguna simetría en su trazo y en sus proyecciones; así se puede pensar en que la proyección horizontal sea un cuadrado o un rectángulo y en la proyección vertical los puntos de las rectas generatrices tengan las mismas alturas. Se toman partes iguales sobre una recta directriz y al pasar las generatrices por éstas partes y por la directriz de punta coinciden en la tercera directriz en partes desiguales. Esta es una de las características de un hiperboliode de un manto que lo diferencían del paraboloide hiperbólico que se presenta en el siguiente tema.

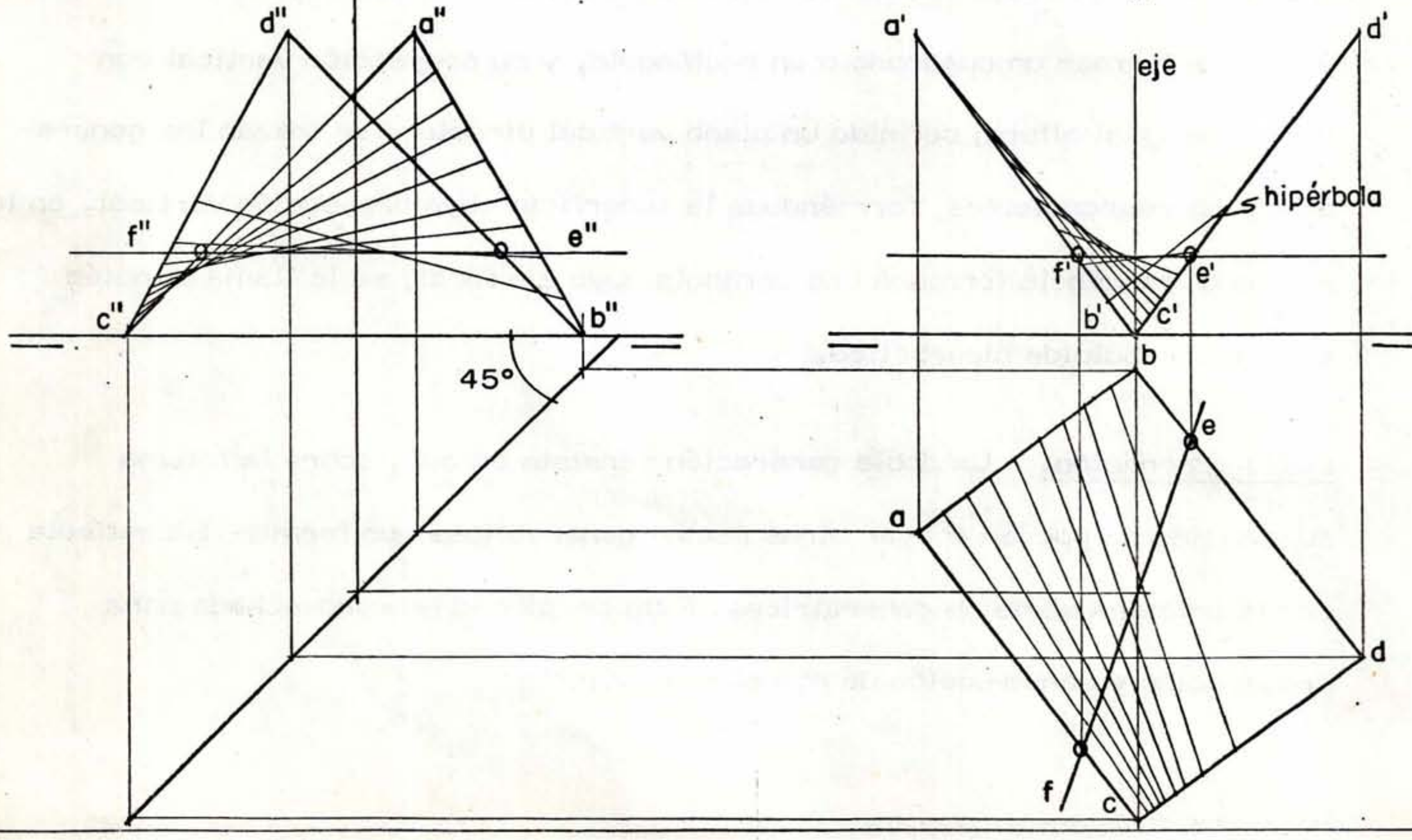
Si se desea tener un perfil de la superficie, se puede girar ésta hasta las posiciones deseadas.

SUPERFICIES REGLADAS ALABEADAS

HIPERBOLOIDE DE UN MANTO







PARABOLOIDE HIPERBOLICO

Es una superficie generada por el movimiento de una recta que se apoya en dos directrices rectas y se conserva paralela a un plano director.

Se pueden elegir dos rectas cualquiera como directrices, y un plano director horizontal; se divide una de las directrices en partes iguales y por cada una de éstas divisiones se pasan rectas generatrices horizontales. El trazo de todas ellas dará la superficie del paraboloide hiperbólico.

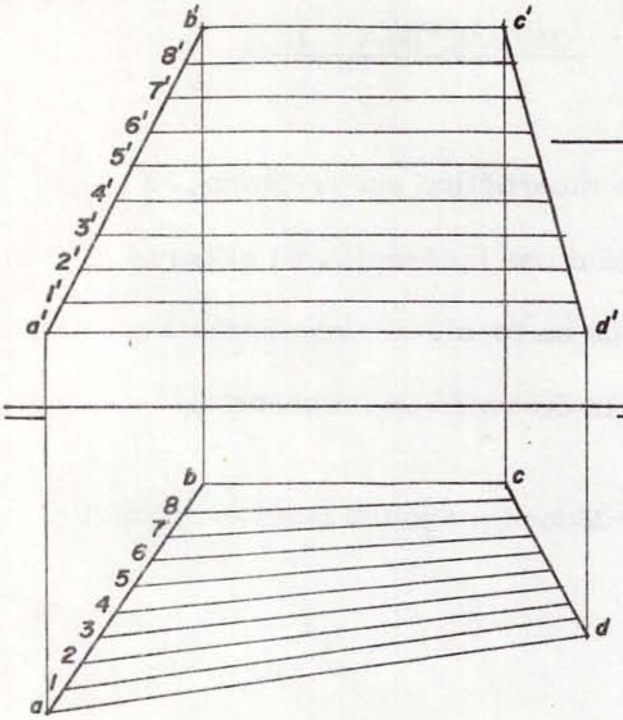
Se puede igualmente tener algunas condiciones de regularidad y simetría; así, dos rectas directrices pueden ser iguales y paralelas en la proyección horizontal y además formar un cuadrado o un rectángulo, y su proyección vertical con puntos de igual altura; definido un plano vertical director, se trazan las generatrices correspondientes, formándose la superficie cuya proyección vertical, en los puntos de tangencia formará una parábola cuyo eje focal, se le llama también eje del paraboloide hiperbólico.

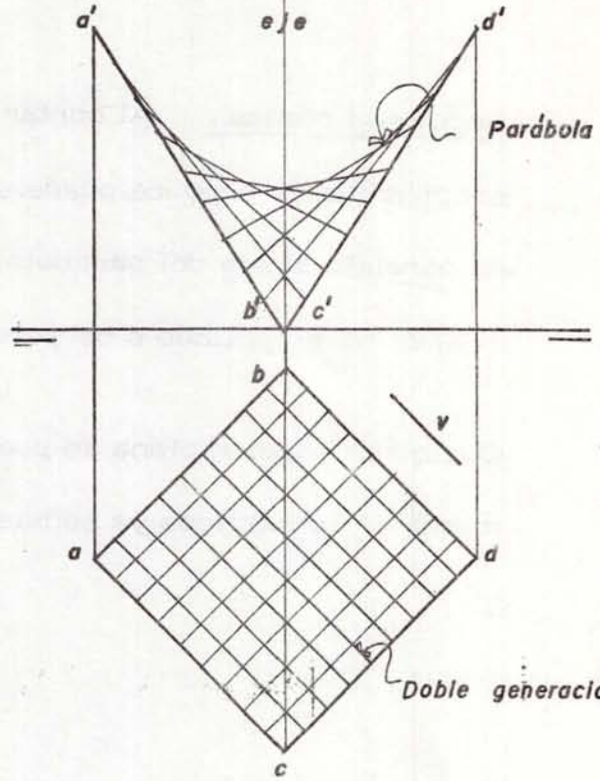
Doble generación. La doble generación consiste en que, sobre la misma superficie, se pueden apoyar otras rectas generatrices que forman una retícula con la primera serie de generatrices. Esta propiedad es aprovechada para preparación y construcción de modelos y cubiertas.

Secciones planas. Al cortar un paraboloide hiperbólico por un plano, la sección que se produce puede ser una parábola o una hipérbola. Si el corte es paralelo al eje del paraboloide, la curva que se forma es una parábola y si el corte es oblicuo o perpendicular al eje, la curva es una hipérbola.

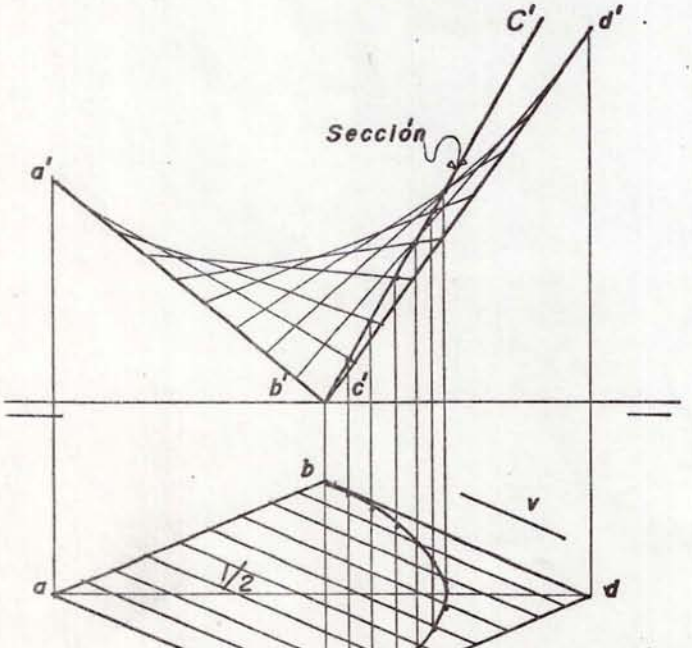
Cualquier sección plana se puede llevar a verdadera magnitud por los procedimientos geométricos ya señalados.

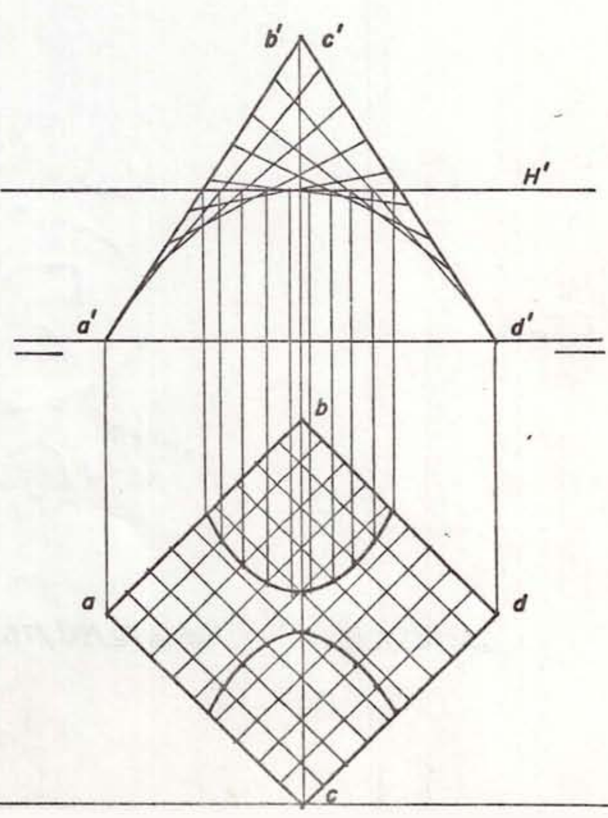
PARABOLOIDE HIPERBOLICO





SECCION PLANA





Unión de paraboloides hiperbólicos

Se pueden obtener estructuras, a partir de la unión de paraboloides hiperbólicos o segmentos de éstos.

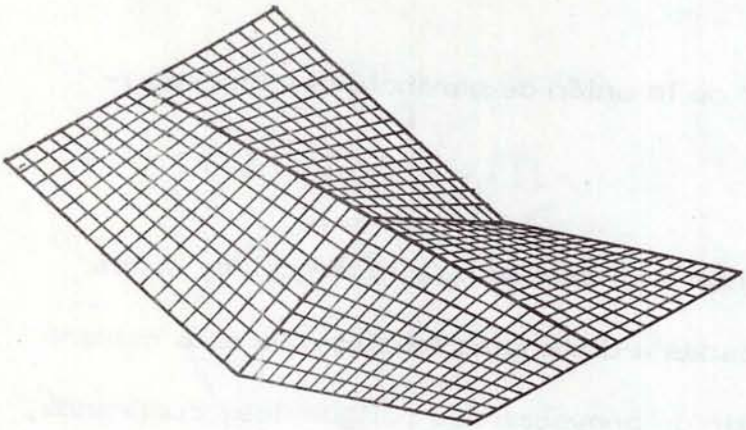
Todo cuadrilátero alabeado puede contener a un paraboloide hiperbólico, si los lados opuestos se unen con rectas colocadas a distancias iguales. De esta manera se pueden obtener combinaciones a partir de proyecciones poligonales, cuadrados, rectángulos, rombos, hexágonos, etc. y cada cuadrilátero que de ellos se derive, permite la formación de grupos de paraboloides.

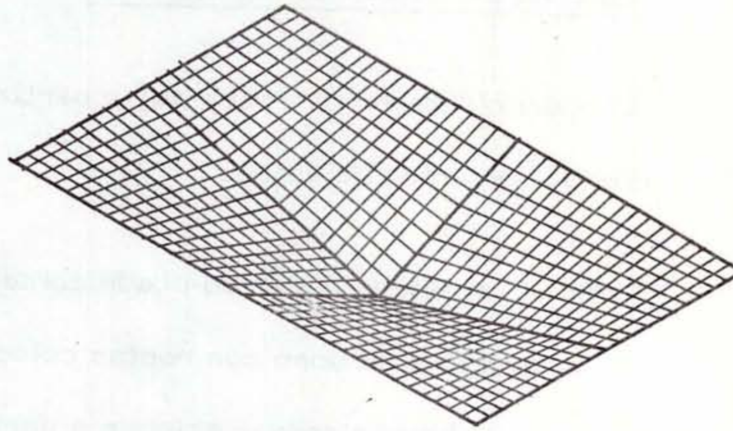
También se pueden formar estructuras a partir de la unión de paraboloides hiperbólicos seccionados por planos; las curvas que resultan pueden ser parábolas o hipérbolas y se pueden ir combinando en formas tan complejas como se quiera.

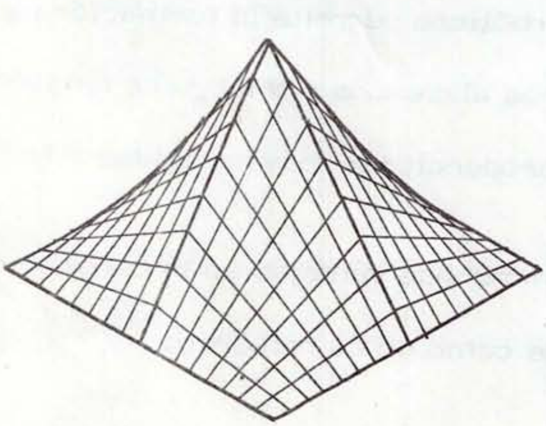
La doble generación de los paraboloides hiperbólicos permite la formación de estructuras reticulares a base de cuadriláteros alabeados o triángulos derivados de la división de dichos cuadriláteros y que proporcionan mayor rigidez a la forma.

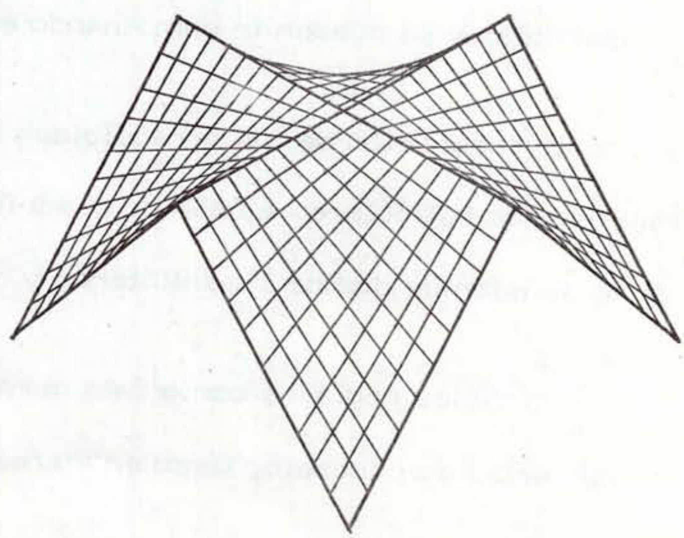
Las superficies regladas como ésta permiten muchas ventajas en la construcción de cubiertas de concreto, tanto en su moldaje como en su refuerzo.

AGRUPACIONES DE PARABOLOIDES HIPERBOLICOS









CONOIDES

Los conoides son superficies regladas alabeadas, que se generan por el movimiento de una recta que se apoya constantemente en otra recta o en una curva y se mantiene paralela a un plano director.

Conocida una curva y una recta cualquiera, se puede apoyar una recta generatriz sobre éstas conservándose paralela a un plano director, como puede ser un plano horizontal. Se divide en partes iguales la recta directriz y por éstas divisiones se pasan rectas generatrices horizontales, hasta cortar a la directriz curva. La continuidad de las generatrices permite apreciar la conoide.

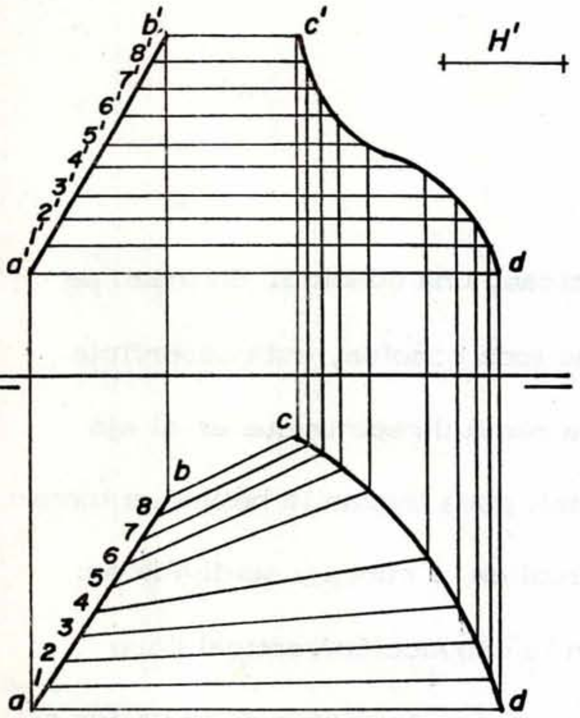
Se pueden trazar otras conoides simétricas a partir de una recta, una curva y un plano director bajo ciertas condiciones, por ejemplo, una recta vertical, una circunferencia y un plano director horizontal; o bien una recta fronto-horizontal, una circunferencia y un plano director de perfil.

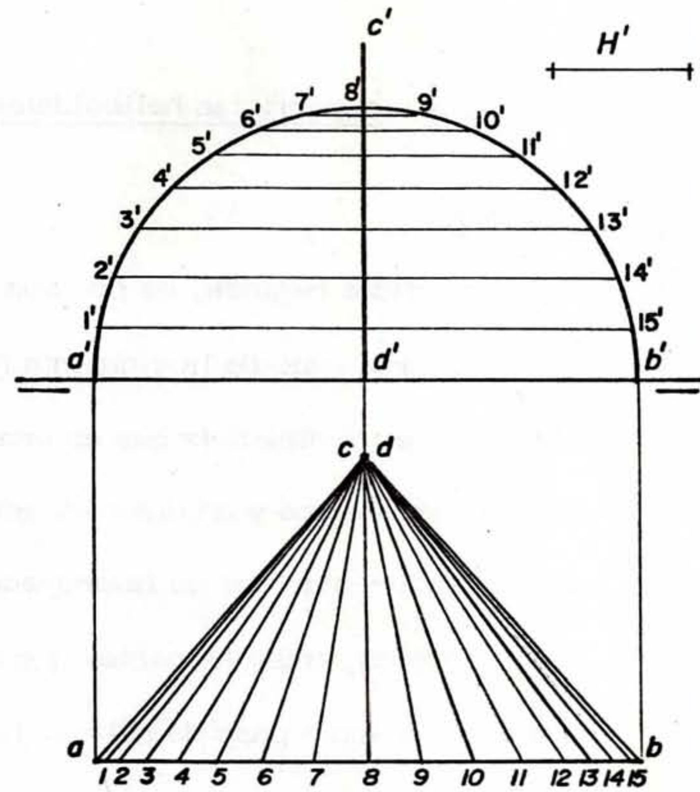
En todos los casos de conoides al prolongar las generatrices más allá de la directriz recta forman el otro manto de la superficie. Los dos mantos de toda conoide están separados por la directriz recta, que recibe el nombre de arista de retroceso.

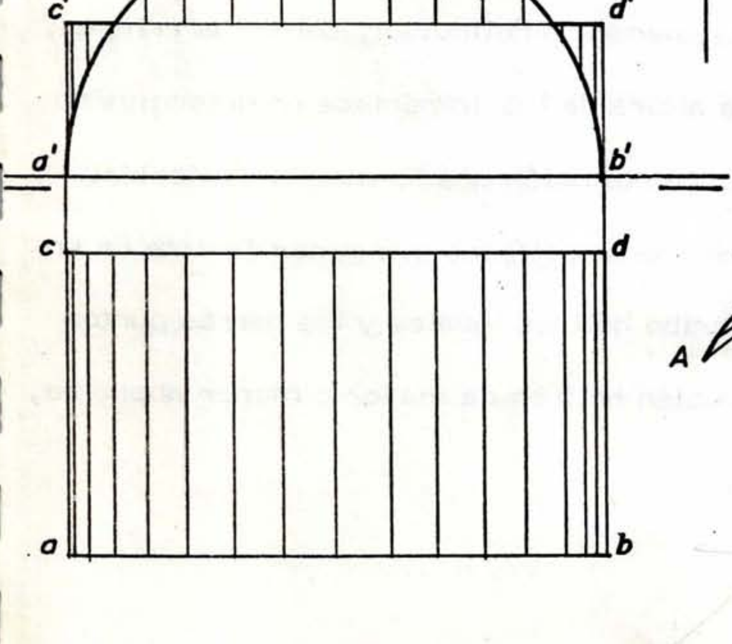
Ocasionalmente la forma de la superficie conoide no es apreciable con facilidad con sus proyecciones o su montea simple; es conveniente en estos casos hacer una perspectiva de la superficie indicando todas las directrices y el mayor número de generatrices.

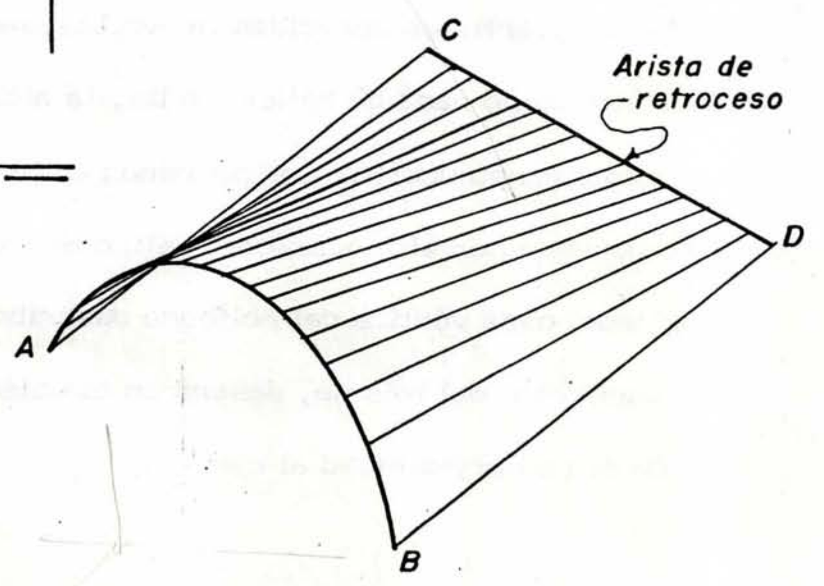
Las secciones planas efectuadas a estas superficies son fáciles de determinar si previamente se numeran las rectas generatrices.

CONOIDES


b'
c'
H'
8'
7'
6'
5'
4'
3'
2'
1'
a'
d
c
b
8
7
6
5
4
3
2
1
a
d


c'
H'
8'
7'
9'
6'
10'
5'
11'
4'
12'
3'
13'
2'
14'
1'
15'
a'
d'
b'
c d
a
b
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15


p'
c'
d'
a'
b'
c
d
a
b


C
Arista de retroceso
D
A
B

Helicoides y superficies helicoidales

Helicoide

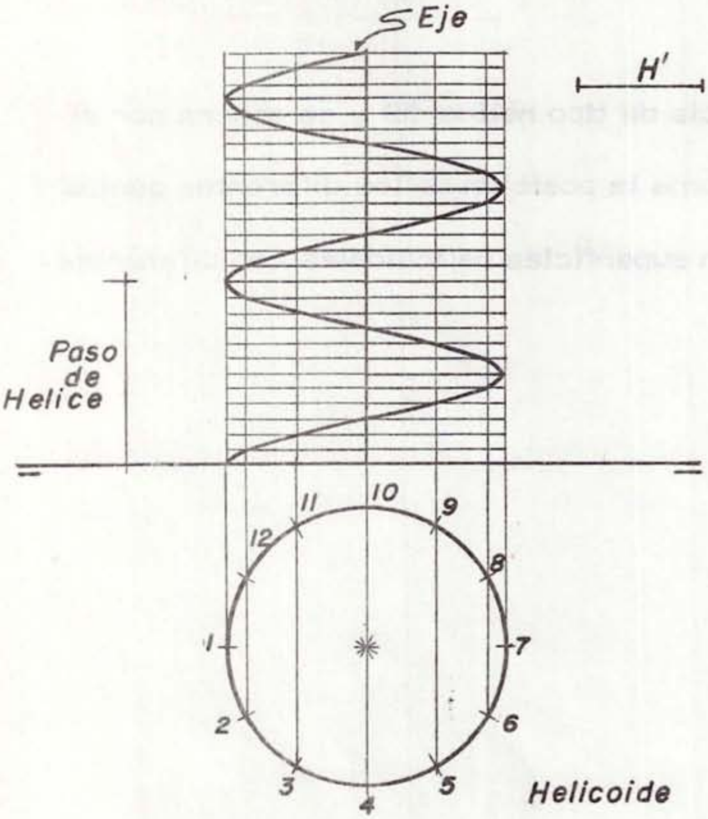
Esta superficie reglada, es por sus características, una conoide. Su trazo se puede llevar a cabo de la siguiente forma: Como toda conoide, esta superficie tiene una curva directriz que es una hélice, una recta directriz que es el eje de la misma hélice y un plano director horizontal; para trazar la hélice se toma una circunferencia que es la proyección horizontal de la curva y se divide en partes iguales, mismas partes que se toman en la proyección vertical para obtener un paso o paso de hélice. Las rectas generatrices parten de la hélice al eje de ésta y se conservan todas horizontales. Si las generatrices se prolongan más allá del eje se forma el otro manto de la superficie.

Superficies helicoidales

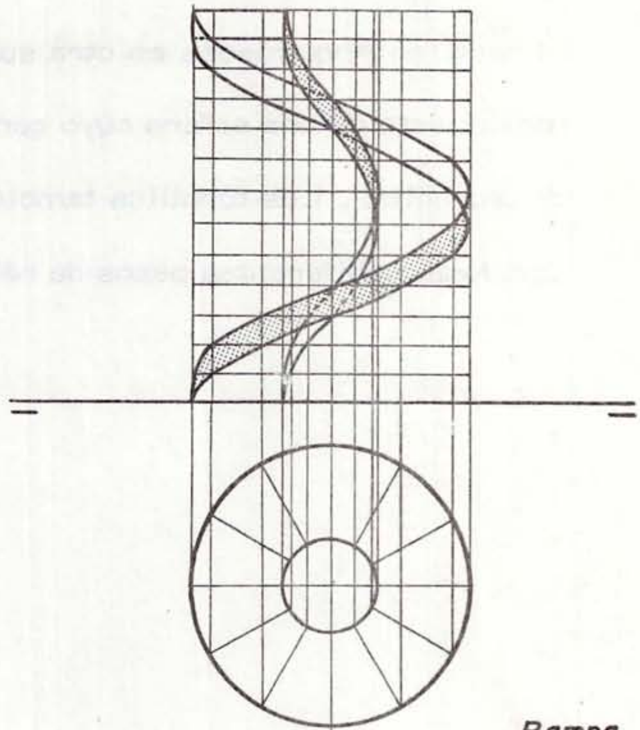
Algunas superficies conocidas tienen la generación helicoidal, como las rampas, que tienen como paso de hélice límite, la altura de los entrepisos en determinado edificio o construcción. Los barrenos tienen también una formación helicoidal y se generan por el movimiento helicoidal de un polígono que generalmente es un cuadrado; cada vértice del polígono describe hélices iguales y los demás puntos del perímetro del mismo, describen también hélices de mayor o menor abertura, según sea su proximidad al eje.

La canal de Arquímedes es otra superficie de tipo helicoidal y se genera por el movimiento de una esfera cuyo centro toma la posición de los diferentes puntos de una hélice. Los tornillos también son superficies helicoidales con diferentes secciones y diferentes pasos de hélice.

SUPERFICIES HELICOIDALES

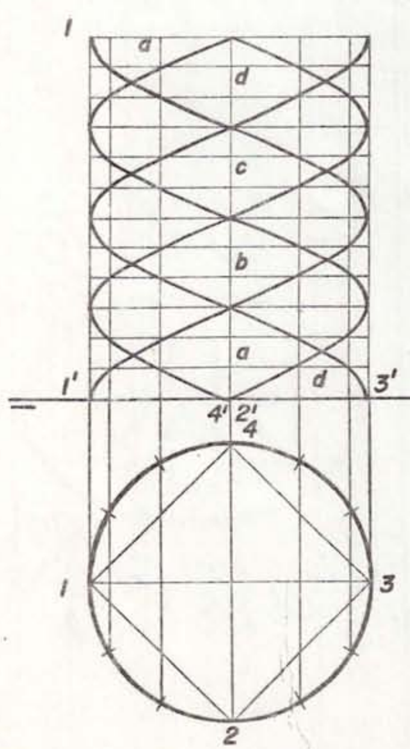


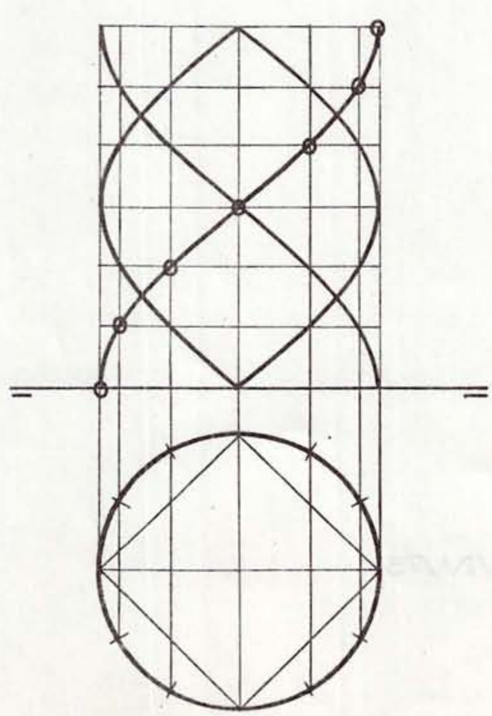
Helicoide



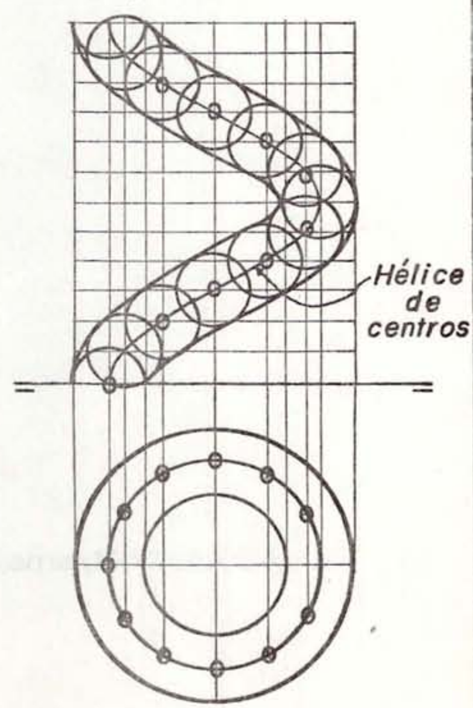
Rampa

Barreno





Serpentín de
Arquímedes



Cilindroides

Los cilindroides son superficies regladas que se forman por el movimiento de una recta que se apoya en dos directrices curvas y se conservan paralelas a un plano director.

Un ejemplo de cilindroide es el formado por media circunferencia y media elipse con mismas alturas que representan las directrices curvas, y un plano director horizontal; todas las generatrices rectas son por lo tanto horizontales y se apoyan en las dos curvas.

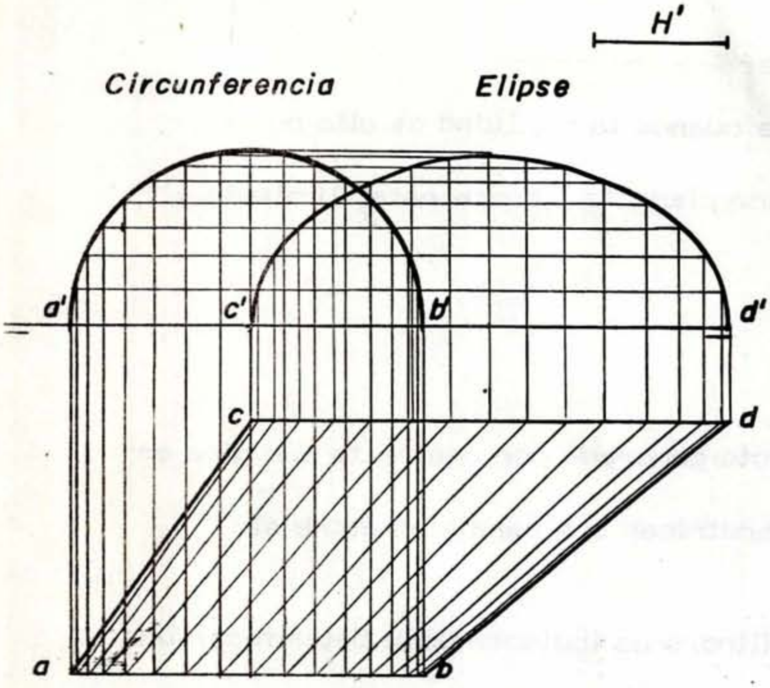
Otro caso de cilindroide podrá ser el que tiene como directrices curvas a dos circunferencias, pero contenidas en planos perpendiculares y no paralelos y con un plano director horizontal; las generatrices cumplen las condiciones de este tipo de regladas.

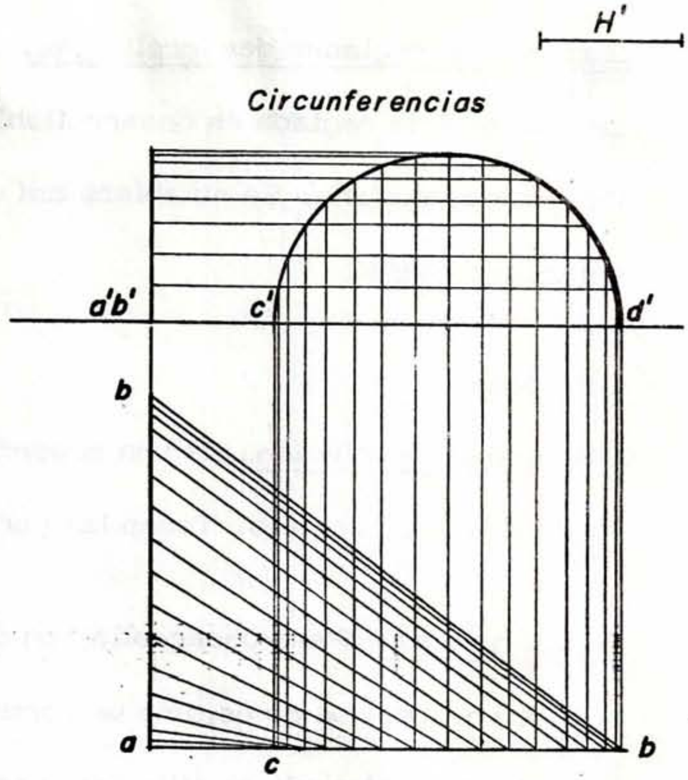
Otras regladas alabeadas

Se pueden generar infinidad de superficies regladas estableciendo determinadas leyes o condiciones. Una reglada muy conocida es la llamada Lazo Doble, que se obtiene con dos directrices curvas, circunferencias y una recta directriz de punta; las generatrices se apoyan en las 3. Otra superficie es la denominada Ala u hoja simple y se genera por una recta que se apoya en curvas opuestas y se mantiene paralela a un plano director.

Es conveniente en todos los casos numerar a las generatrices para facilitar el movimiento de las superficies, de sus proyecciones o de sus posibles secciones planas.

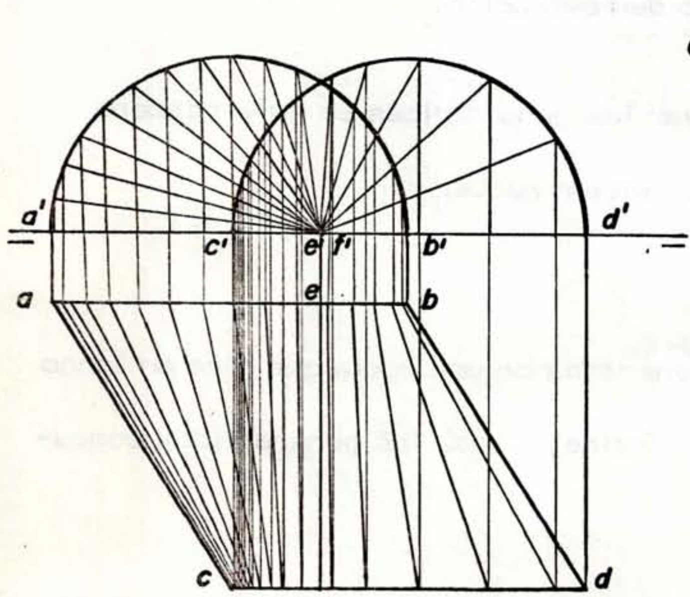
CILINDROIDES



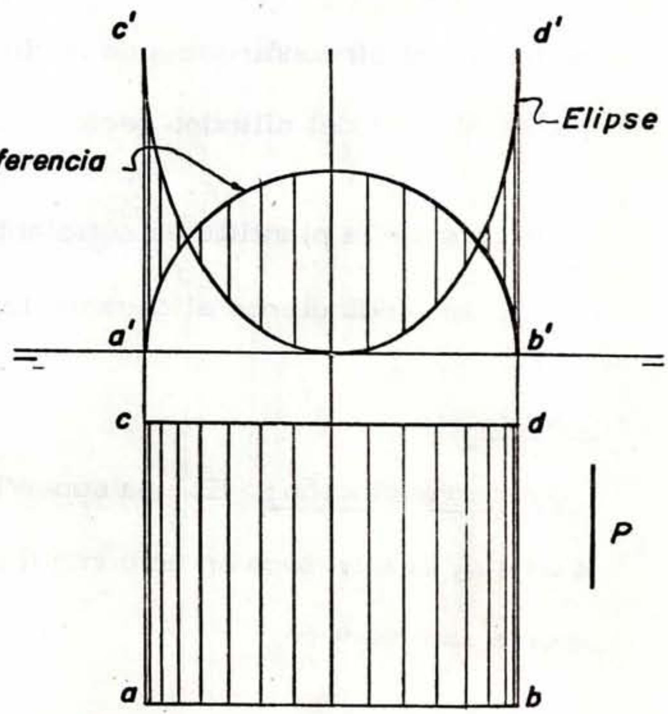


Cilindroide

Otra reglada



Lazo doble



Hoja simple

Superficies regladas desarrollables.

Una superficie reglada es desarrollable cuando la totalidad de ella puede llevarse a un plano. Se establece así una plantilla y puede estar limitada y ser cuantificada.

Cilindros

Cilindro de revolución: Es una superficie generada por una recta que gira en torno a un eje paralelo. Todas las generatrices son paralelas entre sí.

Sección recta: Para desarrollar un cilindro es indispensable determinar una sección recta, que no es,sino un corte plano perpendicular a las generatrices del cilindro. Al abrir el cilindro la sección recta queda desarrollada en una línea recta, cuya longitud es el perímetro del corte obtenido. Si la sección recta es una circunferencia de radio r, el perímetro será igual a $2 \pi r$, que es el caso del cilindro recto o cilindro de revolución.

Para obtener la plantilla es suficiente llevar las generatrices en su verdadera forma,perpendiculares al desarrollo de la sección recta.

Conos

Cono de revolución: Es una superficie generada por una recta que gira en torno a un eje, al cual toca en un punto llamado vértice. Todas las generatrices concurren a este vértice.

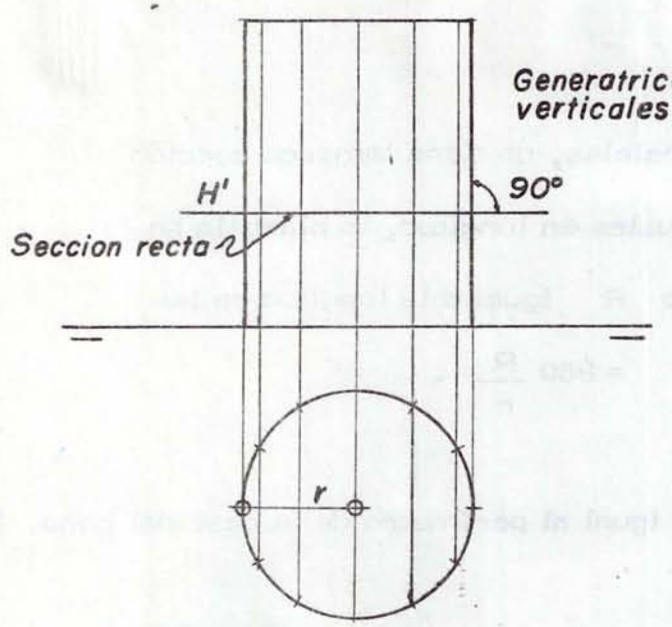
Desarrollo

En un cono, al no tener sus generatrices paralelas, no tiene tampoco sección recta, pero si todas sus generatrices son iguales en longitud, la plantilla se formará con un segmento de círculo de radio R igual a la longitud de las generatrices y con un ángulo en el vértice $= 360 \frac{R}{r}$.

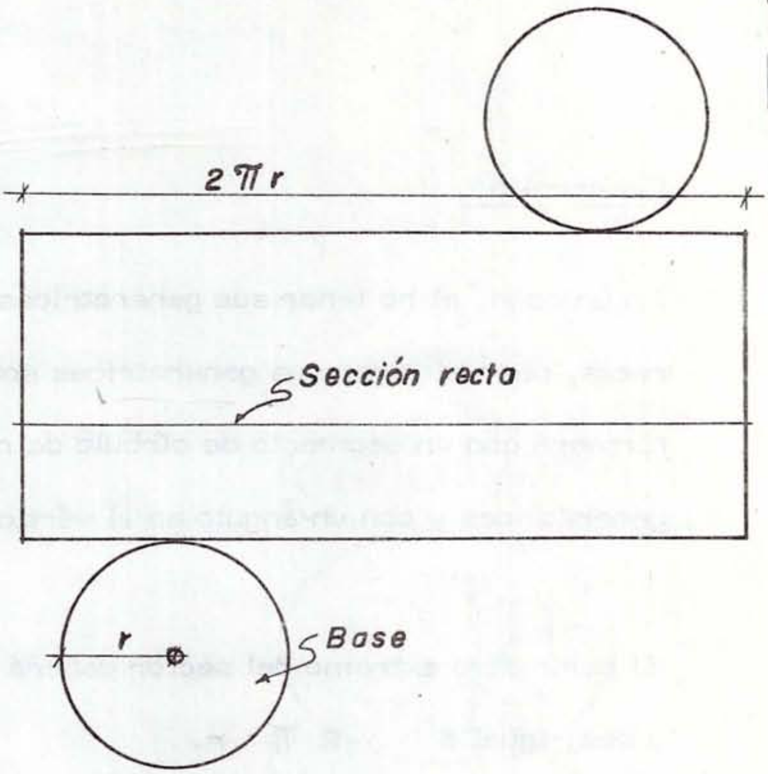
El perímetro extremo del sector deberá ser igual al perímetro de la base del cono, o sea, igual a $2 \pi r$.

SUPERFICIES REGLADAS DESARROLLABLES

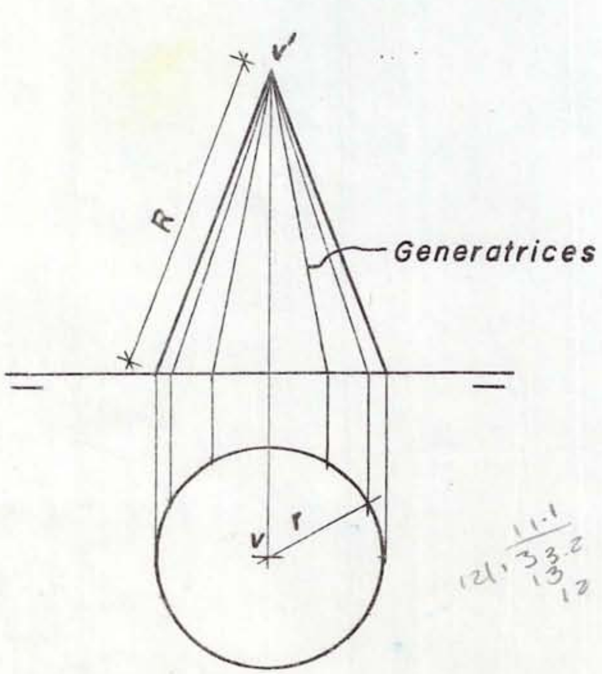
CILINDROS Y CONOS



Cilindro recto



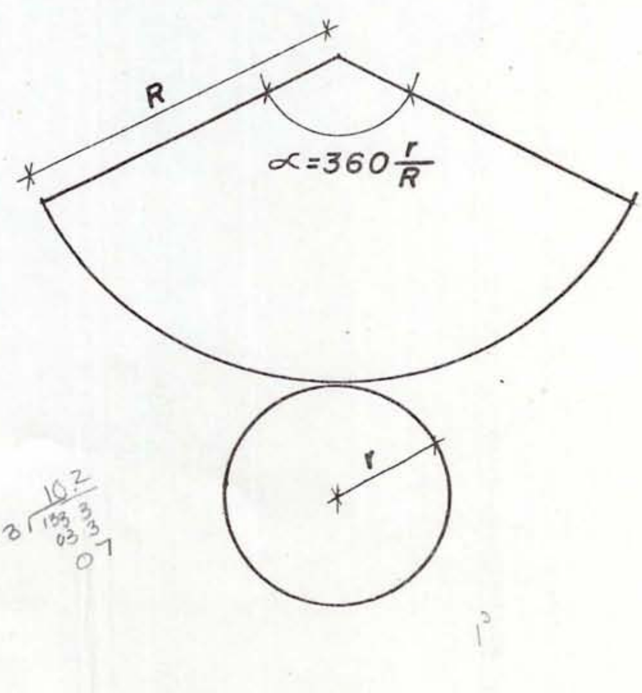
Desarrollo y Plantilla



11.1
121|33.2
13
12

10.2
13|133.3
03.3
07

Cono recto



Desarrollo

Superficies regladas desarrollables

Cilindro oblicuo

Un cilindro oblicuo es un cilindro irregular, cuya sección recta no es circunferencia, pero donde todas las generaciones son entre sí paralelas.

Desarrollo

Para desarrollar un cilindro oblicuo, se determina la sección recta, o sea el corte plano perpendicular a las generatrices, si las generatrices tienen ya una posición frontal, la sección plana se obtiene por el corte perpendicular de un plano de canto, pero si las generatrices del cilindro tienen posición cualquiera, se tendrán que llevar a posición frontal, por medio de un giro o una substitución de planos de proyección.

Para definir puntos de la sección recta, es conveniente tomar sobre la base del cilindro puntos sobre los cuales se hagan pasar generatrices paralelas; donde éstas generatrices serán cortadas por el plano de canto, se refieren a la proyección horizontal, obteniéndose así la proyección horizontal de la sección recta, que es una elipse. Para tener la forma real de ésta elipse, se obliga por medio de un giro a llevar al plano de canto a posición horizontal.

Teniendo la elipse en su verdadera magnitud, se toma su perímetro en una línea recta, junto con los puntos de las generatrices numeradas. Se toma la longitud

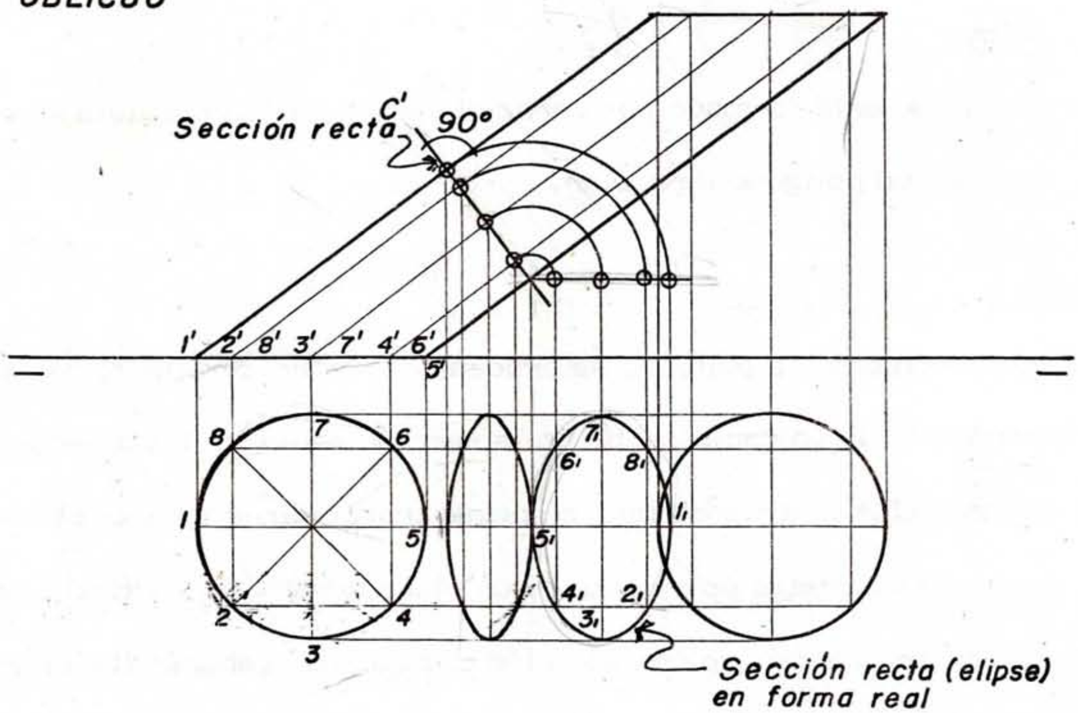
[redacted]

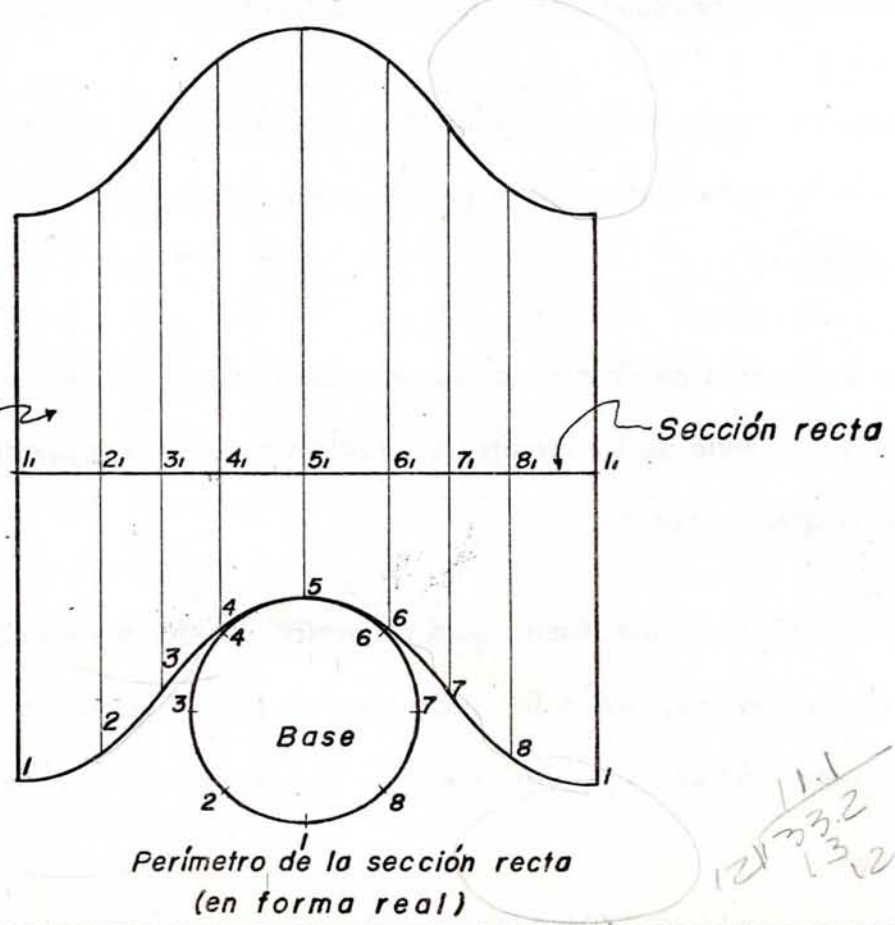
real de dichas generatrices y se trazan perpendiculares en el desarrollo.

La unión ordenada de los puntos extremos definen las curvas correspondientes al perímetro de las bases, es decir, que la longitud total de estas curvas es igual al perímetro de las circunferencias bases del cilindro oblicuo.

SUPERFICIES REGLADAS DESARROLLABLES

CILINDRO OBLICUO





Prisma oblicuo

Un prisma oblicuo está formado por caras planas y aristas paralelas y su sección recta es un polígono irregular.

Desarrollo

Para desarmar un prisma oblicuo, se procede en forma similar al desarrollo de un cilindro oblicuo, o sea,a partir de la sección recta; si las aristas del prisma son frontales u horizontales, se puede trazar directamente el corte perpendicular a las aristas por medio de un plano de canto o vertical, pero en caso de que las aristas tengan una posición cualquiera, deberán llevarse a posición frontal u horizontal por alguno de los procedimientos geométricos conocidos.

La sección recta queda formada por un polígono de tantos lados como caras planas tenga el prisma; así un prisma de cuatro caras, tendrá por sección recta un cuadrilátero.

Para obtener el perímetro de la sección recta se lleva ésta a verdadera magnitud, teniendo cuidado de tomar en los movimientos correspondientes, los alejamientos o las alturas propias.

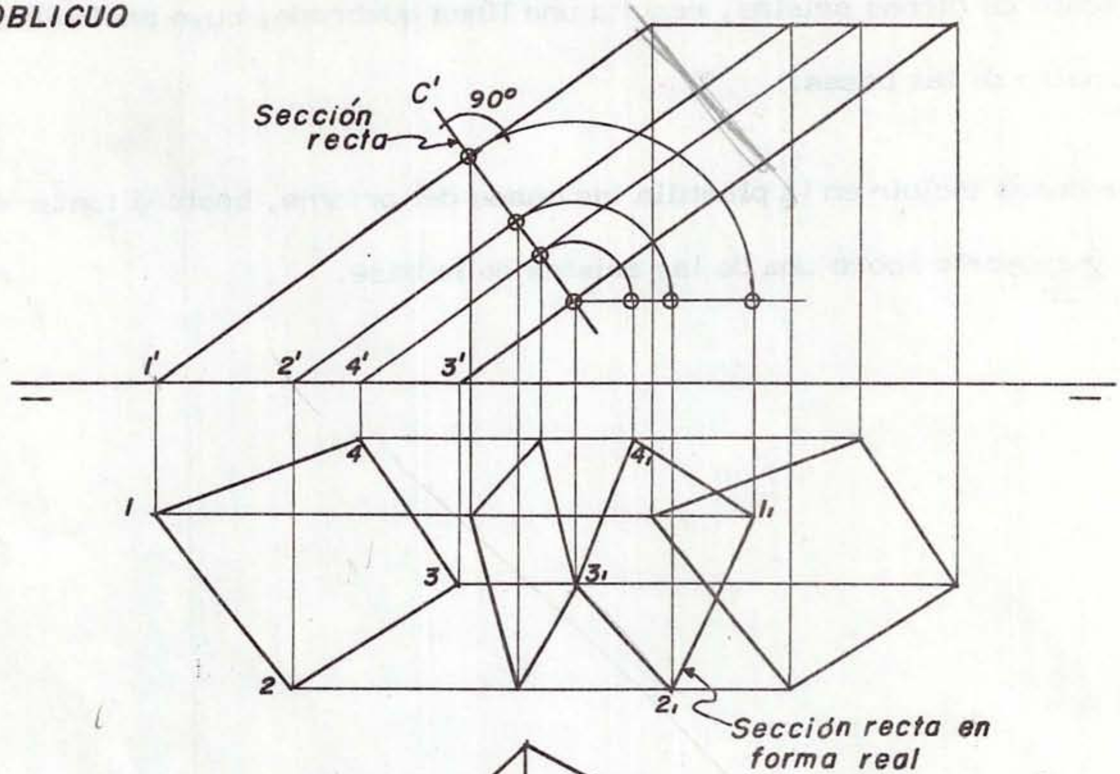
Se desarrolla en una línea recta el perímetro de la sección recta con los vértices correspondientes, sobre los cuales se levantan las perpendiculares, correspondiendo en cada caso, la verdadera forma de las aristas. Al unir los puntos -

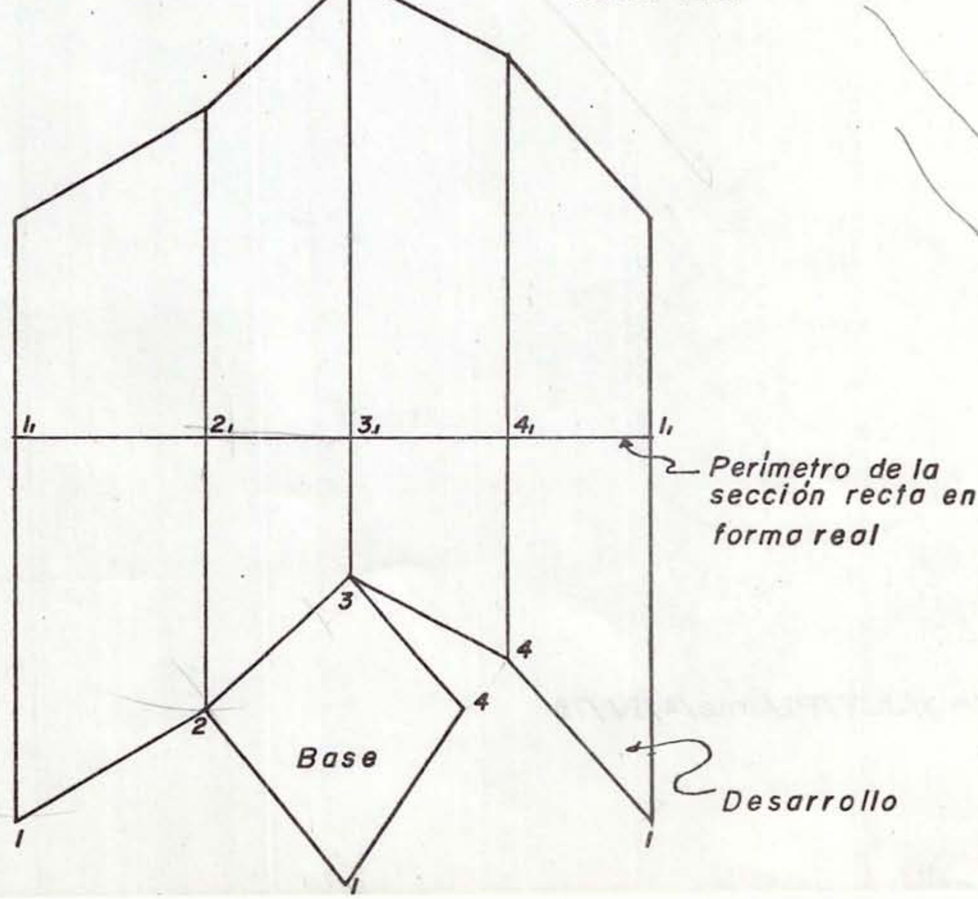
extremos de dichas aristas, resulta una línea quebrada, cuyo perímetro es igual al perímetro de las bases.

Si se desea incluir en la plantilla las bases del prisma, bastará tomar su forma real y apoyarla sobre una de las aristas de la base.

SUPERFICIES REGLADAS DESARROLLABLES

PRISMA OBLICUO





Superficies regladas desarrollables

Pirámide irregular

Una pirámide irregular está formada por caras planas y por aristas que concurren a un vértice. Las caras limitadas forman triángulos de diferentes formas y proporciones.

Desarrollo

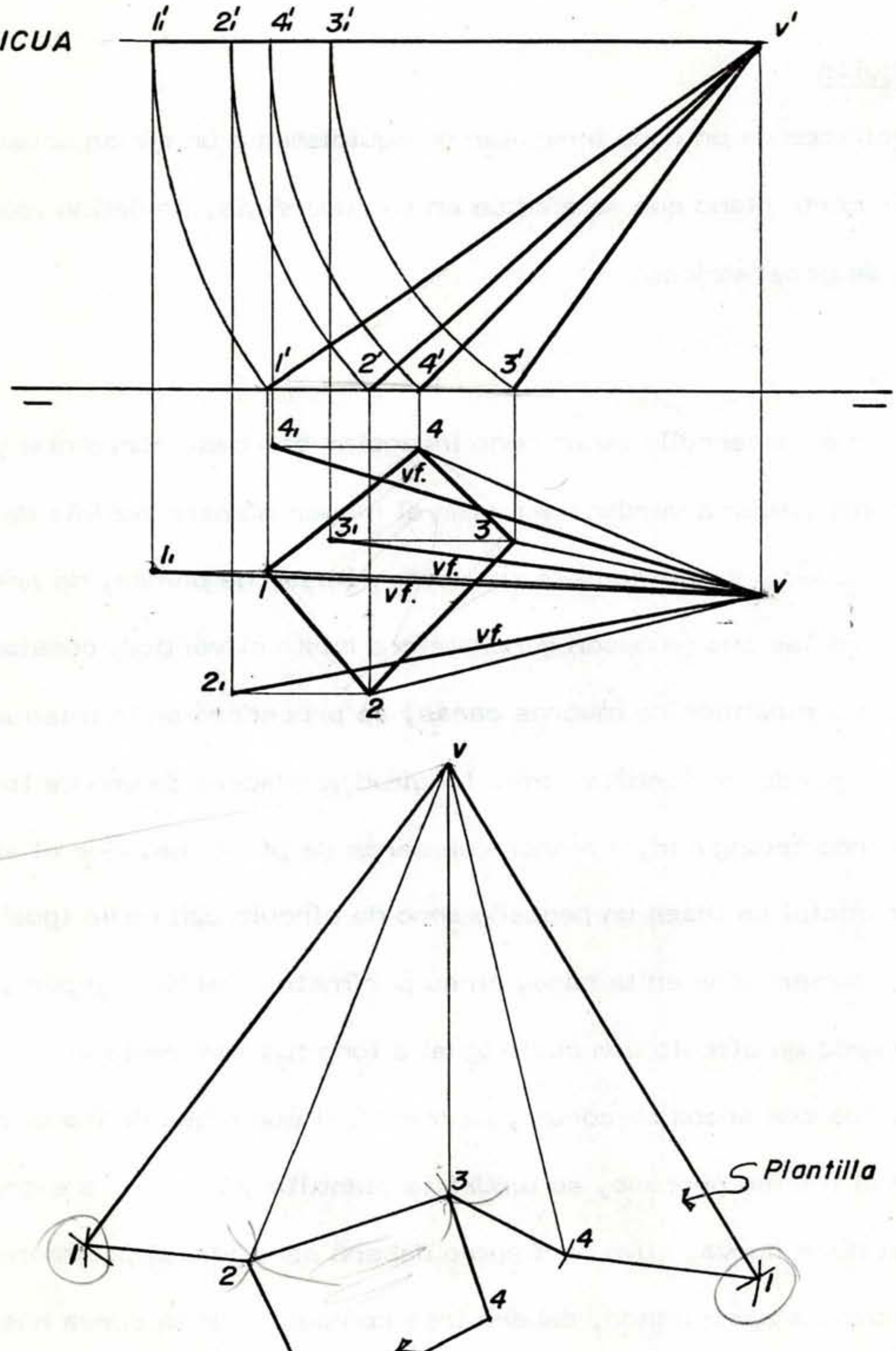
Para desarrollar una pirámide irregular, oblicua, con base horizontal, es necesario llevar todas las caras a forma verdadera, o bien las aristas que las limitan, independientemente unas de otras.

Una forma de tener todas las aristas en su longitud verdadera es girarlas hasta tenerlas en posición horizontal. La plantilla se formará tomando como base una de las aristas en su forma real y triangulando con las aristas de la base, es decir, por el extremo de la arista base, se traza un arco de círculo con radio igual a una arista de la base adyacente; a continuación se traza otro arco de círculo con centro en el vértice de la pirámide en la plantilla y con radio igual a la siguiente arista en forma real; donde se corten los dos arcos de círculo se tendrá un vértice de la base y la cara triangular de la pirámide desarrollada. Para obtener el desarrollo de las siguientes caras y aristas, se podrá seguir el mismo proceso.

La base que es horizontal, tiene proyección de forma verdadera y por lo tanto se puede tomar íntegra en la plantilla, pudiéndose apoyar sobre una de las aristas de la figura.

Un corte horizontal que se efectuará en la pirámide, haciéndola truncada, quedará representado en la plantilla con una línea quebrada, paralela al contorno de las aristas de la base.

PIRAMIDE OBLICUA



Cono irregular

Las generatrices de un cono irregular no equidistan a un eje en especial, y cualquier corte plano que se efectúe en su superficie, no define idénticas longitudes de generatrices.

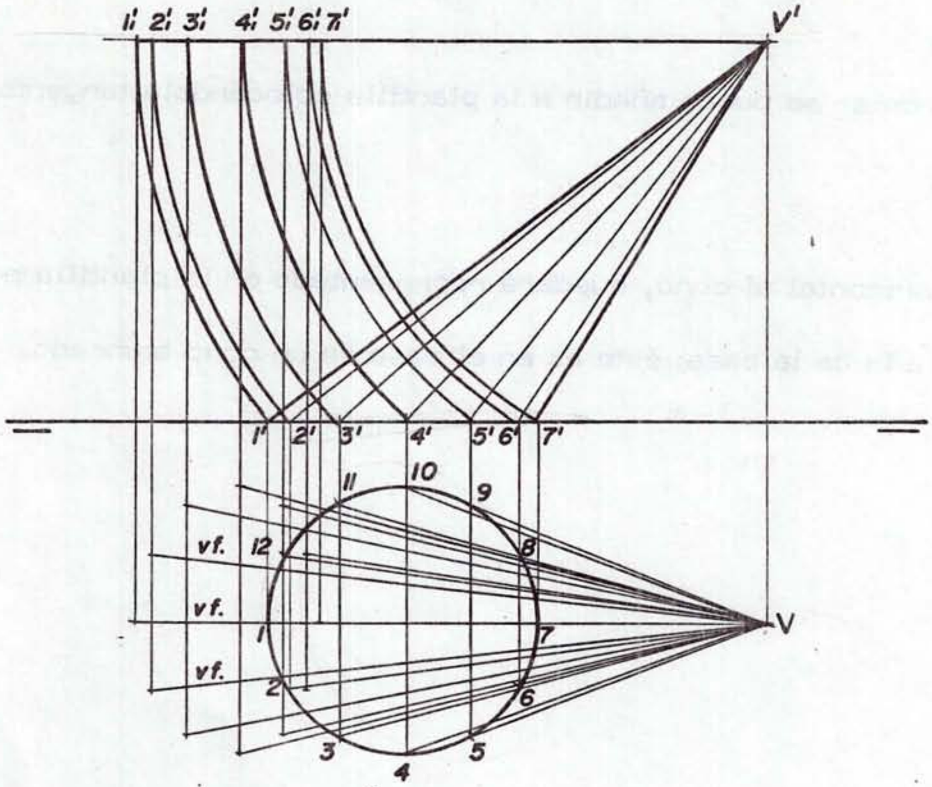
Desarrollo.

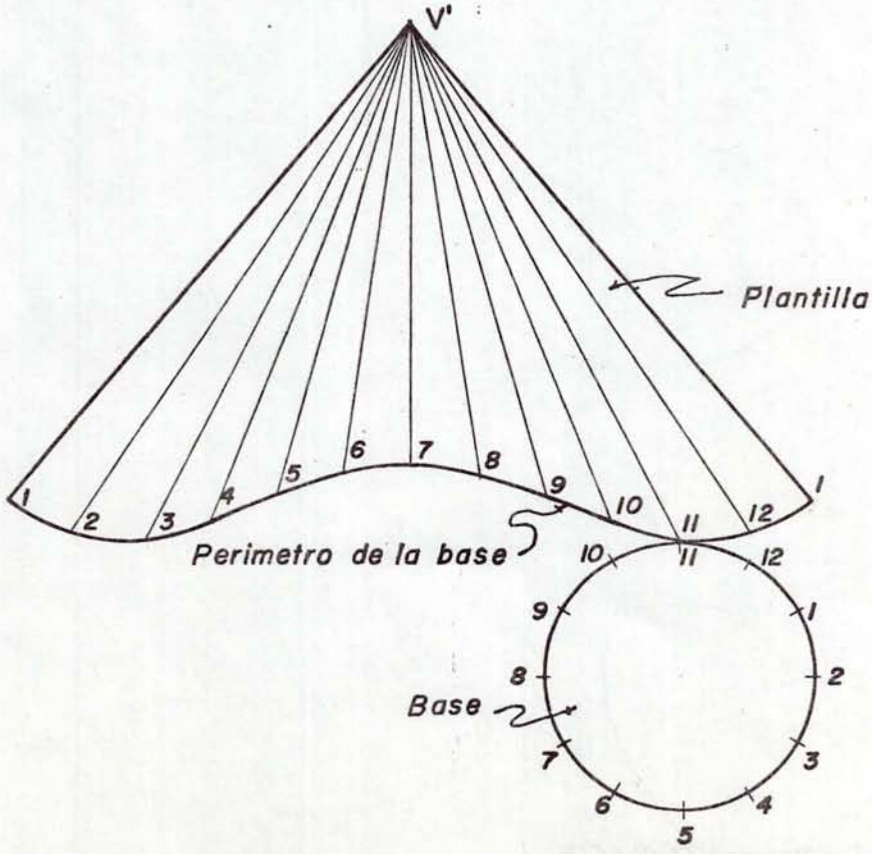
Para obtener el desarrollo de un cono irregular con base horizontal y circular, es conveniente llevar a verdadera forma el mayor número posible de generatrices; para esto se puede dividir la base en cierto número de partes, de preferencia iguales, sobre las que se pasen generatrices hasta el vértice; considerándose el cono como una pirámide de muchas caras, se procederá en la misma forma; es decir, iniciando la plantilla con la longitud verdadera de una de las generatrices y formando triángulos, a manera de caras de pirámide. Por el extremo de la generatríz inicial se traza un pequeño arco de círculo con radio igual a las separaciones marcadas en la base, en su perímetro efectivo, y por el vértice se traza otro arco de círculo con radio igual a longitud real de la siguiente generatriz; donde los dos arcos se corten, se tendrá el punto que defina el triángulo. Repitiendo el mismo proceso, se tendrá la plantilla y los puntos extremos definen una línea curva, cuyo perímetro deberá ser igual al perímetro de la base. Como el trazo es aproximado, deberá irse compensando la curva hasta que la longitud total de los perímetros coincida.

La base circular se puede añadir a la plantilla colocándola tangente a la curva de la base.

Un corte horizontal al cono, quedará representado en la plantilla por una curva semejante a la de la base; éste es en el caso de un cono truncado.

CONO OBLICUO





Superficies de revolución

Las superficies de revolución se generan por el movimiento de una línea recta o curva que gira en torno a un eje.

Esfera

La esfera se puede considerar como la superficie generada por la rotación de un círculo en torno de uno de sus diámetros.

Supuesto un eje vertical se pueden distinguir algunos elementos de su superficie:

Ecuador:	Es el círculo máximo perpendicular al eje de rotación
Meridiano:	Es todo círculo máximo que contiene al eje de rotación
Paralelo:	Es todo círculo paralelo al ecuador
Polos:	Son los puntos extremos sobre el eje de revolución.

Secciones planas

Al cortar a una esfera por un plano, la figura que se produce es un círculo. Si el plano que la corta es horizontal, el círculo de intersección es de forma real, pero si es oblicuo, el círculo se proyecta como elipse.

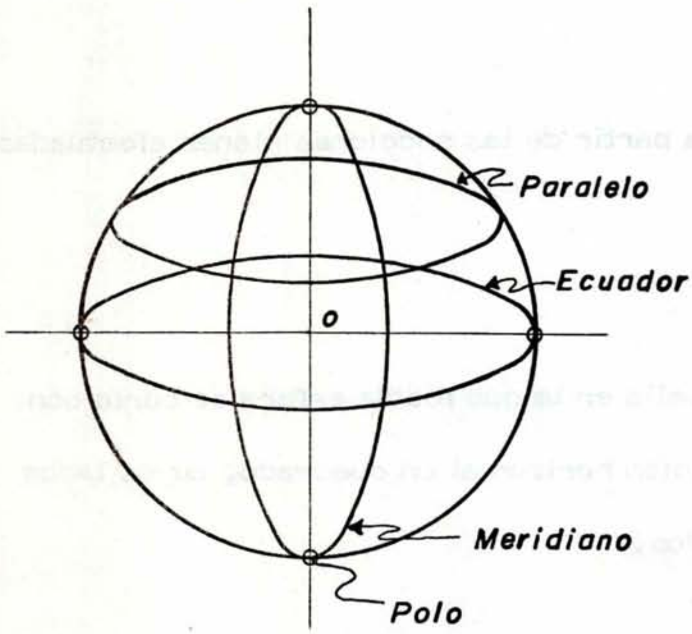
Sección con plano de canto

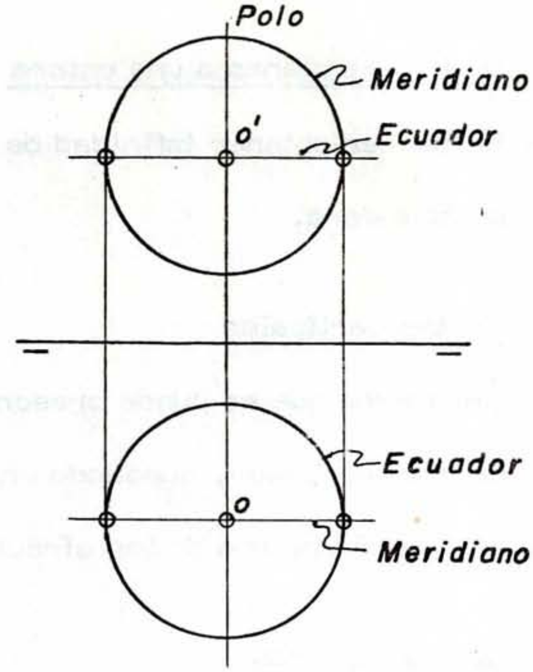
El círculo oblícuo que se forma se proyecta al plano horizontal como una elipse, y para encontrar sus diámetros o ejes principales, se toma el centro del círculo de intersección sobre el cual pasan dos diámetros de posición particular; uno de punta, que en proyección horizontal es de forma real y determina el eje principal mayor de la elipse y otro diámetro frontal, que en proyección vertical es de forma real y determina el eje principal menor en la proyección horizontal. Obtenidos los ejes principales de la elipse, se traza ésta por cualquier procedimiento conocido.

Si la sección buscada es a partir de un plano cualquiera, deberá llevarse éste junto con la esfera a posición de canto para seguir el procedimiento anterior y posteriormente regresar el movimiento.

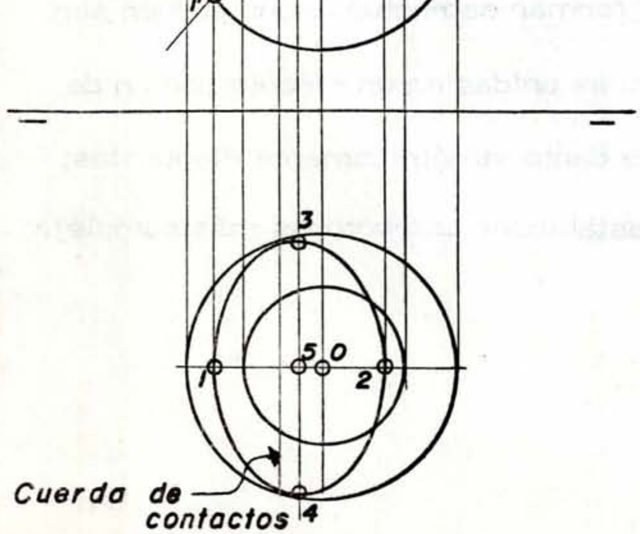
SUPERFICIES DE REVOLUCION

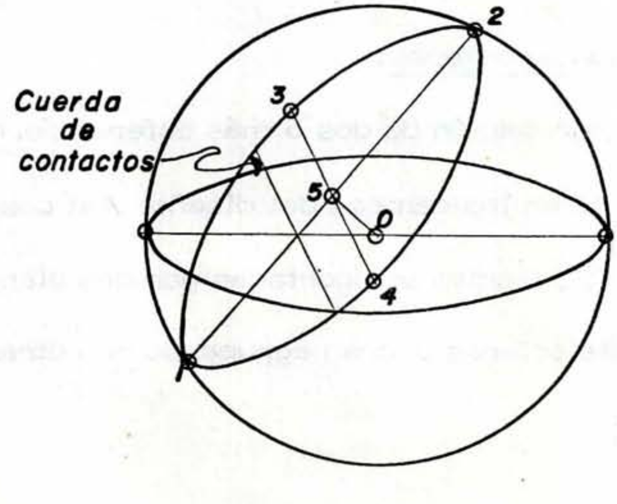
ESFERA





Secciones planas





Secciones planas a una esfera

Se pueden obtener infinidad de formas, a partir de las secciones planas efectuadas a una esfera.

Cortes verticales

Una forma que se puede presentar es aquella en la que media esfera se corta con planos verticales, quedando en la proyección horizontal un cuadrado, cuyos lados son los diámetros de los círculos obtenidos.

Cortes de canto

Se pueden obtener cubiertas a partir de cortes de canto efectuados en la esfera. La proyección horizontal de éstos cortes son elipses o segmentos de elipses, y para su trazo se recurre al proceso anteriormente señalado. Igualmente pueden realizar cortes de canto, combinados con cortes verticales o frontales.

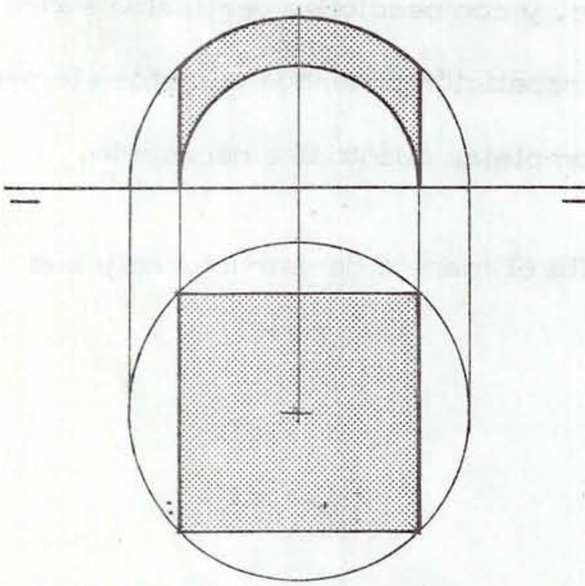
Unión de esferas.

La agrupación de dos o más esferas permite formar estructuras que pueden ser útiles en los campos del diseño. Así dos esferas unidas en un círculo común de perfil, pueden ser cortadas por dos planos de canto simétricamente dispuestas; estas esferas podrán agruparse con otras y establecer estructuras más complejas.

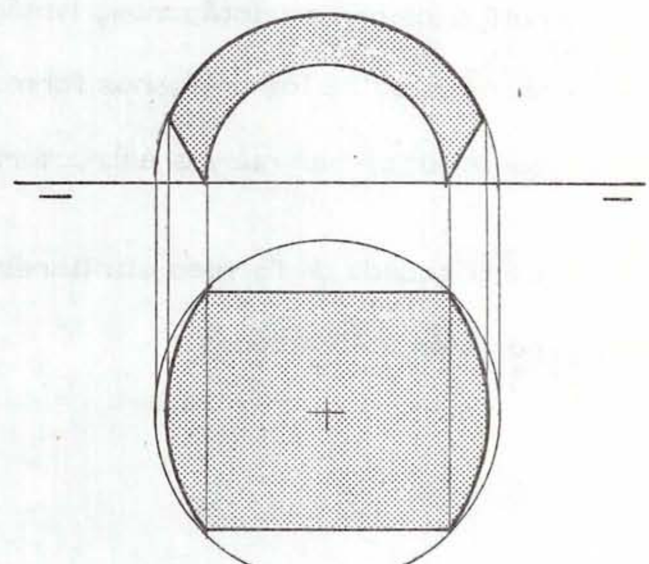
Se puede partir de la proyección horizontal de medias esferas, formando polígonos como pentágonos, hexágonos, etc. y con secciones verticales sobre las aristas de los polígonos formados. La repetición ordenada de éstos elementos permite formar nuevas estructuras, tan complejas cuanto sea necesario.

La búsqueda de formas similares desarrolla el manejo de estructuras y sus posibles aplicaciones.

SECCIONES PLANAS A UNA ESFERA

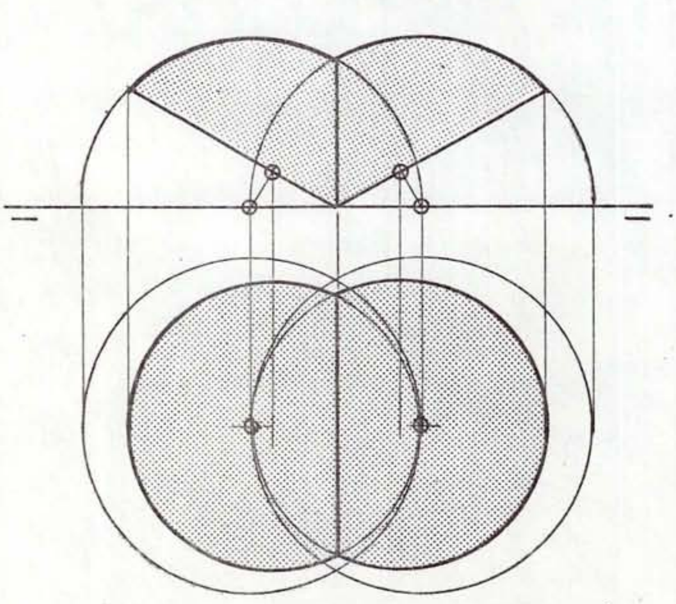


Cortes verticales

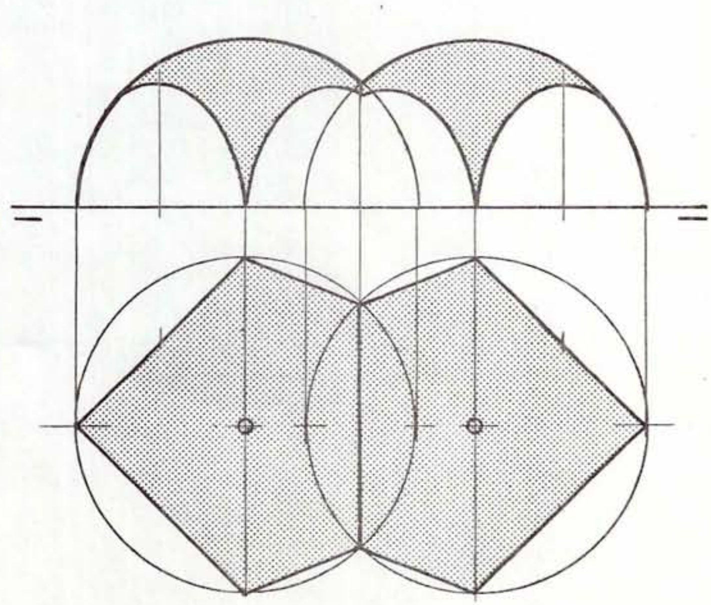


Cortes de canto y verticales

Unión y cortes de canto



Unión y cortes verticales



Superficies de revolución

Algunas superficies de revolución se obtienen por la rotación de curvas cónicas en torno a ejes definidos.

Elipsoide de revolución

Se obtiene por la rotación de una elipse en torno de uno de sus ejes principales; si el eje de rotación es el eje principal , mayor o focal, el elipsoide es peraltado y si el eje de rotación es el eje principal menor, el elipsoide es rebajado.

Paraboloide de revolución

Se genera por la rotación de una parábola alrededor de su eje principal o focal. Su proyección horizontal es circular.

Hiperboloide de revolución de un manto

Es la superficie que se forma por la rotación de una hipérbola en torno a su eje transversal o secundario. Es también esta superficie una reglada y también se puede obtener por la rotación de una recta oblicua al rededor de un eje al cual no llega a cortar.

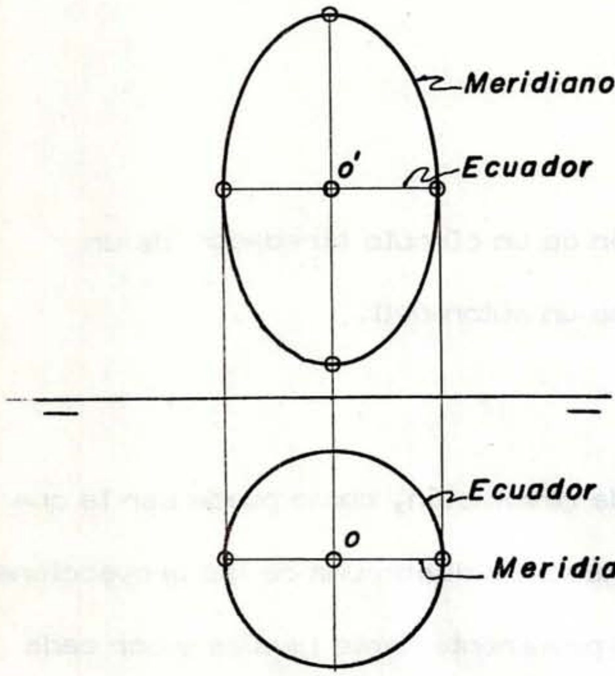
La parte angosta o círculo mínimo se llama garganta o cuello.

Hiperboloide de revolución de dos mantos

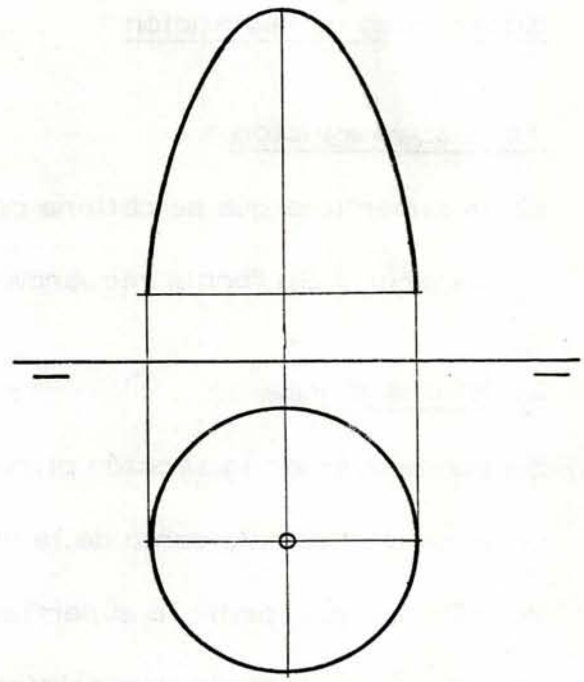
Se obtiene por la rotación de una hipérbola alrededor de su eje principal o focal. Se forman dos mantos que simulan las puntas de dos balas encontradas.

Para obtener secciones planas de estas superficies, es conveniente trazar generatrices circulares sobre las que se pueden obtener puntos definidos de intersección.

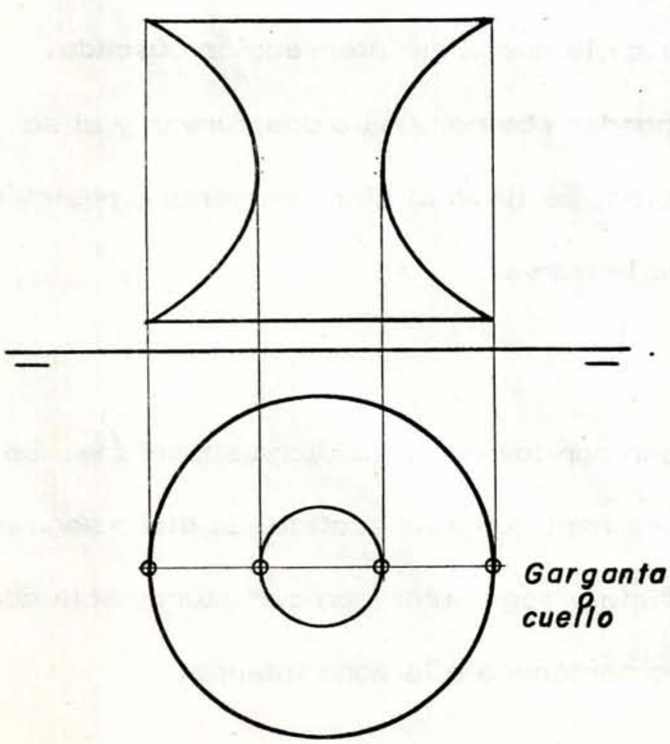
SUPERFICIES DE REVOLUCION



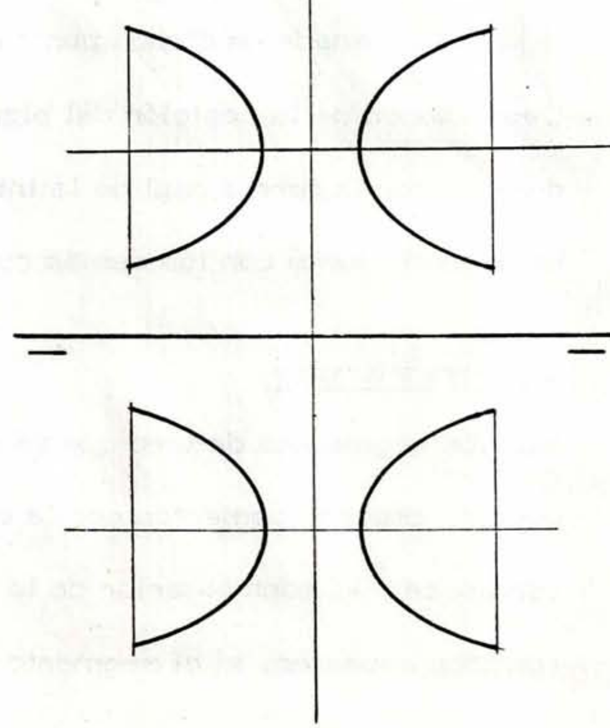
Elipsoide de revolución



Paraboloide de revolución



Hiperboloide de revolución de un manto



Hiperboloide de revolución de dos mantos

Superficies de revolución

Toro de revolución

Es la superficie que se obtiene por la rotación de un círculo alrededor de un eje exterior. Su forma recuerda a la llanta de un automóvil.

Secciones planas

Se puede obtener la sección plana a un toro de revolución, como puede ser la que produce un plano de canto de la siguiente manera: se divide una de las proyecciones del círculo que forma la superficie en partes preferentemente iguales y por cada una de éstas se pasan generatrices circulares, cuyo diámetro varía según sea su proximidad al eje de rotación. En la proyección vertical el corte de canto define los puntos de intersección con las generatrices circulares horizontales y la unión ordenada de dichos puntos, produce la curva de intersección buscada. Dependiendo de la posición del plano se pueden obtener una o dos curvas y si se desea tener la forma real de la intersección, se lleva el plano de canto a posición horizontal, junto con los demás puntos de la curva.

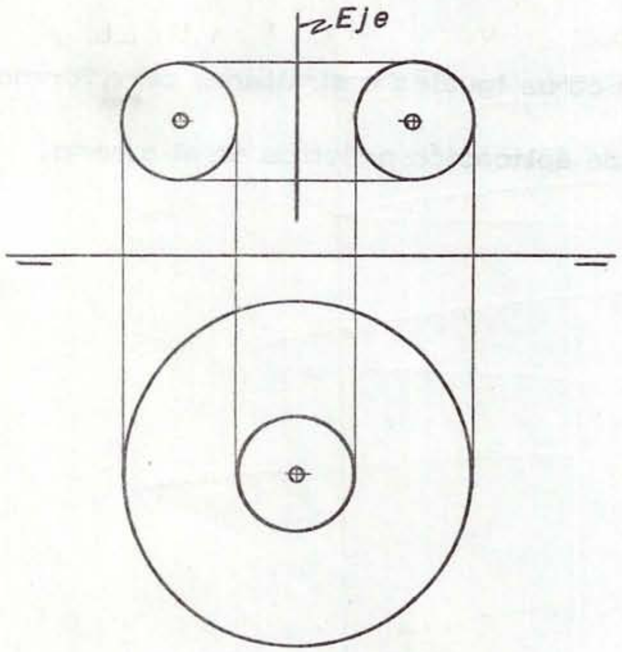
Secciones torales

Son los segmentos de toro que se producen por los cortes a dicha superficie. Se pueden obtener segmentos con la curvatura hacia un sólo sentido, si dicho segmento pertenece a la zona exterior de la superficie y segmentos con curvatura hacia dos sentidos opuestos, si el segmento de toro pertenece a la zona interna.

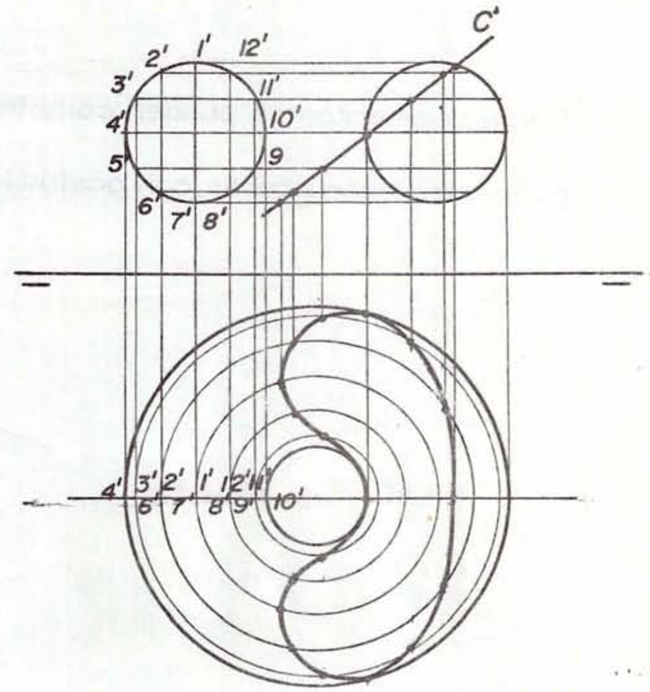
Estos segmentos se pueden combinar con otros iguales o similares para formar diferentes estructuras con posibilidades de aplicación práctica en el diseño.

SUPERFICIES DE REVOLUCION

Toro de revolución

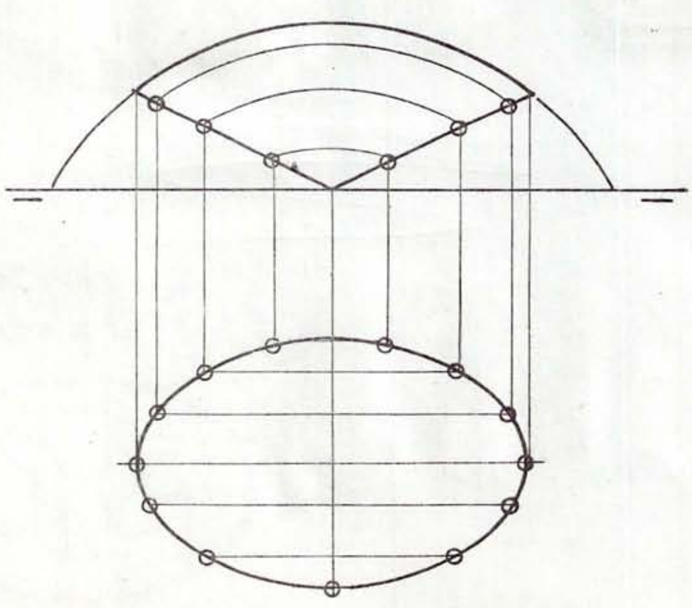


Corte de canto

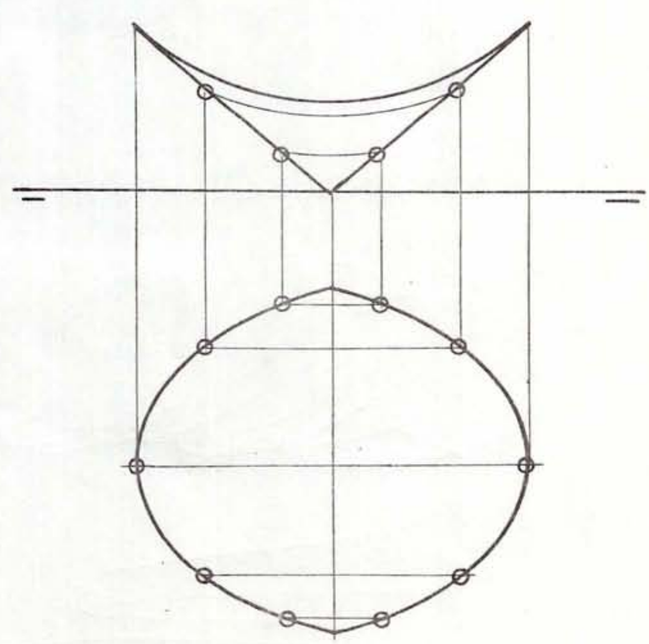


SECCIONES TORICAS

Secciones externas



Secciones internas



GEOMETRIA II

BIBLIOGRAFIA

JOEDICKE, Jurgen. Shell Architecture. Londres, Alec Tiranti. Ltd., 1962.

FAVER, Colin. Las estructuras de candela. México, CECSA. 1970.

CATALANO, E.F. Las superficies alabeadas. Buenos Aires, -- EUDEBA, 1962.

TORRE, Miguel de la. Geometría descriptiva. 2a. ed. México, UNAM, 1975.

SLABY, Steve M. Geometría tridimensional. 2a. ed. México, Publicaciones Culturales, 1975.