



Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
POSGRADO EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL

**DETERMINACIÓN DE RECOMENDACIONES DE
DISEÑO DE LOSAS DE VIGUETA Y BOVEDILLA
Y LOSAS MACIZAS DE CONCRETO
REFORZADO SUJETAS A VIBRACIÓN**

TESIS DOCTORAL

P R E S E N T A:

OMAR CABALLERO GARATACHEA

Tutor

DR. GELACIO JUÁREZ LUNA

Ciudad de México, México, Enero de 2020

AGRADECIMIENTOS

A Dios.

A mis padres y hermanos.

Al Dr. Gelacio Juárez Luna por el apoyo y la comprensión brindada como director de tesis.

A los miembros del jurado como sinodales, Dr. David Murià Vila, Dr. Luciano R. Fernández Sola, Dr. Manuel E. Ruiz Sandoval Hernández, Dr. Arturo Tena Colunga y Dr. Oscar M. González Cuevas por las valiosas contribuciones realizadas en esta tesis y por el tiempo que dedicaron para revisarlo.

Al Dr. Manuel E. Ruiz Sandoval Hernández por su amable ayuda, comentarios y sugerencias en el ámbito del análisis experimental de estructuras.

Al Dr. Eduardo Arellano Méndez, Dr. Oscar M. González Cuevas y al Ing. Servando Montoya Tinajero por las facilidades otorgadas para la realización de las pruebas experimentales reportadas en este trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico brindado durante la realización de este trabajo, y al área de estructuras de la Universidad Autónoma Metropolitana por ofrecer una educación de calidad que me ha permitido el desarrollo personal y profesional.

CONTENIDO

1	INTRODUCCIÓN	1
1.1	Introducción	1
1.2	Antecedentes	3
1.3	Justificación	43
1.4	Objetivos	44
2	FRECUENCIA NATURAL FUNDAMENTAL DE LOSAS DE CONCRETO REFORZADO EN DOS DIRECCIONES	45
2.1	Introducción	45
2.2	Losa sobre apoyos rígidos	47
2.3	Losas apoyadas en vigas	72
3	ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LA FRECUENCIA NATURAL FUNDAMENTAL EN LOSAS MACIZAS DE CONCRETO REFORZADO EN DOS DIRECCIONES	85
3.1	Introducción	85
3.2	Revisión de los criterios de f_n para evitar vibraciones excesivas en sistemas de piso ante el caminar de personas	85
3.3	Análisis de la frecuencia natural fundamental f_n en losas de concreto reforzado en dos direcciones	87
4	ESTUDIO NUMÉRICO-EXPERIMENTAL DE LOSAS DE VIGUETA Y BOVEDILLA Y LOSA DE CONCRETO REFORZADO EN DOS DIRECCIONES	107
4.1	Introducción	107
4.2	Equipo de medición	108
4.3	Pruebas de vibración en losa de vigueta y bovedilla	111
4.4	Cálculo de la f_n en losas de vigueta y bovedilla	134
4.5	Pruebas de vibración en losa de concreto reforzado	146
5	ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DINÁMICA EN TÉRMINOS DE LA ACELERACIÓN DE LOSAS DE CONCRETO REFORZADO	170
5.1	Introducción	170
5.2	Calibración de frecuencia natural	170
5.3	Datos experimentales	172

5.4	Calibración de carga y respuesta dinámica_____	173
5.5	Calibración de función de carga dinámica para representar el caminar de persona 175	
5.6	Formulación analítica para el cálculo de la aceleración en losas de concreto reforzado en dos direcciones_____	181
5.7	Validación de solución analítica_____	185
5.8	Ejemplo analítico-práctico de evaluación de vibración en losas _____	195
5.9	Metodología de análisis _____	197
5.10	Evaluación de la aceleración máxima en losa de concreto reforzado ante la influencia de sus principales elementos estructurales_____	208
6	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES _____	212
6.1	Introducción _____	212
6.2	Conclusiones_____	212
	REFERENCIAS _____	217
	APÉNDICE _____	224

RESUMEN

El presente trabajo proporciona recomendaciones para el análisis y diseño de sistemas de piso ante vibración vertical debida a actividades humanas. En particular se estudian las losas de concreto reforzado en dos direcciones y las losas de vigueta y bovedilla.

El objetivo principal es desarrollar expresiones prácticas para el cálculo de la frecuencia natural fundamental f_n , y de la aceleración máxima, a_{\max} , de sistemas de piso de concreto reforzado debida a actividades humanas, así como recomendaciones derivadas de modelos numéricos y experimentales. Esto se debe a que, aunque existen especificaciones para el análisis y diseño de sistemas de piso ante vibración debida a actividades humanas, la mayoría tratan los acero o requieren de modelos numéricos complejos para determinar f_n y a_{\max} .

En este trabajo se desarrollan aproximaciones analíticas para el cálculo de la frecuencia natural, así como un estudio sobre su comportamiento en losas de concreto reforzado. Además, se realizó un estudio de la susceptibilidad ante vibraciones excesivas debidas al caminar de personas en losas de concreto reforzado con base en la normatividad existente. Posteriormente, se realizó un estudio numérico-experimental sobre el comportamiento dinámico de losas de concreto reforzado en dos direcciones y de vigueta y bovedilla ante distintos tipos de actividades humanas. También, se evaluaron algunas funciones de carga dinámica, representativa del caminar de personas, así como una metodología para cálculo de la respuesta dinámica en losas de concreto reforzado en dos direcciones.

Con los elementos obtenidos de este trabajo se proporciona una guía para el análisis y diseño de sistemas de piso ante vibración debida a actividades humanas, pues se proporcionan expresiones para determinar la f_n y la a_{\max} de los sistemas de piso, de tal manera que se controlan sus niveles de vibración.

En el desarrollo analítico de este trabajo, los tableros se idealizaron como sistemas de un grado de libertad con lo que se desarrollaron las expresiones para determinar la frecuencia natural fundamental, así como para la obtención de la respuesta dinámica en términos de la aceleración. Por lo que se refiere a la parte experimental se realizaron pruebas de vibración ambiental y forzada utilizando sensores de aceleración en los puntos de amplitud modal máxima; mientras que, en la parte numérica, se realizaron simulaciones de losas modeladas con elementos finitos tipo lámina y viga, donde se utilizó un material homogéneo, elástico e isótropo.

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción

Los sistemas de piso son estructuras que transmiten cargas en su plano y perpendicular a éste. En estructuras de edificación, los sistemas de piso cargan en su plano al transmitir fuerzas inerciales de cada nivel de un edificio hacia sus elementos rigidizantes. Por otra parte, los sistemas de piso cargan perpendicular a su plano al soportar cargas gravitacionales. Dado su uso constante en edificaciones, los sistemas de piso se someten a cargas de dos tipos: estáticas y dinámicas. Las cargas estáticas se caracterizan principalmente por ser de magnitud constante que no depende del tiempo. Por otra parte, las cargas dinámicas se caracterizan por ser dependientes del tiempo, además de ser móviles o inmóviles. Las cargas dinámicas que actúan en un sistema de piso se deben principalmente a dos tipos: maquinaria y actividad humana. La primera se caracteriza por ser móvil o inmóvil, además de que puede tener amplitudes y frecuencias de excitación extremas. Por otra parte, las actividades humanas se caracterizan por dividirse en dos tipos: caminar de una persona y actividad rítmica. La primera se debe al caminar de una persona que se desplaza sobre la superficie del sistema de piso. La segunda, la carga rítmica, se debe a la actividad de un conjunto de personas ya sea de manera móvil o inmóvil sobre la superficie del sistema.

Dependiendo de las características de las cargas mencionadas, se tiene una respuesta determinada del sistema de piso. El estudio de la respuesta máxima se ha realizado principalmente en sistemas de losacero. Sin embargo existen otros sistemas de gran uso como las losas de concreto reforzado donde el análisis ante cargas dinámicas es poco común. Un ejemplo de ello es el considerar sólo el control del desplazamiento máximo en el estado límite de servicio con el objetivo de conservar la integridad estructural en elementos de soporte y evitar incomodidad de los ocupantes ante vibraciones verticales excesivas por cargas dinámicas. Sin embargo, en algunas ocasiones el cumplir con esta condición no es suficiente para evitar incomodidades por vibraciones incómodas en las personas. Por lo anterior, este trabajo tiene como objetivo proporcionar recomendaciones para el análisis y diseño ante vibración vertical de sistemas de piso sometidas tanto al caminar de personas como de algunos tipos de actividades rítmicas, ya que las personas son una de las fuentes de excitación más recurrentes en estas estructuras. Los sistemas de piso que son objeto de este estudio son las losas de vigueta y bovedilla y las losas de concreto reforzado en dos direcciones, como dos de los sistemas más utilizados en México.

El enfoque de este trabajo es analítico, numérico y experimental para el estudio de las principales variables que influyen en la vibración de losas de vigueta y bovedilla y losas macizas de concreto reforzado ante actividades humanas, como lo son la carga dinámica, la frecuencia natural fundamental f_n , la aceleración máxima, a_{\max} y la relación de amortiguamiento ξ . En general, la parte analítica de este trabajo se basa en analizar las losas mediante idealizaciones como sistemas de un grado de libertad con lo que se desarrollaron

expresiones para determinar la frecuencia natural fundamental y la respuesta dinámica en términos de la aceleración, velocidad y desplazamiento en losas macizas de concreto reforzado. Por lo que se refiere a la parte experimental se realizaron pruebas de vibración ambiental y forzada en ambos sistemas: vigueta y bovedilla y macizas de concreto reforzado, utilizando sensores de aceleración en los puntos de amplitud modal máxima; mientras que, en la parte numérica, se realizaron simulaciones de losas macizas de concreto reforzado modeladas con elementos finitos tipo lámina y viga para un análisis de la frecuencia natural fundamental, donde se utilizó un material homogéneo, elástico e isótropo.

En este trabajo se desarrollan aproximaciones analíticas para el cálculo de la frecuencia natural, así como un estudio sobre su comportamiento en losas macizas de concreto reforzado. Además, se realizó un estudio de la susceptibilidad ante vibraciones excesivas debidas al caminar de personas en losas de concreto reforzado con base en la normatividad existente. Posteriormente, se realizó un estudio comparativo entre soluciones analíticas con soluciones numéricas y experimentales sobre el comportamiento dinámico de losas de vigueta y bovedilla y losas de concreto reforzado en dos direcciones ante distintos tipos de actividades humanas. Con base en ello, se calibra una función de carga representativa del caminar de personas y se desarrolla una metodología para calcular la respuesta dinámica en una losa de concreto reforzado en dos direcciones ante el caminar de personas.

1.1.1 Estructura de la tesis

La tesis en su conjunto incluye una serie de capítulos para su comprensión. El capítulo 1 contiene una introducción sobre los conceptos en los que se basa este trabajo, así como sus antecedentes, justificación y objetivos. El capítulo 2 contiene el desarrollo de expresiones analíticas para el cálculo de la frecuencia natural en losas de concreto reforzado. En el Capítulo 3 se muestra un estudio de susceptibilidad de losas de concreto reforzado en dos direcciones ante vibraciones excesivas por el caminar de personas con base en recomendaciones establecidas por algunas especificaciones de diseño. Además, se realiza un estudio de las variables que influyen en la frecuencia natural de losas de concreto reforzado con base en simulaciones numéricas. En el Capítulo 4, se muestra un estudio numérico-experimental en losas de vigueta y bovedilla y en una losa concreto reforzado en dos direcciones; en cada una de ellas se realizaron pruebas ante vibración libre y vibración forzada debida a actividades humanas. En el capítulo 5 se realiza una calibración para elegir una carga dinámica representativa del caminar de personas y se obtiene una expresión analítica para el cálculo de la respuesta dinámica de losas macizas de concreto reforzado. Además se propone una metodología de análisis y diseño de losas macizas de concreto reforzado ante vibración debida al caminar de personas y se muestra un estudio sobre las variables que influyen en la aceleración de una losa de concreto reforzado ante actividades humanas. Finalmente, en el capítulo 6 se incluyen las conclusiones y recomendaciones obtenidas de la investigación realizada.

1.2 Antecedentes

En general, el efecto de vibración vertical ocasionado en un sistema de piso por actividades humanas es un fenómeno que comúnmente requiere de procedimientos para su obtención y su regulación. La mayoría de las recomendaciones que existen actualmente son para losacero, los cuales se derivan de códigos de diseño como los son el AISC (1997) y HIVOSS (2007) principalmente. Sin embargo, existen otras tipologías de sistemas de piso que requieren de recomendaciones o criterios para evaluar y evitar vibraciones que pueden ser incómodas en los ocupantes. Por lo que existe la necesidad de profundizar en el tema y desarrollar especificaciones para evaluar la vibración en estos sistemas. Por lo tanto, en esta sección se revisan las características de los elementos necesarios para la evaluación de un sistema de piso ante vibración debida a actividades humanas, haciendo énfasis en la actividad del caminar de personas.

1.2.1 Frecuencia natural

La frecuencia natural fundamental f_n es una característica dinámica de una estructura que depende su distribución de masa y rigidez; su cálculo para un sistema de piso, como lo es una losa maciza de concreto reforzado, se basa en procedimientos derivados de la teoría de placas, de la idealización de modelos dinámicos equivalentes o de métodos numéricos aproximados. A continuación, se revisan las características de cada una de ellos.

Obtención de f_n con base en la Teoría de placas

Uno de los procedimientos más importantes es el derivado de la teoría de placas, donde se lleva acabo el análisis de una placa homogénea de espesor uniforme como se muestra en Leissa (1969), cuya ecuación de equilibrio es la siguiente:

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

donde:

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1.2)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.3)$$

D representa la rigidez de la placa, w es el desplazamiento de la placa, ρ es el peso volumétrico del material, h es el espesor de la placa, t es el tiempo, E es el módulo elástico del material y ν es el módulo de Poisson del material. Considerando que w depende de un campo de coordenadas y posiciones W y de una frecuencia de movimiento ω , como se muestra en la ec. (1.4), se sustituye ésta en la ec.(1.1) teniendo una expresión como la de la ec. (1.5).

$$w = W \cos(\omega t) \quad (1.4)$$

$$(\nabla^4 - k^4)W = 0 \quad (1.5)$$

donde

$$k^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D} \quad (1.6)$$

La ec. (1.6) representa la expresión para obtener la frecuencia natural de una placa, donde k es un coeficiente que depende de las condiciones de borde de la placa. En la literatura existen diferentes valores de k para distintas condiciones de borde como se muestra en Leissa (1969). Con base en ellas, existen documentos que han propuesto expresiones aproximadas para el cálculo de la f_n como se reporta en Bares (1971), donde la ec. (1.6) tiene la forma:

$$f_n = \lambda \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (1.7)$$

donde $\lambda = \varphi/a^2$, φ es un coeficiente adimensional que depende de las condiciones de borde de la placa y a es la longitud del claro largo, como se muestra en la Tabla 1.1, donde se tienen soluciones para placas con apoyos infinitamente rígidos. Se tiene que existen soluciones para el análisis de la f_n de placas ante distintas condiciones de borde, donde se hace uso de expresiones prácticas que involucran el comportamiento dinámico mediante funciones que dependen de la relación de claros como se observa en la Tabla 1.1. Este tipo de soluciones son de ayuda para las especificaciones de diseño de sistemas de piso como losas de concreto reforzado en dos direcciones, como se reporta en Bachmann y Ammann (1987) y HIVOSS (2007) (Human induced vibration of steel structures, por sus siglas en inglés). Cabe señalar que este tipo de soluciones se consideran apoyos infinitamente rígidos en sus bordes, lo cual es poco común en una losa real en dos direcciones con columnas en las esquinas y vigas flexibles en sus extremos.

Obtención de la f_n mediante modelos dinámicos equivalentes de un grado de libertad

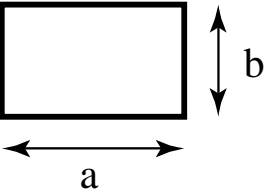





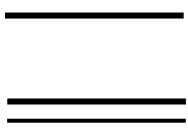
Dada la complejidad que se tiene al calcular la f_n de un sistema de piso como una placa ya sea con borde rígidos o flexibles, existe el procedimiento de analizar el sistema mediante modelos equivalentes de un grado de libertad donde la masa y rigidez del modelo equivalente representan una fracción de la masa y rigidez totales del sistema de piso. Estas propiedades fraccionadas o equivalentes son conocidas como masa y rigidez modales, las cuales se obtienen a través de métodos que incluyen la energía cinética y la forma modal desarrollada durante el movimiento. Un ejemplo de ello es la masa modal de una placa simplemente apoyada (Smith *et al.*, 2007), dada por la expresión siguiente:

$$M_{\text{mod}} = \iint_A m \phi^2(x, y) dA = \eta M_{\text{total}} \quad (1.8)$$

donde M_{mod} es la masa modal, m es la masa por unidad de área, ϕ es la forma modal, M_{total} es la masa total y η es la relación de masa modal, la cual está dada por:

$$\eta = \frac{\iint_A m\phi^2(x, y) dA}{\iint_A m(x, y)dA} \quad (1.9)$$

Tabla 1.1 Constante ϕ para el cálculo de la frecuencia natural fundamental en losas rectangulares de espesor uniforme (adaptado de Bares, 1971)

Caso	Condiciones de borde	Constante ϕ
1		$\phi=1.57(1+\gamma^2)$
2		$\phi=1.57\sqrt{1+2.5\gamma^2+5.14\gamma^4}$
3		$\phi=1.57\sqrt{5.14+2.92\gamma^2+2.44\gamma^4}$
4		$\phi=1.57\sqrt{1+2.33\gamma^2+2.44\gamma^4}$
5		$\phi=1.57\sqrt{2.44+2.72\gamma^2+2.44\gamma^4}$
6		$\phi=1.57\sqrt{5.14+3.13\gamma^2+5.14\gamma^4}$
		
γ		relación a/b

Como se observa, la masa modal M_{mod} se obtiene a partir del producto de la masa total del sistema por un valor $\eta < 1$ que depende de una forma modal conocida, la cual se obtiene a partir de una función de desplazamientos normalizada al punto de desplazamiento máximo. Una manera práctica para obtener M_{mod} es mediante el análisis de un sistema discreto como lo es un modelo numérico de elementos finitos, como se reporta en HIVOSS (2007):

$$M_{mod} = \sum_{\text{Nodos } i} \delta_i^2 \times dM_i \quad (1.10)$$

donde δ_i es la deflexión vertical del nodo i normalizado a la deflexión máxima y dM_i es la masa del nodo i en el sistema de piso. Por otra parte, la rigidez modal, K_{mod} , se obtiene a través de un procedimiento similar pero más complejo, por lo que su obtención se trata en la sección 5.4. Con estas magnitudes modales, la f_n para un sistema equivalente de un grado de libertad se calcula como:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{mod}}{M_{mod}}} \quad (1.11)$$

Como se observa, la f_n de un sistema de piso se calcula a partir de la ec. (1.11), que corresponde a un sistema de un grado de libertad (SIGDL) que involucra el movimiento de cada punto de un sistema de piso; y si el sistema analizar es discreto, se aplica de manera más sencilla ante cualquier condición de borde. Por lo tanto, este concepto se toma como base en el desarrollo de este trabajo para el análisis de sistemas de piso de concreto reforzado en dos direcciones.

Expresiones empírico-simples para el cálculo de f_n

En la literatura existen otros procedimientos para calcular la f_n en sistemas de piso en una y dos direcciones. Estos procedimientos se basan en métodos aproximados o heurísticos para su obtención. Uno de los más utilizados es el que proporcionan en AISC (1997) (American institute of steel construction, por sus siglas en inglés) con base en Allen y Murray (1993), el cual se basa en la ecuación de Dunkerley como se muestra en la ec. (1.12) la cual es utilizada para el análisis de sistemas de vigas y losas en una dirección. Esta expresión se caracteriza por incluir la frecuencia natural de los elementos que están involucrados en el sistema global.

$$\frac{1}{f_n^2} = \frac{1}{f_j^2} + \frac{1}{f_g^2} \quad (1.12)$$

donde:

$$f_j = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\frac{3}{4}\Delta_j}} = 0.18 \sqrt{\frac{g}{\Delta_j}} \quad (1.13)$$

$$f_g = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{3/4 \Delta_g}} = 0.18 \sqrt{\frac{g}{\Delta_g}} \quad (1.14)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, f_j y f_g son la frecuencia natural fundamental de una viga principal y de una franja unitaria de losa o viga secundaria, respectivamente; Δ_j y Δ_g son las deflexiones máximas debidos a una carga distribuida en la viga principal y en la franja de losa. La fracción $3/4$ en las ecs. (1.13) y (1.14) es un factor empírico para obtener la f_n de una viga simplemente apoyada en sus extremos. Por lo tanto, despejando y simplificando la ec. (1.12), se tiene como resultado:

$$f_n = 0.18 \sqrt{\frac{g}{\Delta_j + \Delta_g}} \quad (1.15)$$

En general, la ec. (1.15) utiliza expresiones analíticas derivadas de la literatura para el cálculo de los desplazamientos, y así, obtener de manera suficientemente aproximada la f_n de un sistema de piso a base vigas o de losas en una dirección, como se observa en las especificaciones AISC (1997) e HIVOSS (2007), respectivamente. Cabe señalar, que estas expresiones empíricas se basan en la experiencia y el conocimiento adquiridos, lo cual es práctico ya que proporcionan valores razonables.

Ejemplos de la aplicación de las ecs. (1.13) o (1.14) para obtener la f_n en vigas es en sistemas de losacero (AISC, 1997) y en sistemas de piso de vigueta y bovedilla de poliestireno como se muestra en las especificaciones de la Asociación Nacional de industriales de Vigueta Pretensada (ANIVIP, 2013). Estos sistemas, que pueden ser a base de vigas o viguetas, se analizan de manera aislada junto con una porción de la losa de concreto, obteniendo así, valores de aproximación suficiente en el cálculo de f_n . Sin embargo, es necesario notar que por las características que tienen estos sistemas de piso, necesitan ser estudiados con más detalle para su análisis dinámico.

En la literatura existen procedimientos para calcular f_n en placas o vigas los cuales se adaptan para uso en sistemas de piso en edificaciones. Analíticamente existen procedimientos prácticos como el del AISC (1997) para el cálculo de f_n en sistemas de losacero, el cual representa una base importante en el análisis de sistema de piso, como se muestra en las Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Estructuras de Acero (NTCA-17, 2017) y ANIVIP (2013) con base en la ec. (1.13). Sin embargo, en el análisis de otras tipologías de sistemas de piso como las losas de concreto reforzado el cálculo de f_n es complejo, por lo que se basa principalmente en análisis numéricos o en métodos analíticos complejos que pueden ser poco prácticos para el diseñador. Es por ello que en la literatura no se encuentran procedimientos prácticos para el cálculo de f_n , como se puede observar en reglamentos como las NTCC-17 (2017). Por lo tanto, es necesario seguir desarrollando procedimientos o metodologías para la determinación de las características dinámicas de los sistemas de piso, en este caso de la f_n .

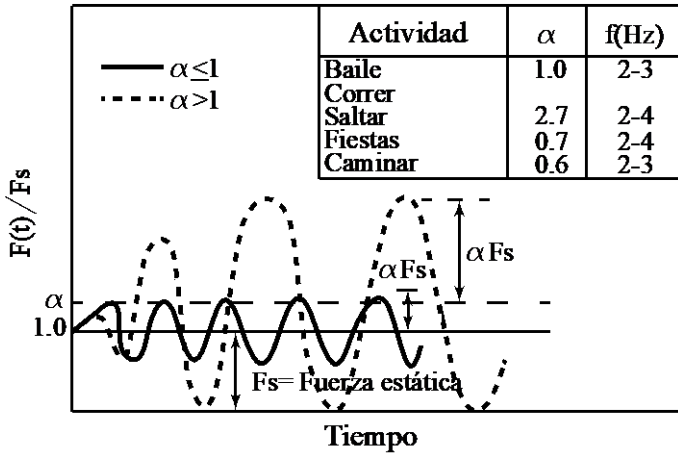
En general, los antecedentes mencionados son la base principal para el cálculo de la f_n en sistemas de piso, teniendo como fundamento el análisis de sistemas continuos, ya sea a base vigas o placas homogéneas que se apoyan sobre bordes rígidos o flexibles. Por lo que se consideran en este trabajo para el desarrollo de recomendaciones de análisis y diseño de sistemas de piso de vigueta y bovedilla y de concreto reforzado en dos direcciones.

1.2.2 Funciones de carga dinámica representativas del caminar de personas

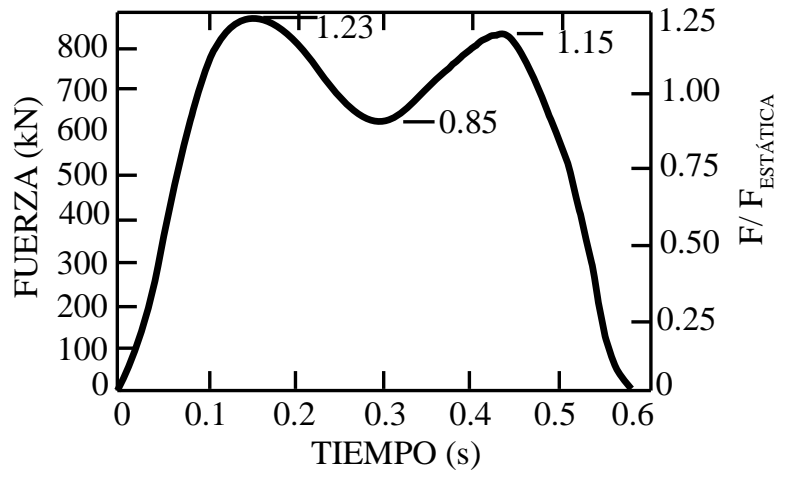
Como se ha mencionado, las cargas dinámicas que se presentan en sistemas de piso se deben principalmente a maquinaria o actividad humana, las cuales se clasifican como: armónicas, periódicas, transitorias e impulsivas. Las cargas armónicas o sinusoidales se asocian usualmente a máquinas y actividades humanas rítmicas de trabajo y eventos sociales; mientras que las cargas periódicas son las causadas por maquinaria de impacto y actividades humanas rítmicas tales como aeróbicos y bailes. Las cargas transitorias las producen el movimiento de personas que caminan o corren. En el caso de cargas impulsivas, éstas se derivan de saltos o de impactos de cargas de tacón. En el caso de este estudio, se considera el análisis de cargas debidas a actividades humanas, donde se enfoca primordialmente al tratado de cargas debidas al caminar de personas.

Las cargas debidas a actividades humanas sobre los sistemas de piso se idealizan con funciones o curvas de la fuerza contra el tiempo. Como ejemplos de estas curvas se tienen (Ellingwood y Tallin, 1984): 1) las fuerzas debidas a bailes, saltos y otras actividades rítmicas derivadas de un grupo de personas que caminan, corren, bailan o que brincan en tribunas, las cuales se modelan por una función senoidal como la que se muestra en la Figura 1.1a; 2) las fuerzas que se deben al paso de una persona, las cuales se definen por una curva con dos picos como se muestra en la Figura 1.1b, el primer pico corresponde al impacto del talón y el segundo, con menos magnitud, a los dedos del pie; 3) las fuerzas ocasionadas por impactos, que tienen una duración corta en comparación con el periodo fundamental de vibración de la losa. Estas fuerzas se deben principalmente a actividades como saltos, movimiento de muebles o caída de objetos. La Figura 1.1c muestra la curva fuerza contra tiempo, donde se observa el impacto debido a un tacón.

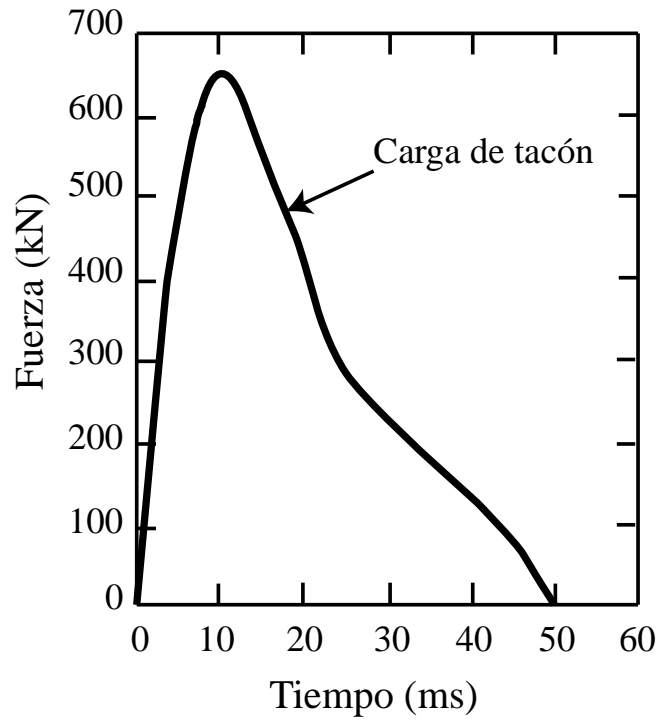
En el caso de cargas que representen adecuadamente el caminar de personas, el tener una función que la represente adecuadamente es de gran importancia en un análisis de losas ante vibración. Por lo tanto, en la literatura existen funciones de carga que tienen como objetivo representar tal fuente de excitación, como un ejemplo representativo es como se muestra en la Figura 1.2, donde se define el caminar continuo de una persona con base en la función de la Figura 1.1b. Como se observa, estas funciones tienen como objetivo representar las actividades humanas de manera más detallada mediante la combinación de funciones armónicas.



a)



b)



c)

Figura 1.1. Fuerzas causadas por: a) actividades rítmicas y b) paso de una persona en losa y c) impacto de tacón (adaptado de Ellingwood y Tallin, 1984).

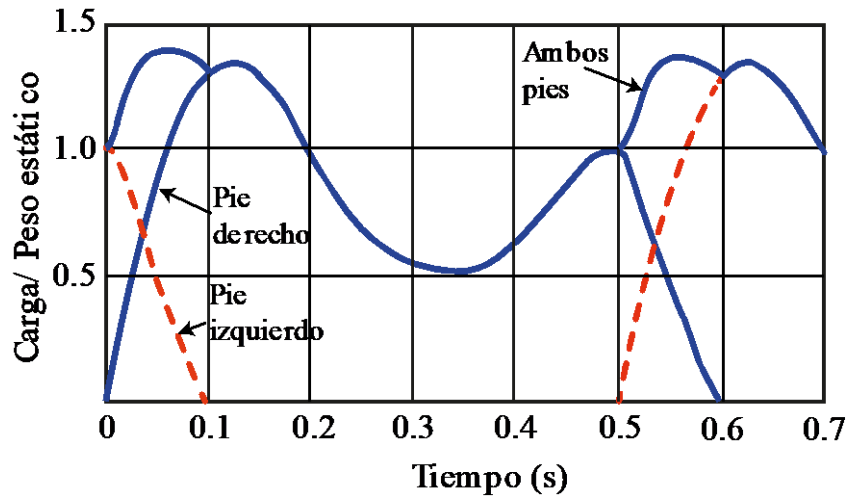


Figura 1.2. Carga dinámica que representa el caminar de una persona (adaptado de Bachmann, 1987)

Un ejemplo importante de la combinación de las funciones de carga mostradas en la Figura 1.1 lo muestra Varela (2004), donde se propone una función debida al paso de una persona (Figura 1.1b) más una carga de tacón (Figura 1.1c) como se muestra en la Figura 1.3. A diferencia de la función de carga que se muestra en la Figura 1.2, la carga propuesta de Varela (2004) incluye un pulso al inicio de cada paso de la persona.

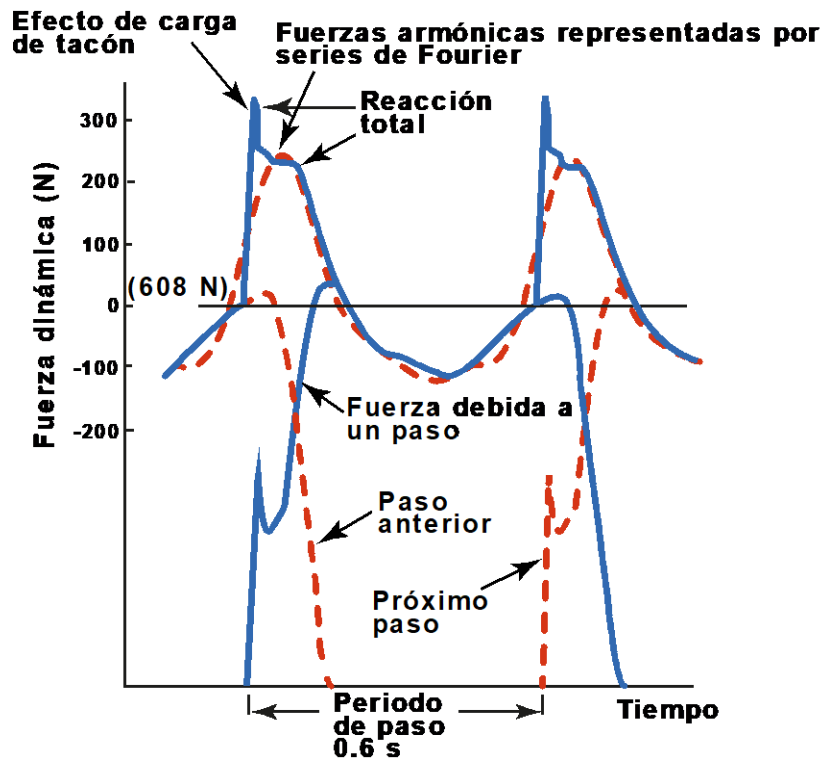


Figura 1.3. Carga dinámica que representa el caminar de una persona más una carga de tacón (tomado de Varela, 2004)

En el desarrollo de este tipo de funciones se utilizan funciones matemáticas para su representación. Algunos procedimientos utilizados para su definición son mediante la calibración de experimentos del paso de personas en sistemas de piso de diversas funciones matemáticas, entre las que destacan del tipo trigonométricas seno y coseno principalmente. Un ejemplo del uso de estas funciones y su combinación son las series de Fourier, siendo de las más utilizadas en la literatura para representar actividades humanas. Un ejemplo de los reportes más importantes en el desarrollo de cargas dinámicas debidas a actividades humanas es el realizado por Rainer *et al.* (1986), quienes para el caso del caminar humano desarrollaron la expresión siguiente:

$$F(t) = P \left(1 + \sum_{n=1}^N \alpha_n \text{sen}[2\pi n f_s t + \phi_n] \right) \quad (1.16)$$

Donde $F(t)$ es la carga dinámica en función del tiempo, P es el peso de una persona, α_i es el factor de carga dinámica o coeficiente dinámico del i -ésimo armónico, f_s es la frecuencia de la actividad (Hz), i es el número de armónico 1,2,3, etc., que corresponde a un múltiplo de la frecuencia de paso f_s para representar una frecuencia superior, α_i es un coeficiente dinámico para la i -ésima componente armónica, ϕ_n es el ángulo de desfase del i -ésimo armónico con respecto al primer armónico y N es el número total de armónicos. Cabe mencionar que la ec. (1.16) se basa en mediciones experimentales. Los resultados constan de un espectro de Fourier calculado para el caminar de una persona ante distintos valores de f_s , las cuales contienen armónicos, como se muestra en la Figura 1.4a. Al normalizar las amplitudes de fuerza del espectro al peso de una persona, se tienen coeficientes conocidos como factores de carga dinámica o coeficientes dinámicos α_i como se muestra en la Figura 1.4b. Por lo que, este es un ejemplo de los procedimientos utilizados como base para la propuesta de funciones de carga representativas de actividades humanas.

En la literatura se han propuesto funciones de carga para representar actividades humanas de piso. En el caso del caminar de personas, Allen y Murray (1993) y AISC (1997), se propone una función de carga dependiente del tiempo, la cual es una combinación de cargas armónicas:

$$F(t) = P \left[1 + \sum \alpha_i \cos(2\pi i f_s t + \phi_i) \right] \quad (1.17)$$

Considerando que la frecuencia de excitación más baja es la que influye ampliamente en la respuesta dinámica de un sistema de piso (AISC, 1997) se tiene que:

$$F(t) = P \alpha_i \cos(2\pi i f_s t) \quad (1.18)$$

donde P es el peso individual de una persona y los valores de f_s , i y α_i se resumen en la Tabla 1.2. En general, estas funciones de carga representan envolventes del paso de una persona

como se muestra en la Figura 1.2, por lo que, en este trabajo se hace uso de ellas para representar el caminar humano.

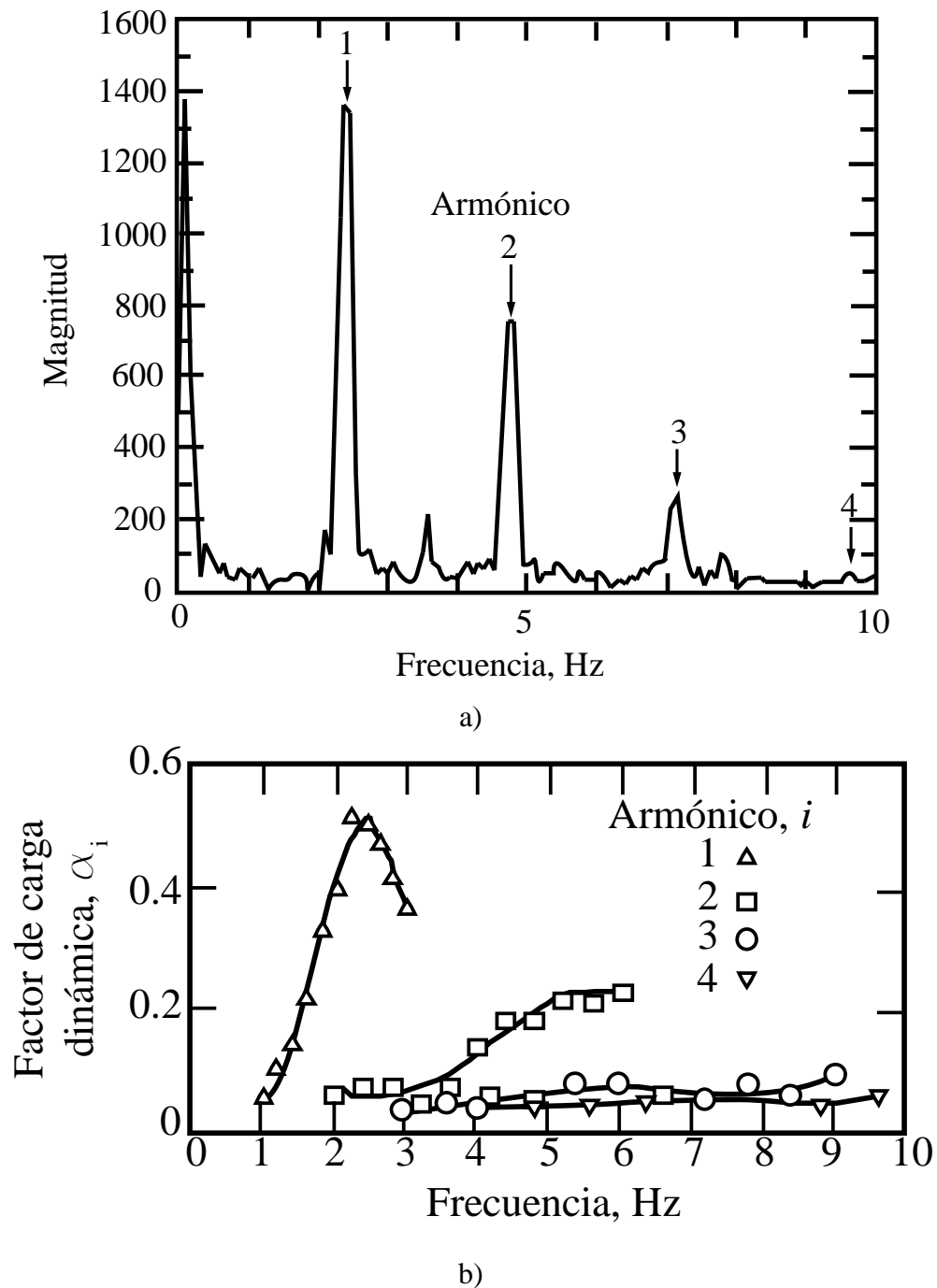


Figura 1.4. Obtención de coeficientes de carga dinámica con base en experimento del caminar de una persona sobre una plataforma (adaptado de Rainer *et al.*, 1988)

Tabla 1.2 Elementos para definición funciones de carga (adaptada de AISC, 1997).

Frecuencia de funciones de carga y coeficientes dinámicos α_i						
Armónico i	Caminar de persona		Aeróbicos		Personas que bailan	
	f_s (Hz)	α_i	f_s (Hz)	α_i	f_s (Hz)	α_i
1	1.6-2.2	0.5	2-2.75	1.5	1.5-3	0.5
2	3.2-4.4	0.2	4-5.5	0.6	-	-
3	4.8-6.6	0.1	6-8.25	0.1	-	-
4	6.4-8.8	0.05	-	-	-	-
coeficiente dinámico = Fuerza sinusoidal máxima/peso de personas						

Otro ejemplo de las primeras funciones de carga que surgieron para representar el caminar humano es como la que propusieron Bachmann y Ammann (1987), donde se involucran tres frecuencias superiores o componentes armónicos para su definición, como se muestra en la ec. (1.19) y la Tabla 1.3.

$$F(t) = P + \Delta P_1 \sin(2\pi f_s t) + \Delta P_2 \sin(4\pi f_s t - \phi_2) + \Delta P_3 \sin(6\pi f_s t - \phi_3) \quad (1.19)$$

Donde P es el peso de una persona, ΔP_1 componente de carga del primer armónico, ΔP_2 componente de carga del segundo armónico, ΔP_3 componente de carga del tercer armónico, f_s es la frecuencia de caminar (Hz), ϕ_2 es el ángulo de fase del segundo armónico y ϕ_3 es el ángulo de fase del tercer armónico, ambos con respecto al primer armónico. Esta función, dada en la ec. (1.19) al igual que las ecs. (1.17) y (1.18), se caracteriza por representar el caminar de una persona mediante una envolvente de pasos como la que se muestra en la Figura 1.2, por lo que es una de las cargas que se consideran para el desarrollo de este trabajo.

Tabla 1.3 Coeficientes para la definición de la carga dinámica de la ec. (1.19)

Coeficientes	Valor
ΔP_1	0.4P para $f_s = 2.0$ Hz 0.5P para $f_s = 2.4$ Hz
ΔP_2	0.1P para $f_s = 2.0$ Hz
ΔP_3	0.1P para $f_s = 2.0$ Hz
ϕ_2	$\pi/2$
ϕ_3	$\pi/2$

Con el paso del tiempo, surgieron otras funciones de carga para representar actividades humanas; un ejemplo de ello es lo propuesto por Bachmann *et al.* (1995) donde se propone representar las actividades humanas mediante funciones de carga uniformemente distribuidas, como se muestra en la expresión siguiente:

$$F(t) = w_p + \sum_{i=1}^n w_p \alpha_i \sin(2\pi i f_s t - \phi_i) \quad (1.20)$$

donde w_p es el peso de personas por unidad de área; α_i es el coeficiente de Fourier del i -ésimo armónico o factor de carga dinámica; f_s es la frecuencia de la actividad (Hz); i es el número del i -ésimo armónico; n es el número total de contribuciones armónicas; t es el tiempo; y ϕ_i es el ángulo de desfase del i -ésimo armónico con respecto al primer armónico. Las variables y coeficientes en la definición de los distintos tipos de carga se resumen en la Tabla 1.4, los cuales se utilizan para los objetivos de este trabajo.

Varela (2004) propone una función de carga debida al caminar de una persona más una carga de tacón, pues combina las funciones mostradas en la Figura 1.1, como se observa en la Figura 1.3. Esta expresión, así como sus respectivos coeficientes se muestran de la ec. (1.21) a la ec. (1.28).

Tabla 1.4 Variables y coeficientes para definición de cargas representativas de actividades humanas (tomada de Bachmann *et al.*, 1995)

Tipo de actividad	Frecuencia de paso (Hz)		Coeficiente de Fourier y ángulo de desfase					Densidad de diseño (personas/m ²)
			α_1	α_2	ϕ_2	α_3	ϕ_3	
Caminar	Vertical	2.0	0.4	0.1	$\pi/2$	0.1	$\pi/2$	~1
		2.4	0.5					
	Hacia adelante	2.0	0.2	0.1				
	Lateral	2.0	$\alpha_{1/2}=0.1$ $\alpha_{1/2}=0.1$	$\alpha_{3/2}=0.1$				
Correr		2.0 a 3.0	1.6	0.7		0.2		-
Saltar	Normal	2.0	1.8	1.3	*)	0.7	*)	en entrenamientos ~0.25 (en casos extremos hasta 0.5) $\phi_2 = \phi_3 = \pi (1 - f_p t_p)$
		3.0	1.7	1.1	*)	0.5	*)	
	Alto	2.0	1.9	1.6	*)	1.1	*)	
		3.0	1.8	1.3	*)	0.8	*)	
Baile		2.0 a 3.0	0.5	0.15		0.1		~4 (casos extremos hasta 6)
Balanceo y aplausos de pie		1.6	0.17	0.10		0.04		asientos libres ~4 (casos extremos hasta 6.0) asientos fijos ~2 a 3
		2.4	0.38	0.12		0.02		
Aplausos	Normal	1.6	0.024	0.010		0.009		~ 2 a 3
		2.4	0.047	0.024		0.015		
	Intensivo	2.0	0.170	0.047		0.037		
Balanceo lateral del cuerpo	Sentado	0.6	$\alpha_{1/2}=0.4$	-		-		~ 3 a 4
	De pie	0.6	$\alpha_{1/2}=0.5$	-		-		

$$F(t) = \begin{cases} \left(\frac{f_{mi} F_m - P}{0.04T_p} \right) t + P & \text{si } 0 \leq t < 0.04T_p \\ f_{mi} F_m \left[\frac{C_1 (t - 0.04T_p)}{0.02T_p} + 1 \right] & \text{si } 0.04T_p \leq t < 0.06T_p \\ F_m & \text{si } 0.06T_p \leq t < 0.15T_p \\ P + \sum_{i=1}^{nh} P \alpha_i \text{sen} \left[2\pi f_c (t + 0.1T_p) + \Phi_i \right] & \text{si } 0.15T_p \leq t < 0.90T_p \\ 10(P - C_2) \left(\frac{t}{T_p} - 1 \right) + P & \text{si } 0.90T_p \leq t < T_p \end{cases} \quad (1.21)$$

donde:

$$F_m = P \left(1 + \sum_{i=1}^{nh} \alpha_i \right) \quad (1.22)$$

$$C_1 = \left(\frac{1}{f_{mi}} - 1 \right) \quad (1.23)$$

$$C_2 = \begin{cases} P(1 - \alpha_2) & \text{si } nh = 3 \\ P(1 - \alpha_2 + \alpha_4) & \text{si } nh = 4 \end{cases} \quad (1.24)$$

$$\alpha_1 = -0.22169f_s^3 + 1.11946f_s^2 - 1.44748f_s + 0.5967 \quad (1.25)$$

$$\alpha_2 = -0.012037(2f_s)^3 + 0.1494(2f_s)^2 - 0.53146(2f_s) + 0.6285 \quad (1.26)$$

$$\alpha_3 = 0.00009068(3f_s)^5 - 0.0021066(3f_s)^4 + 0.018364(3f_s)^3 - 0.077278(3f_s)^2 + 0.17593(3f_s) - 0.1477 \quad (1.27)$$

$$\alpha_4 = 0.00051715(4f_s)^4 - 0.014388(4f_s)^3 + 0.14562(4f_s)^2 - 0.62994(4f_s) + 1.018469 \quad (1.28)$$

donde $F(t)$ es la carga dinámica en función del tiempo, F_m es el valor máximo de la serie de Fourier, f_{mi} es un factor de impacto de tacón cuyo valor es 1.12, P es el peso de una persona, α_i es el factor de carga dinámica del i -ésimo armónico, f_s es la frecuencia de caminado (Hz), T_p es el periodo de paso, i es el número del i -ésimo armónico, nh es el número total de

contribuciones armónicas, t es el tiempo, y ϕ_i es el ángulo de desfase del i -ésimo armónico con respecto al primer armónico. Como se observa, esta función de carga es una combinación de distintas funciones matemáticas con el objetivo de representar el caminar de una persona más un impulso al inicio de cada paso. Al igual que las expresiones anteriores, se utiliza esta función para el desarrollo de este estudio.

Como se ha mencionado, las cargas que representan el caminar humano pueden estar representadas por funciones diferentes a las armónicas, tal como se muestra con la expresión que proporciona HIVOSS (2007) y la Comisión Europea con base en Feldmann *et al.* (2009), la cual está definida por el polinomio de la ec. (1.29).

$$\frac{F(t)}{G} = K_1 t + K_2 t^2 + K_3 t^3 + K_4 t^4 + K_5 t^5 + K_6 t^6 + K_7 t^7 + K_8 t^8 \quad (1.29)$$

donde G es la masa de la persona, K_1 a K_8 son coeficientes que dependen de la frecuencia del paso de una persona, los cuales se proporcionan en la Tabla 1.5. La duración de la carga se determina con la expresión siguiente:

$$t_s = 2.6606 - 1.757 \cdot f_s + 0.3844 \cdot f_s^2; \text{ si } t > t_s, F(t)=0 \quad (1.30)$$

La ec. (1.29) representa un comportamiento como el que se muestra en la Figura 1.1b, la cual se aplica en intervalos de $1/f_s$ para el análisis de sistemas de piso. Por lo tanto, este tipo de funciones son un ejemplo distinto ante la mayoría de series que contienen funciones trigonométricas.

Tabla 1.5 Coeficientes K_1 a K_8 para una frecuencia de paso (f_s) (tomada de HIVOSS 2007).

K	Frecuencia de paso de carga		
	$f_s \leq 1.75$	$1.75 < f_s < 2$	$f_s \geq 2$
K_1	$-8 \times f_s + 38$	$24 \times f_s - 38$	$75 \times f_s - 120.4$
K_2	$-376 \times f_s - 844$	$-404 \times f_s + 521$	$-1720 \times f_s + 3153$
K_3	$-2804 \times f_s + 6025$	$4224 \times f_s - 6274$	$17055 \times f_s - 31936$
K_4	$6308 \times f_s - 16573$	$-29144 \times f_s - 45468$	$-94265 \times f_s - 175710$
K_5	$1732 \times f_s + 13619$	$109976 \times f_s - 175808$	$298940 \times f_s - 553736$
K_6	$-24648 \times f_s + 16045$	$-217424 \times f_s + 353403$	$-529390 \times f_s + 977335$
K_7	$31836 \times f_s - 33614$	$212776 \times f_s - 350259$	$481665 \times f_s - 888037$
K_8	$-12948 \times f_s + 15532$	$-81572 \times f_s + 135624$	$-174265 \times f_s - 321008$

En general, las funciones de carga mencionadas son de las más utilizadas en la literatura. Sin embargo, existen propuestas de funciones de carga representativas del caminar humano con base en la modificación de los coeficientes dinámicos. Ejemplos de ello son las funciones

desarrolladas por Blanchard *et al.* (1977), Kerr (1998), Young (2001), Yoneda (2002), y Willford *et al.* (2007), tal como se resume en Younis *et al.* (2017). Por lo tanto, a pesar de que existe gran variedad de funciones de carga representativas de actividades humanas, aquí se mencionan algunas de las más representativas en Norteamérica y Europa, las cuales se contemplan en el desarrollo de este trabajo.

1.2.3 Relación de amortiguamiento

La relación de amortiguamiento es una variable que depende principalmente de las características del sistema de piso. Sin embargo, existen otros factores de importancia como lo son las cargas muertas adicionales y las actividades humanas, las cuales influyen en el amortiguamiento dependiendo de su magnitud y movilidad sobre el sistema.

Lenzen (1966) advierte que las mayores fuentes de amortiguamiento en un sistema de piso de losacero se deben a plafones, muros divisorios, pisos decorativos y a las personas; en el caso de esta última, la influencia es mayor cuando el sistema de piso está libre de personas. Por lo tanto, con base en mediciones experimentales han surgido recomendaciones para el valor de la relación de amortiguamiento, un ejemplo de ello es como proporcionan Hewitt y Murray (2004) en la Tabla 1.6 para sistemas de piso de losacero.

Tabla 1.6 Valores de la relación de amortiguamiento β para oficinas (Hewitt y Murray, 2004).

Oficinas	β (%)
Con muros divisorios	5
Con aparatos electrónicos	2-2.5
Con espacios abiertos	2.5-3
Con estudio y/o biblioteca	3-4

Posteriormente, el manual HIVOSS (2007) proporciona valores de la relación de amortiguamiento para distintos tipos de sistemas de piso como se muestran en la Tabla 1.7. Como se observa, la relación de amortiguamiento tiene diversas fuentes, las cuales se suman para obtener un valor total. En este trabajo se toman como referencia estos valores en análisis posteriores de sistemas de piso.

1.2.4 Respuesta dinámica en términos de la aceleración

En la parte analítica, la respuesta dinámica de un sistema de piso ante el caminar de personas se puede obtener básicamente en términos de desplazamiento, velocidad o aceleración. Cada una de ellas, involucra dos comportamientos: transitorio y estacionario. El primero se caracteriza por involucrar el efecto de vibración libre y la respuesta debida a la fuente excitación; mientras que la parte estacionaria sólo involucra esta última.

La respuesta dinámica se puede obtener analíticamente, una opción es a partir de soluciones exactas; sin embargo, su obtención comúnmente resulta ser compleja. Por lo que, en la

mayoría de los casos se utilizan procedimientos basados en conceptos del trabajo y la energía para obtener modelos de S1GDL y analizar la respuesta de forma simplificada. Con base en esto han surgido procedimientos para obtener la respuesta máxima de un sistema de piso. La mayoría de los procedimientos, los cuales se basan en el análisis de modelos de un S1GDL, tienen una ecuación de movimiento como se muestra en la literatura (Clough y Penzien, 1975):

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F(t) \quad (1.31)$$

donde $F(t)$ es la fuerza excitadora, $u(t)$ es el desplazamiento en función del tiempo, m , c y k son la masa, la constante de amortiguamiento y la rigidez traslacional del sistema, respectivamente. La solución de la ecuación de equilibrio dinámico se obtiene de manera exacta o mediante métodos numéricos dependiendo de su grado de complejidad. A partir de la ec.(1.31) se obtiene la respuesta dinámica del sistema en términos del desplazamiento, velocidad o aceleración.

Tabla 1.7 Valores de amortiguamiento (tomada de HIVOSS 2007).

Tipo de amortiguamiento		Relación β (%)
Estructural D1	Madera	6
	Concreto	2
	Acero	1
	Acero-Concreto	1
Debida a Muebles D2	Oficina tradicional con 1 a 3 personas con muros divisorios	2
	Oficinas sin papeles	0
	Oficinas con áreas abiertas	1
	Librería	1
	Casas	1
	Escuelas	0
	Gimnasia	0
Debida a Acabados D3	Plafón	1
	Acabados ligeros en piso	0
	Acabados en baños	1
Amortiguamiento total =D1+D2+D3		

La aceleración es una variable que se utiliza usualmente en la evaluación de la respuesta dinámica en un sistema de piso y se mide mediante parámetros como lo son: aceleración máxima, a_{max} , y una aceleración a_{rms} . La aceleración máxima consta de obtener el valor pico en la respuesta, ya sea en la parte transitoria o en la estacionaria como se muestra en la Figura 1.5; la aceleración a_{rms} consta de obtener una aceleración donde se pretende eliminar

máximos que no son representativos en la respuesta, un ejemplo de ello es el valor cuadrático medio o *rms* (root-mean-square por sus siglas en inglés) que representa una respuesta efectiva, como se muestra en la Figura 1.5b. El parámetro de aceleración *rms* calcula con la expresión (1.32)(Hicks, 2004):

$$a_{rms} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T a(t)^2 dt \right)^{1/2} \quad (1.32)$$

donde $a(t)$ es la aceleración del análisis dinámico paso a paso y T es un periodo de tiempo determinado. Como un ejemplo, para respuestas senoidales continuas con una amplitud a_{max} , como la mostrada en la Figura 1.5b, al aplicar la ec. (1.32), es decir, obtener el área bajo la curva, se tiene un valor de $a_{rms} = 0.707a_{max}$. Este método se utiliza comúnmente para respuestas de tipo senoidal continua, aunque autores como Hicks (2004) lo recomiendan incluso cuando existen componentes de la respuesta transitoria en el movimiento. En general, la aceleración a_{max} o a_{rms} , f_n y la relación de amortiguamiento son las magnitudes elementales en el análisis de sistemas de piso ante vibración debida a actividades humanas y cualquiera de los dos criterios, $a_{máx}$ o a_{rms} , puede ser utilizado dependiendo de los requerimientos del diseñador.

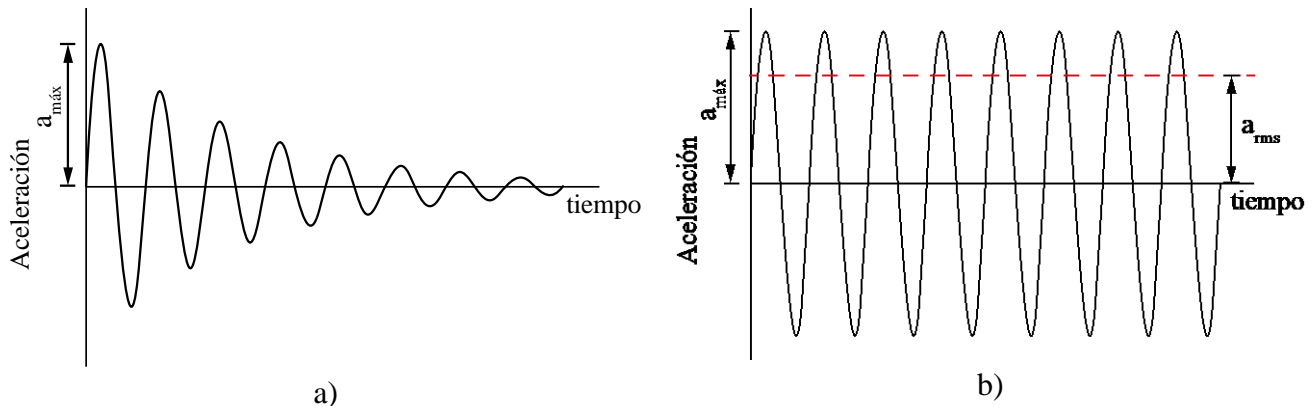


Figura 1.5. Representación de movimiento senoidal: a) respuesta transitoria y b) respuesta estacionaria continua (adaptado de Hicks, 2004)

Especificaciones del AISC (1997)

Las especificaciones del AISC (1997) en su guía de diseño número 11, al igual que el ANIVIP (2013), proponen calcular la pseudo-aceleración de un sistema de piso compuesto con base en el análisis de un modelo equivalente de un S1GDL ocasionada por el caminar de personas, ya sea de vigas o viga con losa de concreto con la ecuación siguiente:

$$\frac{a_p}{g} = \frac{P_o e^{-0.35 f_n}}{\beta W} \quad (1.33)$$

donde a_p/g es la pseudo-aceleración (aceleración representada como una fracción de la aceleración de gravedad), P_o es fuerza constante que representa la excitación, β es la relación de amortiguamiento modal y W es el peso efectivo soportado por la viga o sección compuesta. Los valores P_o , β así como los límites de a_p/g son valores definidos en el AISC (1997) de acuerdo al uso del sistema de piso analizado, como se proporciona en la Tabla 1.8.

La ec. (1.34) se basa en el análisis de un SIGDL para una viga simplemente apoyada mediante la expresión siguiente:

$$\frac{a_p}{g} = \frac{\alpha_i P}{0.5W} \times \frac{R}{2\beta} \times \cos(2\pi i f_s t) \quad (1.34)$$

donde, R es un factor empírico de reducción que considera la posición de personas durante la excitación del sistema. La ec. (1.34) es la base de la ec. (1.33), cuya simplificación depende de un término empírico $e(-0.35f_n)$ que se obtiene de relacionar el producto βW con f_n , y de considerar que la respuesta del sistema dinámico está en la condición estacionaria de resonancia como lo mencionan Allen y Murray (1993) y Rainer *et al.* (1986). Cabe señalar que por su practicidad esta expresión no involucra un análisis en función del tiempo, lo cual puede ser útil para una comprensión más detallada del comportamiento.

Tabla 1.8 Valores y límites de aceleración máxima (tomada de AISC 1997).

Valores para la obtención de la aceleración en la ec. (1.33)			
	Fuerza constante (P_o)	Amort. β	Límite máximo de aceleración $a_p/g \times 100$
Oficinas, residencias, iglesias	0.29 kN (29.6 kg)	0.02-0.05*	0.5%
Centros comerciales	0.29 kN (29.6 kg)	0.02	1.5%
Pasarelas al aire libre	0.41 kN (41.8 kg)	0.01	5.0%
* 0.02 para pisos con pocos componentes no estructurales como áreas de trabajo abiertas e iglesias. 0.03 para pisos con componentes no estructurales, particiones. 0.05 para pisos con particiones de altura completa.			

Especificaciones BS 6472 (2008)

Las especificaciones BS 6472 (2008) (British Standard, por sus siglas en inglés) proporcionan un procedimiento para evaluar la vibración de un sistema de piso en función de una expresión que involucra la aceleración paso a paso a la cuarta potencia, así como factores denominados frecuencias ponderadas que consideran vibraciones incómodas en los humanos ante la vibración del sistema. Los factores de frecuencia ponderada, denominados

como W_b y W_d aplican para vibraciones verticales y horizontales, respectivamente. Por lo que, al modificar la respuesta de aceleración paso a paso con estos factores, cuyas curvas de comportamiento se muestran en la Figura 1.6, se obtiene una señal ponderada que representa la respuesta humana a la vibración la cual se define como VDV (vibration dose values por sus siglas en inglés).

Por lo tanto, para realizar la evaluación del sistema de piso utilizando los factores W_b y W_d se utiliza la expresión siguiente:

$$VDV = \left(\int_0^T a^4(t) dt \right)^{0.25} \quad (1.35)$$

donde VDV es el valor dosis de vibración en $m/s^{1.75}$, T es el periodo total de día o noche en s durante el cual la vibración puede ocurrir y $a(t)$ es la aceleración paso a paso ponderada, la cual se obtiene al factorizar la señal con los valores de W_b y W_d según sea el caso. Al obtener el valor de la variable VDV se procede su evaluación mediante límites establecidos como se resumen en la Tabla 1.9.

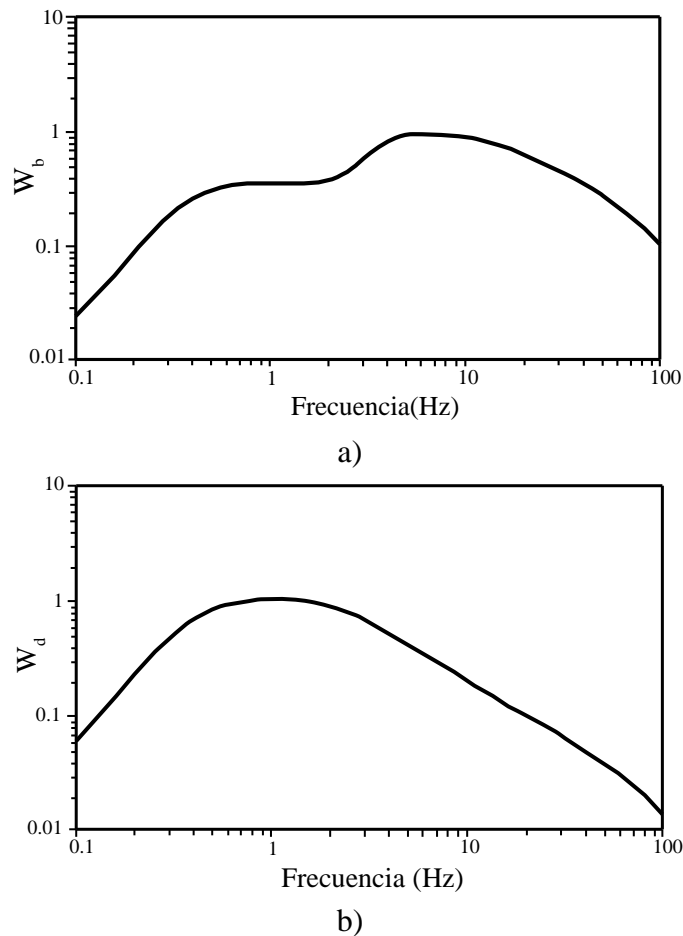


Figura 1.6. Curvas de frecuencia ponderada W_b y W_d para vibración: a) vertical y b) horizontal (adaptado de BS 6472, 2008)

Tabla 1.9 Valores de VDV ante distintos niveles de situación adversa (adaptada de BS 6472, 2008)

Valores de VDV en edificios residenciales (m/s ^{1.75})			
Lugar	Eventos adversos de probabilidad baja	Eventos adversos posibles	Eventos adversos probables
Edificios residenciales 16 horas-día	0.2-0.4	0.4-0.8	0.8-1.6
Edificios residenciales 8 horas-noche	0.13	0.26	0.51

La ec. (1.35) se aplica para distintas fuentes de vibración, donde la magnitud de la aceleración paso a paso se obtiene de medidas experimentales principalmente. Cabe mencionar que no es aplicada comúnmente en el diseño de sistemas de piso ante el caminar de personas, como lo menciona (Hicks, 2004).

Especificaciones de la Comisión Europea (2009)

Un ejemplo importante de la obtención y evaluación de la respuesta dinámica en sistemas de piso es el que propone la comisión europea realizado por Feldmann *et al.* (2009) con base en las recomendaciones proporcionadas por VOF (2006) y HIVOSS (2007). En este documento se propone obtener la respuesta en términos de la velocidad en un SIGDL mediante análisis paso a paso con base en la ec. (1.31). Posteriormente, se transforma la señal al dominio de la frecuencia donde se utiliza una función como la de la ec. (1.36) para eliminar picos no representativos de la respuesta.

Al igual que en las ec. (1.35) y (1.36) se involucra el efecto de vibración en el cuerpo humano al multiplicar la respuesta dinámica por factores de frecuencia ponderada como se muestran en la Figura 1.7. Posteriormente, la respuesta se transforma nuevamente al dominio del tiempo para obtener su valor *OS-RMS₉₀* (One-Step Root-Mean-Square por sus siglas en inglés), y se refiere a la raíz cuadrada del error cuadrático medio de la velocidad debida al paso de una persona, cuya intensidad es una respuesta similar al 90% de las respuestas generadas por otras personas que caminan sobre el sistema de piso, considerando su frecuencia de paso y su masa corporal.

$$|H(f)| = \frac{1}{v_o} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_o}{f_n}\right)^2}} \quad (1.36)$$

donde f_n es la frecuencia natural del sistema de piso, $f_o=5.6$ Hz y v_o es una velocidad de referencia igual a 1 mm/s. Con base en lo mencionado, se obtienen diagramas como el que se muestra en la Figura 1.8, donde propiedades como la frecuencia natural, la masa modal y la relación de amortiguamiento son utilizados para obtener un valor de la respuesta dinámica. Posteriormente, se utiliza la Tabla 1.10 para concluir con la evaluación del sistema de piso.

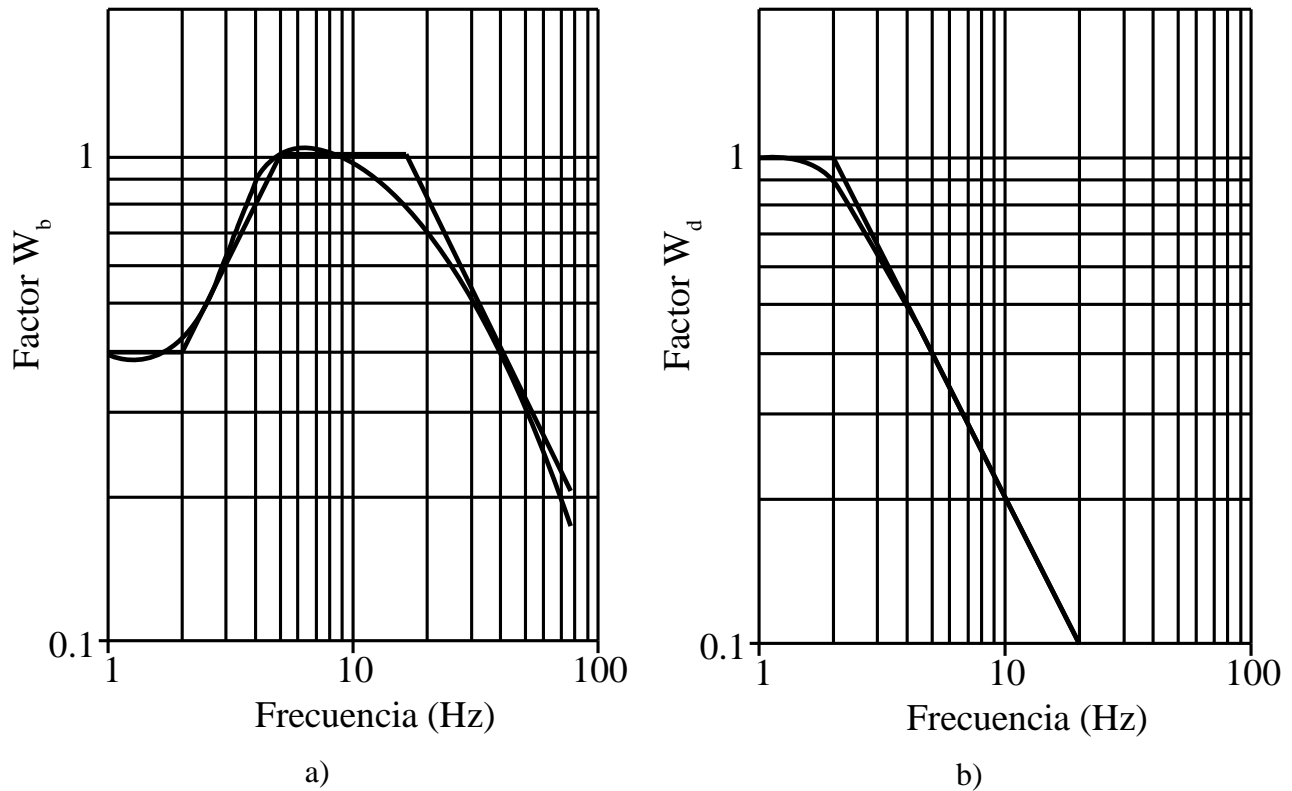


Figura 1.7. Curvas de frecuencia ponderada W_b y W_d para vibración: a) vertical y b) horizontal (adaptado de HIVOSS, 2008)

Como se observa, las especificaciones de la comisión europea proporcionan una metodología de análisis y diseño de sistemas de piso ante vibración mediante la obtención de la respuesta dinámica en términos de la velocidad, la cual tiene una relación directa con la evaluación de la comodidad humana a través de los factores W_b y W_d .

Clasificación basada en una relación β del 1%

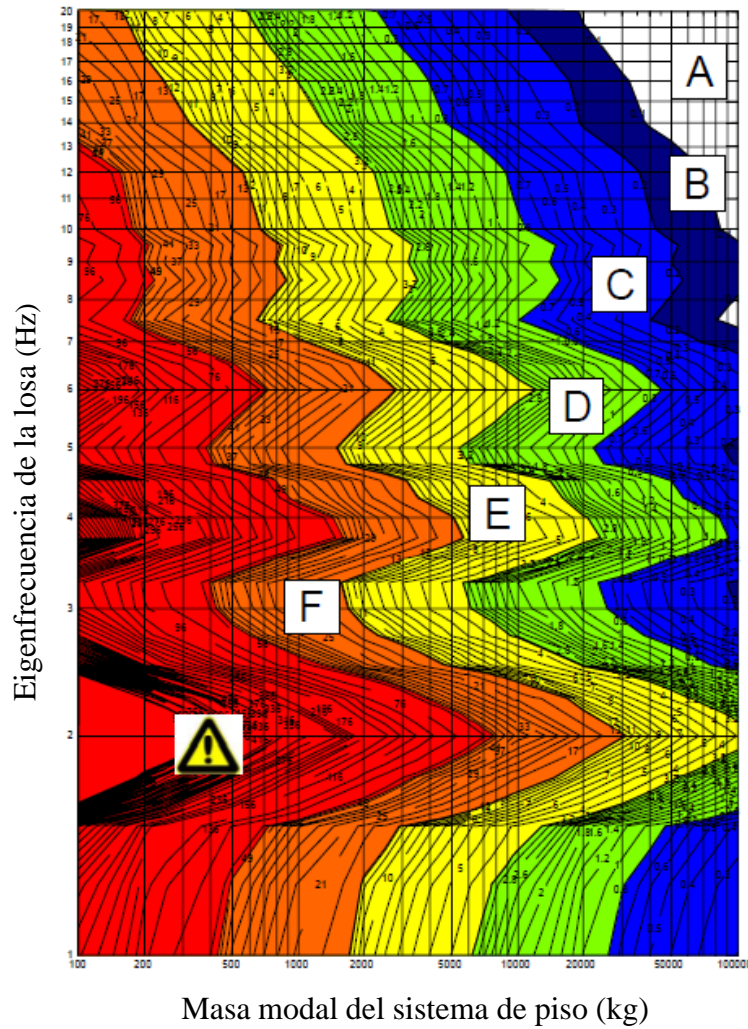


Figura 1.8. Diagrama de velocidades efectivas (tomado de HIVOSS 2007)

Tabla 1.10 Clasificación de la respuesta en sistemas de piso (adaptada de HIVOSS 2007).

Clase	OS-RMS ₉₀		Funciones del sistema de piso										
	Límite inferior	Límite superior	Áreas de trabajo	Salud	Educación	Residencial	Oficina	Convivencia	Comercio	Hoteles	Prisiones	Industrial	Deportes
A	0	0.1	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado
B	0.1	0.2	Crítico	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado
C	0.2	0.8	No recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado
D	0.8	3.2	No recomendado	Crítico	Crítico	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado	Recomendado
E	3.2	12.8	No recomendado	No recomendado	No recomendado	Crítico	Crítico	Crítico	Crítico	Crítico	Crítico	Recomendado	Recomendado
F	12.8	51.2	No recomendado	No recomendado	No recomendado	No recomendado	No recomendado	No recomendado	No recomendado	No recomendado	No recomendado	Crítico	Crítico

Recomendado
 Crítico
 No recomendado

Especificaciones DIN 4150-2 (1999)

En estas especificaciones se propone calcular la respuesta en términos de la velocidad como se muestra en las ecs. (1.37) y (1.38). La ec. (1.38) es similar a la ec. (1.36); en este caso se maneja un factor KB_{max} para realizar la evaluación de un sistema de piso ante vibración por distintos factores externos.

$$KB_{max} = KBcF \quad (1.37)$$

donde

$$KB = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_{max}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_0}{f_n}\right)^2}} \quad (1.38)$$

v_{max} es la velocidad máxima de la partícula en mm/s, la cual se obtiene mediante cualquier método adecuado de obtención; f_0 es una frecuencia de referencia con valor de 5.6 Hz y cF es un factor que depende de la resonancia. Por lo tanto, el factor KB_{max} es el parámetro principal donde se incluye las características dinámicas del sistema de piso. En la Tabla 1.11 se muestra el control de este parámetro.

Tabla 1.11 Efecto de la vibración en estructuras y humanos de acuerdo con DIN 4150-2 (1999)

Tipo de estructura	Día A_o	Noche A_o
Edificio con fines comerciales	6	0.6
Edificio con fines comerciales similares	6	0.4
Otras estructuras	5	0.3
Edificio de vivienda	3	0.2
Edificios que necesitan una protección especial	3	0.15

Propuesta de Contreras (1977)

En el caso de México, Contreras (1977) propuso una expresión que relaciona el perímetro de una losa maciza y la resistencia nominal del concreto con el peralte óptimo para evitar vibraciones excesivas originadas por la actividad de personas.

$$\text{Peralte mínimo} = 3.67 \left(\text{Perímetro del tablero, en metros} \right) / \sqrt[3]{f'c} \quad (1.39)$$

La ec. (1.39) se determinó mediante el análisis estadístico de modelos de losas equivalentes a un S1GDL en los que se aplicó una carga debida a actividad humana como fuerza de excitación. Las losas tenían perímetros de entre 10 y 36 m, con resistencias a compresión del concreto $f'c$ comprendidas entre 100 y 300 kg/cm². Este procedimiento es uno de los primeros estudios sobre el análisis ante vibración debida a actividades humanas en México. Sin embargo, es necesario proporcionar alternativas en el cálculo de la respuesta dinámica para definir de manera más explícita el nivel de vibración de un sistema de piso.

Propuesta de las Normas Técnicas Complementarias NTC-17 (2017)

En el caso del análisis por vibración de sistemas de piso de losacero, las NTCA-17 (2017) carecen de especificaciones para el cálculo de la respuesta dinámica máxima. En su lugar, establece que mediante el control de la f_n con la ec. (1.13)(AISC 1997) se evitan vibraciones excesivas. Como recomendación se propone limitar la deflexión estática a 5 mm para cualquier claro, con la finalidad de obtener una frecuencia alta, tal que mitigue los efectos de vibración por la actividad de las personas.

Por su parte, en las NTCC-17 (2017) de manera similar a la ec. (1.38), se proporciona el cálculo de la respuesta dinámica, pero en términos del desplazamiento, ya sea de manera analítica o experimental. Esta magnitud es parte del cálculo de un factor de sensibilidad K para el análisis y diseño de losas de concreto ante vibración debida a actividades rítmicas (como danza, conciertos, ejercicios a saltos o gimnásticos), el cual depende de la frecuencia natural f_n en Hz y del desplazamiento en mm, d , que provoca una carga dinámica actuante sobre la losa. Este factor de sensibilidad se determina con la ecuación siguiente:

$$K = \frac{d}{\sqrt{2}} \frac{f_n^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_n}{f_{10}}\right)^2}} \quad (1.40)$$

donde f_{10} es una frecuencia con un valor de 10 Hz. Se recomienda que para frecuencias f_n menores de 6 Hz es necesario realizar análisis dinámicos mediante modelos numéricos. En la Tabla 1.12 se relacionan los valores de K y la intensidad perceptible de vibración. Esta información fue proporcionada anteriormente mediante comunicación personal con González (2014).

Como se observa las NTCA-17 (2017) y NTCC-17 (2017) no cuentan con elementos para el cálculo de la respuesta dinámica. Es importante resaltar que la propuesta a las NTCC-17 (2017) no proporciona cómo calcular el desplazamiento d debido a una carga por actividades humanas y la f_n en la ec. (1.40), lo cual requiere de un estudio detallado para definir una carga dinámica actuante que represente actividades humanas, principalmente para el caminar de personas, así como de procedimientos o métodos prácticos para la obtención de la f_n .

Tabla 1.12 Percepción humana de vibraciones estructurales (tomada de las NTCC-17, 2017)

K	Clase	Percepción humana
$K < 0.10$	A	Imperceptible
$0.10 \leq K < 0.25$	B	Ligeramente perceptible
$0.25 \leq K < 0.63$	C	Perceptible
$0.63 \leq K < 1.60$	D	Fácilmente perceptible
$1.60 \leq K < 4.00$	E	Fuertemente perceptible
$4.00 \leq K < 10.00$	F	Muy fuertemente perceptible
$10.00 \leq K < 25.00$	G	
$25.00 \leq K < 63.00$	H	
$63.00 \leq K$	I	

1.2.5 Escalas de evaluación de la vibración vertical ante el caminar de personas

En las propuestas de la BS 6472 (2008), la comisión europea (Feldmann *et al.*, 2009) y NTC-17 (2017) se tiene una relación directa entre el cálculo de la respuesta dinámica y parámetros para establecer un nivel de comodidad que se basa en coeficientes o factores. Sin embargo, también existen procedimientos donde la respuesta dinámica de un sistema de piso se obtiene independientemente y después es evaluada con base en nomogramas de comodidad. Estos nomogramas están representados principalmente por gráficas que proporcionan límites de aceleraciones, velocidades o desplazamientos.

Los nomogramas se basan en la dirección de incidencia en el cuerpo humano, como se observa en la Figura 1.9, donde el eje de referencia principal es z , que corresponde al eje de la columna vertebral. Los nomogramas varían dependiendo el eje de referencia que se evalúa; en el caso de este trabajo, se utilizan las curvas que corresponden a la vibración vertical, para personas que están paradas o sentadas como se muestra en las Figuras 1.9a y 1.9b.

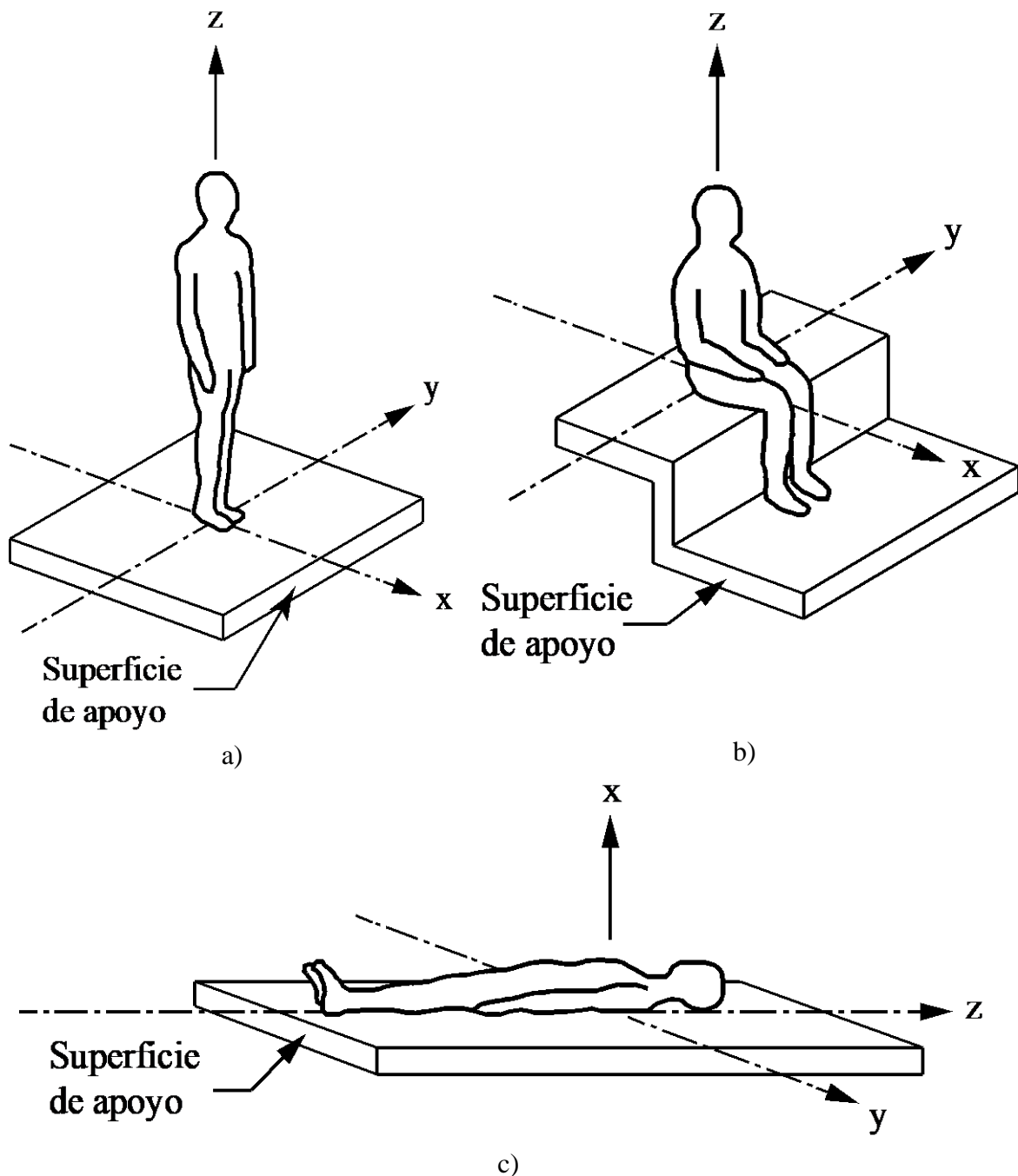


Figura 1.9 Dirección de la incidencia de la vibración en humanos: a) vertical (de pie), b) vertical (sentado) y c) lateral (horizontal) (adaptado de HIVOSS, 2007)

Algunos ejemplos de criterios para el control de vibración en sistemas de piso con base en (AISC, 1997), fueron los desarrollados por Reiher y Meister (1931), Lenzen (1966), Wiss y Parmelee (1974), Murray (1975) y Allen y Rainer (1976). Los criterios de escala en la respuesta humana más utilizados en la literatura son: la escalas de Reiher-Meister modificada (1931) y el criterio de la International Standard Organization (ISO, 1989). En general, estos criterios para regular la vibración de los sistemas de piso dependen de su f_n y del

desplazamiento o pseudo-aceleración máximas registradas como se muestra en la Figuras 1.10a y 1.10b.

En Europa es común utilizar criterios de aceleración a_{rms} , donde la respuesta máxima de un sistema de piso es representada por un factor adimensional, como se muestra en HIVOSS (2007). Ejemplos de estos criterios son los propuestos por ISO (1989) y DIN-4150 (1975), como se muestra en la Figura 1.10 y Tabla 1.13. En general se pueden utilizar ambos criterios, teniendo en cuenta que el criterio de aceleración máxima considera los picos máximos en la respuesta; mientras que, el criterio a_{rms} determina una magnitud que básicamente es la energía desarrollada en la respuesta (Hicks, 2004 y Smith, *et al.*, 2007). Cabe mencionar que existen otros criterios de evaluación de perceptibilidad de la vibración ante el caminar de personas. Sin embargo, se utilizan los más representativos como parte de un inicio en la evaluación de sistemas de piso en este trabajo.

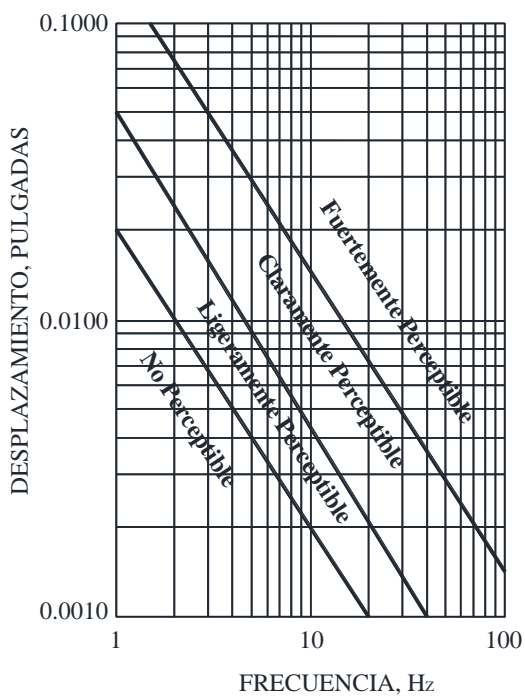
En general, en el ámbito del análisis de sistemas de piso ante vibración debida a actividades humanas, la mayoría de los procedimientos de análisis y diseño se basan principalmente en el análisis de S1GDL por su practicidad tanto en la definición del modelo dinámico como en el análisis de su respuesta. Dado que las especificaciones de diseño que se mencionan en este capítulo aplican principalmente para el análisis de sistemas de losacero, es posible utilizar como base estos procedimientos para generar recomendaciones de otros sistemas de piso, de tal manera que proporcione al diseñador una introducción sobre este tipo de análisis, así como una sensibilidad sobre el comportamiento de la respuesta dinámica.

De manera análoga a lo proporcionado en las especificaciones de la Comisión Europea (2009), se tiene que la ec. (1.40) (NTCC-17, 2017) es similar a las ecs. (1.36) y (1.38); en ella se tiene unidades de desplazamiento, por lo que, el resto del término es un factor que genera un desplazamiento rms . Cabe señalar que, en la ec. (1.40) no se tiene una certeza sobre el comportamiento de la respuesta dinámica que puede ocurrir en el sistema de piso a lo largo del tiempo, lo cual es necesario para proporcionar cierta sensibilidad al diseñador. Esto puede ser de utilidad para el análisis ante vibración en sistemas de piso.

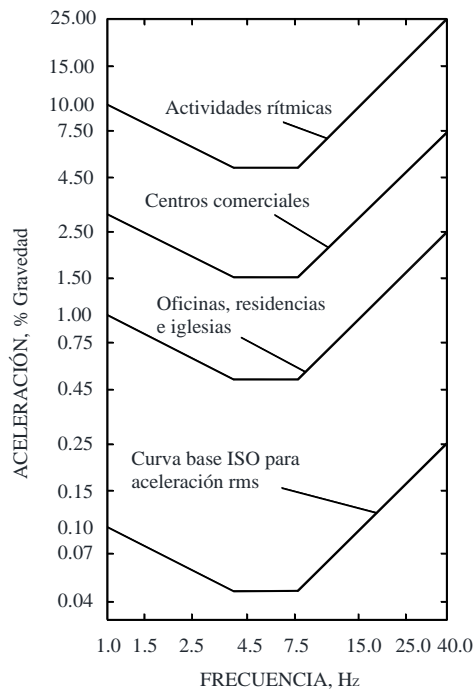
Es importante destacar que la Comunidad Europea proporciona recomendaciones distintas para el análisis dinámico de sistemas de piso respecto a lo propuesto por el AISC (1997), pues se utilizan valores rms en el análisis de la respuesta. Esta consideración es importante debido a las incertidumbres que pueden existir en la respuesta dinámica de un sistema de piso. Sin embargo, el obtener la respuesta dinámica máxima proporciona sensibilidad sobre las magnitudes que pueden presentarse en un sistema de piso.

Tabla 1.13 Escalas de aceptabilidad de la vibración vertical en sistemas de piso (adaptado de Hicks, 2004)

Lugar	Tiempo	Múltiplos de curva ISO (1989)		Valor de Factor KB DIN 4150-2 (1975)	
		Vibración continua	Vibración transitoria	Vibración continua	Vibración transitoria
Trabajos críticos	Día	1	1	0.1-0.6	4-12
	Noche	1	1	0.1-0.4	0.15-0.4
Residencial	Día	2-4	60-90	0.2	4
	Noche	1.4	20	0.15	0.15
Oficinas	Día	4	128	0.4	12
	Noche	4	128	0.3	0.3
Industrial	Día	8	128	0.6	12
	Noche	8	128	0.4	0.4



a)



b)

Figura 1.10 Escalas de aceptación en análisis de vibración: a) desplazamiento (Reiher-Meister modificada, 1931), b) aceleración (ISO, 1989), c) aceleración RMS (ISO, 1989) y d) aceleración RMS (DIN 4150-2, 1975)

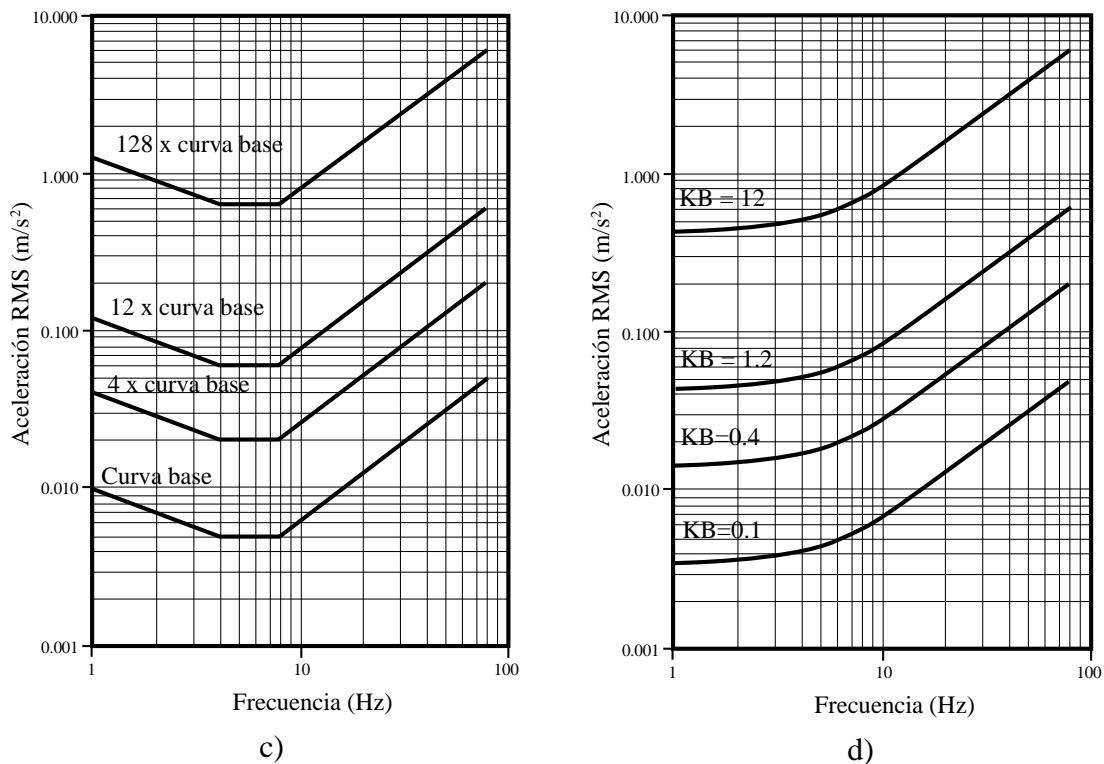


Figura 1.10. Continuación de Figura

1.2.6 Análisis experimental y numérico de sistemas de piso ante vibración debida a actividades humanas

Aunado a lo mencionado en la sección 1.2.1, existen otras alternativas para obtener la respuesta dinámica de un sistema de piso ante vibración y es mediante el análisis experimental y numérico. Con el análisis experimental se registra la magnitud y el comportamiento de la respuesta dinámica de una estructura en tiempo real y a partir de ello se procesan los datos obtenidos. Por su parte, el análisis numérico es un procedimiento que se basa en conceptos de la mecánica computacional para analizar el sistema estructural y así resolver su ecuación de movimiento de manera suficientemente aproximada; comúnmente este procedimiento tiene como objetivo la calibración de modelos numéricos con mediciones experimentales, lo cual lo hace una herramienta de gran utilidad para el análisis de los distintos parámetros que intervienen en el estudio de sistemas de piso.

Un ejemplo de modelado numérico para estudiar sistemas de piso es Chen y Aswad (1994), quienes estudiaron una losa construida con secciones de concreto doble T prefabricadas, como la que se muestra en la Figura 1.11, la cual se modeló con el método de elementos finitos. El estudio consiste en un análisis modal para una losa con 23.32 m de longitud, que está soportada por 17 traveses de sección T. Los bordes se representaron como apoyos simples; tanto en la losa como en las vigas se utilizaron secciones equivalentes. El mallado del modelo

se realizó con elementos lámina de cuatro nodos, los cuales también trabajan como membrana.

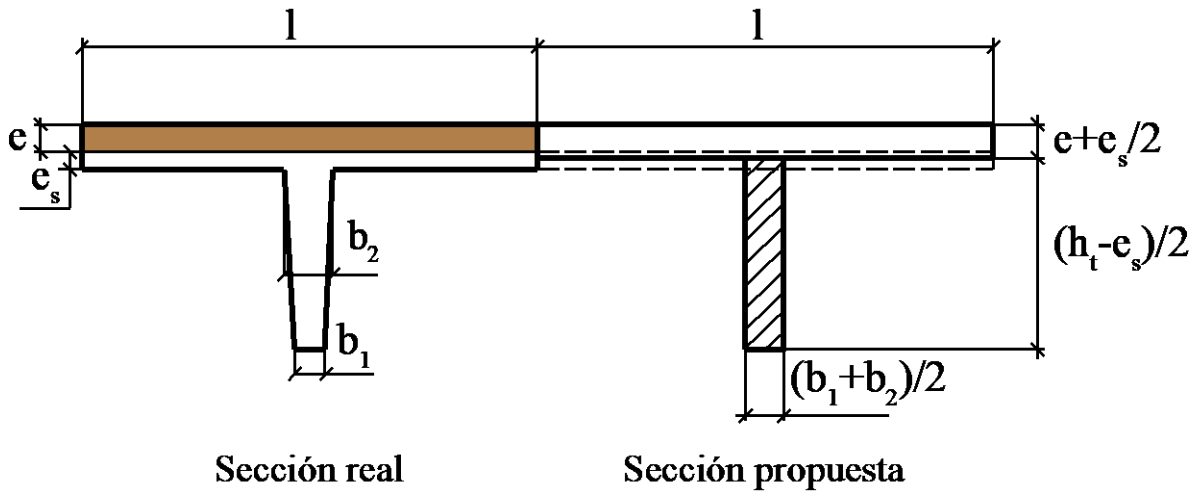


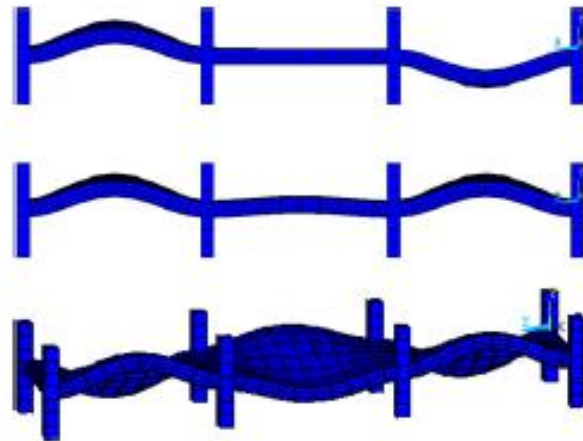
Figura 1.11. Sección de losa prefabricada (adaptado de Chen y Aswad, 1994)

Una carga dinámica inmóvil de tacón se aplicó en el centro del claro de los modelos numéricos realizados con el fin de determinar las variables que más influyen en el comportamiento del sistema, tales como las dimensiones de cada elemento estructural, el amortiguamiento, peso específico del material, rigidez, así como el tamaño de los elementos de la malla. En general, se resalta la importancia del estudio de las variables que influyen en la respuesta dinámica de un sistema de piso en la evaluación de la comodidad de las personas, donde la relación de amortiguamiento es el parámetro que influye principalmente en la respuesta del sistema de piso. Además, se destaca el uso secciones de geometría regular como una equivalencia en el modelado de elementos con sección variable en sistemas de piso, como se muestra en la Figura 1.11. Por lo tanto, los elementos que aquí se mencionan representan una base en el modelado de sistemas de piso para los objetivos de este trabajo.

Brownjohn y Middleton (2008) evaluaron del efecto de vibración en sistemas de piso con frecuencias naturales altas sujetas a la actividad de personas. El análisis se realizó a una losa existente de concreto reforzado del Politécnico de Singapur y a un modelo hipotético como se muestra en la Figura 1.12.

El análisis consistió en aplicar a la losa un impulso efectivo como lo muestra el reporte técnico 43 de la Sociedad del Concreto CSRT-43; (Pavic y Willford, 2005), el impulso se representa mediante la ecuación siguiente:

$$I_{eff} = Af^{1.43} / f_n^{1.3} \quad (1.41)$$

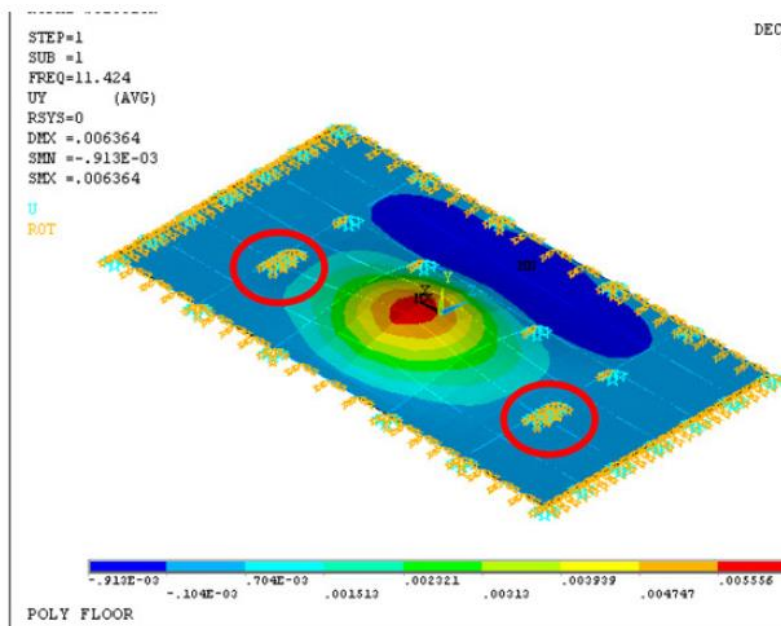


a)

b)

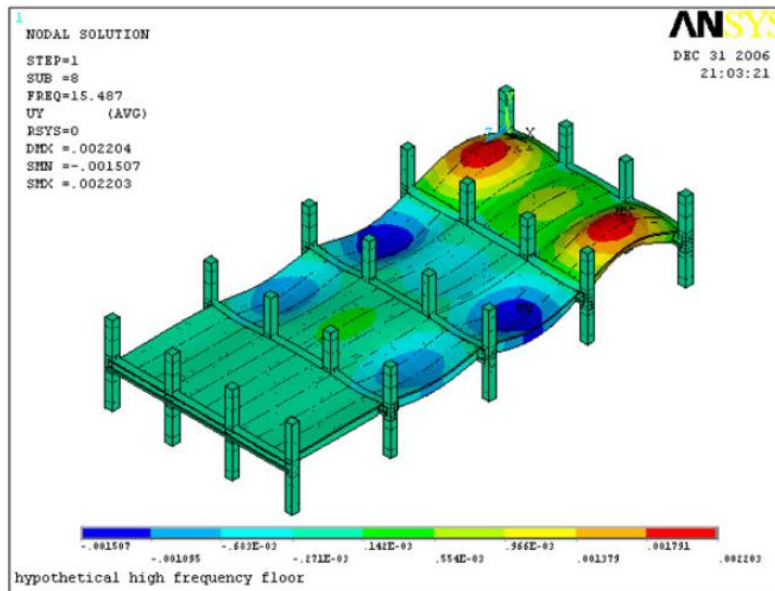
Figura 1.12. Sistemas de piso: a) losa existente del politécnico de Singapur y b) modelo hipotético de losa de 3 claros (tomado de Brownjohn y Middleton, 2008).

donde A es un valor estadístico de 54 Newtons, f es la tasa de variación de la carga en Hz y f_n es la frecuencia del sistema de piso en Hz, respectivamente. Se realizaron modelos numéricos de los dos sistemas de piso, de los cuales se obtuvieron sus modos de vibrar como se muestra en la Figura 1.13; en el modelado se aplicaron impulsos en todos los nodos utilizando una frecuencia de carga de 2 Hz.



a)

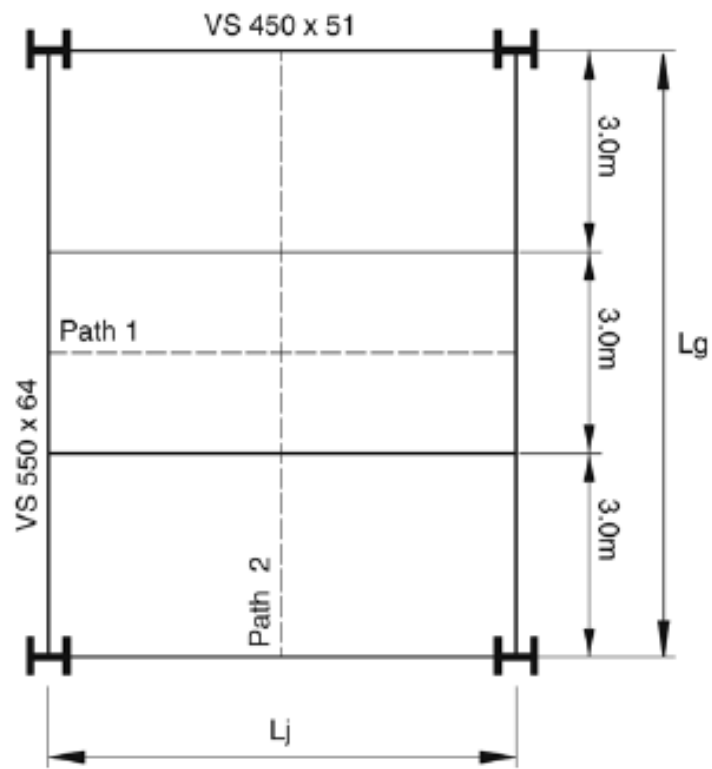
Figura 1.13. Modelos numéricos de losas en estudio: a) losa existente y b) losa hipotética de 3 claros (tomado de Brownjohn y Middleton, 2008).



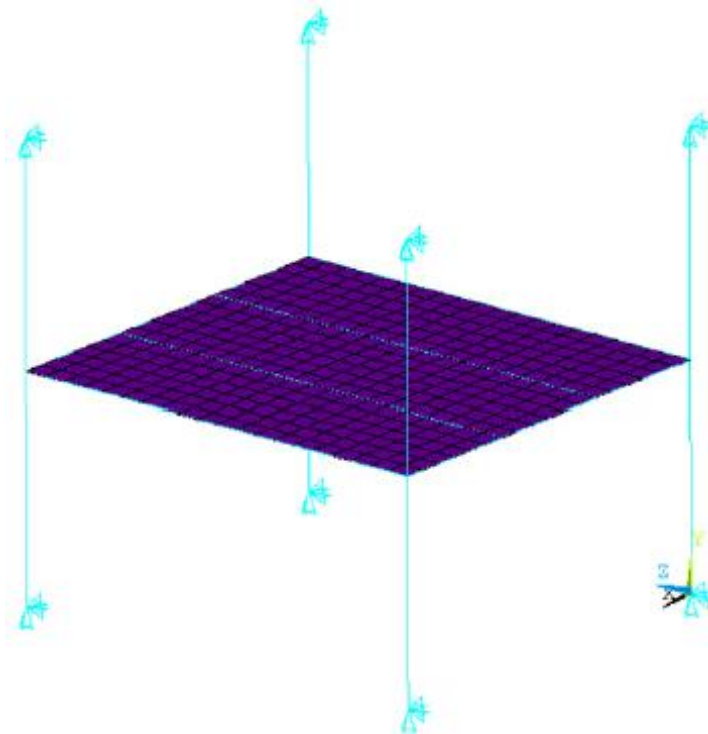
b)

Figura 1.13. Continuación de Figura

Mello *et al.* (2008) presentan una metodología de análisis para la evaluación de la comodidad de las personas en sistemas de piso compuesto acero/concreto. Para incorporar los efectos debidos al caminar de personas, se utilizan modelos de carga distintos a los establecidos en el código AISC (1997). Se realizaron cuatro modelos, cada uno con distintas fuerzas aplicadas. El primer modelo se realizó con la carga de la ec. (1.18), proporcionada por el AISC (1997). La frecuencia de la carga multiplicada por un valor entero de 4, en el cuarto armónico, fue igual a la frecuencia del sistema y se aplicó en la zona de amplitud modal más alta. El peso individual P de una persona fue tomado como 700 N (71.38 kg). Para el segundo modelo, se utilizó la carga dada en la ec. (1.17), también proporcionada por el AISC (1997), la cual se aplicó en la misma zona que el primer modelo. Dicha carga es una combinación de carga estática y fuerzas armónicas representadas por series de Fourier. En el tercer modelo, la carga que se aplicó es la de la ec. (1.17). Sin embargo, para este modelo en particular, la posición de la carga dinámica cambia de acuerdo a la posición del individuo, por lo que se toma en cuenta el tiempo de contacto de la fuerza y sus intervalos de aplicación. En el cuarto modelo, se utilizaron cargas dinámicas armónicas similares a las anteriores, la única diferencia es que en éstas se incorpora el efecto de una carga de impacto dada en la ec. (1.21) (Varela, 2004). En el modelo numérico, las vigas principales se modelaron con elementos viga que incluyen efectos de flexión y torsión. La losa compuesta se modeló con elementos lámina.



a)



b)

Figura 1.14. Modelo numérico de losa: a) sistema estructural y b) modelo con elementos finitos (tomado de Mello *et. al.*, 2008).

En general, para los modelos realizados, como el de la Figura 1.14, se utilizó un amortiguamiento de $\beta=0.03$, los coeficientes dinámicos y ángulos de fase se obtuvieron de tablas reportadas por Mello *et. al.*, (2008). Al modelar las cargas dinámicas con cambio en la posición, se exceden los valores límites en términos de la aceleración máxima que propone el código AISC (1997) e ISO (1989). Además, se enfatiza la necesidad de profundizar en el estudio de otros parámetros de diseño tales como: espesor de losa, amortiguamiento y propiedades geométricas de vigas. En resumen, este trabajo es un ejemplo práctico de la aplicación de funciones de carga representativas del caminar de personas donde se muestra la necesidad de evaluar las distintas cargas dinámicas reportadas en la literatura con el fin de representar adecuadamente el caminar de personas.

De silva y Thambiratnam (2009) estudiaron el comportamiento de un sistema de piso compuesto acero/concreto multi-panel, mostrado en la Figura 1.15, en el que actúa la actividad de un grupo de personas. El modelado del sistema se realizó con el programa ABAQUS/ Standard Version 6.4, el concreto se modeló con elementos sólidos hexaedros de ocho nodos. Por otra parte, las láminas de acero se modelaron con elementos lámina 2D, como se muestra en la Figura 1.16. Se consideró acoplamiento perfecto entre los elementos lámina y los elementos sólidos.

Debido a que las actividades producidas por grupos de personas que bailan o brincan generan fuerzas dinámicas más grandes que las debidas al caminar o correr de un peatón, se usó la carga de la ec. (1.42) (Ellis, 1994),

$$F(t) = \begin{cases} \left(\frac{\pi Q}{2\alpha}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi t}{t_p}\right) & 0 \leq t \leq t_p \\ F(t) = 0 & 0 \leq t \leq t_p \end{cases} \quad (1.42)$$

donde Q es el peso por unidad de área, t_p es la duración del contacto, T_p es la duración de la actividad humana y $\alpha = t_p/T_p$ es la relación de contacto. Se propusieron 2 intensidades de carga Q , de 0.2 kPa (20 kg/m²) y 0.4 kPa (40 kg/m²) con densidades de 3.5 y 1.75 personas/m², tomando en cuenta un peso promedio de persona de 70 kg. En el caso del amortiguamiento, se utilizaron valores empíricos mínimos entre 1.6 y 3.0%, así como valores máximos entre 6 y 12%. Se obtuvo la respuesta de los 4 paneles ante vibración libre con el fin de obtener sus modos de vibración. Posteriormente se aplicaron las cargas en los distintos tableros como cargas distribuidas. Se realizó una evaluación de la susceptibilidad a vibraciones excesivas donde se observó que las aceleraciones son mayores a los límites establecidos por el AISC (1997). Por otra parte, se considera necesario evaluar la vibración en términos de deflexión y aceleración de manera conjunta, así como utilizar funciones de carga dinámica realistas. Esto muestra la necesidad de profundizar en la evaluación de fuentes de excitación en análisis por carga rítmica.

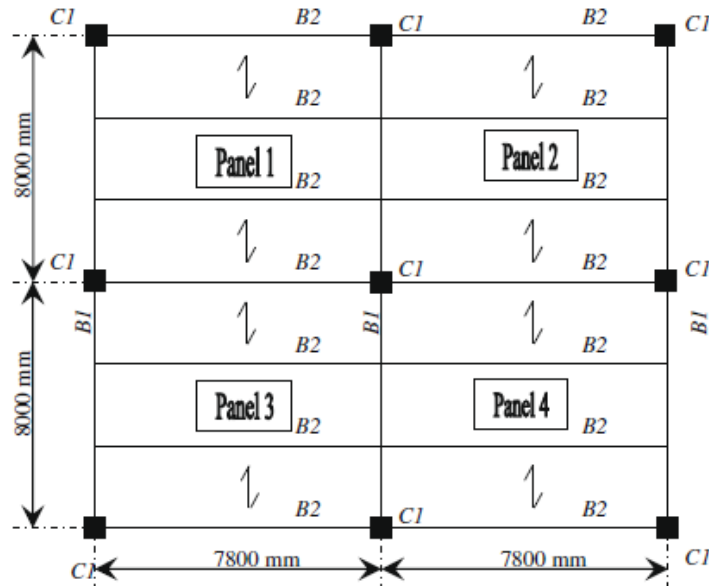


Figura 1.15. Modelo estructural (tomado de De Silva y Thambiratnam, 2009).

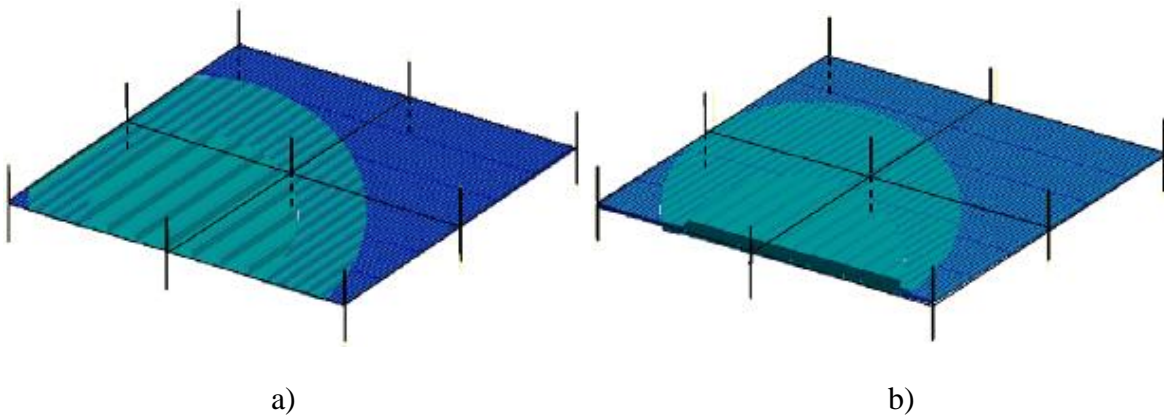


Figura 1.16. Modelado de sistema compuesto con elementos tipo: a) lámina y b) sólidos (tomado de De Silva y Thambiratnam, 2009).

Varela y Battista (2011) realizaron pruebas en una losa compuesta concreto-acerado apoyada sobre una armadura de acero como se muestra en la Figura 1.17, la cual se monitoreó ante diferentes tipos de actividad humana. Dada la necesidad de controlar los niveles de vibración del sistema de piso, se le instaló un sistema de control pasivo. En este experimento se realizaron dos tipos de prueba: vibración libre y vibración forzada. La primera se realizó mediante impactos de una carga de tacón para obtener frecuencias naturales, así como relaciones de amortiguamiento. Por su parte, la prueba de vibración forzada se realizó con fuentes de excitación debidas a la actividad de una sola persona y de un grupo de personas, donde se obtuvo la respuesta dinámica del sistema de piso con y sin dispositivo de control pasivo. El monitoreo de la prueba se realizó mediante el arreglo de sensores que se muestra en la Figura 1.18, donde se observa la ubicación del dispositivo de control (TMD), así como la distribución de los sensores de aceleración, cuyo objetivo es registrar los modos de vibración 1, 2 y 3.



Figura 1.17. Losa compuesta de concreto-acero para prueba de vibración ante actividades humanas (tomada de Varela y Battista, 2011).

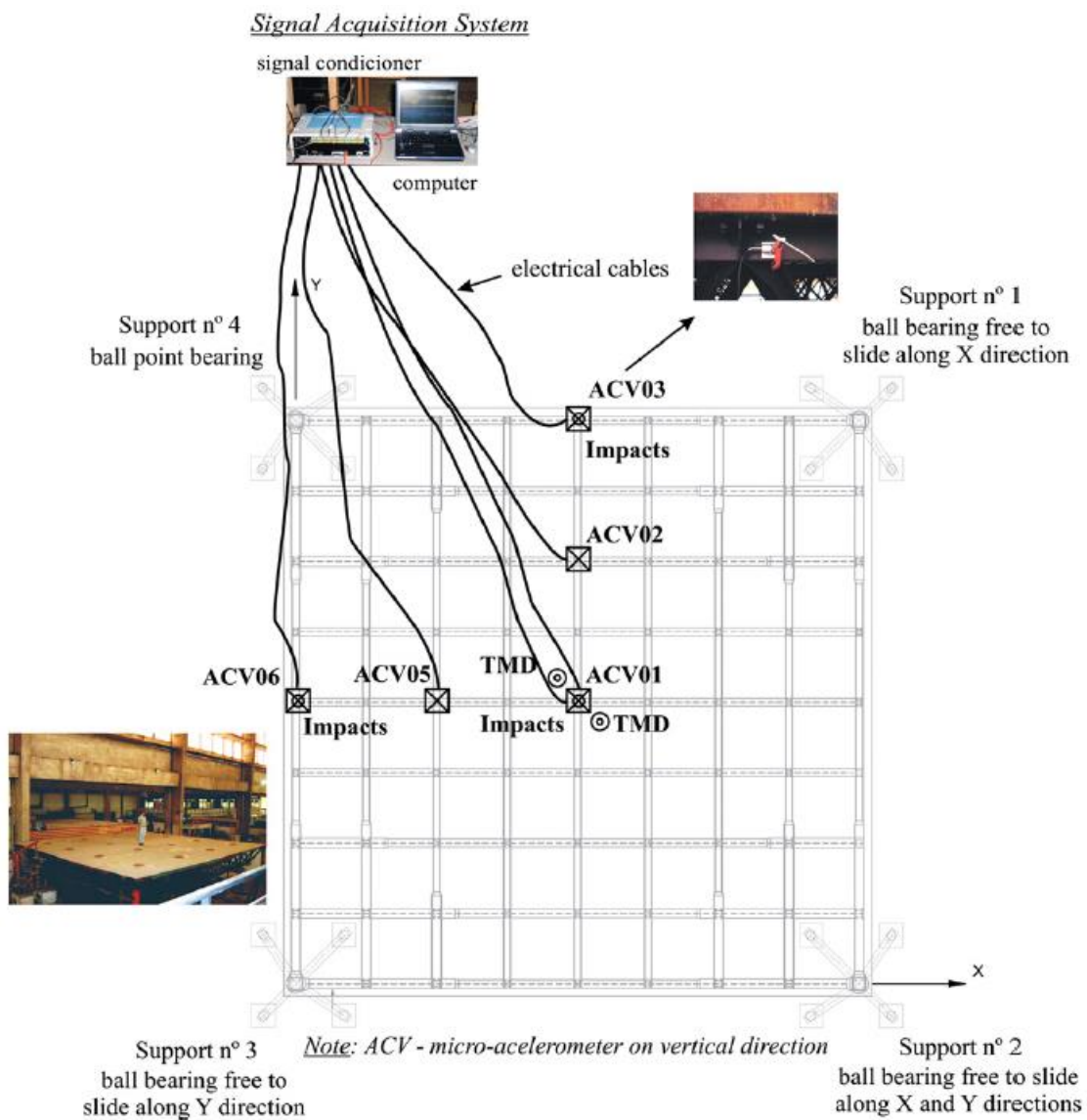


Figura 1.18. Esquema de arreglo de sensores de aceleración y zonas de aplicación de carga de tacón en la losa de prueba (tomada de Varela y Battista, 2011).

En la prueba de vibración forzada, las cargas aplicadas se definieron en tres tipos: caminar de una persona, caminado uniforme de un grupo de personas y caminado aleatorio de un grupo de personas como se observa en la Figura 1.19. En esta prueba se realizaron registros de aceleración tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia y se compararon resultados. Con base en los resultados obtenidos se destaca la importancia y la factibilidad de utilizar dispositivos de control pasivo para el control de vibraciones en sistemas de piso.

De este estudio cabe señalar aspectos que son importantes en el análisis de sistemas de piso ante vibración debida a actividades humanas como la importancia de la elección de las fuentes de excitación, ya que comúnmente se tiene como fin abarcar las demandas de vibración posibles que pueden suceder durante la vida útil del sistema de piso; y la definición de la trayectoria de las cargas sobre el sistema para proporcionar una mejor aproximación en el monitoreo y en la definición de la respuesta dinámica.



a)



b)



c)

Figura 1.19. Prueba de losa ante distintas actividades humanas: a) caminar de persona, b) caminar uniforme de un conjunto de personas y c) caminado aleatorio de un conjunto de personas (tomada de Varela y Battista, 2011).

Araújo y Vieira (2014) evaluaron el comportamiento de losas encasetonadas debido a actividades humanas rítmicas. Las losas se modelaron con el método de los elementos finitos utilizando el programa SAP2000 (CSI, 2009). Estos autores realizaron tres modelos que corresponden al diseño típico de un sistema de piso reticular de concreto reforzado, como se muestra en la Figura 1.20. Las características geométricas en las tres losas se muestran en la Figura 1.21. Cada losa fue modelada con elementos finitos sólidos de ocho nodos.

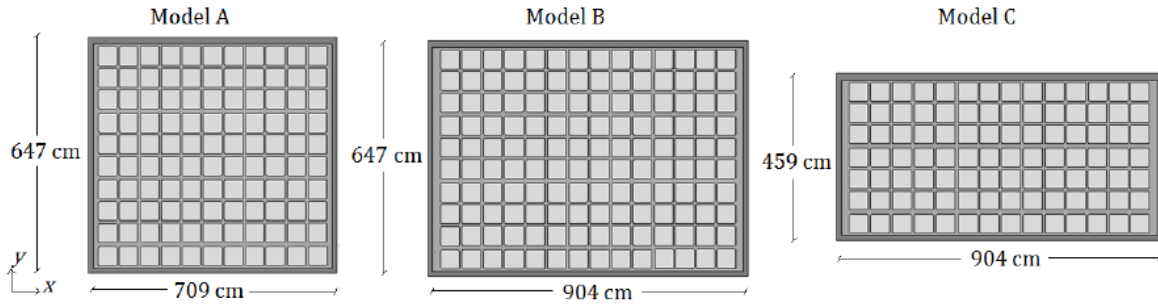


Figura 1.20. Modelos de losa reticular (tomada de Araújo *et al*, 2014).

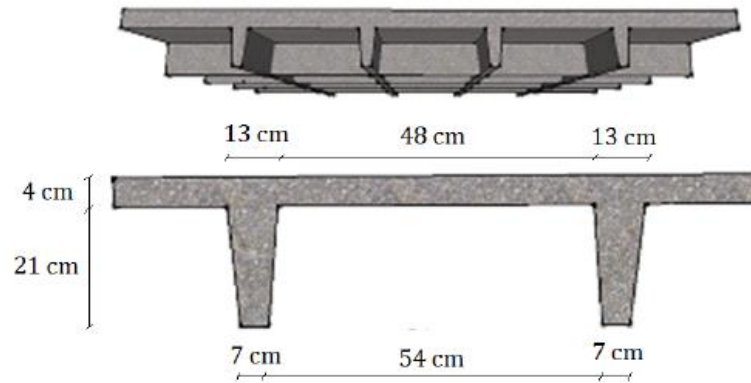


Figura 1.21. Características geométricas de nervaduras (tomada de Araújo y Vieira, 2014).

Para incluir el efecto de las cargas producidas por actividades rítmicas en el modelo numérico, se utilizó la función de carga dinámica definida en la ec. (1.20), w_p es igual a 81.54 kg; se obtuvieron cuatro magnitudes de carga modificando los coeficientes α_i y ϕ_i y se utilizaron densidades de entre 0.25 y 0.5 personas/ m². La carga obtenida se aplicó uniformemente distribuida en la superficie de la losa con una frecuencia de excitación de 3 Hz ante distintas densidades de personas, como se muestra en la Figura 1.22.

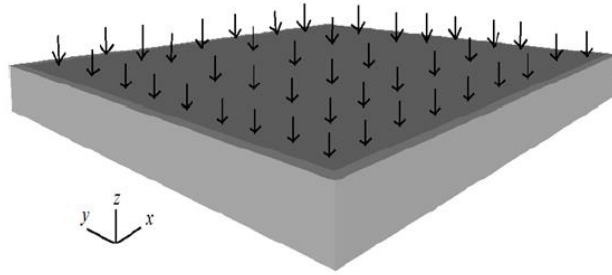


Figura 1.22. Carga distribuida en la losa (tomada de Araujo y Vieira, 2014)

De acuerdo a los resultados que se obtuvieron con base en una escala para el control de vibraciones incómodas establecida por Bachmann *et al.* (1995), se tiene que, ante las cuatro cargas dinámicas impuestas, los modelos A, B y C exceden el límite de aceleración con valor de 180 cm/s^2 . El mismo resultado se tiene al utilizar la escala propuesta por Goldman y Gierke (1976), pues se exceden los límites de aceleración permisibles. Este estudio es un ejemplo práctico del análisis numérico de un sistema de piso ante actividades humanas, donde se observa la necesidad de analizar sistemas de piso aligerados, así como su evaluación ante vibraciones incómodas.

Liu *et al.* (2017) realizaron un estudio experimental y numérico con base en el método de elementos finitos de una losa de concreto aligerada prefabricada como se muestra en la Figura 1.23. El objetivo de este estudio es obtener recomendaciones del modelado de este tipo de sistemas mediante su calibración con resultados experimentales. Para ello, se determinaron las frecuencias naturales, factores de amortiguamiento y modos de vibración con base en pruebas de vibración forzada ante dos tipos de excitación: martillo de impacto y un excitador de vibración.



a)



b)

Figura 1.23. Losa aligerada con huecos: a) losas y b) colocación de especímenes (tomada de Liu *et al.*, 2017)

En este experimento se colocan los especímenes uno al lado del otro, para apoyarse sobre una estructura de acero. Se propusieron tres fases de apoyo: 1) la unión entre cada espécimen fue colada *in situ*, mas no así la capa de compresión, 2) la capa de compresión fue colada *in situ* y 3) se removieron las columnas intermedias que se observan en la Figura 1.23b. Para cada fase se realizaron las pruebas de excitación mencionadas. De cada espécimen se

obtuvieron las respuestas en términos de la aceleración máxima, cuyos valores son de aproximadamente 150 cm/s^2 , así como las propiedades dinámicas correspondientes, donde para el caso del martillo de impacto se obtienen valores de la frecuencia natural fundamental de 6.31, 6.82 y 6.09 Hz para las fases 1, 2 y 3, respectivamente; mientras que para el excitador de vibración se obtienen valores de la frecuencia natural fundamental de 6.31, 6.89 y 6.14 Hz para las fases 1, 2 y 3, respectivamente. Posteriormente, se realizó un modelo numérico, donde se utilizaron elementos sólidos para modelar los especímenes de losa aligerados, así como sus juntas; mientras que para la capa de compresión se utilizaron elementos lámina, como se muestra en la Figura 1.24. Cabe señalar que el soporte de acero también fue modelado con elementos lámina alrededor de la losa.

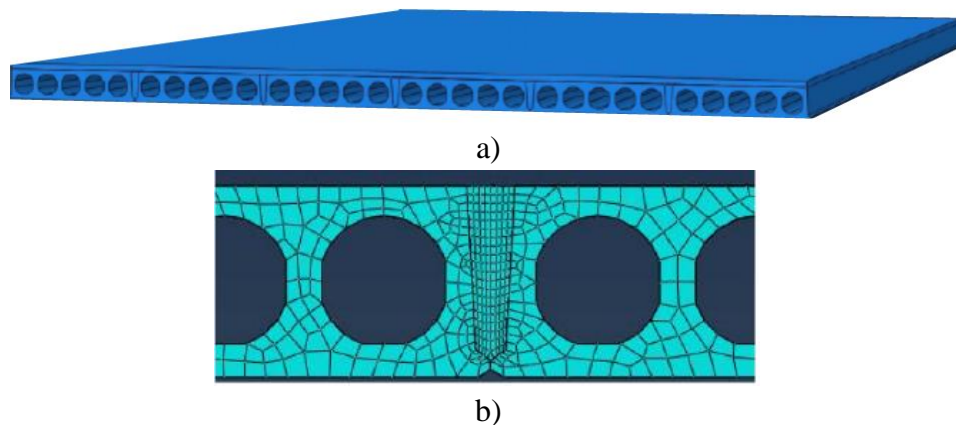


Figura 1.24. Modelado numérico de losa aligerada con huecos: a) losa completa y b) juntas entre especímenes aligerados (tomada de Liu, *et al.*, 2017)

Con base en comparaciones realizadas entre modelos numéricos y experimentales se observa que para cuatro modos de vibración obtenidos existe una diferencia menor del 5%, excepto para los modos 3 y 4 de la fase 3. A pesar de que este trabajo tiene como fin el estudio de determinados parámetros, se enfatiza la adecuada aproximación de las propiedades dinámicas obtenidas en el modelo numérico. Este trabajo es un aporte importante en el análisis de vibración de losas aligeradas, cuyos elementos componentes en su mayoría son prefabricados. Dada las características dinámicas de este tipo de sistemas es necesario profundizar en su desarrollo experimental, así como en el desarrollo propuestas de modelado numérico para estudios de aproximación adecuada. Por otra parte, cabe destacar que en el análisis de losas que contienen elementos prefabricados requieren estudios detallados de sus posibles fuentes de excitación durante su uso y de la influencia de las condiciones de borde sobre las que éstas se apoyan.

En general, para el análisis por vibración de sistemas de piso existen varios procedimientos y métodos para calcular la f_n y la respuesta máxima, ya sea analítica, numérica o experimentalmente, incluyendo funciones matemáticas para representar las actividades humanas como una carga dinámica. Por lo que, en este trabajo se toma como base estos elementos para definir métodos prácticos para evaluar la vibración en sistemas de piso de vigueta y bovedilla y losas macizas de concreto reforzado. Se busca que estos métodos sean

prácticos y sencillos, que no requieran de modelos numéricos complejos, pero que proporcionen diseños seguros.

1.3 Justificación

El efecto de vibración vertical en sistemas de piso debido a actividades humanas es un fenómeno que ha sido evaluado mediante metodologías orientadas principalmente a sistemas de piso de losacero. Existen algunas recomendaciones para otras tipologías de sistemas de piso; sin embargo, algunos de estos sistemas requieren de estudios más detallados como se reporta en los trabajos numérico-experimentales de la sección 1.2.6; ejemplo de ello son las losas de concreto reforzado y las losas de vigueta y bovedilla de poliestireno, dos de los sistemas más utilizados en México. Dada esta necesidad es preciso desarrollar recomendaciones para la definición de variables como: la f_n , la carga dinámica, la relación de amortiguamiento, la respuesta dinámica y el uso de escalas de regulación de la vibración.

En el caso de la f_n existen procedimientos para su cálculo en sistemas de piso de losacero, donde se tiene como base el análisis dinámico de vigas o placas homogéneas con bordes infinitamente rígidos. Sin embargo, para otros tipos de sistemas es necesario desarrollar procedimientos prácticos para obtener f_n , sobre todo cuando los apoyos son flexibles. Por otra parte, en el caso de la carga dinámica, existen funciones definidas para representar actividades humanas como se resume en la sección 1.2.2. Sin embargo, es importante validar estas funciones con pruebas experimentales principalmente para su utilización como se comenta en la sección 1.2.6. En cuanto a la relación de amortiguamiento, es necesario estudiar su comportamiento en otros tipos de sistemas de piso distintos a la losacero.

La respuesta dinámica es un parámetro necesario para evaluar la vibración en sistemas de piso distintos a la losacero; un ejemplo de ello son las especificaciones ANIVIP (2013) y las NTCC-17 (2017), las cuales no cuentan con elementos para el cálculo de la respuesta dinámica en losas de vigueta y bovedilla y de concreto reforzado, respectivamente. Es importante resaltar que en la propuesta de las NTCC-17 (2017) no se proporciona cómo calcular el desplazamiento d debido a una carga por actividades humanas. Por lo tanto, es necesario desarrollar procedimientos o expresiones prácticas para calcular la respuesta dinámica teniendo en cuenta la necesidad de sensibilizar al diseñador con el comportamiento dinámico de un sistema de piso. En cuanto a la regulación de la vibración, las escalas que existen en la literatura se basan en estudios realizados en Europa y parte de Norteamérica principalmente, donde los criterios de percepción de la vibración están completamente definidos. Por lo que, es importante desarrollar escalas para la regulación de la vibración ante actividades humanas para otros lugares o regiones donde las personas posiblemente tengan distintos criterios de perceptibilidad.

1.4 Objetivos

1.4.1 Generales

Desarrollar recomendaciones para el análisis y diseño ante vibración debida a actividades humanas de losas macizas de concreto reforzado y losas de vigueta y bovedilla de poliestireno con base en estudios analíticos, numéricos y experimentales.

1.4.2 Particulares

- Desarrollar expresiones prácticas para el cálculo de la f_n de losas de concreto reforzado apoyadas sobre bordes rígidos y flexibles considerando un material homogéneo e isótropo.
- Plantear recomendaciones para el control de la f_n de losas macizas de concreto reforzado, como parámetro principal para modificar la respuesta dinámica ante actividades humanas.
- Evaluar los procedimientos que se utilizan actualmente en México para el análisis por vibración de sistemas de piso de concreto reforzado y vigueta y bovedilla ante actividades humanas, a partir de una comparativa entre estudios analíticos, numéricos y experimentales.
- Estudiar experimentalmente el comportamiento de la respuesta dinámica en una losa maciza de concreto reforzado ante distintas condiciones de actividad humana.
- Calibrar una función de carga dinámica debida al caminar de personas con los resultados de un estudio numérico-experimental de una losa maciza de concreto reforzado ante vibración.
- Desarrollar una expresión práctica para la obtención de la respuesta dinámica en términos de la aceleración, velocidad y desplazamiento de losas macizas de concreto reforzado ante el caminar de personas.
- Proporcionar una metodología de análisis y diseño ante vibración debida al caminar de personas en losas macizas de concreto reforzado.

2 FRECUENCIA NATURAL FUNDAMENTAL DE LOSAS DE CONCRETO REFORZADO EN DOS DIRECCIONES

2.1 Introducción

La frecuencia natural es una variable necesaria para la evaluación de la vibración de un sistema de piso, ya que depende de las propiedades mecánicas de los materiales, geometría y condiciones de borde del sistema. En el caso de los sistemas de piso, la frecuencia natural se obtiene del análisis dinámico de placas con base en la teoría elástica. Ante la necesidad de profundizar en el estudio de este tema, se han desarrollado estudios para placas como los que se describen a continuación.

Cox and Benfield (1959) determinaron una solución aproximada para la ecuación diferencial que describe el movimiento de una placa elástica uniforme que se apoya sobre vigas en sus cuatro bordes y apoyo simple en las esquinas. Esta aproximación se determinó con el método de diferencias finitas y algunas relaciones de rigidez y masa entre los elementos viga y placa. Esta solución es válida sólo para placas cuadradas apoyadas sobre vigas, las cuales tienen las mismas propiedades geométricas. Petyt and Mirza (1972) utilizaron el método de elementos finitos basado en desplazamientos para calcular las frecuencias naturales de losas cuadradas apoyadas sobre columnas. Los resultados numéricos de las primeras seis y diez frecuencias de las losas tienen una aproximación aceptable con otras soluciones teóricas y mediciones experimentales. Leissa (1973) obtuvo resultados analíticos para el análisis de placas rectangulares ante vibración libre. Estos resultados consideran veintiún casos de placas con bordes empotrados, simplemente apoyados y libres. Para resolver la ecuación diferencial, la cual corresponde a una placa elástica uniforme, se utiliza el método de Ritz para aproximar la solución. Gorman (1978) desarrolló una solución analítica para el análisis ante vibración libre de una placa rectangular con bordes simples y un apoyo inelástico en diagonal. La solución analítica es equivalente a una serie de funciones doble seno. Blevins (1979) proporciona soluciones para el cálculo de la frecuencia natural de placas con apoyos rígidos empotrados, simples o libres y para la combinación de éstos. Elishakoff and Sternberg (1980) obtuvieron soluciones para el análisis ante vibración libre de placas delgadas isotrópicas, las cuales se apoyaron sobre bordes atiesados paralelos en una dirección y sobre apoyos simples paralelos en la otra dirección, así como la combinación de estos apoyos. Warburton and Edney (1984) obtuvieron soluciones aproximadas para el análisis de placas rectangulares con bordes flexibles. Para resolver la ecuación diferencial, la cual corresponde a una placa elástica con bordes flexibles, se utiliza el método de Rayleigh-Ritz como método de aproximación. Bapat and Venkatramani (1988) llevaron a cabo un estudio en placas sobre bordes flexibles, donde se identifican valores de flexibilidad para definir de las condiciones de borde. Estos autores recomiendan coeficientes de flexibilidad del orden de 10^{-4} para simular apoyos simples y empotrados y un coeficiente del orden de 10^3 a 10^7 para simular bordes libres. Gorman (1990) desarrolló una solución general para la obtención de frecuencias y formas modales ante vibración libre de placas rectangulares que se apoyan sobre bordes elásticos. En este estudio se asume que las placas se apoyan sobre bordes con

rotación y traslación elástica uniforme. Levy (1991) desarrolló una técnica iterativa basada en el método de Dunkerley para obtener simultáneamente las frecuencias naturales de vibración de sistemas discretos. En este estudio se encontró que el método converge rápidamente cuando las frecuencias son distintas entre sí, de lo contrario converge lentamente. La utilidad del método se evaluó con la solución de distintos problemas basados en masas concentradas. Katabatake and Nagareda (1998) desarrollaron un método analítico simplificado para el análisis dinámico de placas elásticas con bordes viga. En este procedimiento de aproximación los apoyos viga fueron reemplazados con resortes rotacionales y traslacionales. Las soluciones analíticas simplificadas tienen una aproximación suficiente con resultados derivados del programa computacional MCS/NASTRAN, el cual se basa en el método de elemento finito. Zhou (2001) desarrolló una solución aproximada con el método de Rayleigh-Ritz para el análisis ante vibración de placas de Mindlin rectangulares considerando restricciones de traslación y rotación en sus bordes. En esta solución se utilizaron funciones viga de Timoshenko para describir el comportamiento de las placas mediante el análisis de una franja unitaria. La exactitud de este método se evaluó con estudios comparativos. Gorman (2003) desarrolló soluciones analíticas para el análisis de placas delgadas rectangulares apoyadas sobre vigas; se utiliza el método de superposición modal, donde se obtuvieron frecuencias naturales y modos de vibrar. Las soluciones analíticas se validaron con el análisis dinámico de dos sistemas viga-placa. Li (2004) desarrolló una solución aproximada con el método de Rayleigh-Ritz para el análisis de vibración de placas rectangulares con apoyos elásticos sobre sus bordes. El nivel de aproximación de las soluciones se evaluó con modelos numéricos para distintas condiciones de borde. Huang *et al.* (2010) llevaron a cabo análisis de vibración libre de placas rectangulares apoyadas sobre bordes con apoyo total o parcial a lo largo de su longitud. Las soluciones se obtuvieron transformando la ecuación diferencial de flexión en ecuaciones integrales que se resuelven con integración numérica trapezoidal. Estas soluciones numéricas se validaron con resultados derivados de otros estudios. Liu and Xing (2011) desarrollaron soluciones exactas para el análisis ante vibración libre de placas rectangulares ortotrópicas de Mindlin. Las soluciones se obtuvieron utilizando el método de separación de variables para el caso de placas con distintas combinaciones de condiciones de borde. Estas soluciones se validaron con resultados analíticos y soluciones numéricas derivadas del método p-Ritz y el método de elementos finitos. Ramu and Mohanty (2012) realizaron un estudio en placas rectangulares ante vibración libre utilizando el método de elementos finitos. Las frecuencias obtenidas se consideraron de una aproximación suficiente al comparar con la solución exacta de Levy. Kollár and Pap (2018) desarrollaron una aproximación para el cálculo de la masa modal, la cual es aplicada para el cálculo de la frecuencia natural de sistemas de piso apoyados sobre vigas.

Como se describe existen procedimientos y expresiones para calcular la frecuencia natural en placas, las cuales comúnmente se adaptan para analizar sistemas de piso; sin embargo, estas expresiones consideran sólo placas sobre bordes rígidos o resortes distribuidos en los

bordes, las cuales generalmente consideran las geometrías cuadradas, excluyendo la mayoría de ellas con geometría rectangular. Además, estas expresiones analíticas son poco prácticas, pues el problema de una placa sobre bordes flexibles, vigas, es complejo, ya que su solución depende de las configuraciones de desplazamiento de la placa y de sus vigas de apoyo. Por consiguiente es necesario desarrollar expresiones de aplicación práctica para el cálculo de la frecuencia natural. Por lo tanto, en esta sección se desarrolla un método para el cálculo de la frecuencia natural fundamental de placas sobre vigas y sobre bordes rígidos a partir del análisis de sistemas continuos de vigas con bordes infinitamente rígidos y sistemas con masas puntuales.

2.2 Losa sobre apoyos rígidos

2.2.1 Convergencia de la frecuencia natural fundamental

En esta sección se propone un criterio de mallado con base en la convergencia de la frecuencia natural y las divisiones por borde. Para ello se propone un modelo típico de una losa cuadrada de concreto reforzado con claros de 4 m y espesor de 12 cm, como se muestra en la Figura 2.1. En el modelado de la losa se utilizaron elementos finitos lámina, a los que se les asignó las características de un material homogéneo e isotrópico; se consideró un concreto clase 1 (NTCC-17, 2017) con una resistencia a la compresión de $f'_c=250 \text{ kg/cm}^2$. En los bordes del modelo se propusieron dos condiciones de apoyo: simple y empotrado. En la Figura 2.2 se muestran las curvas de la frecuencia natural fundamental contra el número de divisiones por borde para las dos condiciones de apoyo. En ambas gráficas se normalizan las frecuencias obtenidas a la frecuencia natural inicial f_i , la cual se obtuvo para dos elementos por borde. Por lo tanto, se observa que a partir de ocho elementos por borde se tiene un valor debidamente aproximado de la frecuencia natural, pues el tener un mayor número de divisiones sólo incrementaría el costo computacional. En este trabajo se utilizaron veinte elementos por borde para modelar las losas.



Figura 2.1. Modelo de losa cuadrada de concreto reforzado dividido por borde en: a) 2, b) 4, c) 8, d) 16 y e) 32

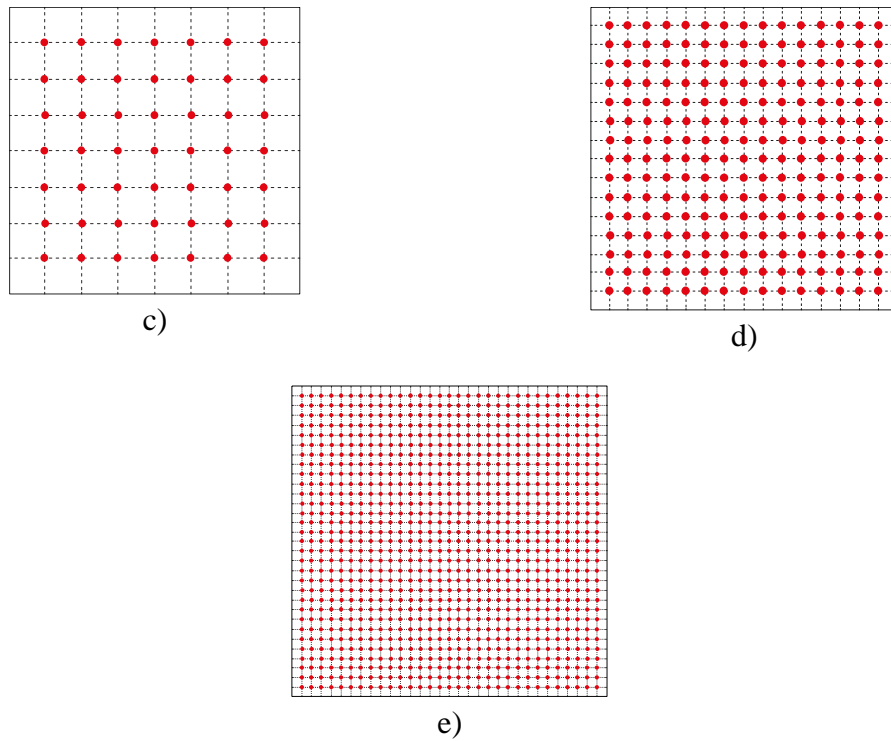


Figura 2.1. Continuación de Figura

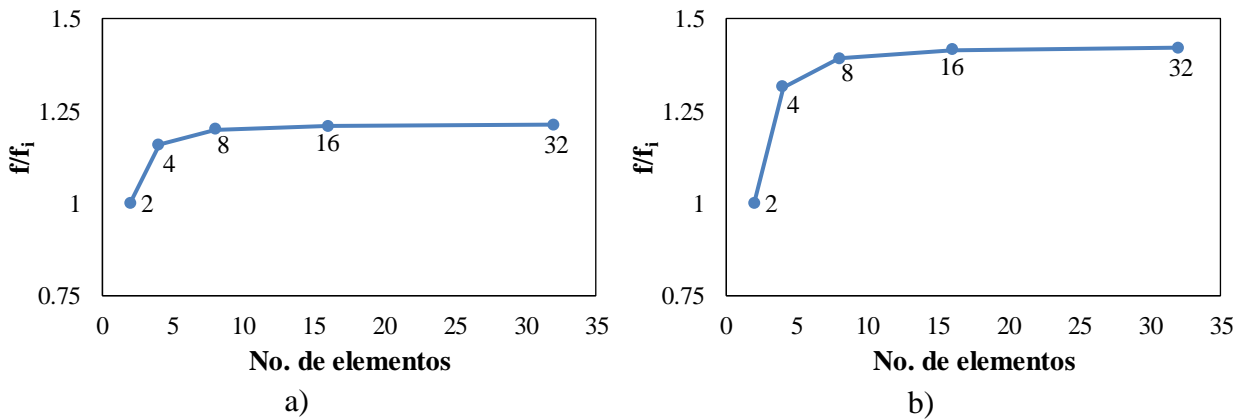


Figura 2.2. Curvas de frecuencia natural normalizada contra número de divisiones por borde en modelos de losas con bordes: a) simplemente apoyados y b) empotrados

2.2.2 Cálculo de la frecuencia natural fundamental de vigas mediante el principio de energía

Las vigas son sistemas estructurales continuos con masa distribuida, que se consideran con un número infinito de grados de libertad. Para el análisis dinámico de vigas existen procedimientos, con base en energía, que las modelan como un sistema generalizado como se muestra en la Figura 2.3, con una sola coordenada generalizada en la que se calcula su posición, velocidad y aceleración.

El movimiento de un sistema continuo se define a partir de una función de forma $\psi(x)$, la cual determina un estado de movimiento o forma modal conocida y una coordenada generalizada $Y(t)$ que define el movimiento total de la estructura (Paz, 1992). Con base en ello se considera el caso de una viga simplemente apoyada como se muestra en la Figura 2.3. Es importante mencionar que la función de forma $\psi(x)$ describe el movimiento vertical en el dominio $\Omega \subset [0, L]$, pero la función $Y(t)$ sólo describe el movimiento vertical en el centro de la viga, es decir, $x=L/2$.

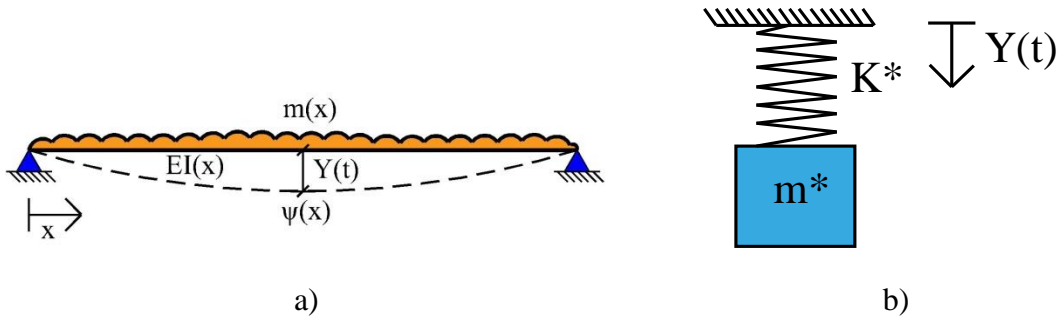


Figura 2.3. Viga simplemente apoyada idealizada como: a) sistema continuo y b) sistema de un grado de libertad.

El desplazamiento vertical en cualquier punto a lo largo de la viga es:

$$y(x) = \psi(x) Y(t) \quad \text{Equation Section (Next)} \quad (2.1)$$

donde $\psi(x)$ tiene su valor máximo, 1, en el centro del claro.

Para que el sistema generalizado de un grado de libertad, sea equivalente al sistema continuo, ambos deben mantener la cantidad de energía cinética, potencial y de trabajo producido por las fuerzas externas. La energía cinética del sistema continuo es:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) [\psi(x) \dot{Y}(t)]^2 dx \quad (2.2)$$

Por otra parte, el sistema generalizado tiene como energía cinética:

$$T^* = \frac{1}{2} m^* \dot{Y}(t)^2 \quad (2.3)$$

Igualando las ecuaciones (2.2) y (2.3) y resolviendo en términos de la masa generalizada m^* , se tiene que:

$$m^* = \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx \quad (2.4)$$

donde $m(x)$ representa la masa de la viga por unidad de longitud. Por otra parte, la energía de deformación por flexión está dada por:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L M(x) d\theta \quad (2.5)$$

y la curvatura de la viga es:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = \frac{M(x)}{EI} \quad (2.6)$$

sustituyendo la ec. (2.6) en la ec. (2.5), se tiene que:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx \quad (2.7)$$

sustituyendo la ec. (2.1) en la ec. (2.7), se tiene:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) (\psi''(x) Y(t))^2 dx \quad (2.8)$$

Por otra parte, el sistema generalizado tiene como energía potencial:

$$W^* = \frac{1}{2} K^* Y(t)^2 \quad (2.9)$$

dado que ambos sistemas deben mantener la misma energía potencial, es decir, $W = W^*$, resolviendo en términos de la rigidez generalizada K^* se tiene:

$$K^* = \int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx \quad (2.10)$$

La frecuencia natural de vibración de un sistema continuo viga determina dividiendo K^* de la ec. (2.10) entre m^* de la ec. (2.4):

$$\omega^2 = \frac{K^*}{m^*} = \frac{\int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx}{\int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx} \quad (2.11)$$

Para obtener la frecuencia natural en losas de concreto reforzado con apoyos infinitamente rígidos, se establece un procedimiento con base en la ec. (2.11), el cual es aplicable a vigas. Puesto que las losas actúan estructuralmente en dos direcciones, se idealizó su análisis como dos vigas entrecruzadas en los centros de sus claros, similar al método de las franjas de Hillerborg (1996) para determinar los momentos y desplazamientos en losas. La viga longitudinal se modela como un sistema continuo como se muestra en la Figura 2.3,

incluyendo la contribución de la viga transversal como un sistema de masa y rigidez concentradas en un punto como se observa en la Figura 2.4 . Para relacionar las dos franjas de viga, uno como un continuo y el otro como un sistema concentrado, se incluye la masa y la rigidez de ambos (Clough y Penzien, 1975) tal que la ec. (2.11) toma la forma siguiente:

$$\omega^2 = \frac{K^*}{m^*} = \frac{\int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx + k_t [\psi(x_t)]^2}{\int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx + m_t [\psi(x_t)]^2} \quad (2.12)$$

donde m_t y k_t son la masa y rigidez de la viga transversal, respectivamente, colocados en una distancia x_t del claro de la viga longitudinal como se muestra en la Figura 2.4.

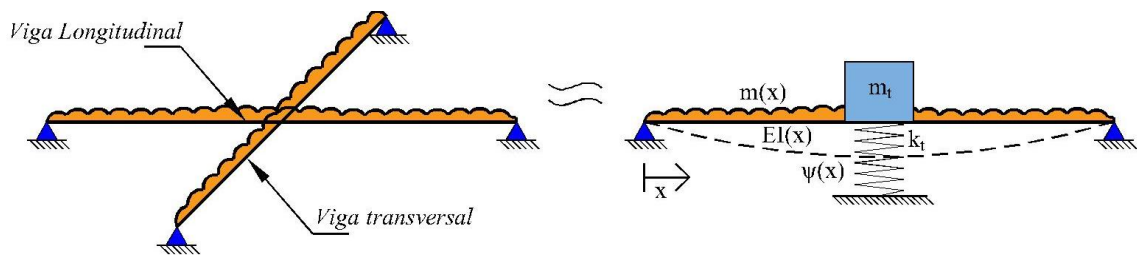


Figura 2.4. Idealización de losa como dos franjas con una viga con masa y rigidez distribuidas y un sistema con masa y rigidez concentradas.

2.2.2.1 Losa con bordes rígidos simplemente apoyados

Se realiza el planteamiento para obtener la frecuencia natural fundamental de una losa simplemente apoyada en sus bordes, la cual se idealiza como dos vigas. La viga longitudinal tiene una longitud a_2 y la viga transversal tiene una longitud a_1 , como se muestra en la Figura 2.5. Para este caso se utiliza una función de forma que represente a la configuración deformada de una viga simplemente apoyada, tal que su derivada (pendiente) un valor de cero en el centro y con valores distintos de cero en sus extremos, como la que se define en la ec. (2.13) (Clough y Penzien, 1975) y se muestra en la Figura 2.6:

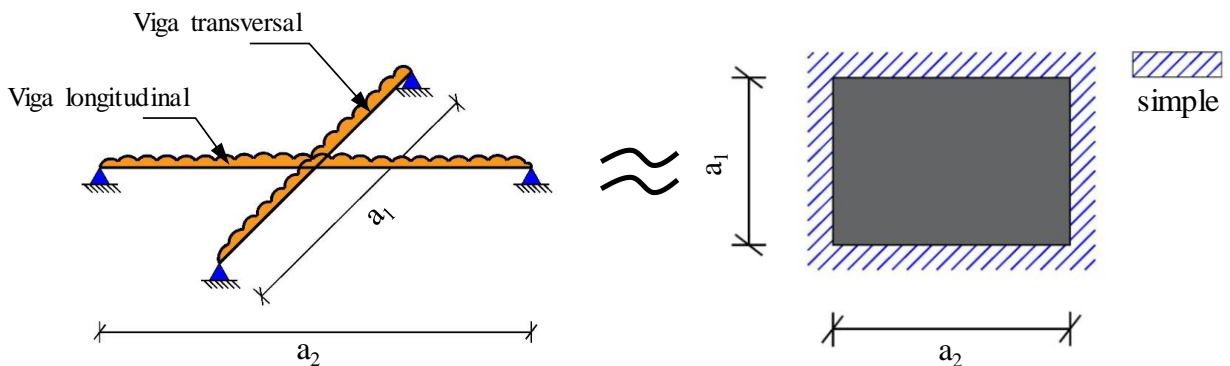


Figura 2.5. Losa simplemente apoyada idealizada como dos franjas.

$$\psi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{a_2}\right) \quad (2.13)$$

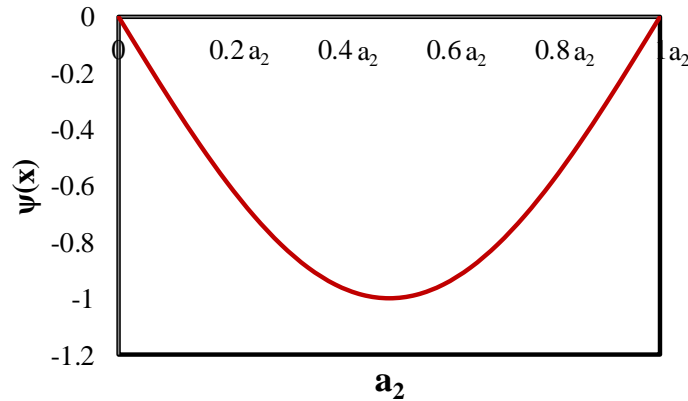


Figura 2.6. Función de forma de viga simplemente apoyada.

Por otra parte, para incluir la acción en el sistema dinámico de la viga transversal sobre una viga longitudinal a una distancia $a_2/2$, se incluye una masa concentrada, m_t , y una rigidez concentrada, k_t , ambas de la viga transversal, k_t es la rigidez el centro del claro $a_1/2$ de la viga transversal ante carga distribuida, como se muestra en la ec. (2.14):

$$k_t = \frac{384EI_t}{5a_1^3} \quad (2.14)$$

donde E es el módulo de elasticidad del concreto e I_t es el momento de inercia, el cual corresponde al claro largo a_2 , es decir:

$$I_t = \frac{a_2 h^3}{12} \quad (2.15)$$

donde h es el espesor de la losa. Sustituyendo las ecs. (2.13) y (2.14) en la ec. (2.12), se obtiene la frecuencia circular y, por lo tanto, la frecuencia cíclica:

$$f = \frac{1.424}{\pi a_2^2} \sqrt{\frac{(1.577a_2^4 + a_1^4) Eh^3}{a_1^3 \left(2 \frac{m_t}{a_2} + m\right)}} \quad (2.16)$$

donde m es la masa por unidad de longitud de la viga longitudinal. Considerando que la masa total de la losa m_{losa} se divide por partes iguales entre m_t y m , se tiene que:

$$m_t = \frac{m_{losa}}{2} \quad (2.17)$$

$$m = \frac{m_{\text{losa}}}{2a_2} \quad (2.18)$$

Por lo tanto, sustituyendo las ecs. (2.17) y (2.18) en la ec. (2.16) se obtiene una expresión para el cálculo de f_n en función de la masa total de la losa:

$$f = \frac{1.163}{\pi} \sqrt{\frac{(1.577a_2^4 + a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{\text{losa}})}} \quad (2.19)$$

Con el objetivo de validar la aproximación de la ec. (2.19), se realizaron modelos numéricos con el programa Sap2000 (CSI, 2009) de losas rectangulares modeladas con elementos lámina con espesor de 12 cm; se consideró un concreto clase 1 (NTCC-17, 2017) con una resistencia a la compresión $f'_c=250 \text{ kg/cm}^2$. Los modelos de las losas se realizaron con longitudes de claro largo a_2 de 3, 4, 5 y 6 m y con relaciones de claros $m=a_1/a_2$ de 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 y 1.0, estos 24 modelos se restringieron como simplemente apoyados en sus bordes. Las frecuencias calculadas con los modelos de elementos finitos se comparan con las soluciones calculadas con las expresiones propuestas en la ec. (2.19), en la Tabla 2.1 solo se muestran los resultados de la losa con claro largo $a_2=6\text{m}$. La relación, FEM/Analítico, de la frecuencia natural calculada con los modelos de elemento finito y la calculada con la expresión analítica de la ec. (2.19) tiene la misma tendencia para las losas con longitudes de 3, 4 y 5 m, como se muestra en la Figura 2.7.

En la Figura 2.7 se observa que las soluciones numéricas son mayores a las soluciones obtenidas con la expresión analítica de la ec. (2.19), desde 21.7% a 55.3% para relaciones del claro corto y claro largo de 0.5 a 1.0, respectivamente. Estas diferencias se deben principalmente a que el modelo dinámico de la Figura 2.5 no incluye el efecto de membrana que se genera en las esquinas de la losa durante el movimiento.

Tabla 2.1 Comparación entre frecuencias en losas rectangulares

$a_2=6\text{m}$					
Dimensiones		FEM		Analítico	FEM/Analítico
a_1/a_2	$a_1(\text{m})$	T(s)	f(Hz)	f(Hz)	
0.500	3.000	0.043	23.140	19.011	1.217
0.600	3.600	0.057	17.484	13.469	1.298
0.700	4.200	0.071	14.073	10.211	1.378
0.800	4.800	0.084	11.860	8.175	1.451
0.900	5.400	0.097	10.342	6.848	1.510
1.000	6.000	0.108	9.257	5.959	1.553

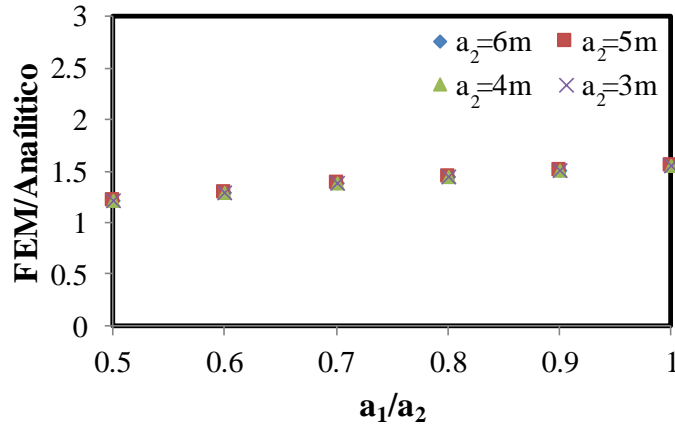


Figura 2.7. Relación entre solución numérica y analítica de losas simplemente apoyadas.

Por lo tanto, para mejorar la aproximación de la expresión analítica, se realizó un ajuste con el método de mínimos cuadrados. Puesto que la curva de la Figura 2.7 tiene una forma exponencial, ésta se puede aproximar con la ecuación siguiente:

$$\ln(y) = \ln(b) + a \ln(x) \quad (2.20)$$

de la cual se obtiene una función de la forma:

$$y = bx^a \quad (2.21)$$

donde a y b se calculan con el procedimiento utilizado para un problema lineal típico, pero incluyendo la función logaritmo natural. Por lo tanto, al realizar la regresión correspondiente de los datos, se tienen los valores de las constantes de la ec. (2.21):

$$y = 1.56x^{0.36} \quad (2.22)$$

multiplicando la ec. (2.22) por la solución obtenida en la ec. (2.19), y considerando que x representa la relación de a_1/a_2 , se tiene que:

$$f = \frac{1.818}{\pi} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{0.36} \sqrt{\frac{(1.577a_2^4 + a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{losa})}} \quad (2.23)$$

Para validar la solución de la ec. (2.23), se calcularon la frecuencia en losas en los que a_1 es 3, 4, 5 y 6 m, los cuales se compararon con los modelos numéricos realizados en SAP2000 (CSI, 2009) como se muestran en la Figura 2.8, donde se valida la ec. (2.23), pues existe una diferencia máxima entre ambas soluciones de hasta el 2.5% aproximadamente.

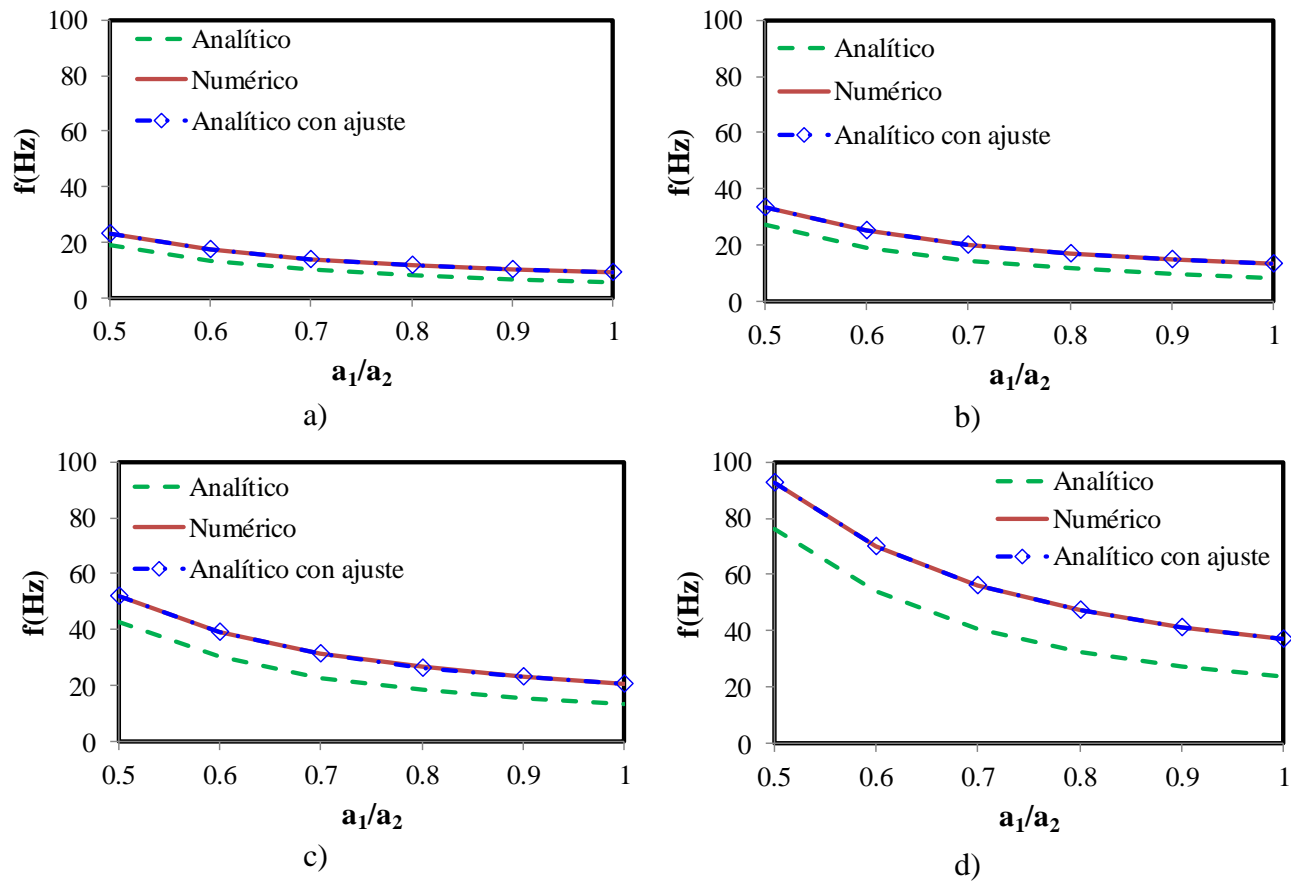
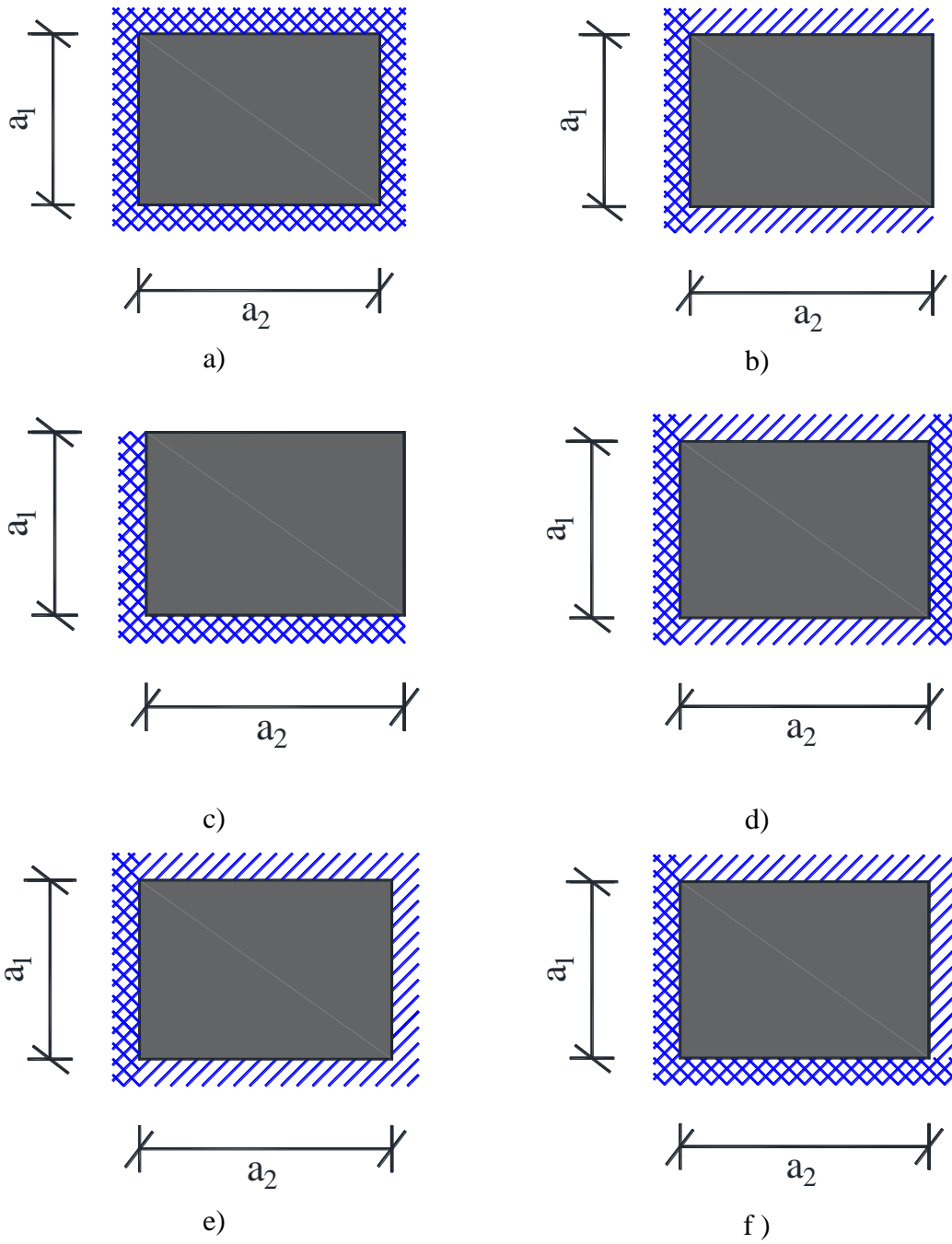


Figura 2.8. Comparación entre frecuencias en losas simplemente apoyadas con claro largo a_2 de: a) 6, b) 5, c) 4 y d) 3m.

2.2.2.2 Losas con diferentes condiciones de apoyo

Con base en el procedimiento desarrollado en la sección 2.2.2.1 para una losa simplemente apoyada sobre bordes rígidos, en esta sección se desarrollaron expresiones para calcular analíticamente la frecuencia natural de losas macizas con distintas condiciones de borde que incluyen apoyo simple, empotrado, libre y combinaciones de ellas, las cuales se muestran en la Figura 2.9. En la condición de apoyo simple se prescriben los desplazamientos verticales, en la condición de apoyo empotrado se prescriben los desplazamientos verticales y los giros y en la condición de apoyo libre se tienen sin restricciones los desplazamientos verticales y los giros. Estas losas se idealizan como vigas en dos direcciones como se muestran en la Figura 2.10.



 Simple
  Empotrado

Figura 2.9 Condiciones de borde: a) losa 1, b) losa 2, c) losa 3, d) losa 4, e) losa 5 y f) losa 6.

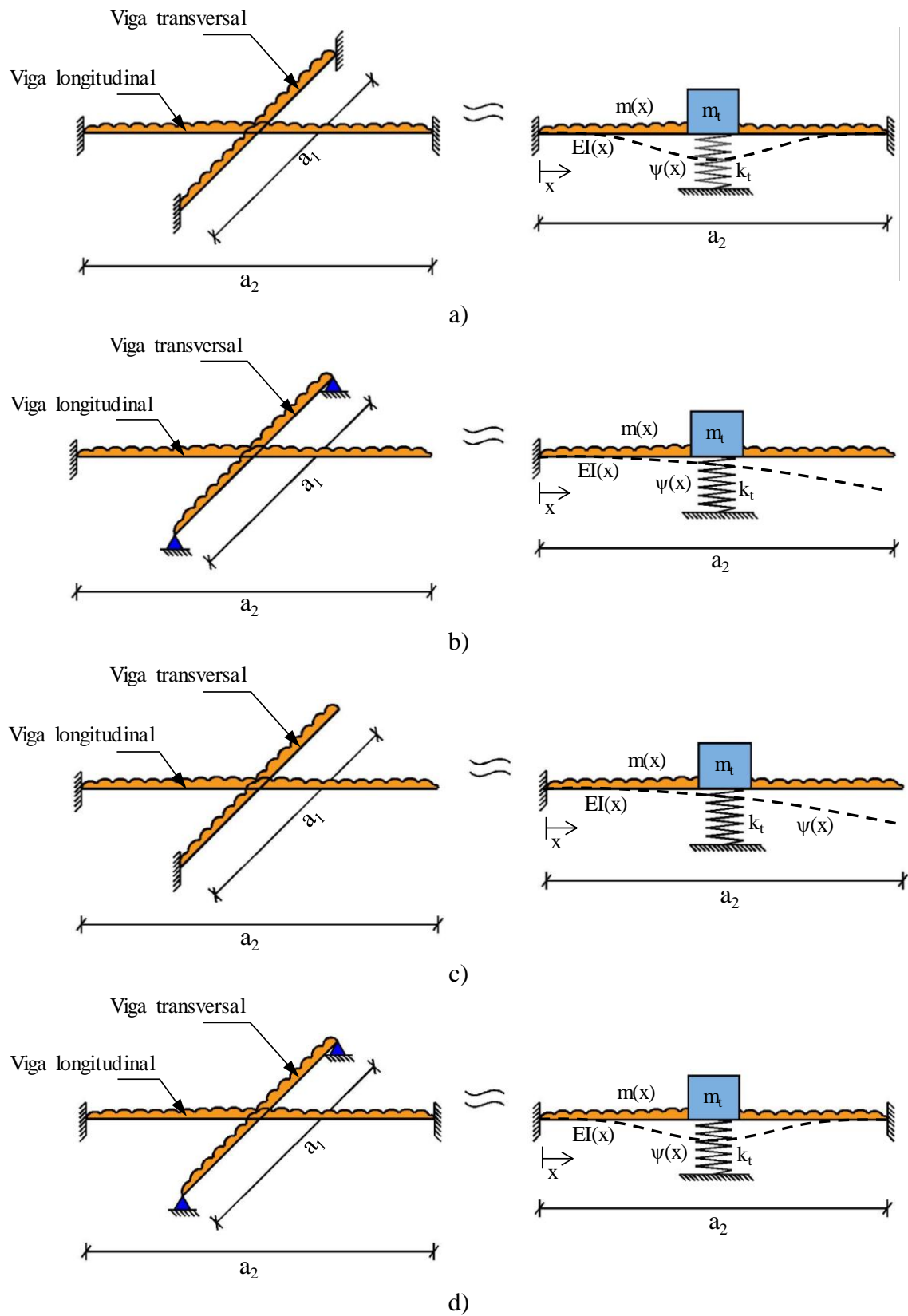


Figura 2.10. Idealización de losas como un sistema generalizado: a) losa 1, b) losa 2, c) losa 3, d) losa 4, e) losa 5 y f) losa 6.

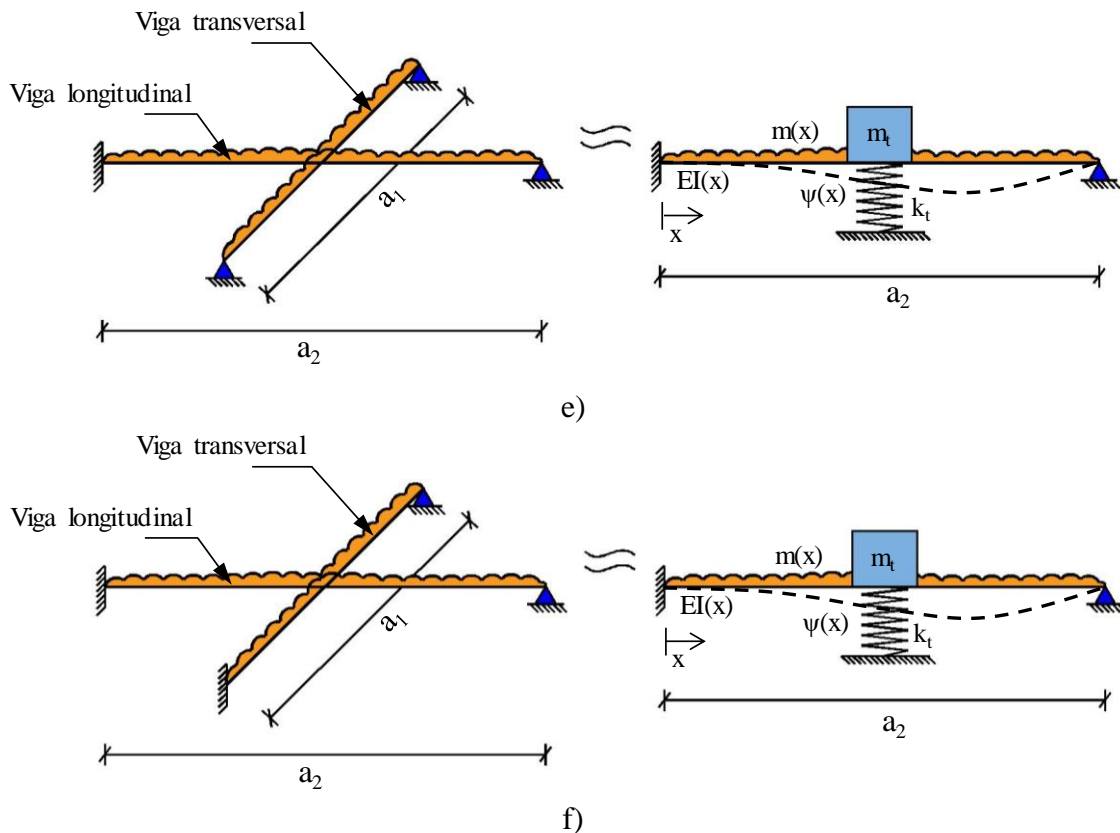


Figura 2.10. Continuación de Figura

Los distintos modelos dinámicos tienen como base tres tipos de funciones de forma: empotrada en ambos extremos, voladizo, y empotrada en un extremo con apoyo simple en el otro extremo, como se muestra en la Figura 2.11. Como lo muestran Paz (1992) y Clough y Penzien (1975), si de la ec. (2.1) se tiene que el desplazamiento de una viga en función de x depende de la función de forma $\psi(x)$ y una coordenada generalizada $Y(t)$ que se encuentra en la zona de desplazamiento máximo, se deduce que la función de forma se obtiene a partir de la expresión siguiente:

$$\psi(x) = \frac{y(x)}{y_{\max}} \quad (2.24)$$

donde se tiene un cociente que depende de la ecuación del desplazamiento de una viga apoyada en sus extremos en función de x . Por lo tanto, con base en la ec. (2.24) en este trabajo se proponen 3 funciones de forma para vigas hiperestáticas apoyadas en sus extremos, las cuales son: doblemente empotrada, voladizo y empotrado-apoyado. En el caso empotrado, su ecuación de desplazamientos se define como:

$$y(x) = -\frac{wx^2}{24EI}(x-a_2)^2 \quad (2.25)$$

donde w es la carga distribuida, x es la distancia a lo largo de la viga, E es el módulo de elasticidad, I es el momento de inercia y a_2 es la longitud total del claro. Evaluando la ec. (2.25) en la longitud $a_2/2$ para obtener su máximo se tiene que:

$$y\left(\frac{a_2}{2}\right) = -\frac{w\left(\frac{a_2}{2}\right)^2}{24EI}\left[\left(\frac{a_2}{2}\right)-a_2\right]^2 = -\frac{wa_2^2}{384EI} \quad \therefore y_{\max} = -\frac{wa_2^2}{384EI} \quad (2.26)$$

por consiguiente, al sustituir las ecs. (2.25) y (2.26) en la ec. (2.24) se obtiene una función polinómica que representa la función de forma, la cual es adimensional, como se muestra en la Figura 2.11a:

$$\psi(x) = \frac{16x^2}{a^4}(x-a)^2 \quad (2.27)$$

Realizando el mismo procedimiento se obtiene la función de forma para una viga en voladizo, como se muestra en la ec. (2.28) y Figura 2.11b:

$$\psi(x) = \frac{x^4}{3a_2^4} - \frac{4x^3}{3a_2^3} + \frac{2x^2}{a_2^2} \quad (2.28)$$

en el caso de una viga con un extremo empotrado y un extremo simplemente apoyado, la función de forma se define por la ec. (2.29), la cual se muestra en la Figura 2.11c:

$$\psi(x) = \frac{x^2}{0.26a_2^4}(3a_2^2 - 5a_2x + 2x^2) \quad (2.29)$$

Las ecs. (2.13), (2.27), (2.28) y (2.29) tienen un valor máximo igual a la unidad. Además, tienen como derivada cero en aquellos apoyos empotrados y como derivada distinta de cero en apoyos simples y en voladizo.

Una vez definidas las funciones de forma, se calcula la rigidez traslacional k_t de cada una de sus vigas transversales correspondientes: simplemente apoyada, doblemente empotrada, voladizo, y empotrada en un extremo con apoyo simple en el otro. En el caso de la viga simplemente apoyada, la rigidez es dada en la ec. (2.14); mientras que para la viga empotrada se tiene que:

$$k_t = \frac{384EI_t}{a_1^3} \quad (2.30)$$

En el caso de una viga en voladizo se tiene que:

$$k_t = \frac{384EI_t}{17a_1^3} \quad (2.31)$$

por último, en el caso de una viga con apoyo empotrado y simple en el otro extremo se tiene que:

$$k_t = \frac{36EI_t}{a_1^3} \quad (2.32)$$

Sustituyendo respectivamente las funciones de forma definidas en las ecs. (2.30) a (2.32) en la ec. (2.12) para cada uno de los modelos dinámicos establecidos, se tiene que la frecuencia natural cíclica es como la que se muestra en la Tabla 2.2.

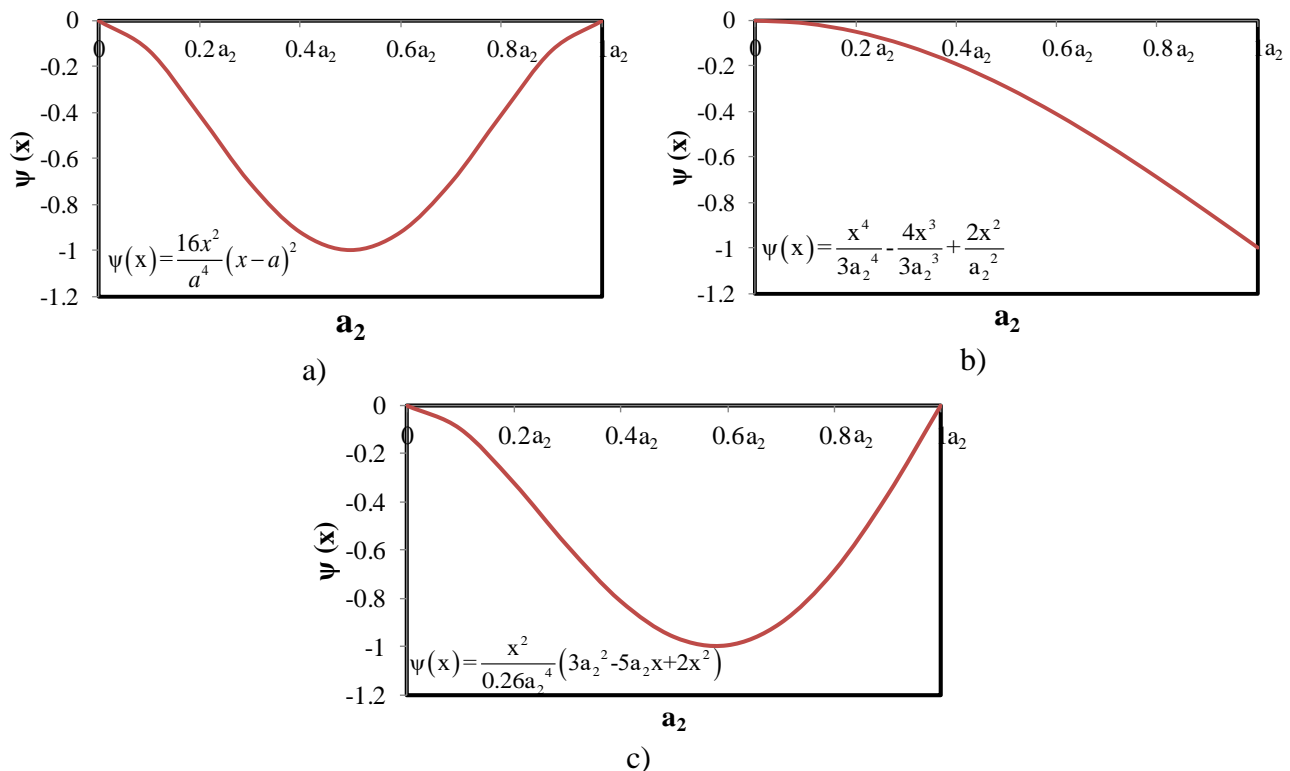


Figura 2.11. Funciones de forma de vigas: a) empotrada, b) voladizo, c) empotrado y simple.

Para validar las aproximaciones de la Tabla 2.2 en el cálculo de la frecuencia natural fundamental en losas, se realizaron modelos numéricos de losas rectangulares utilizando elementos lámina con un concreto clase 1 cuya resistencia a la compresión es $f'_c=300 \text{ kg/cm}^2$ y se utilizaron relaciones de claros $m=a_1/a_2$ de 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 y 1.0 con longitudes de claro largo a_2 de 3, 4, 5 y 6m. estas dimensiones. Los espesores de losa se calcularon con base en cargas distribuidas debidas a una carga muerta, cuyos elementos se enlistan en la Tabla 2.3, y una carga viva máxima de 250 kg/m^2 , de acuerdo a lo especificado en las NTCE-17 (2017) para el uso de oficinas, despachos y laboratorios.

Tabla 2.2 Expresiones obtenidas de la frecuencia natural

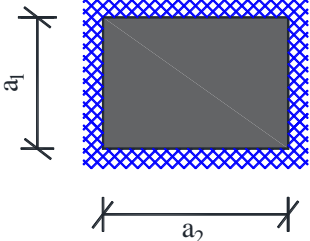
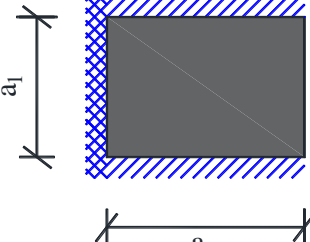
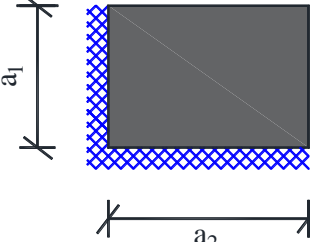
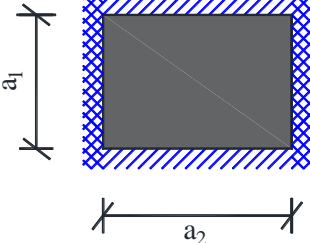
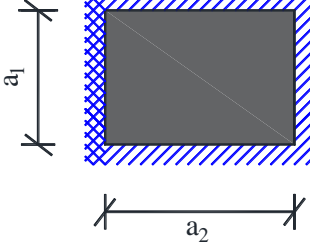
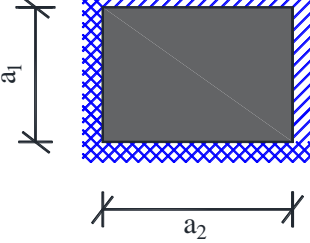
Tipo de losa	Frecuencia natural	Condición de borde
Losa 1	$f = \frac{0.87}{\pi} \sqrt{\frac{(15a_2^4 + 8a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{losa})}}$	
Losa 2	$f = \frac{0.593}{\pi} \sqrt{\frac{(3a_2^4 + a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{losa})}}$	
Losa 3	$f = \frac{0.06}{\pi} \sqrt{\frac{(85a_2^4 + 96a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{losa})}}$	
Losa 4	$f = \frac{0.87}{\pi} \sqrt{\frac{(3a_2^4 + 8a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{losa})}}$	
Losa 5	$f = \frac{0.604}{\pi} \sqrt{\frac{(5.92a_2^4 + 8.87a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{losa})}}$	
Losa 6	$f = \frac{0.604}{\pi} \sqrt{\frac{(2.77a_2^4 + 8.88a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{losa})}}$	

Tabla 2.3 Cargas muertas para análisis y diseño de sistemas de piso

Carga Muerta	
Concepto	kg/m²
Acabado en piso	100
Muros divisorios	100
Instalaciones	20
Plafón	20
Adicional NTCE-2017	40
Total	280

La mayoría de las losas tienen un peralte de 14 cm; en el caso de la losa 3 se obtuvo un peralte de 25 cm, ya que es un elemento con dos bordes empotrados y dos en voladizo, como se muestra en la Tabla 2.4. Las soluciones calculadas con las expresiones analíticas propuestas en la Tabla 2.2 y con los modelos numéricos se comparan respectivamente en las Tablas 2.5 a 2.10 para el caso de una losa con claro largo $a_2=6\text{m}$, donde la diferencia entre ambas soluciones es de hasta el 60% en las losas 1 a 5, mientras que para la losa 6 existe una diferencia del 200% aproximadamente. La misma tendencia se presenta para los valores del claro largo a_2 de 3, 4 y 5m como se muestra en la Figura 2.12. Las frecuencias naturales calculadas analíticamente y las calculas numéricamente tienen una diferencia que aumenta al incrementar la relación de lados a_1/a_2 , excepto en la Losa 6.

Tabla 2.4 Espesores de losa

Tipo de losa	Espesor de losa (cm)
Losa 1	14
Losa 2	14
Losa 3	25
Losa 4	14
Losa 5	14
Losa 6	14

Tabla 2.5 Comparación entre solución numérica y analítica en losa 1 con $a_2=6\text{m}$

$a_2=6\text{m}$					
Dimensiones		FEM		Analítico	FEM/Analítico
a_1/a_2	$a_1(\text{m})$	T(s)	f(Hz)	f(Hz)	
0.50	3.00	0.02	56.23	53.39	1.05
0.60	3.60	0.02	41.12	37.72	1.09
0.70	4.20	0.03	32.25	28.46	1.13
0.80	4.80	0.04	26.70	22.65	1.18
0.90	5.40	0.04	23.05	18.84	1.22
1.00	6.00	0.05	20.57	16.26	1.26

Tabla 2.6 Comparación entre solución numérica y analítica en losa 2 con $a_2=6m$

$a_2=6m$					
Dimensiones		FEM		Analítico	FEM/Analítico
a_1/a_2	$a_1(m)$	T(s)	f(Hz)	f(Hz)	
0.50	3.00	0.04	24.16	16.18	1.49
0.60	3.60	0.06	17.32	11.36	1.52
0.70	4.20	0.08	13.21	8.49	1.56
0.80	4.80	0.09	10.55	6.67	1.58
0.90	5.40	0.11	8.74	5.46	1.60
1.00	6.00	0.13	7.46	4.62	1.61

Tabla 2.7 Comparación entre solución numérica y analítica en losa 3 con $a_2=6m$

$a_2=6m$					
Dimensiones		FEM		Analítico	FEM/Analítico
a_1/a_2	$a_1(m)$	T(s)	f(Hz)	f(Hz)	
0.50	3.00	0.06	17.87	15.93	1.12
0.60	3.60	0.07	13.58	11.45	1.19
0.70	4.20	0.09	11.00	8.86	1.24
0.80	4.80	0.11	9.31	7.27	1.28
0.90	5.40	0.12	8.14	6.27	1.30
1.00	6.00	0.14	7.29	5.62	1.30

Tabla 2.8 Comparación entre solución numérica y analítica en losa 4 con $a_2=6m$

$a_2=6m$					
Dimensiones		FEM		Analítico	FEM/Analítico
a_1/a_2	$a_1(m)$	T(s)	f(Hz)	f(Hz)	
0.50	3.00	0.03	31.31	25.37	1.23
0.60	3.60	0.04	24.99	18.92	1.32
0.70	4.20	0.05	21.34	15.35	1.39
0.80	4.80	0.05	19.07	13.27	1.44
0.90	5.40	0.06	17.58	12.02	1.46
1.00	6.00	0.06	16.56	11.25	1.47

Tabla 2.9 Comparación entre solución numérica y analítica en losa 5 con $a_2=6m$

$a_2=6m$					
Dimensiones		FEM		Analítico	FEM/Analítico
a_1/a_2	$a_1(m)$	T(s)	f(Hz)	f(Hz)	
0.50	3.00	0.03	29.57	23.95	1.23
0.60	3.60	0.04	22.90	17.38	1.32
0.70	4.20	0.05	18.94	13.63	1.39
0.80	4.80	0.06	16.42	11.37	1.44
0.90	5.40	0.07	14.73	9.96	1.48
1.00	6.00	0.07	13.53	9.05	1.49

Tabla 2.10 Comparación entre solución numérica y analítica en losa 6 con $a_2=6m$

$a_2=6m$					
Dimensiones		FEM		Analítico	FEM/Analítico
a_1/a_2	$a_1(m)$	T(s)	f(Hz)	f(Hz)	
0.50	3.00	0.02	40.67	17.06	2.38
0.60	3.60	0.03	30.16	12.86	2.35
0.70	4.20	0.04	23.93	10.57	2.26
0.80	4.80	0.05	19.97	9.25	2.16
0.90	5.40	0.06	17.32	8.46	2.05
1.00	6.00	0.06	15.48	7.98	1.94

Cabe mencionar que la diferencia que se muestra en las Tablas 2.5 a 2.10 se atribuye a que los modelos analíticos se basan en la idealización del comportamiento dinámico de vigas, donde no se incluye el efecto de membrana, el cual es más visible en las esquinas de una losa en dos direcciones. A pesar de ello, las expresiones de la Tabla 2.2 incluyen el efecto de las condiciones de borde, así como la geometría de las configuraciones deformadas (funciones de forma) para una losa en dos direcciones, lo cual es importante como una alternativa en el análisis de sistemas continuos.

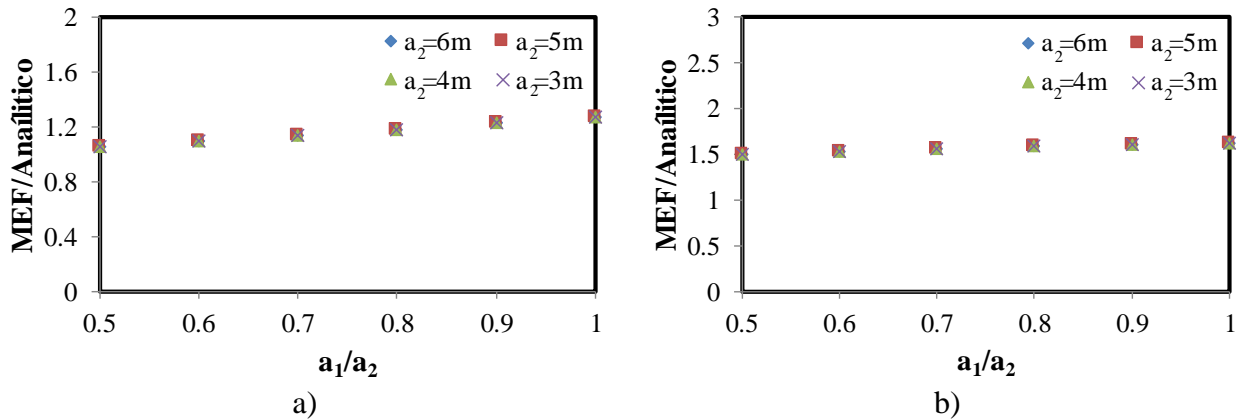


Figura 2.12. Relación entre solución numérica y analítica de losas rectangulares: a) losa 1, b) losa 2 y c) losa 3, d) losa 4 e) losa 5 y f) losa 6.

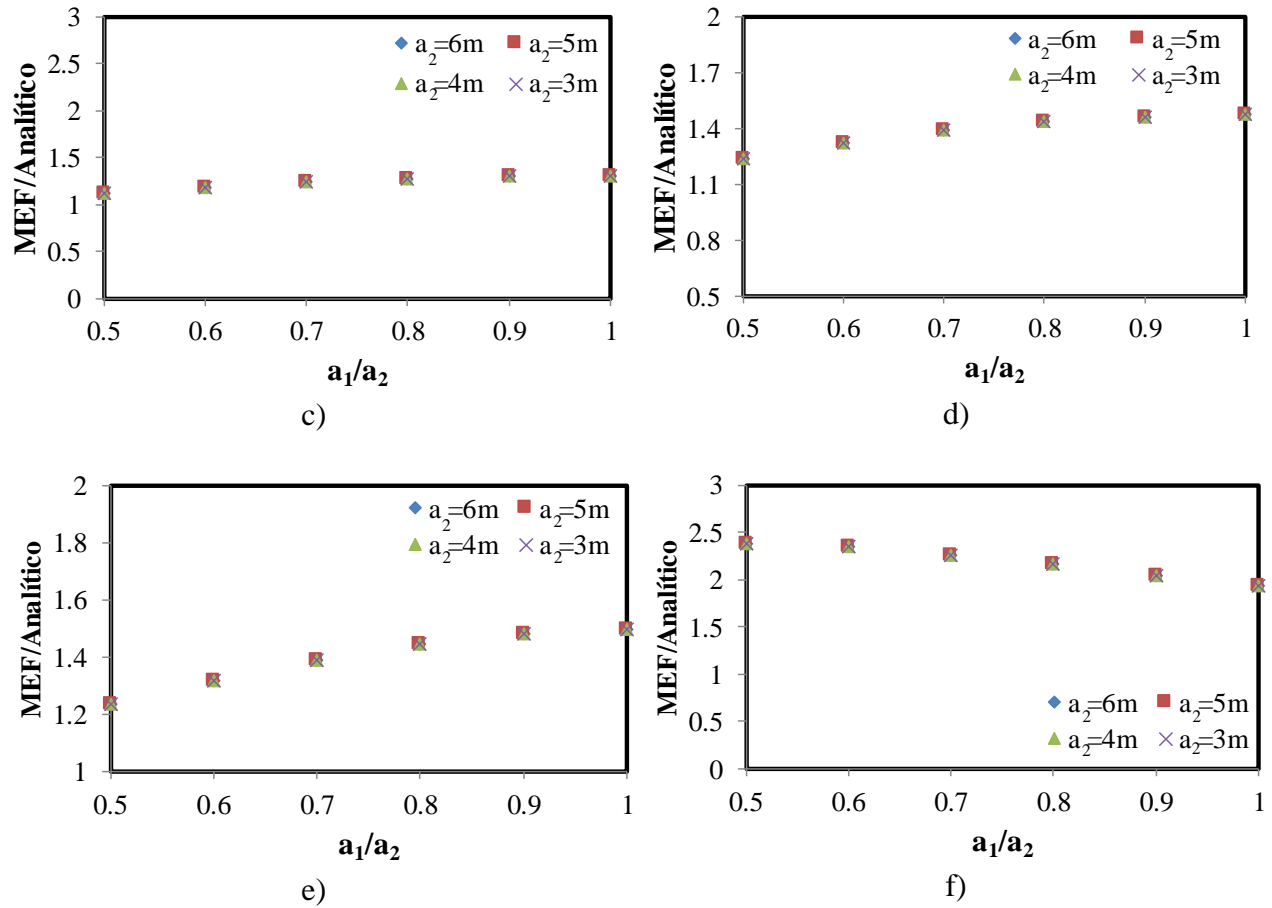


Figura 2.12 Continuación de Figura

Para obtener una mejor aproximación de las soluciones analíticas de la Tabla 2.2, se realizó un ajuste de datos mediante el método de mínimos cuadrados, con factores de correlación mayores que 0.95 se tiene que las funciones de aproximación de los datos analizados son polinomios de grado 2. Por lo tanto, para un polinomio de segundo grado se tiene que:

$$P_2 = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (2.33)$$

donde los valores de los coeficientes a_2 , a_1 y a_0 se obtienen a través de la expresión siguiente:

$$\sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=1}^m x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^m y_i x_i^j \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, n. \quad (2.34)$$

donde n y k representan el grado del polinomio, m es el número de datos, x_i constituye los valores de las relaciones a_1/a_2 ; mientras que y_i representa los valores de la relación entre las soluciones numérica y analítica como se muestra en la Figura 2.12, $n=2$, $k=2$ y $m=5$, lo cual muestra que existe un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Por lo tanto, al resolver este sistema y obtener el valor correspondiente de cada coeficiente, la ec. (2.33) presenta las formas que se muestran en la Tabla 2.11.

Al multiplicar respectivamente las expresiones enlistadas en la Tabla 2.2 con las ecuaciones de aproximación obtenidas de la Tabla 2.11, se tienen las aproximaciones ajustadas para el cálculo de la frecuencia natural en losas ante distintas condiciones de borde rígidas, las cuales se enlistan en la Tabla 2.12. La diferencia que existe entre ambas soluciones, numérica y analítica, se atribuye a que la aproximación analítica idealiza la losa como vigas cruzadas; sin embargo, no incluye el efecto de membrana que tiene una losa. La comparación de los valores de la frecuencia entre las soluciones analíticas propuesta en la Tabla 2.12 y los modelos numéricos realizados en SAP2000 (CSI, 2009), se muestran de las Figuras 2.13 a 2.18, donde se tiene una diferencia máxima entre ambas soluciones no mayor del 2.5%.

Tabla 2.11 Funciones de aproximación entre solución analítica y numérica

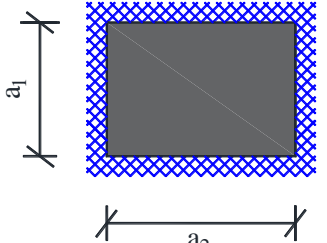
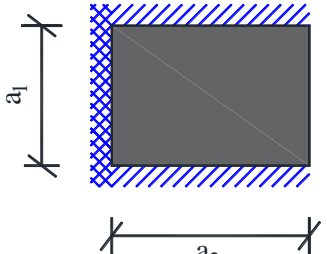
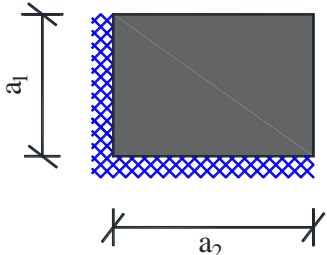
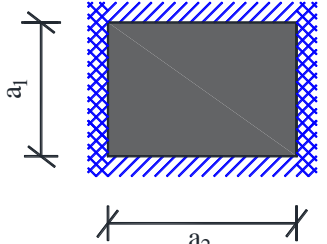
Tipo de losa	Regresión	Condición de borde
Losa 1	$y=0.83+0.43x$	
Losa 2	$y=1.23+0.65x-0.27x^2$	
Losa 3	$y=0.52+1.62x-0.84x^2$	
Losa 4	$y=0.5+1.97x-x^2$	

Tabla 2.11 Continuación de Tabla

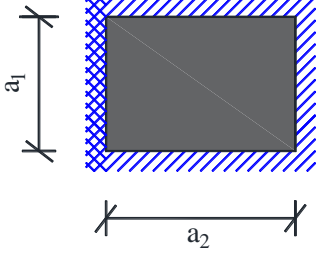
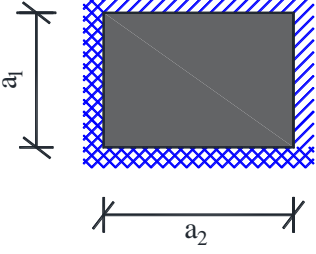
Tipo de losa	Regresión	Condición de borde
Losa 5	$y=0.53+1.83x-0.87x^2$	
Losa 6	$y=2.44+0.33x-0.83x^2$	

Tabla 2.12 Aproximaciones analíticas de la frecuencia natural en losas

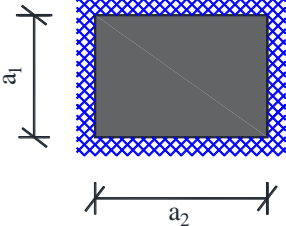
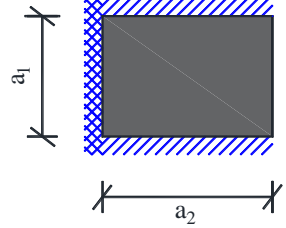
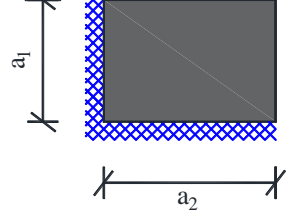
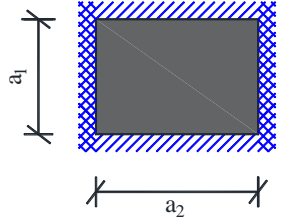
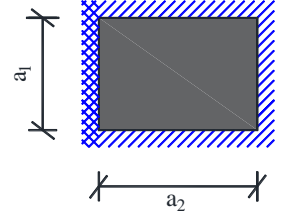
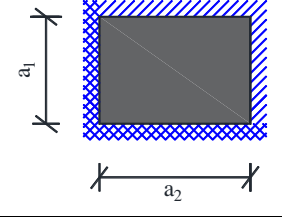
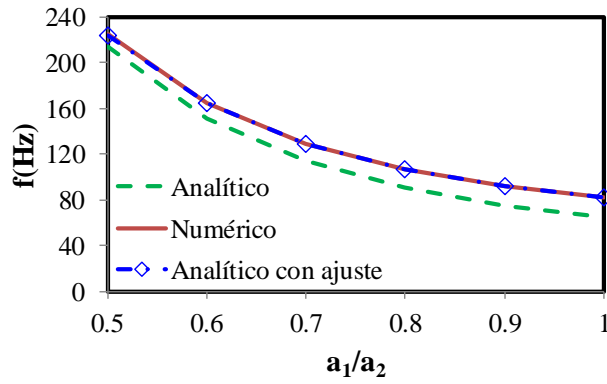
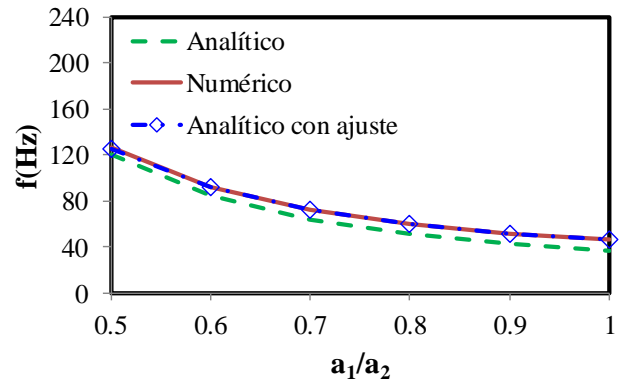
Tipo de losa	Frecuencia natural	Coficiente	Condición de borde
Losa 1	$f = \frac{0.87}{\pi} C \sqrt{\frac{(15a_2^4 + 8a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{losa})}}$	$C = 0.83 + 0.43 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2$	
Losa 2	$f = \frac{0.593}{\pi} C \sqrt{\frac{(3a_2^4 + a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{losa})}}$	$C = 1.23 + 0.65 \left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 0.27 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2$	
Losa 3	$f = \frac{0.06}{\pi} C \sqrt{\frac{(85a_2^4 + 96a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{losa})}}$	$C = 0.52 + 1.62 \left(\frac{a_1}{a_2}\right) - 0.84 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2$	

Tabla 2.12 Continuación de Tabla

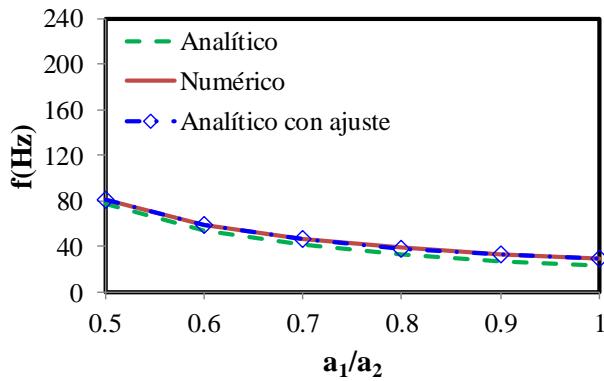
Tipo de losa	Frecuencia natural	Coefficiente	Condición de borde
Losa 4	$f = \frac{0.87}{\pi} C \sqrt{\frac{(3a_2^4 + 8a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{losa})}}$	$C = 0.5 + 1.97 \left(\frac{a_1}{a_2} \right) - \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2$	
Losa 5	$f = \frac{0.604}{\pi} C \sqrt{\frac{(5.92a_2^4 + 8.87a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{losa})}}$	$C = 0.53 + 1.83 \left(\frac{a_1}{a_2} \right) - 0.87 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2$	
Losa 6	$f = \frac{0.604}{\pi} C \sqrt{\frac{(2.77a_2^4 + 8.88a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{losa})}}$	$C = 2.44 + 0.33 \left(\frac{a_1}{a_2} \right) - 0.83 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2$	



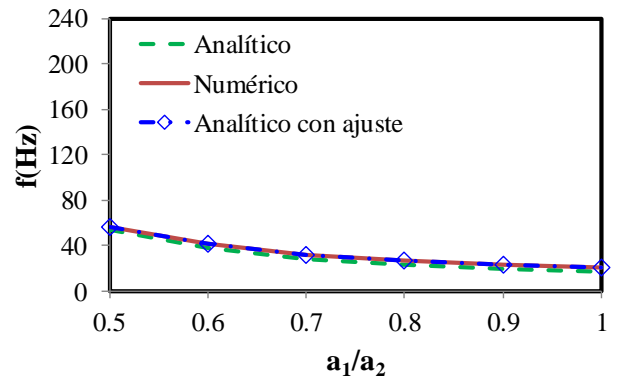
a)



b)



c)



d)

Figura 2.13. Comparación entre frecuencias en losa 1 con claros a_2 de: a) 3, b) 4, c) 5 y d) 6m

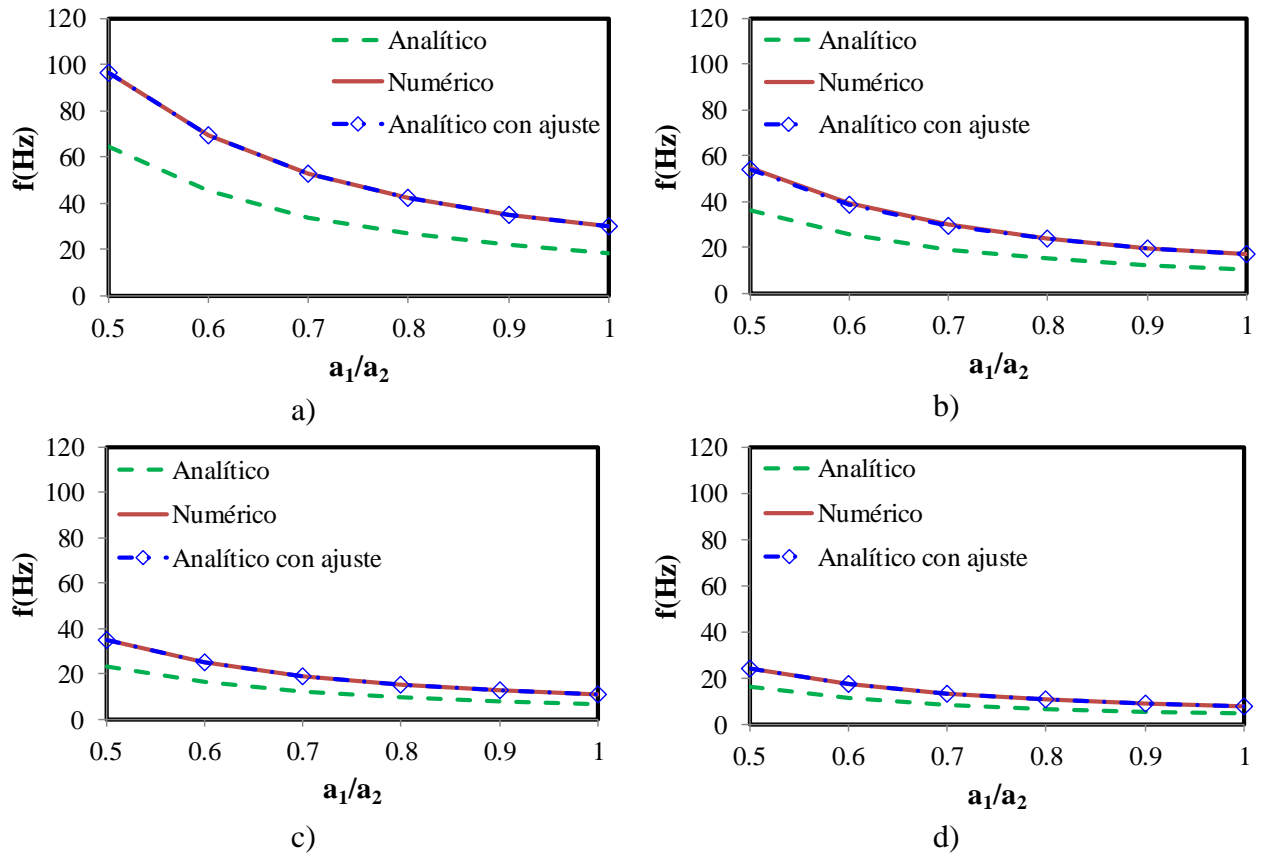


Figura 2.14. Comparación entre frecuencias en lousa 2 con claros a de: a) 3, b) 4, c) 5 y d) 6m.

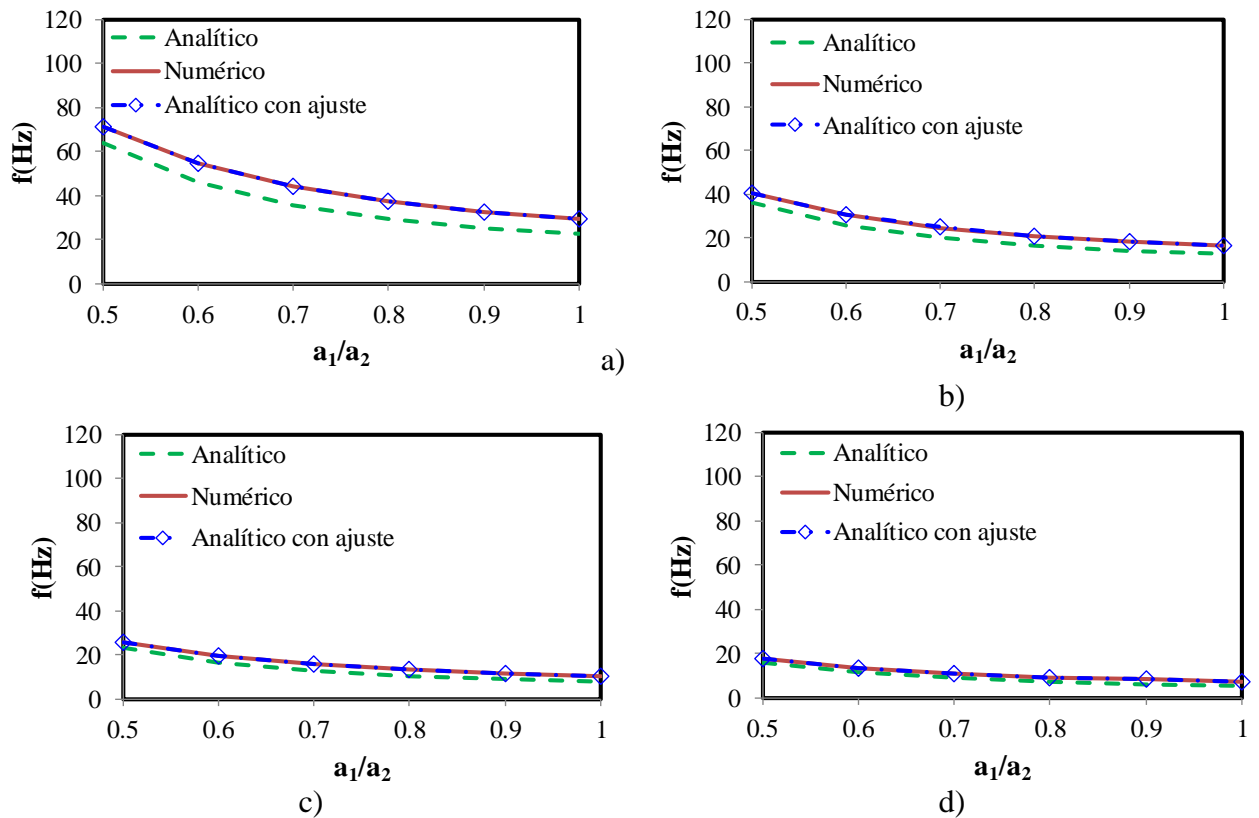


Figura 2.15. Comparación entre frecuencias en lousa 3 con claros a_2 de: a) 3, b) 4, c) 5 y d) 6m.

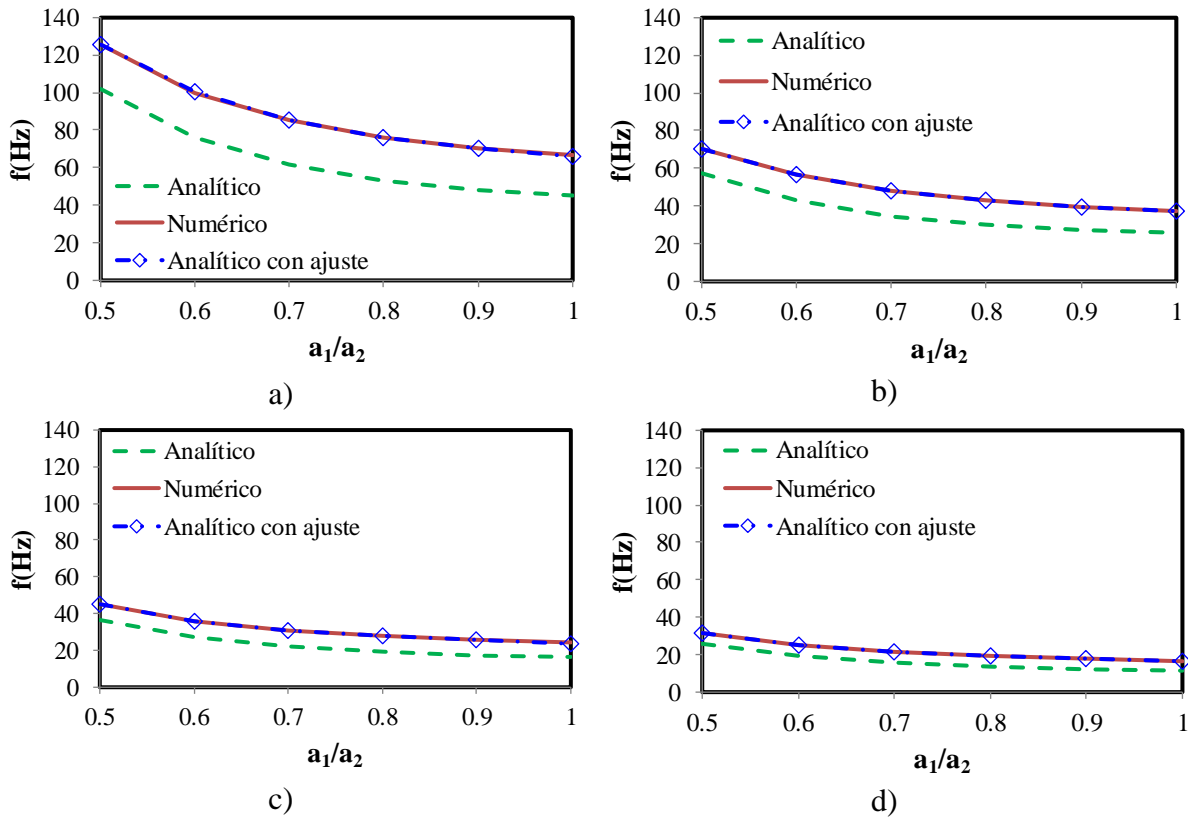


Figura 2.16. Comparación entre frecuencias en losa 4 con claros a_2 de: a) 3, b) 4, c) 5 y d) 6m.

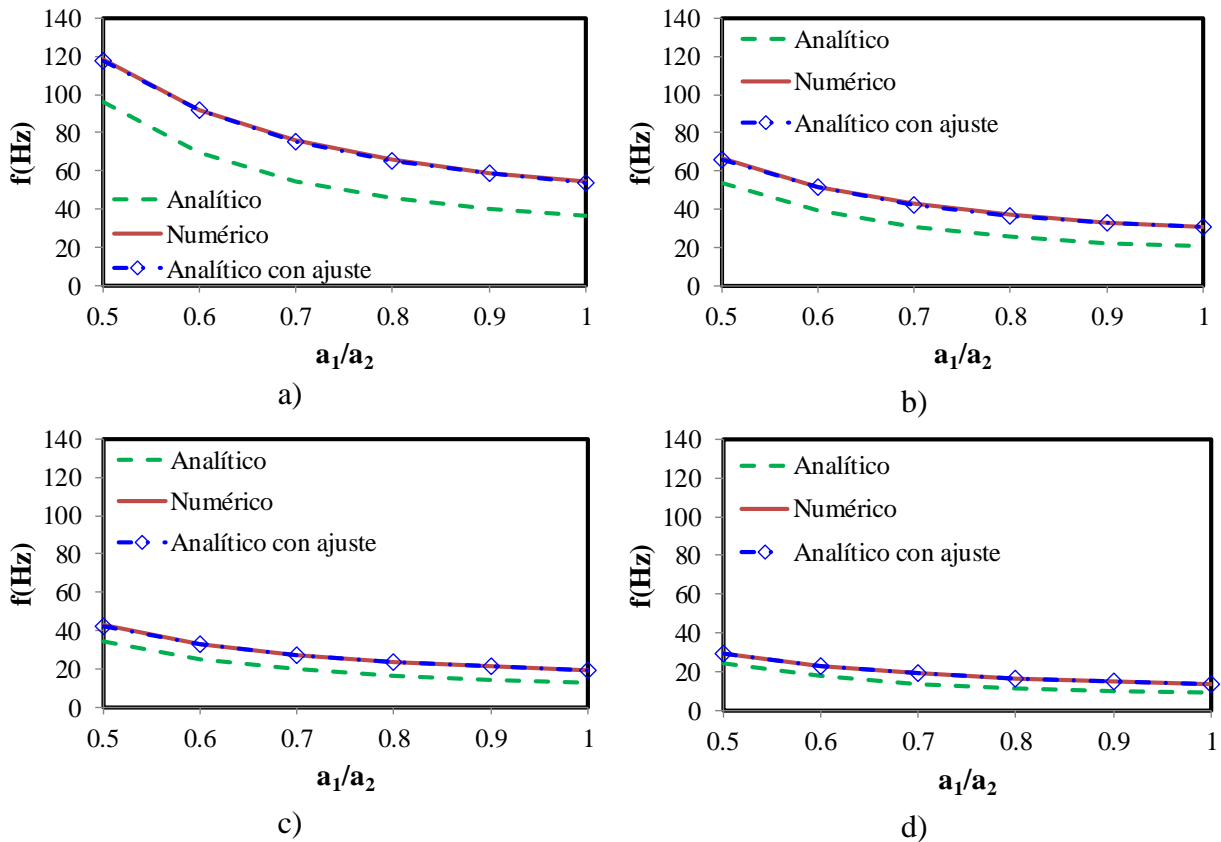


Figura 2.17. Comparación entre frecuencias en losa 5 con claros a_2 de: a) 3, b) 4, c) 5 y d) 6m.

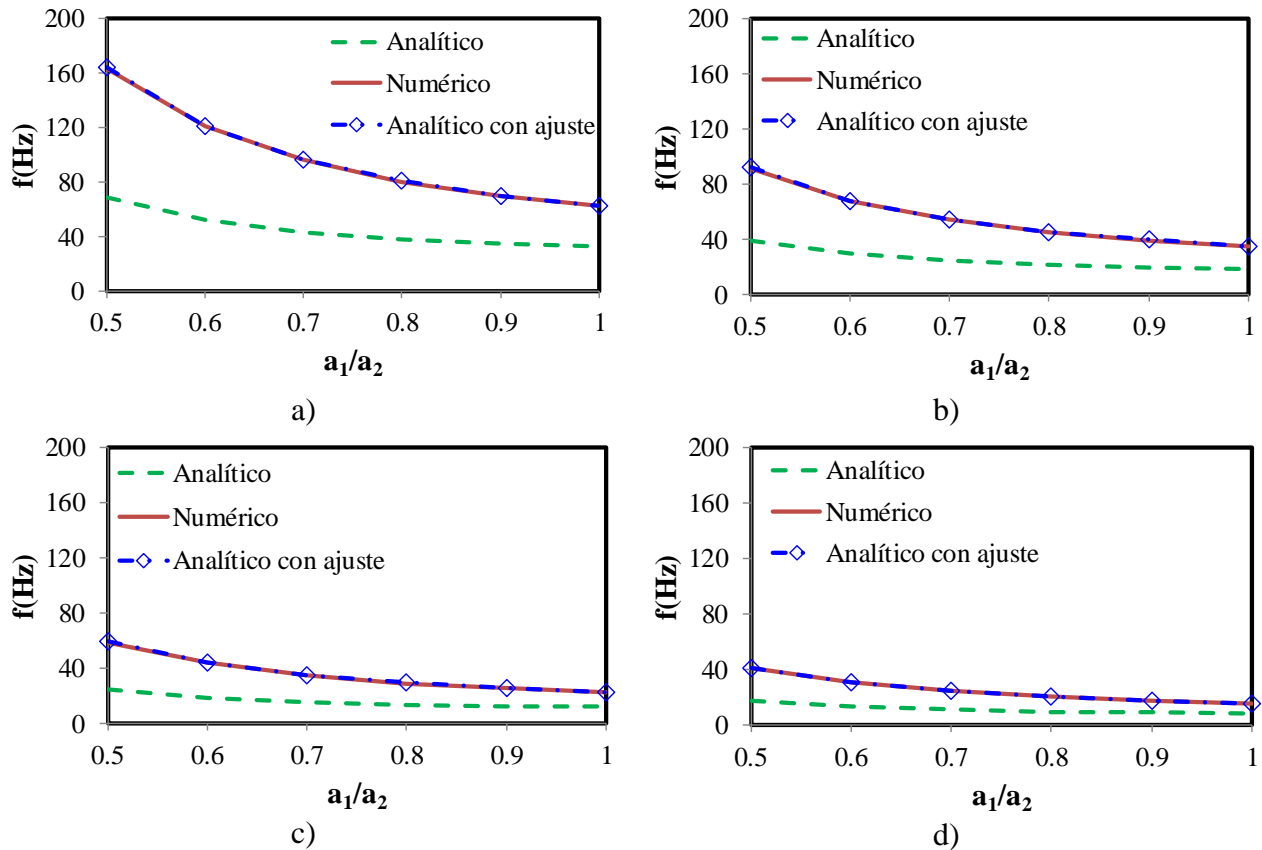


Figura 2.18. Comparación entre frecuencias en losa 6 con claros a_2 de: a) 3, b) 4, c) 5 y d) 6m.

Como se mostró en esta sección, se desarrollan expresiones analíticas para calcular la frecuencia natural de losas de concreto a partir de sistemas de un grado de libertad. Las expresiones obtenidas involucran el comportamiento a flexión de la losa en direcciones ortogonales principalmente a partir del análisis de sistemas generalizados basados en vigas apoyadas en sus extremos. En las comparaciones entre las soluciones numéricas y analíticas, la mayoría de las soluciones analíticas tienen una aproximación muy baja en la determinación de la f_n . Dado que se pretende proporcionar recomendaciones para el cálculo de f_n , se propuso realizar un ajuste de datos para considerar efectos que el modelo dinámico no describe, como el desarrollo de desplazamientos y elementos mecánicos en las esquinas de la losa principalmente. A pesar de ello, se requiere de un estudio más extenso para obtener una solución exacta sin la necesidad de ajustes por mínimos cuadrados.

Con el objetivo de validar las expresiones obtenidas para calcular la frecuencia natural con un modelo típico del análisis y diseño de losas, se analiza una losa de concreto reforzado con $f'c = 300 \text{ kg/cm}^2$, la cual se apoya sobre dos muros de concreto reforzado de 25 cm de espesor y $f'c = 350 \text{ kg/cm}^2$, como se muestra en la Figura 2.19; ambos elementos tienen un concreto clase 1 conforme a las NTCC-17 (2017). La losa es cuadrada de 3 m de claro, a la cual se le aplicó una carga distribuida y a su vez una masa distribuida adicional al peso propio con un valor de 280 kg/m^2 debido a carga muerta. Se obtuvo un peralte mínimo de 14 cm de acuerdo a las NTCC-17 (2017) y se incrementa el peralte en intervalos de 2 cm hasta un peralte de 20

cm. La expresión utilizada para la validación es la ecuación 3 en la Tabla 2.12. La diferencia entre ambas soluciones se muestra en la Tabla 2.13, donde se observa una aproximación con error no mayor al 3% entre ambas soluciones, lo cual muestra que las expresiones propuestas en la Tabla 2.12 son válidas para calcular la frecuencia natural en losas de concreto reforzado considerando un material homogéneo e isótropo. Sin embargo, es importante mencionar que estas expresiones son válidas cuando los bordes o apoyos presentan un desplazamiento cercano a cero en el centro del borde, que es el caso de losas apoyadas sobre muros o sobre vigas que se apoyan en muros. Es importante notar que, a pesar de que las funciones de forma obtenidas se utilizaron para el análisis de losas en dos direcciones, estas expresiones son útiles para obtener la frecuencia natural de vigas apoyadas en sus extremos ante las condiciones de apoyo en las que se analizaron.

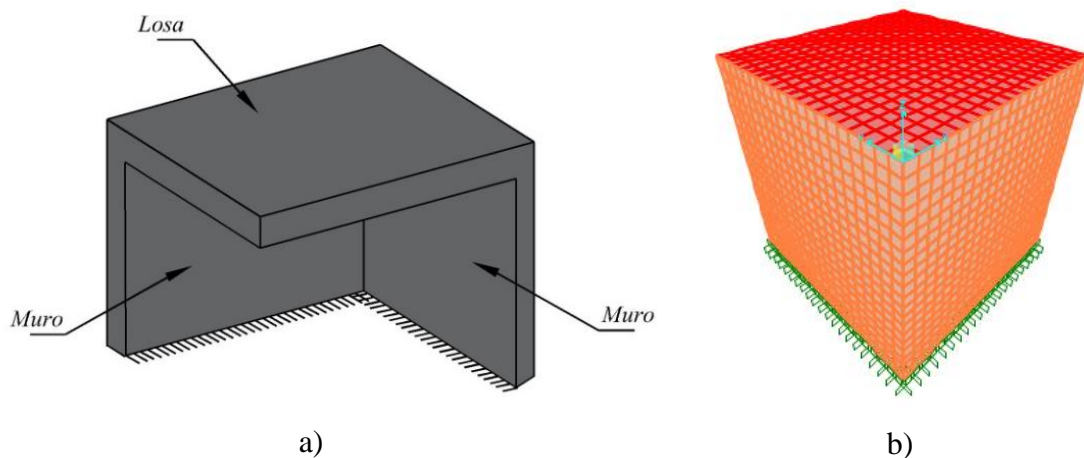


Figura 2.19. Modelo de losa para comparación entre soluciones: a) idealización de losa y b) modelo numérico.

Tabla 2.13 Comparación entre frecuencias

h_{losa} (cm)	FEM f(Hz)	Analítico f(Hz)	FEM/Analítico
14	11.98	12.08	0.99
16	14.22	14.07	1.01
18	16.38	16.15	1.01
20	18.22	18.57	0.98

2.3 Losas apoyadas en vigas

Las losas son sistemas estructurales que comúnmente se analizan como sistemas con bordes infinitamente rígidos en traslación, como se mostró en el capítulo anterior; sin embargo, en algunos casos, las losas en dos direcciones se apoyan sobre bordes flexibles como vigas, por lo que las soluciones de la Tabla 2.12 dejan de ser válidas. Por lo tanto, existe la necesidad de una expresión simplificada para la obtención de la frecuencia natural fundamental en losas de concreto con apoyos flexibles. Actualmente, algunos reglamentos como el HIVOSS

(2007), en el caso de losacero, proporcionan una expresión para el cálculo de la frecuencia natural fundamental de una losa en una dirección, que depende de dos de sus elementos estructurales: viga de apoyo y franja de losa, como se muestra esquemáticamente en la Figura 2.20.

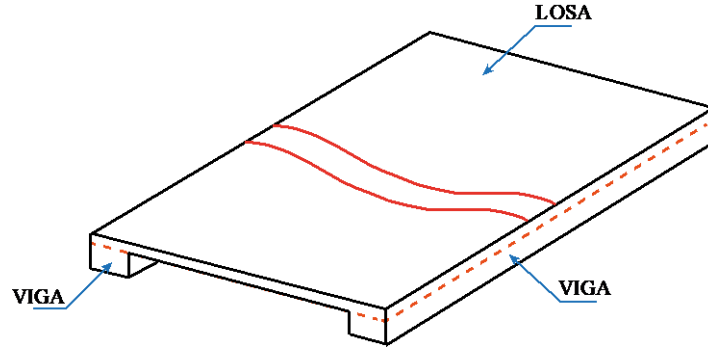


Figura 2.20. Esquema de losa en una dirección sobre bordes viga.

El análisis modal de la losa se realiza mediante la combinación de las formas modales de cada elemento estructural, vigas de apoyo y franja de losa, como lo recomienda el AISC (1997) para losacero a través de la ecuación de Dunkerley:

$$\frac{1}{f_n^2} = \frac{1}{f_j^2} + \frac{1}{f_g^2} \quad (2.35)$$

donde f_n es la frecuencia natural fundamental del sistema de losa, f_j es la frecuencia natural fundamental de viga secundaria o franja de losa y f_g es la frecuencia natural fundamental de viga principal. Las frecuencias naturales de las vigas se obtienen con la ec. (2.36) (AISC, 1997), que considera vigas simplemente apoyadas con carga uniformemente distribuida, la cual se menciona en la sección 1.2.1 de este trabajo.

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{3/4 \Delta}} \approx 0.18 \sqrt{\frac{g}{\Delta}} \quad (2.36)$$

Como se ha mencionado, el manual HIVOSS (2007) recomienda obtener la frecuencia natural de la franja central de losa con ancho unitario como una viga secundaria y se sustituye en la ec. (2.35). En este trabajo se utiliza esta idealización y se adapta al análisis de losas de concreto reforzado en dos direcciones, como se muestra en la Figura 2.21. Para ello, se realiza un desglose de la ec. (2.35) que se muestra de la ec. (2.37).

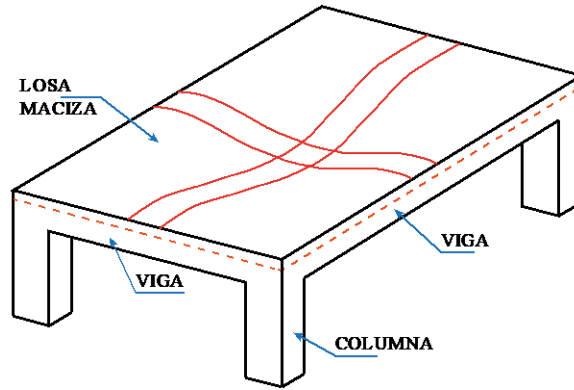


Figura 2.21. Esquema de losa en dos direcciones sobre bordes viga.

$$\frac{1}{f_n^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{3/4 \Delta_{viga}}} \right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{3/4 \Delta_{losa}}} \right)^2} \quad (2.37)$$

donde Δ_{viga} es la deflexión de la viga, Δ_{losa} es la deflexión de la losa y g es la aceleración de la gravedad. En las ecs. (2.36) y (2.37), el valor $3/4\Delta$ depende de las condiciones de borde del sistema, el cual corresponde a la franja central de losa que se analiza como una viga apoyada en sus extremos. Sin embargo, se tiene que esta condición no se cumple para losas en dos direcciones, ya que la franja de losa es parte de una membrana, por lo que este valor es distinto. Por lo tanto, se comparan las soluciones obtenidas con la ec. (2.37) del AISC (1997) y modelos numéricos de elementos finitos de losas de concreto reforzado en dos direcciones. En este trabajo se realizaron modelos numéricos de losas macizas de concreto apoyadas sobre vigas en sus cuatro bordes, las cuales se utilizan principalmente en edificaciones a base de marcos de concreto reforzado, que se caracterizan por soportar principalmente cargas gravitacionales. Con el objetivo de realizar diseños representativos de la construcción actual en la Ciudad de México, se utilizan cargas distribuidas debidas a carga muerta, cuyos elementos se enlistan en la Tabla 2.14 y carga viva máxima de 250 kg/m^2 , de acuerdo a lo especificado en las NTCC-17 (2017) para el uso de oficinas, despachos y laboratorios.

Tabla 2.14 Cargas muertas para análisis y diseño de sistemas de piso

Concepto	kg/m ²
Acabado en piso	100
Muros divisorios	100
Instalaciones	20
Plafón	20
Adicional NTCE-2017	40
Total	280

El modelado numérico para el análisis y diseño de cada losa consta de paneles aislados rectangulares con columnas cuadradas en sus esquinas con anchos de 30 cm para losas con claro a_2 de 4 y 5m, mientras que para las losas con a_2 de 6, 7 y 8m se utilizó un ancho de 50 cm, tal como se muestra en la Figura 2.22; los modelos tienen 20 elementos por borde. Las longitudes de a_2 utilizadas en cada modelo fueron 4, 5, 6, 7 y 8m con relaciones m de 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 y 1.0.

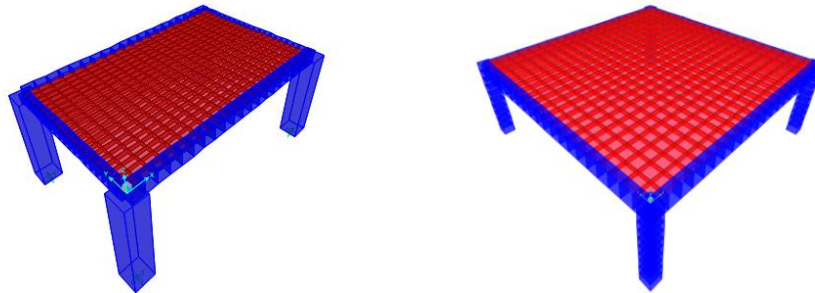


Figura 2.22. Modelos numéricos de losas de concreto reforzado apoyadas sobre vigas.

Los requerimientos de dimensionamiento de traveses cumplen con los requisitos mínimos para marcos con ductilidad alta de las NTCC-17 (2017). Sin embargo, cabe señalar que con este tipo de secciones se realizaron sólo análisis debidos ante carga gravitacional. Por otra parte, se realizó el diseño por resistencia de vigas y losas, así como la correspondiente revisión por estado límite de servicio; en este último se verificó que la relación entre el desplazamiento calculado en la losa y el desplazamiento permisible fuera lo más cercano a la unidad. En general, para los diseños se utilizó un concreto clase 1 (NTCC-17, 2017) con una resistencia a compresión del concreto $f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$ y un ancho de trabe de 25 cm, en la Tabla 2.15 se muestran los peraltes de losas y vigas correspondientes. El análisis de la f_n de cada modelo numérico se muestra en la Tabla 2.16, donde como un inicio se consideró solamente el peso propio de los elementos estructurales.

Tabla 2.15 Dimensiones de losas y vigas de concreto reforzado

m	$a_2(\text{cm})$														
	400			500			600			700			800		
	e_{llosa} (cm)	h_{claro} a_1 (cm)	h_{claro} a_2 (cm)	e_{llosa} (cm)	h_{claro} a_1 (cm)	h_{claro} a_2 (cm)	e_{llosa} (cm)	h_{claro} a_1 (cm)	h_{claro} a_2 (cm)	e_{llosa} (cm)	h_{claro} a_1 (cm)	h_{claro} a_2 (cm)	e_{llosa} (cm)	h_{claro} a_1 (cm)	h_{claro} a_2 (cm)
0.5	8	25	25	8	25	30	10	25	35	10	25	45	11	25	45
0.6	8	25	25	8	25	30	10	25	40	13	25	45	13	25	45
0.7	8	25	25	9	25	30	12	25	40	13	30	50	14	30	50
0.8	8	25	25	10	25	30	13	25	40	15	40	50	15	40	50
0.9	8	25	25	11	25	30	14	35	40	17	40	50	17	40	50
1	8	25	25	12	30	30	14	40	40	17	50	50	17	50	50

Tabla 2.16 Frecuencia natural de modelos numéricos de losas de concreto reforzado

<i>m</i>	Frecuencia natural (Hz)				
	<i>a</i> ₂ (cm)				
	400	500	600	700	800
0.5	27.39	19.57	18.23	15.41	11.62
0.6	25.09	17.53	17.01	13.26	9.97
0.7	22.77	15.60	14.90	12.10	9.20
0.8	20.53	13.95	13.04	11.16	8.40
0.9	18.47	12.50	12.37	10.09	7.60
1	16.61	11.72	11.38	9.42	7.10

Teniendo en cuenta que la carga muerta es la fuente de masa en los modelos numéricos, se obtiene el desplazamiento de viga en el claro *a*₂ y de la franja de losa; sustituyendo en la ec. (2.37) se obtiene un valor de la frecuencia natural fundamental que se compara con la obtenida de los modelos numéricos, como lo muestra el valor *r* de las Tablas 2.17 a 2.19, cuyo valor se obtuvo mediante la siguiente expresión:

$$r = \left| \frac{f_{numérico} - f_{AISC}}{f_{AISC}} \right| \quad (2.38)$$

donde, *f*_{numérico} es la *f*_{*n*} del modelo numérico y *f*_{AISC} es la *f*_{*n*} que se obtiene con la ec. (2.37) (AISC, 1997). Estas diferencias varían del 8 al 14 % por que los desplazamientos se obtuvieron directamente del modelo numérico; sin embargo, estas son mayores cuando los desplazamientos se obtienen de expresiones de losas idealizadas como los de las ecs. (2.42) y (2.43). Ante la hipótesis de que la franja de losa no se comporta totalmente como una viga, el valor de 3/4 debe ser distinto. Por lo tanto, para analizar el comportamiento de este valor, se utiliza en su lugar un variable *β*, la cual multiplica la deflexión de la losa *Δ*_{losa}, en la ec. (2.37), como se muestra en la ecuación ec. (2.39).

Tabla 2.17 Comparación entre solución numérica y analítica en losa con *a*₂=4m

<i>a</i> ₂ =4m				
Dimensiones		Numérico	AISC 1997	<i>r</i>
<i>b/a</i>	<i>b</i> (m)	<i>f</i> (Hz)	<i>f</i> (Hz)	
0.5	2.0	27.39	25.43	0.08
0.6	2.4	25.09	22.65	0.11
0.7	2.8	22.77	20.17	0.13
0.8	3.2	20.53	18.10	0.13
0.9	3.6	18.47	16.15	0.14
1	4	16.61	14.56	0.14

Tabla 2.18 Comparación entre solución numérica y analítica en losa con $a_2=6m$

$a_2=6m$				
Dimensiones		Numérico	AISC 1997	r
b/a	b(m)	f(Hz)	f(Hz)	
0.5	3	18.23	16.46	0.11
0.6	3.6	17.01	15.02	0.13
0.7	4.2	14.91	13.33	0.12
0.8	4.8	13.05	11.77	0.11
0.9	5.4	12.37	11.13	0.11
1	6	11.38	10.23	0.11

Tabla 2.19 Comparación entre solución numérica y analítica en losa con $a_2=8m$

$a_2=8m$				
Dimensiones		Numérico	AISC 1997	r
b/a	b(m)	f(Hz)	f(Hz)	
0.5	4	11.62	10.47	0.11
0.6	4.8	9.98	9.04	0.10
0.7	5.6	9.21	8.31	0.11
0.8	6.4	8.40	7.58	0.11
0.9	7.2	7.60	6.93	0.10
1	8	7.10	6.45	0.10

$$\frac{1}{f_n^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{3/4 \Delta_{viga}}}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\beta \Delta_{losa}}}\right)^2} \quad (2.39)$$

Despejando β en la ec. (2.39), se tiene:

$$\beta = \left[\frac{1}{f_n^2} - \frac{1}{0.18^2 \left(\frac{g}{\Delta_{viga}}\right)} \right] \frac{0.16^2 g}{\Delta_{losa}} \quad (2.40)$$

De los modelos numéricos realizados se sustituyen los valores de f_n , Δ_{viga} y Δ_{losa} , como se muestra en las Tablas 2.20 y 2.21 para losas con a_2 de 4 y 8m, respectivamente. Por lo tanto, los valores de β son los que se muestran en la Tabla 2.22, donde al obtener un valor mínimo

de 0.32 y máximo de 0.56, se eligió pragmáticamente un valor promedio $\beta=0.47$ para la ec. (2.39). Note que los valores β en la Tabla 2.22 son menores al 0.75 que originalmente se tiene en la ec. (2.37). Por lo tanto, al sustituir el valor de β en la ec. (2.39) y simplificando se obtiene la expresión modificada siguiente:

$$f = 0.18 \sqrt{\frac{g}{\Delta_{viga} + 0.59\Delta_{losa}}} \quad (2.41)$$

Tabla 2.20 Valores para obtención de β con la ec. (2.40)

a2=4m				
a₁/a₂	Δ_{losa} (cm)	Δ_{viga} a₂ (cm)	f_n (Hz)	β
0.5	0.05	0.04	27.39	0.32
0.6	0.06	0.04	25.09	0.35
0.7	0.08	0.04	22.77	0.39
0.8	0.10	0.04	20.53	0.46
0.9	0.13	0.05	18.47	0.46
1	0.16	0.05	16.61	0.49

Tabla 2.21 Valores para obtención de β con la ec. (2.40)

a2=8m				
a₁/a₂	Δ_{losa} (cm)	Δ_{viga} a₂ (cm)	f_n (Hz)	β
0.5	0.30	0.16	11.62	0.43
0.6	0.40	0.20	9.98	0.48
0.7	0.48	0.19	9.21	0.52
0.8	0.57	0.21	8.40	0.53
0.9	0.68	0.24	7.60	0.55
1	0.79	0.24	7.10	0.56

Tabla 2.22 Valores resumidos de β

m	β				
	a₂ (cm)				
	400	500	600	700	800
0.5	0.32	0.34	0.38	0.41	0.43
0.6	0.35	0.38	0.45	0.46	0.48
0.7	0.39	0.42	0.49	0.51	0.52
0.8	0.46	0.46	0.53	0.52	0.53
0.9	0.46	0.51	0.53	0.55	0.55
1	0.49	0.52	0.54	0.55	0.56

La ec. (2.41) se desarrolló con base en la masa debida al peso propio de sus elementos estructurales. Por lo tanto, para validar esta expresión se compara con los modelos numéricos antes mencionados, donde a la masa debida peso propio se le incluye una masa por carga muerta de sobrecarga con valor de 280 kg/m^2 , como se desglosa en la Tabla 2.3. Por otra parte, el desplazamiento de viga en el claro largo a_2 y de la franja de losa en el sentido a_1 se obtiene de los modelos numéricos. Sustituyendo estos desplazamientos en la ec. (2.41), se calcula un valor de la frecuencia natural fundamental, donde se tienen diferencias máximas del 6.4% entre la solución analítica y la numérica, como se muestra en las Tablas 2.23, 2.24 y la Figura 2.23.

Tabla 2.23 Comparación entre solución numérica y analítica modificada en losa con $a_2=4\text{m}$

m	$a_2=4\text{m}$					
	f_n Numérico (Hz)	Δ_{viga} (cm)	Δ_{losa} (cm)		f_n Modificado (Hz)	r
0.5	19.49	0.07	0.10	0.03	19.35	0.01
0.6	17.23	0.07	0.13	0.06	17.18	0.00
0.7	15.24	0.08	0.17	0.09	15.36	0.01
0.8	13.52	0.09	0.22	0.13	13.81	0.02
0.9	12.06	0.09	0.28	0.19	12.50	0.04
1	10.82	0.10	0.35	0.25	11.37	0.05

Tabla 2.24 Comparación entre solución numérica y analítica modificada en losa con $a_2=8\text{m}$

m	$a_2=8 \text{ m}$					
	f_n numérico (Hz)	Δ_{viga} (cm)	Δ_{losa} (cm)		f_n AISC Modificado (Hz)	r
0.5	8.39	0.27	0.55	0.28	8.51	0.01
0.6	7.39	0.32	0.71	0.38	7.59	0.03
0.7	6.88	0.30	0.83	0.53	7.20	0.04
0.8	6.36	0.33	0.98	0.65	6.68	0.05
0.9	5.90	0.37	1.12	0.75	6.27	0.06
1	5.51	0.38	1.29	0.92	5.88	0.06

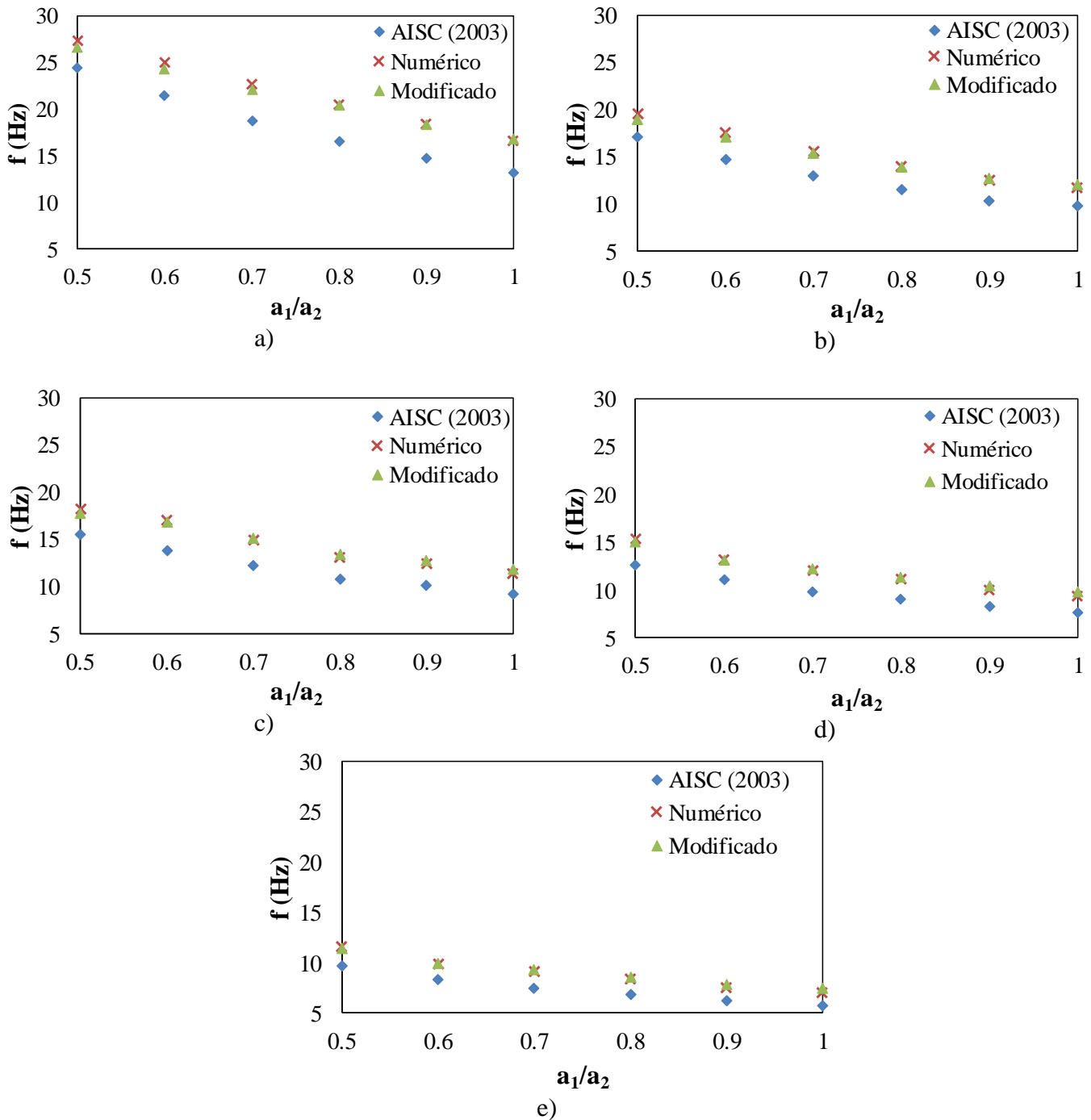


Figura 2.23. Comparación entre soluciones para el cálculo de la frecuencia natural fundamental en losas de concreto reforzado con longitudes de claro a_2 en metros de: a) 4, b) 5 c) 6 d) 7 y e) 8.

Debido a que la ec. (2.41) se obtuvo con los desplazamientos calculados en modelos numéricos, es necesario considerar un procedimiento simple para obtenerlo en la viga del claro a_2 y en el centro de la losa. Para ello, se realiza una comparación entre los desplazamientos del modelo numérico y soluciones de vigas simplemente apoyadas y empotradas en sus extremos con carga uniformemente distribuida. Considerando los modelos numéricos mencionados en la Tabla 2.15 con carga muerta así como una carga adicional de

280 kg/m², se obtienen los desplazamientos en la viga en el centro del claro a_2 y en el centro de la losa. Posteriormente, se compara con las soluciones representadas por las ecs. (2.42) y (2.43) para las zonas ya mencionadas; en el caso de la losa se utiliza un ancho unitario para su análisis.

$$\Delta_{simple} = \frac{5wl^4}{384EI} \quad (2.42)$$

$$\Delta_{empotrado} = \frac{wl^4}{384EI} \quad (2.43)$$

donde, Δ_{simple} y $\Delta_{empotrado}$ representan la deflexión máxima en el centro del claro, w es la carga distribuida por unidad de longitud, l es la longitud del elemento, E es el módulo de elasticidad del material e I es el momento de inercia de la sección bruta de concreto reforzado. Por lo tanto, al comparar las distintas soluciones se tiene una tendencia significativa hacia la solución de viga empotrada en sus extremos para losas con claros a_2 de 4, 6 y 8m como se muestra en las Tablas 2.25 y 2.26. Por lo tanto, se establece que la solución de una viga empotrada en sus extremos es aceptable como procedimiento para calcular el desplazamiento en una losa de concreto reforzado.

Tabla 2.25 Comparación entre solución numérica y las ecs. (2.42) y (2.43) en la obtención del desplazamiento en el centro del claro de viga

m	Desplazamiento en claro a_2 (cm)								
	400 cm			600 cm			800 cm		
	$\Delta_{numérico}$	$\Delta_{empotrado}$	Δ_{simple}	$\Delta_{numérico}$	$\Delta_{empotrado}$	Δ_{simple}	$\Delta_{numérico}$	$\Delta_{empotrado}$	Δ_{simple}
0.5	0.066	0.043	0.213	0.126	0.124	0.619	0.274	0.252	1.258
0.6	0.074	0.046	0.231	0.111	0.093	0.467	0.325	0.293	1.465
0.7	0.081	0.049	0.245	0.127	0.106	0.530	0.302	0.240	1.200
0.8	0.087	0.051	0.255	0.140	0.114	0.570	0.329	0.258	1.291
0.9	0.093	0.052	0.261	0.148	0.121	0.603	0.366	0.281	1.404
1	0.098	0.050	0.260	0.154	0.122	0.608	0.378	0.283	1.416

Tabla 2.26 Comparación entre solución numérica y las ecs. (2.42) y (2.43) en la obtención del desplazamiento en el centro del claro de la porción de losa

m	Desplazamiento en el centro del claro de losa (cm)								
	400 cm			600 cm			800 cm		
	$\Delta_{numérico}$	$\Delta_{empotrado}$	Δ_{simple}	$\Delta_{numérico}$	$\Delta_{empotrado}$	Δ_{simple}	$\Delta_{numérico}$	$\Delta_{empotrado}$	Δ_{simple}
0.5	0.032	0.019	0.095	0.102	0.054	0.271	0.281	0.135	0.674
0.6	0.057	0.039	0.197	0.177	0.113	0.563	0.385	0.184	0.922
0.7	0.091	0.073	0.365	0.215	0.132	0.659	0.528	0.285	1.423
0.8	0.135	0.125	0.623	0.287	0.184	0.922	0.648	0.41	2.05
0.9	0.187	0.200	0.998	0.317	0.246	1.230	0.749	0.485	2.425
1	0.251	0.300	1.520	0.400	0.375	1.875	0.915	0.739	3.696

Debido a existe una diferencia entre la solución numérica y la solución empotrada, se define una relación entre ambas mediante un cociente, donde para el procedimiento la viga del claro a_2 se define el cociente como $C_1 = \Delta_{\text{numérico}} / \Delta_{\text{empotrado}}$; mientras que para la franja central de losa con ancho unitario su cociente se define como $C_2 = \Delta_{\text{numérico}} / \Delta_{\text{empotrado}}$. Teniendo en cuenta que para losas con claros a_2 de 4, 5, 6, 7, y 8m se tienen distintos valores de C_1 y C_2 como se observa en la Figura 2.24, se establece un ajuste de datos mediante las ecs. (2.44) y (2.45).

$$C_1 = 1.56 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{0.29} \quad (2.44)$$

$$C_2 = 1.18 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{-0.69} \quad (2.45)$$

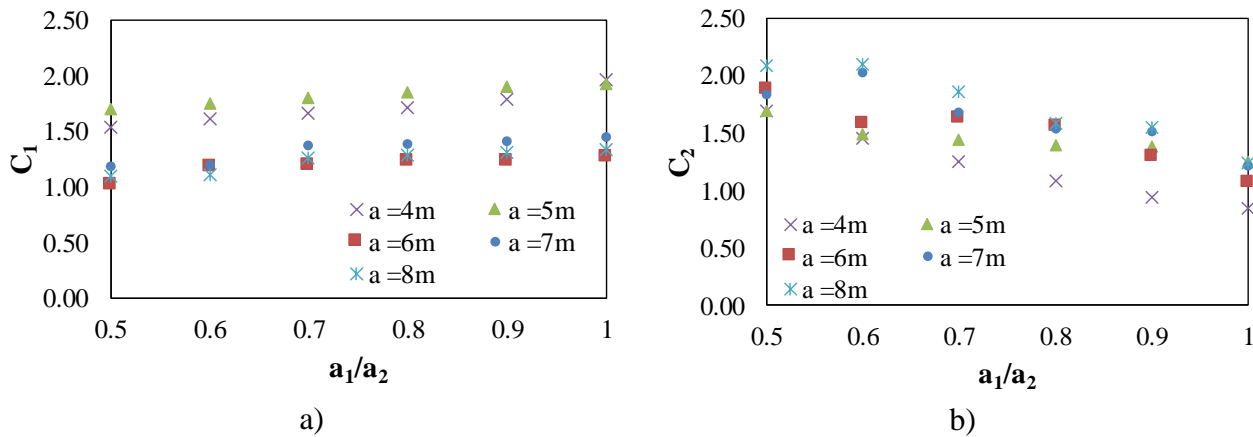


Figura 2.24. Coeficientes C_1 y C_2 para obtención de desplazamientos en losas de concreto reforzado con claros a_2 de 4, 5, 6, 7 y 8m, donde: a) C_1 y b) C_2 .

Por lo tanto, los valores de las ecs. (2.44) y (2.45) se sustituyen en la ec. (2.41) obteniendo así la ec. (2.46), la cual se utiliza para aproximar la frecuencia natural de una losa de concreto reforzado, a partir del análisis del desplazamiento en una viga empotrada en sus extremos. El cálculo de la deflexión con las ecs. (2.44) y (2.45) aplica para losas con cualquier tipo de concreto, sea clase 1 o 2, ya que las regresiones calculadas dependen de las configuraciones deformadas y condiciones de borde de los elementos. Para validar este procedimiento, se realiza una comparación con soluciones numéricas como se muestra en las Tablas 2.27 a 2.29. Teniendo así, un error de hasta el 8 % aproximadamente; en un inicio este valor fue del 14 %, el cambio fue mínimo. Sin embargo, con este ajuste se involucra de mejor manera el comportamiento de la losa. También, se obtiene una expresión más sólida y con mejor aproximación en el cálculo de la frecuencia natural fundamental, donde se simplifica tanto el análisis de la bajada de cargas como las condiciones de apoyo en la viga del claro a_2 y en la franja central de losa.

$$f_n = 0.18 \sqrt{\frac{g}{C_1 \Delta_{viga} + 0.59 C_2 \Delta_{losa}}} \quad (2.46)$$

Tabla 2.27 Comparación entre solución numérica y la ec. (2.46) en la obtención de la frecuencia natural en losa de concreto reforzado

a₂=4m					
m	Δ_{losa} (cm)	Δ_{viga} (cm)	f_{numérico} (Hz)	f_n (Hz)	Diferencia r
0.5	0.019	0.043	19.485	20.42	0.05
0.6	0.039	0.046	17.234	17.73	0.03
0.7	0.073	0.049	15.241	15.41	0.01
0.8	0.125	0.051	13.524	13.45	0.01
0.9	0.200	0.052	12.060	11.80	0.02
1	0.300	0.050	10.819	10.53	0.03

Tabla 2.28 Comparación entre solución numérica y la ec. (2.46) en la obtención de la frecuencia natural en losa de concreto reforzado

a₂=6m					
m	Δ_{losa} (cm)	Δ_{viga} (cm)	f_{numérico} (Hz)	f_n (Hz)	Diferencia r
0.5	0.054	0.124	13.047	12.05	0.08
0.6	0.113	0.093	11.850	11.58	0.02
0.7	0.132	0.106	10.789	10.92	0.01
0.8	0.184	0.114	9.584	10.02	0.05
0.9	0.246	0.121	9.227	9.31	0.01
1	0.375	0.122	8.478	8.40	0.01

Tabla 2.29 Comparación entre solución numérica y la ec. (2.46) en la obtención de la frecuencia natural en losa de concreto reforzado

a₂=8m					
m	Δ_{losa} (cm)	Δ_{viga} (cm)	f_{numérico} (Hz)	f_n (Hz)	Diferencia r
0.5	0.135	0.252	8.390	8.20	0.02
0.6	0.184	0.293	7.394	7.42	0.00
0.7	0.285	0.240	6.880	7.33	0.07
0.8	0.410	0.258	6.355	6.69	0.05
0.9	0.485	0.281	5.899	6.35	0.08
1	0.739	0.283	5.506	5.77	0.05

Con base en los resultados de las Tablas 2.27 a 2.29 se valida la expresión de la ec. (2.41) para el cálculo simplificado de la frecuencia natural fundamental en losas sobre bordes viga, considerando el desplazamiento de una franja de losa y solo el de una viga del claro a_2 , ya que se supone que la viga paralela tiene propiedades similares.

En general, en este capítulo se proporcionan expresiones para el cálculo de la frecuencia natural fundamental de losas de concreto reforzado con base en métodos prácticos simplificados. Como se observa, los modelos de sistemas de piso analizados tienen dimensiones que se utilizan comúnmente en la práctica profesional. Con lo cual, se comprueba que las expresiones propuestas aplican para losas rectangulares con cualquier relación de claros a_1/a_2 y ante cualquier dimensión de claro a_2 .

Las expresiones propuestas se basan en el análisis de vigas apoyadas en sus extremos considerando la hipótesis de que los apoyos son infinitamente rígidos, donde se considera que la viga del claro a_2 y la franja de losa tienen una rotación igual a cero en sus extremos. Sin embargo, como se muestra en las Tablas 2.25 y 2.26 utilizando la expresión correspondiente a una viga empotrada en sus extremos es de una mejor aproximación con respecto a la de una viga con apoyos simple, ya sea para una trabe que sea parte de un marco o de una franja de losa de ancho unitario.

En el desarrollo de las metodologías propuestas para el cálculo de f_n , las expresiones obtenidas consideran masas uniformemente distribuidas para representar cargas muertas y vivas. Por lo que se desprecia el efecto de masas concentradas que pueden surgir a partir de concentraciones de carga en áreas pequeñas. Cabe señalar que las concentraciones de masa en cualquier punto sobre el sistema de piso pueden tener una influencia importante en el valor de f_n , ya que la coordenada generalizada que describe la amplitud de movimiento del sistema continuo cambia de posición, generando un cambio en las cantidades de masa y rigidez que participan durante el movimiento.

En el cálculo de rigideces o deflexiones en la losa, en este trabajo se consideró un módulo de elasticidad para concretos clase 1 (NTCC-17, 2017) que incluye concreto simple y acero de refuerzo, es decir, se considera un material homogéneo e isotrópico. Por lo que sus propiedades de masa y rigidez se derivan de las dimensiones de claros a_1 y a_2 , de un espesor constante h , de un peso volumétrico w_c y de un módulo elástico E_c , en la superficie total de la losa. Cabe mencionar que en estructuras de concreto reforzado reales las hipótesis de homogeneidad e isotropía no se cumplen por las propiedades ortótropas que tiene el concreto reforzado. Sin embargo, las hipótesis asumidas en este trabajo son una primera aproximación que puede ser útil. Por otra parte, se considera una sección gruesa en los elementos estructurales, es decir, se desprecia la degradación estructural de los elementos losa y vigas. Por lo tanto, es necesario que el diseñador tenga en cuenta estas características en el cálculo de f_n por su importancia en el análisis y diseño de estructuras de concreto reforzado como se subraya en Tena (2018).

3 ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LA FRECUENCIA NATURAL FUNDAMENTAL EN LOSAS MACIZAS DE CONCRETO REFORZADO EN DOS DIRECCIONES

3.1 Introducción

Dado que la frecuencia natural es una variable que influye en la vibración de un sistema de piso ante el caminar de personas, en especificaciones como la guía de diseño 11 de AISC (1997) y la guía de diseño HIVOSS (2007) se han proporcionado recomendaciones empíricas y prácticas para el cálculo y control de la f_n en sistemas de piso de losacero, ya sea vigas compuestas o losas en una dirección, con el fin de no exceder ciertos umbrales de incomodidad. Estas especificaciones recomiendan valores mínimos de f_n para evitar vibraciones excesivas. Sin embargo, en este capítulo estos criterios se utilizan para evaluar su aplicabilidad a losas de concreto reforzado tanto en la evaluación de la vibración, como en la definición de un valor práctico de f_n para evitar umbrales de incomodidad en las personas. Por lo tanto, en este capítulo se evalúa la definición de frecuencia natural fundamental mínima y la susceptibilidad de modelos numéricos de losas de concreto reforzado en dos direcciones ante vibraciones por el caminar de personas. Por otra parte, se realiza un estudio de las variables que influyen en el comportamiento de la f_n en losas de concreto reforzado en dos direcciones con el objetivo de proporcionar un criterio adecuado para su control.

3.2 Revisión de los criterios de f_n para evitar vibraciones excesivas en sistemas de piso ante el caminar de personas

En la actualidad la vibración de un sistema de piso es regulada por cuestiones de comodidad, y para ello existen nomogramas que establecen límites de aceleración en función de la perceptibilidad de las personas y de acuerdo a un uso requerido. Estos nomogramas requieren dos variables: la f_n en el eje de las abscisas y la aceleración máxima en el eje de las ordenadas. Existe diversidad de nomogramas, en el caso particular de Norteamérica, el nomograma más utilizado para el análisis ante vibración debido al caminar de una persona en estructuras de acero es el del código AISC (1997), que se basa en los trabajos de Allen y Murray (1993) e ISO (1989). En este código se menciona que si la f_n del sistema de piso se encuentra entre 4 y 8 Hz, se tiene mayor perceptibilidad de las personas a las aceleraciones producidas por el caminar de una persona, como se muestra en la Figura 3.1, donde en este intervalo de frecuencias, los valores de aceleraciones permisibles son menores. La guía de diseño de la comisión europea HIVOSS (2007) propone una frecuencia no menor a 9 Hz para evitar vibraciones excesivas debidas al caminar de personas. En la nueva propuesta para las especificaciones de las NTCC-17 (2017) ante vibración de sistemas de piso, sólo se recomienda que para f_n menor de 6 Hz es necesario realizar modelos numéricos para evaluar de la respuesta dinámica ante actividades rítmicas de un conjunto de personas.

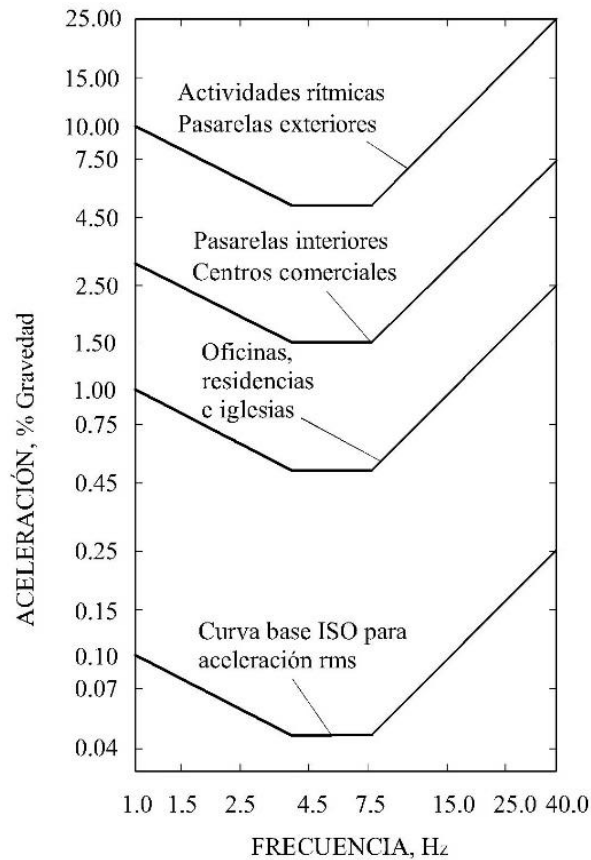


Figura 3.1. Nomograma de aceleraciones para el control de vibraciones debido al caminar de personas (AISC, 1997).

Dado que los criterios antes mencionados sobre la regulación de la vibración son distintos, es necesario realizar una comparación entre éstos con el objetivo de observar si existe un parámetro general que defina una frecuencia natural fundamental mínima necesaria para evitar aceleraciones excesivas. Por lo tanto, teniendo las características de los modelos mostrados en las Tablas 2.15 y 2.16, se obtienen las f_n de cada modelo numérico, las cuales se comparan con los límites de frecuencia mínima establecidos por los códigos HIVOSS (2007), AISC (1997) y NTCC-17 (2017) tal como se muestra en la Figura 3.2, donde se observa que para las especificaciones HIVOSS (2007) las losas con longitudes a_2 de 8 y 7 m son susceptibles a vibración excesiva; en el caso del código AISC (1997) se observa que las losas con a_2 de 8 m y parte de las losas con 7 m presentan susceptibilidad a vibración excesiva; mientras que en el caso de las NTCC-17 (2017) no es necesario revisar detalladamente la susceptibilidad de las losas, ya que especifica una frecuencia mínima de 6 Hz. Sin embargo, es necesario evaluar el sistema de piso con la ec. (1.40). Cabe señalar que la expresión de las NTCC-17 (2017) no detalla sobre las características de la fuente de excitación. Por lo que en este caso se considera utilizar actividades humanas, principalmente las debidas a un conjunto de personas. En general, como se muestra en las Figuras 3.2a y 3.2b para el caso de vibraciones debidas al caminar de personas, la f_n mínima necesaria para evitar vibraciones excesivas está en un rango de 8 a 9 Hz; la diferencia es mínima, sin embargo, sería útil realizar

un estudio más detallado en la definición de un f_n mínimo. Por último, es necesario contar con criterios de control de la f_n , ya sea para evitar niveles de incomodidad, o para rigidizar y flexibilizar puntos estratégicos de un sistema de piso existente.

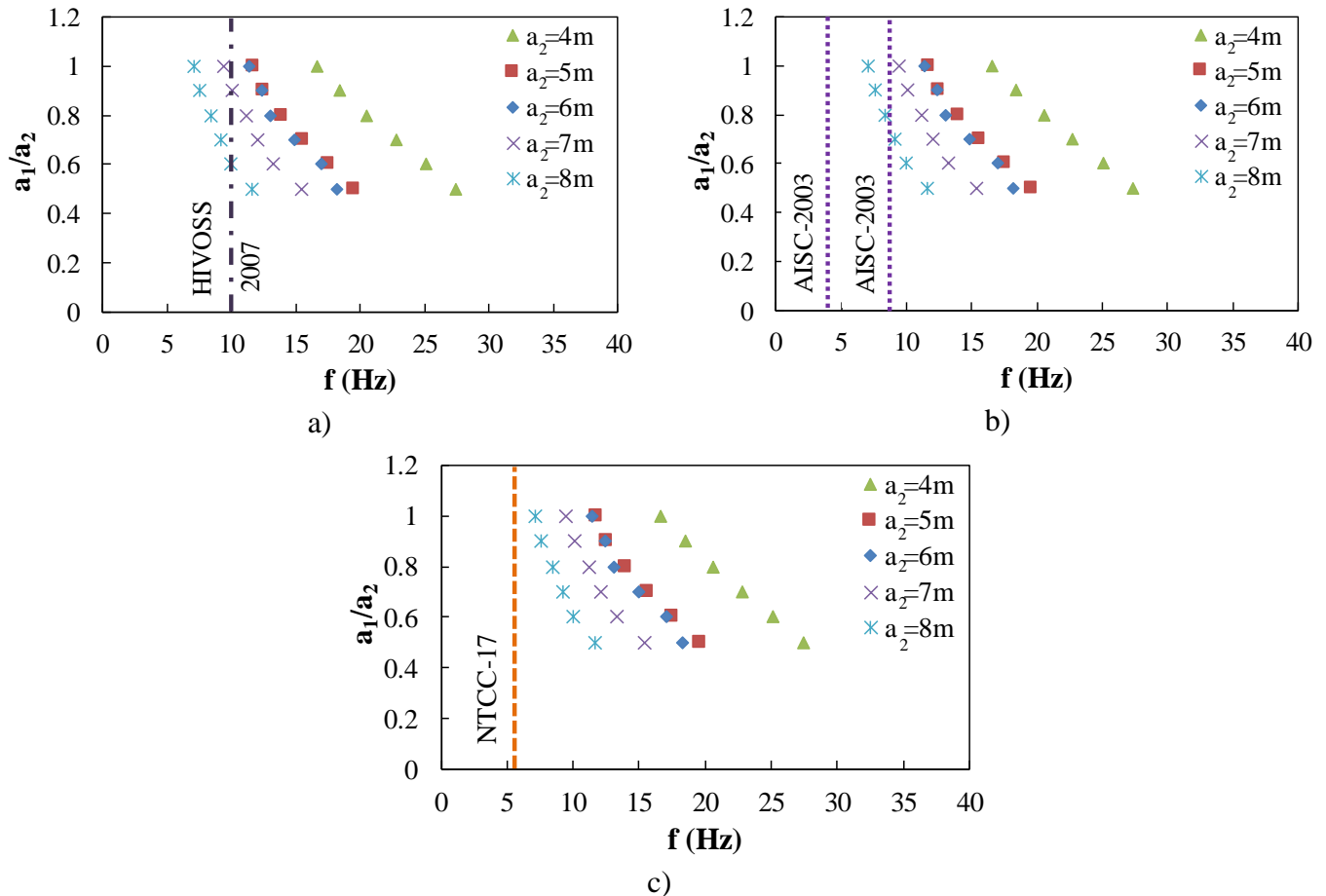


Figura 3.2. Susceptibilidad ante vibración de sistemas de piso de concreto reforzado apoyados sobre vigas de acuerdo con códigos de diseño: a) HIVOSS (2007), b) AISC (1997) y c) NTCC-17 (2017).

3.3 Análisis de la frecuencia natural fundamental f_n en losas de concreto reforzado en dos direcciones

La f_n de un sistema de piso es una variable importante para el control de la vibración debida a una excitación impuesta por la actividad de personas, por lo que es necesario identificar el comportamiento de las variables principales que influyen en ella, además de establecer lineamientos necesarios para controlarla.

En algunas ocasiones por practicidad, la f_n de un sistema de piso se calcula a partir de soluciones analíticas que no consideran variables como las condiciones de apoyo, pues algunas veces una losa apoyada sobre vigas flexibles es analizada suponiendo bordes rígidos. Para evaluar estas condiciones de apoyo, se realizaron dos modelos numéricos como los que se muestran en la Figura 3.3. El primero tiene una rigidez traslacional infinita a lo largo de

sus bordes; mientras que el tablero sobre apoyos flexibles tiene elementos viga que se deflexionan en función de sus características de rigidez y masa. Por lo anterior, para comparar los resultados de cada tipo, se realizó el modelado numérico de dos losas aisladas con espesores de 12 y 14 cm; para cada espesor se utilizaron claros largos a_2 de 3 y 6 m, en los que se varió a_1 para las relaciones m de 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 y 1.0, vigas rectangulares de 30 x 25 y 40 x 25 cm; ambas losas se modelaron con elementos lámina y viga, a las que se le asignó un concreto clase 1 (NTCC-17, 2017) con una resistencia a compresión del concreto de 300 kg/cm². En la Figura 3.4 se observa que la magnitud de la f_n de una losa apoyada sobre vigas es menor que cuando la losa se apoya sobre bordes rígidos simples, esta diferencia es hasta del 280% aproximadamente para $m=0.5$ y del 160% para $m=1.0$. Lo cual muestra una influencia importante de las condiciones de apoyo en la f_n fundamental de sistemas de piso de concreto reforzado. Mostrando así, la importancia de estudiar los parámetros que determinan de manera más detallada la f_n de este tipo de sistemas.

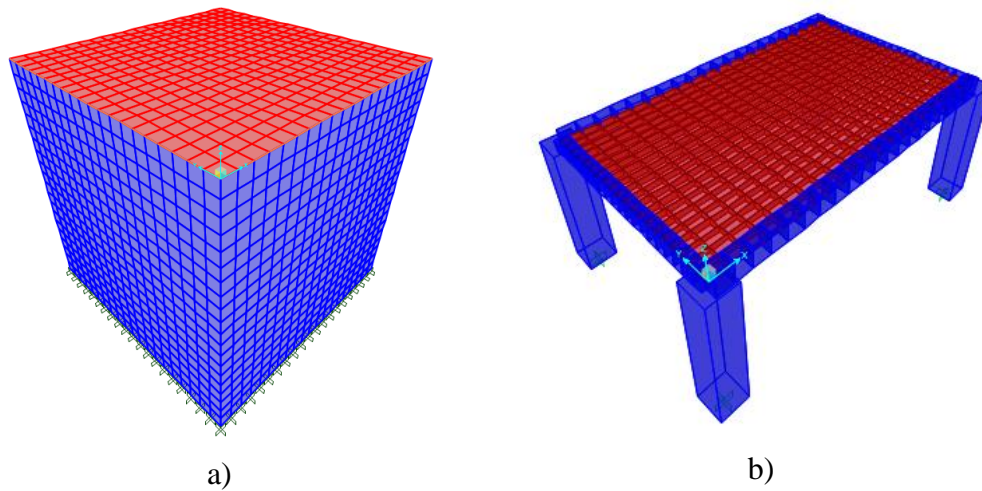


Figura 3.3. Modelo de losa con apoyo: a) rígido y b) flexible.

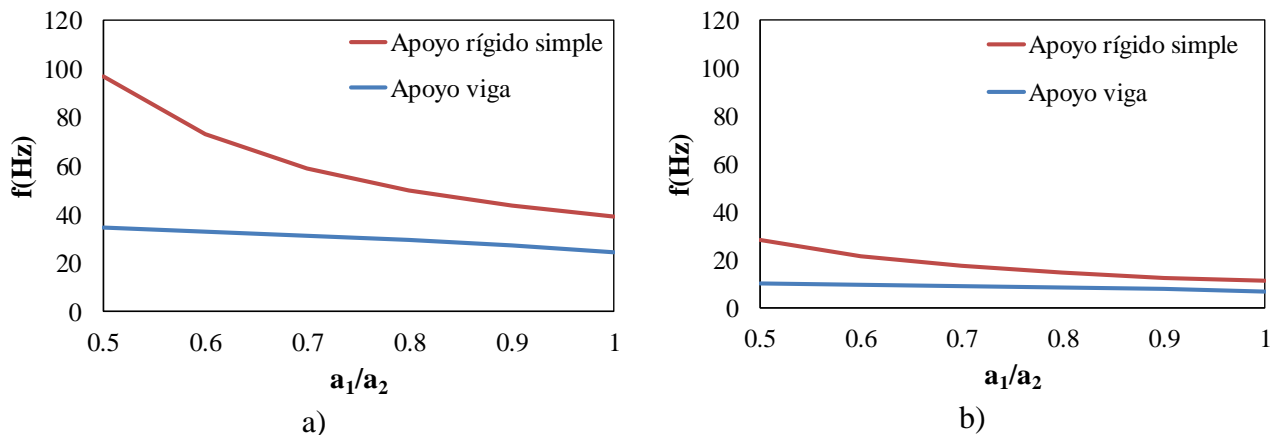


Figura 3.4. Comparación de la frecuencia natural fundamental en losas aisladas con apoyos rígidos simples y viga con a_2 : a) 3 y b) 6m.

3.3.1 Análisis de la influencia de tableros circundantes en la frecuencia natural fundamental f_n

Generalmente, algunas recomendaciones como las propuestas por Bares (1971), Blevins (1979) y la mayoría de las soluciones analíticas para el cálculo de la f_n en sistemas de piso se proporcionan para tableros aislados. Sin embargo, la mayoría de los sistemas de piso que se encuentran en las edificaciones se conforma de distintos tableros que, al ser colados monólicamente, se comportan como un sistema continuo. Con el fin de estudiar el comportamiento en la frecuencia natural fundamental de sistemas de piso conformados de múltiples tableros, se estudian cuatro configuraciones geométricas de losas cuadradas con apoyos rígidos y apoyos sobre viga, donde primeramente se analizó un tablero con una longitud de lado corto de $a_1/20$, la cual se incrementó hasta obtener una losa cuadrada, es decir, $a_1=a_2$. Posteriormente, se estudiaron 2, 3, 4 y 9 paneles a los que la longitud a_1 de uno de sus paneles se incrementó hasta tenerlos completamente cuadrados, como se muestran en la Figura 3.5.

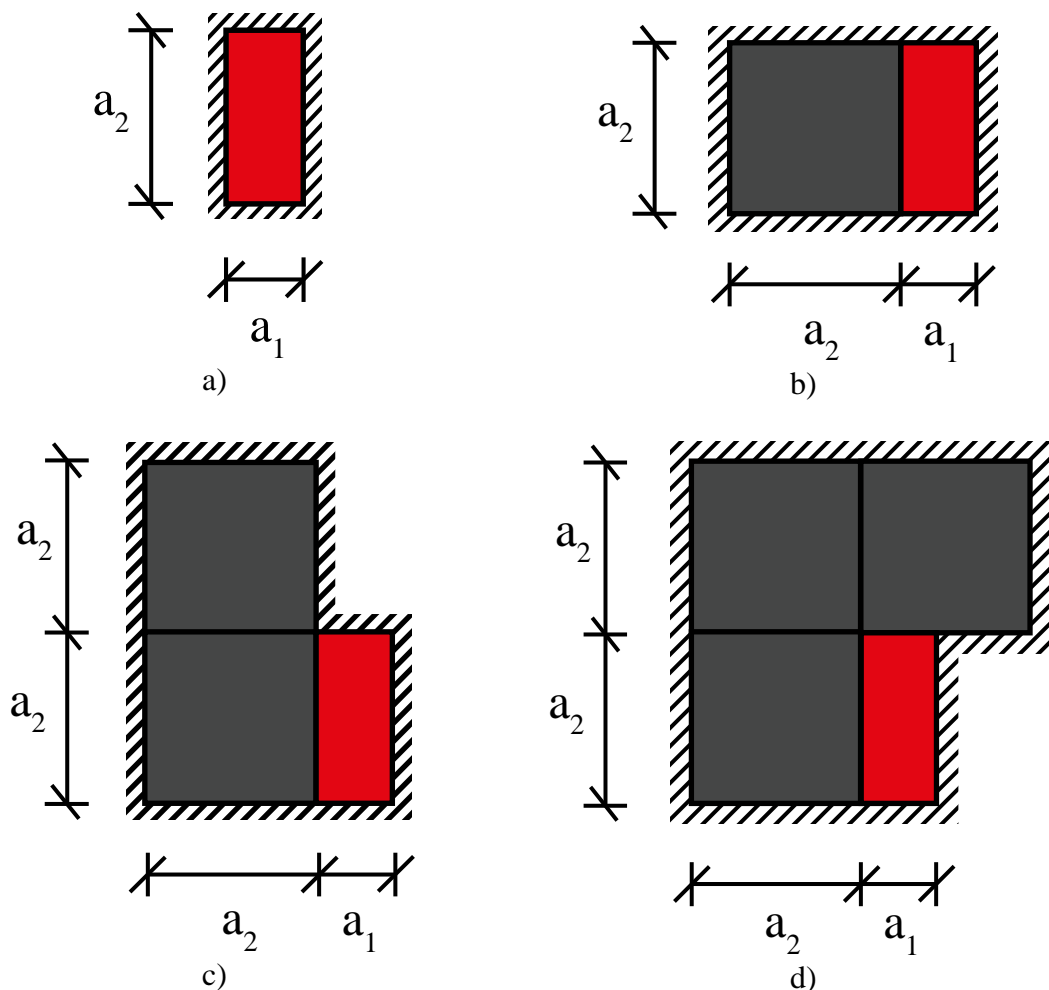
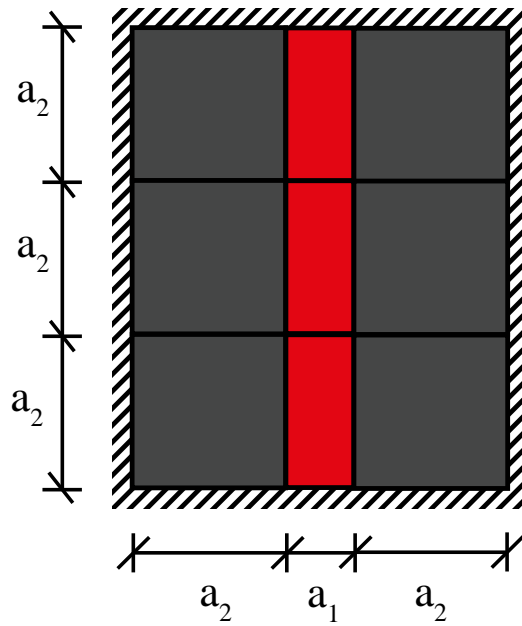


Figura 3.5. Configuración de losas con tableros: a) uno, b) dos, c) tres, d) cuatro y e) nueve



e)

Figura 3.5 Continuación de Figura

Con el fin de conocer la variación de la magnitud de la f_n en losas de concreto reforzado como los que se muestran en la Figura 3.5 se realizaron los modelos numéricos de losas con apoyos rígidos y apoyos flexibles o viga. Las vigas son rectangulares de 30x20cm y el espesor de la losa es de 12 cm. El concreto utilizado es clase 1 con resistencia a compresión de 250 kg/cm². El análisis de la f_n se realizó para losas con apoyos rígidos en todo su borde; mientras que, en las losas apoyadas sobre vigas se colocó un apoyo simple en cada esquina, el cual permite la rotación; los modelos numéricos, cuando $a_1=a_2$, se muestran en la Figura 3.6, a los que se les asignó un material homogéneo, elástico e isótropo.

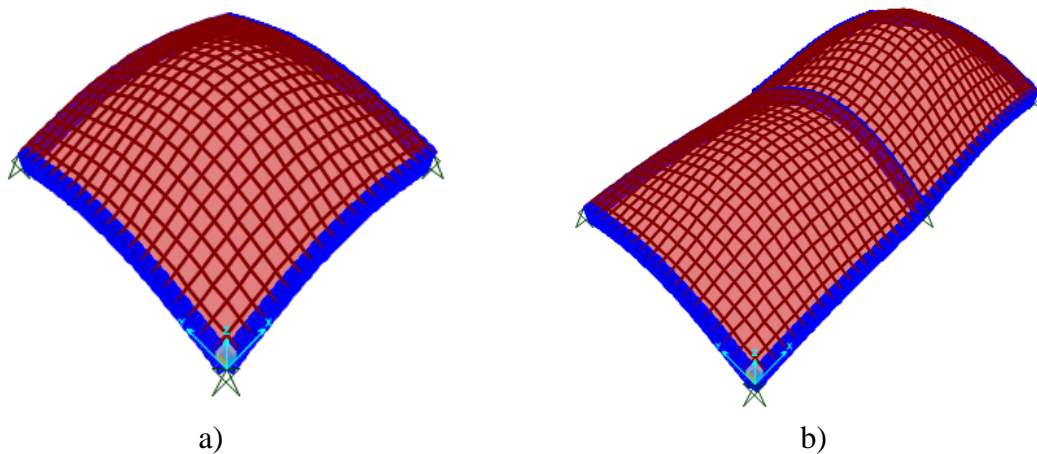


Figura 3.6. Modelos numéricos de losas apoyadas sobre vigas con tableros: a) uno, b) dos, c) tres, d) cuatro y e) nueve.

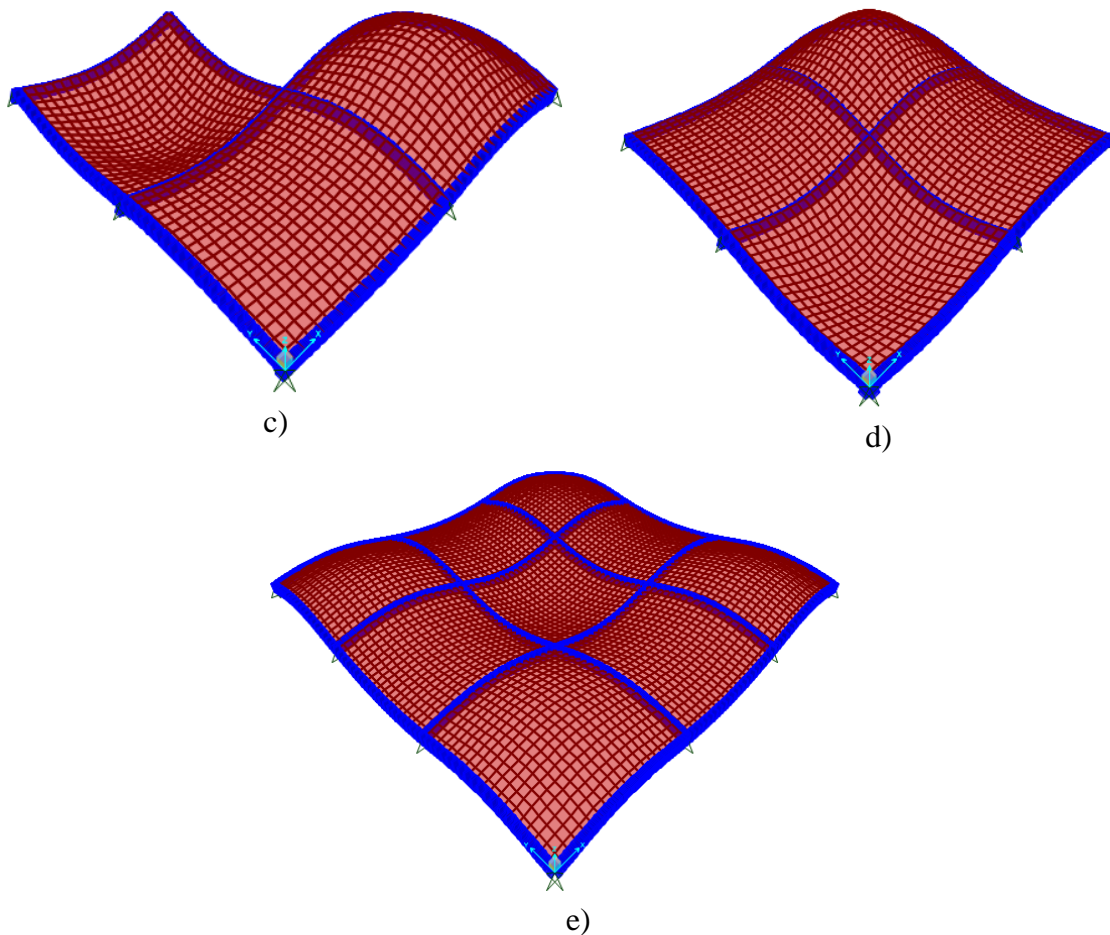
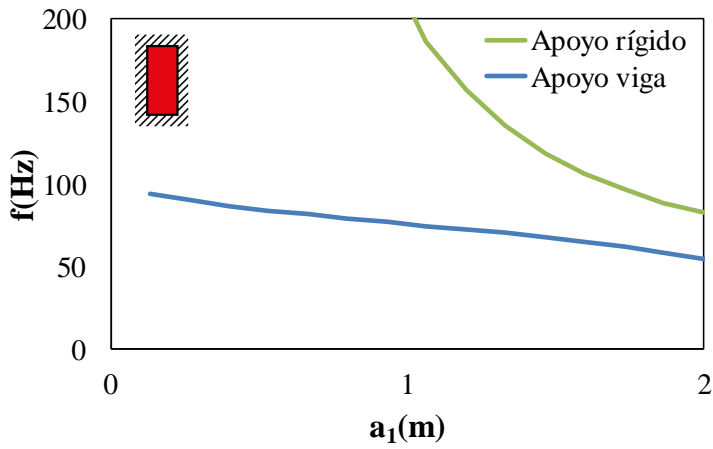
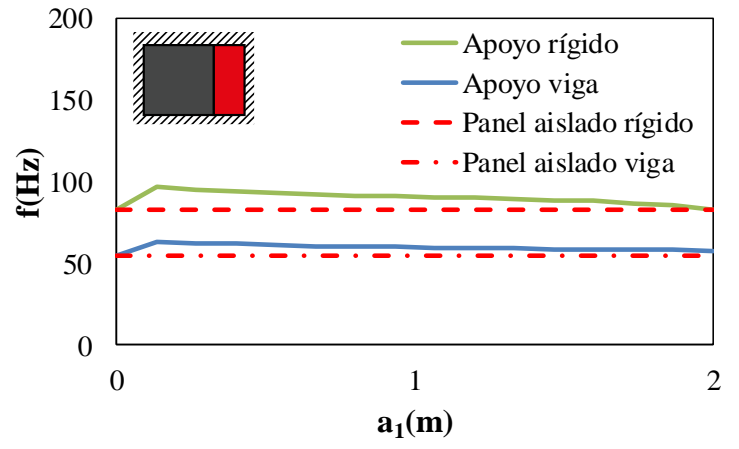


Figura 3.6 Continuación de Figura

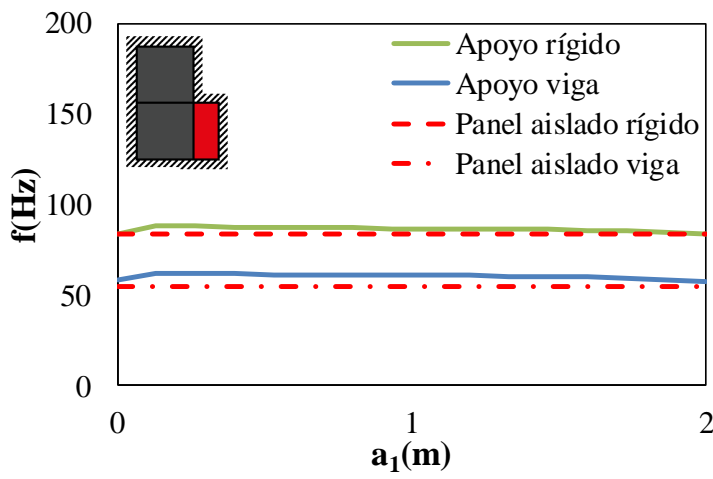
En las Figuras 3.7 a 3.9 se muestra la variación de la magnitud de la f_n al incrementar la longitud a_1 en las losas mostradas en la Figura 3.5 con longitudes a_2 de 2, 3 y 4 m respectivamente, hasta que éstas son completamente cuadradas. Al tener un solo tablero, la magnitud de f_n decrementa cuando a_1 incrementa, hasta que la losa es cuadrada. Por otra parte, cuando se tienen 2, 3, 4 y 9 tableros, la magnitud de f_n incrementa hasta un 16, 6, 8 y 11% respectivamente, pero ésta decrementa hasta que se tiene la misma magnitud de f_n cuando los tableros son cuadrados, considerando que las dimensiones de las vigas de apoyo son iguales en todo el perímetro para el caso de las losas con apoyo flexible. Consecuentemente, se concluye que la influencia en la magnitud de la f_n al tener otros tableros vecinos es mínima como se observa al comparar con la solución de un panel aislado cuadrado, representado por las líneas punteadas en las Figuras 3.7 a 3.9. En general, la f_n es mayor cuando las losas están sobre apoyos rígidos, que cuando están apoyadas sobre vigas en sus bordes.



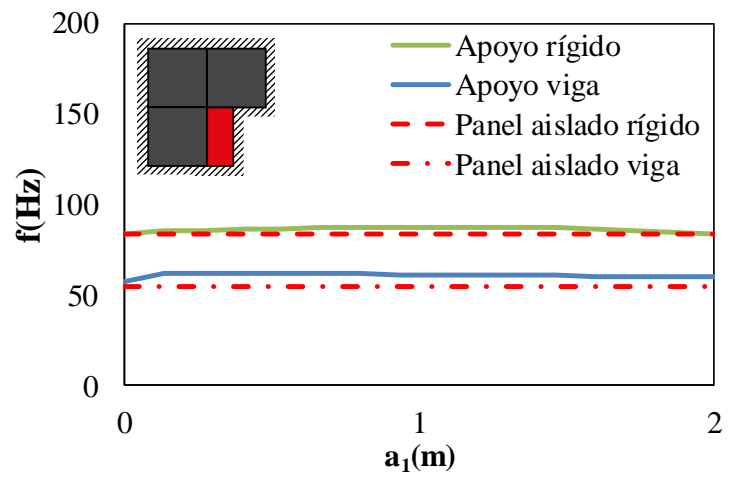
a)



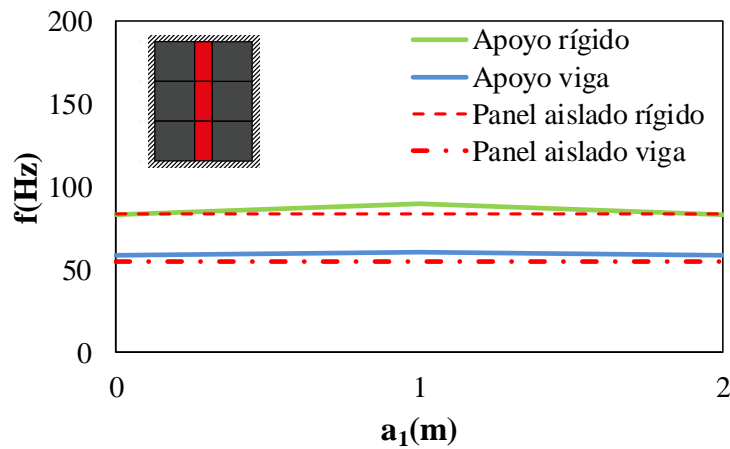
b)



c)

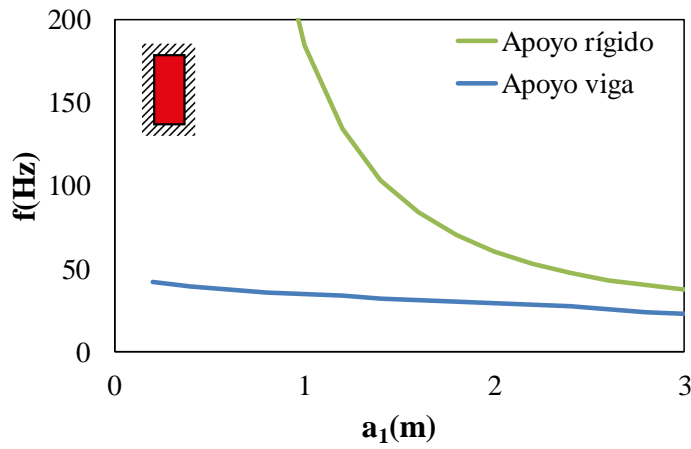


d)

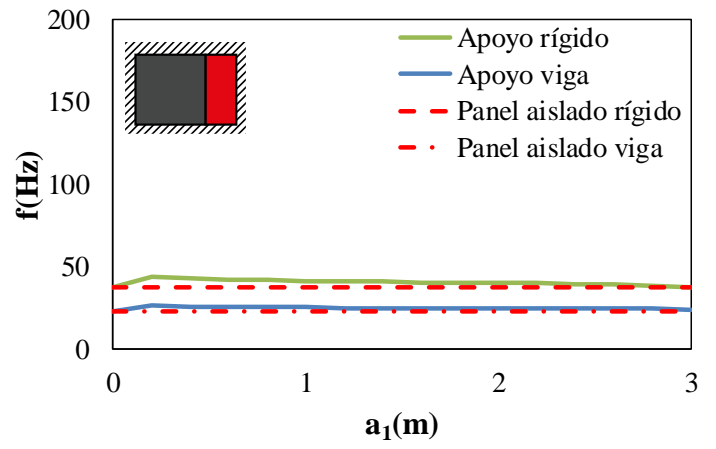


e)

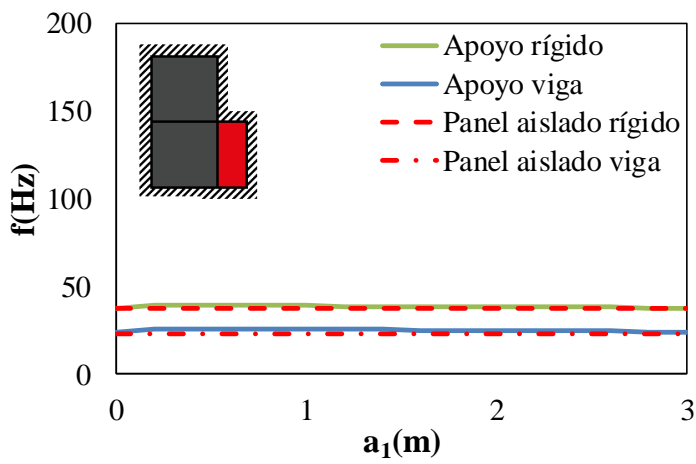
Figura 3.7. Variación de la f_n contra a_1 en losas de $a_2=2m$ con número de paneles: a) 1, b) 2, c) 3, d) 4 y e) 9



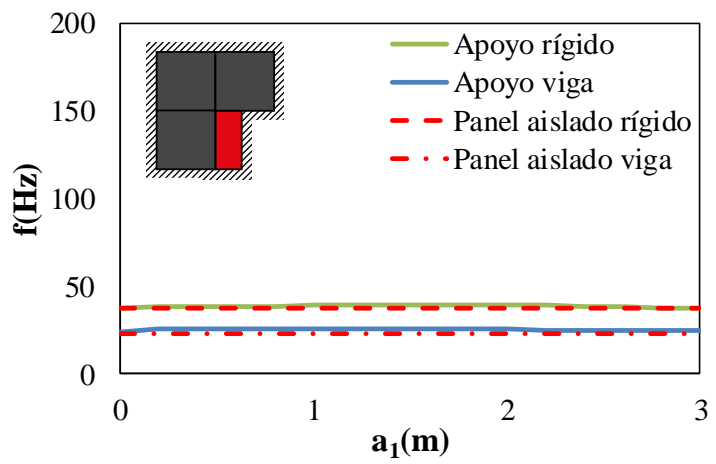
a)



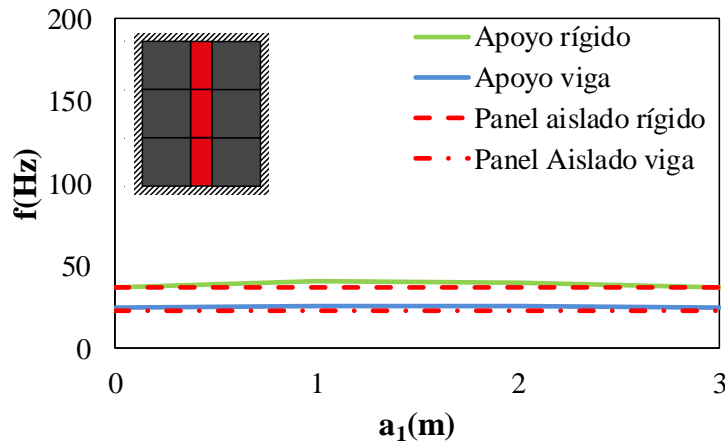
b)



c)

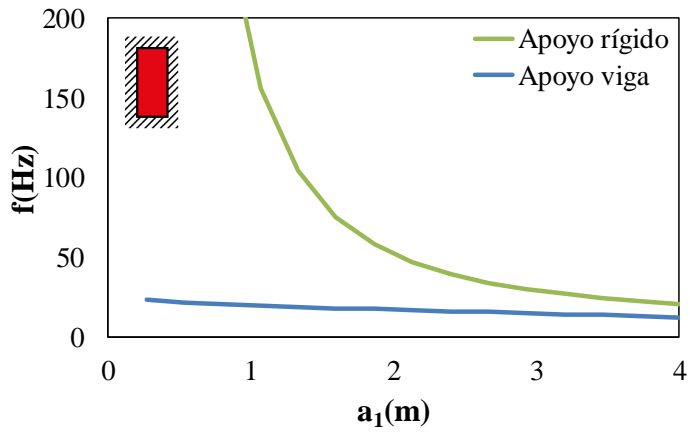


d)

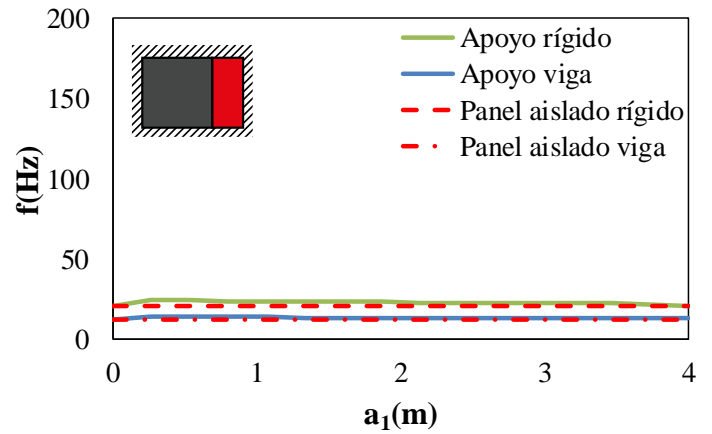


e)

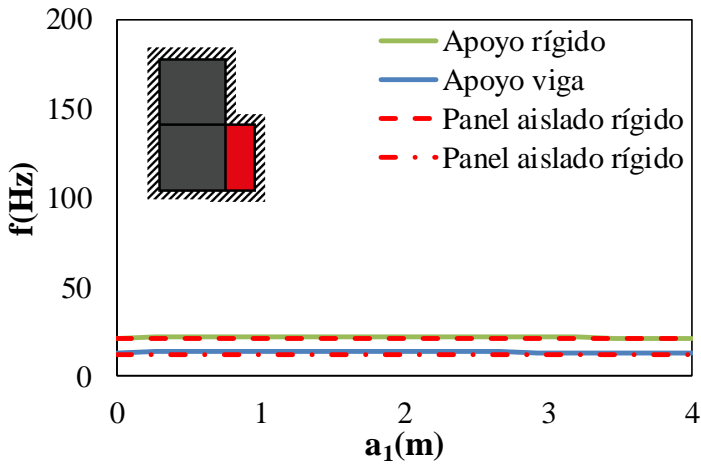
Figura 3.8. Variación de la f_n contra a_1 en losas de $a_2 = 3\text{m}$ con número de paneles: a) 1, b) 2 c) 3 y d) 4 y e) 9



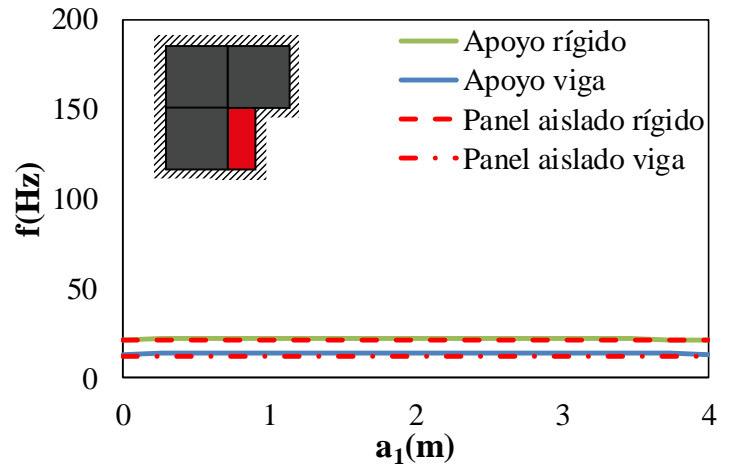
a)



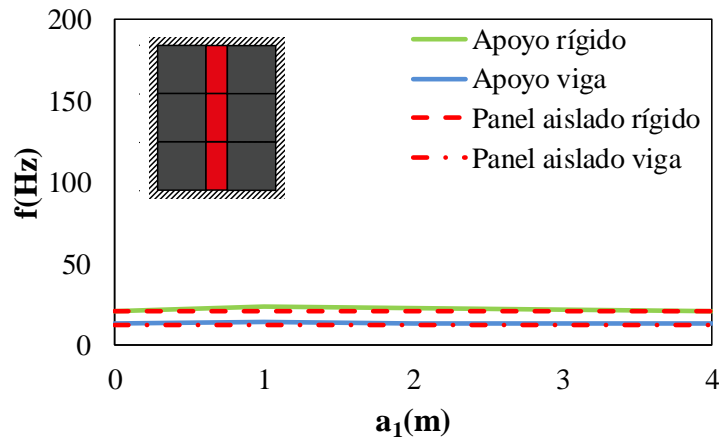
b)



c)



d)



e)

Figura 3.9. Variación de la f_n contra a_1 en losas de $a_2=4\text{m}$ con número de paneles: a) 1, b) 2 c) 3, d) 4 y e) 9

3.3.2 Análisis de tableros aislados apoyados sobre vigas

Puesto que en la sección anterior se observó que la influencia de los tableros vecinos en la f_n es mínima, en esta sección se estudian sólo tableros aislados apoyados sobre vigas. Las losas macizas de concreto apoyadas sobre vigas se utilizan principalmente en edificaciones con base en marcos de concreto reforzado, que se caracterizan por soportar principalmente cargas gravitacionales. Con el objetivo de tener como base diseños representativos de la construcción actual en la Ciudad de México, se utilizan los modelos numéricos de la sección 2.2, cuyas propiedades se resumen en las Tablas 2.15 y 2.16.

Como se ha mencionado, en estos modelos sólo se consideró solamente el peso propio de los elementos estructurales como fuente de masa, donde las f_n son mayores en tableros rectangulares, $m=0.5$. Estas frecuencias decrecen hasta aproximadamente un 40% cuando los tableros son cuadrados, $m=1.0$. Es importante mencionar que se tienen losas de 7 y 8 m con f_n menores a 10 Hz, las cuales son más susceptibles a vibración con base en HIVOSS (2007); sin embargo, para las NTCC-17 (2017), estas losas no serían susceptibles de vibración, pues tiene sólo considera como críticas aquellas cuya f_n son menores a 6 Hz.

3.3.2.1 Influencia del módulo elástico

Para conocer la influencia del módulo elástico en la f_n , se estudiaron losas cuadradas con claro de 4, 5, 6, 7 y 8 m a los cuales se les asignó un concreto clase 1 (NTCC-17, 2017) con distintas resistencias a compresión del concreto: 300, 350 y 400 kg/cm². En la Tabla 3.1 se observa que al variar la resistencia a compresión del concreto en incrementos de $\Delta f'_c=50$ kg/cm², la magnitud de f_n sólo incrementa de 3.5 a 4%. Lo cual muestra que existe una influencia mínima del cambio de las propiedades mecánicas del concreto, por lo que se demuestra la poca viabilidad de esta opción para modificar el valor de f_n de manera considerable.

Tabla 3.1 Comportamiento de la frecuencia natural ante distintas resistencias de concreto

f'c (kg/cm ²)	E (kg/cm ²)	a ₂ (cm)									
		400		500		600		700		800	
		f _n (Hz)	Δf _n (%)	f _n (Hz)	Δf _n (%)	f _n (Hz)	Δf _n (%)	f _n (Hz)	Δf _n (%)	f _n (Hz)	Δf _n (%)
300	242,487	16.61	0	11.72	0	11.38	0	9.42	0	7.10	0
350	261,916	17.35	4	12.19	4	11.98	4	9.83	4	7.32	4
400	280,000	17.85	7	12.60	7	12.39	7	10.17	7	7.57	7

3.3.2.2 Influencia del espesor de losa

Para estudiar la influencia del espesor de la losa en la magnitud de la f_n , los diseños mostrados en las Tablas 2.15 y 2.16, así como sus correspondientes modelos numéricos, se modifican mediante el peralte de la losa con incrementos de $\Delta e=1$ cm hasta llegar a 3 cm. Por lo tanto,

el porcentaje de la frecuencia natural normalizado al diseño inicial se observa en la Figura 3.10, donde se muestra que para relaciones m de 0.5 existe una disminución de la f_n al aumentar el peralte de la losa con valores menores del 4%. Por otra parte, para las relaciones mayores de m , se observa que el aumento del peralte de la losa incrementa la f_n con valores hasta del 4%, excepto en la losa con $a_2=4\text{m}$ que muestra incrementos de hasta el 8%, además se observa que no existe una relación lineal entre espesor y la frecuencia. Por lo anterior, se concluye que el incrementar el espesor de la losa, no es una opción para modificar la f_n de manera considerable. De acuerdo a la normatividad vigente, las losas son perceptibles si tienen una frecuencia entre 0 y 10 Hz, por lo que, si se tiene una losa con una f_n dentro de este intervalo crítico, el incrementar el espesor hasta 3 cm modificaría su frecuencia hasta 1 Hz, lo cual mantiene la losa dentro de un valor crítico de perceptibilidad.

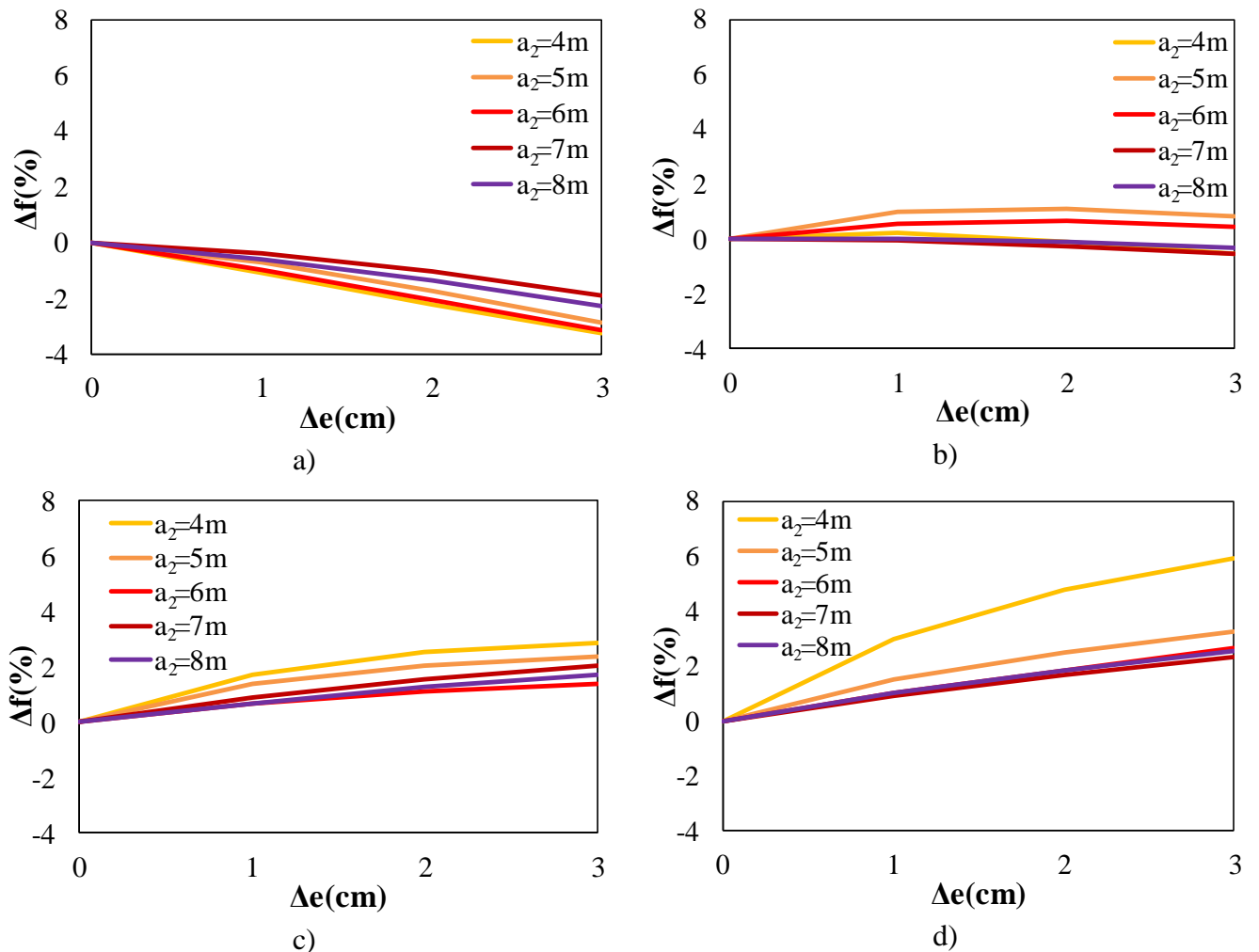


Figura 3.10 Influencia del espesor de losa en la frecuencia natural fundamental de sistemas de piso apoyados sobre vigas con relaciones m : a) 0.5, b) 0.6, c) 0.7, d) 0.8, e) 0.9 y f) 1.0

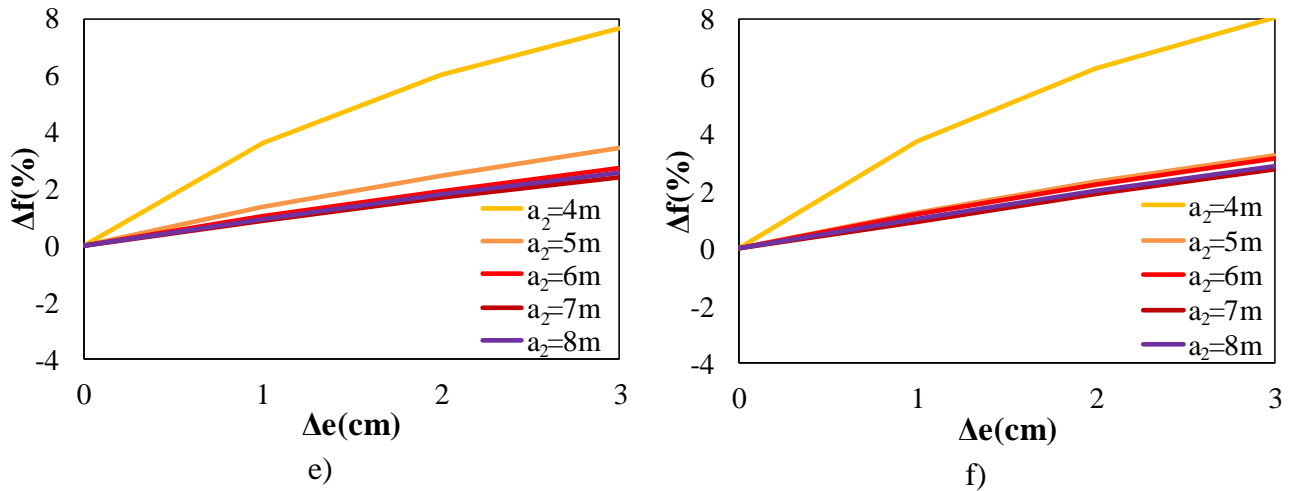


Figura 3.10 Continuación de Figura

3.3.2.3 Influencia del peralte de vigas

En el caso de la influencia del peralte de vigas en la f_n en losas de concreto reforzado, se realizó el análisis modal para losas con dos tipos de condiciones de borde: aislado y como parte de un sistema continuo. Esto es con el objetivo de evaluar la factibilidad de analizar un tablero que forma parte de un sistema continuo como un sistema aislado, ya que con trabes de propiedades similares en sus cuatro bordes no existe influencia de un tablero sobre los demás, como se muestra en las Figuras 3.7 a 3.9. Se tiene la hipótesis de que al tener trabes de distinta sección transversal esta condición es distinta. Por lo tanto, en el primer caso, el modelado numérico es como se muestra en la Figura 3.3b; mientras que en el segundo caso, el tablero en estudio se analiza como parte de un conjunto de tableros como se muestra en la Figura 3.11.

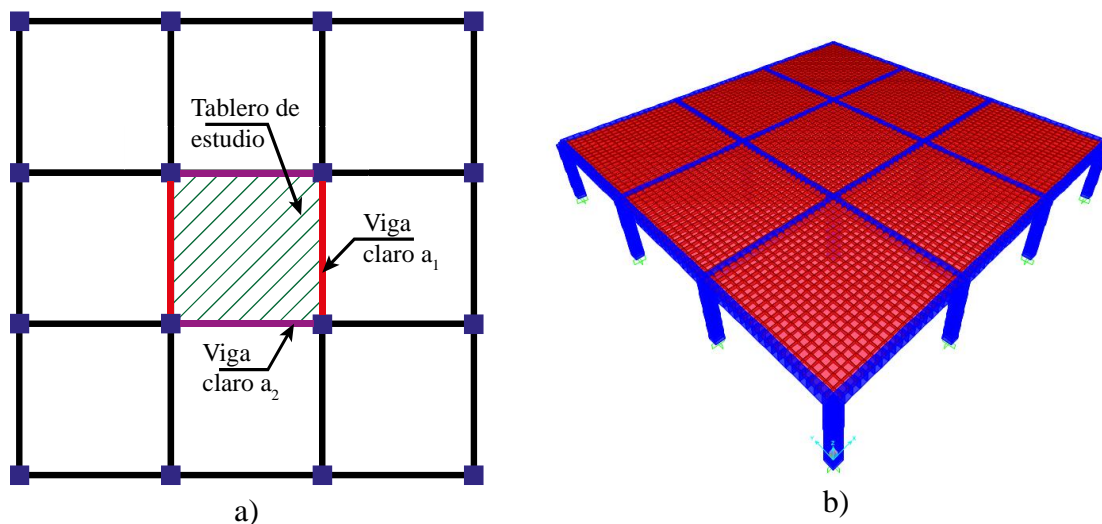


Figura 3.11 Esquema de tablero en estudio que forma parte de una losa continua: a) planta y b) vista 3D

Con base en lo anterior, para los dos tipos de modelos se analizó la variación de la f_n incrementando el peralte de vigas $\Delta h=5, 10$ y 15 cm y por consiguiente, el momento de inercia, cuyo valor inicial o de diseño es I_a . En estos modelos se modificaron las vigas paralelas en las direcciones del claro a_2 y, posteriormente, las del claro a_1 . Las longitudes del claro a_2 son de 4 y 8 m con relaciones m de 0.5 y 1.0.

En el caso de los paneles de losa aislados, en las Figuras 3.12 y 3.13 se muestran los incrementos del porcentaje normalizados a la frecuencia inicial del diseño. Teniendo una relación $m=0.5$, la influencia del incremento del peralte en la dirección del claro a_2 cuyos valores son de 4 y 8m, se tienen valores máximos de 40 y 20%, respectivamente. En el caso del estudio de la dirección a_1 se tiene una influencia en la frecuencia natural menor del 2%. Por otra parte, para las losas con relación $m=1.0$ se tienen valores menores del 9% variando el peralte en cualquier dirección. Esto muestra que incrementar el momento de inercia en vigas paralelas a la dirección a_2 es más efectivo conforme disminuye el valor de la relación m ; caso contrario de las vigas paralelas a la dirección a_1 , donde su influencia incrementa al aumentar m .

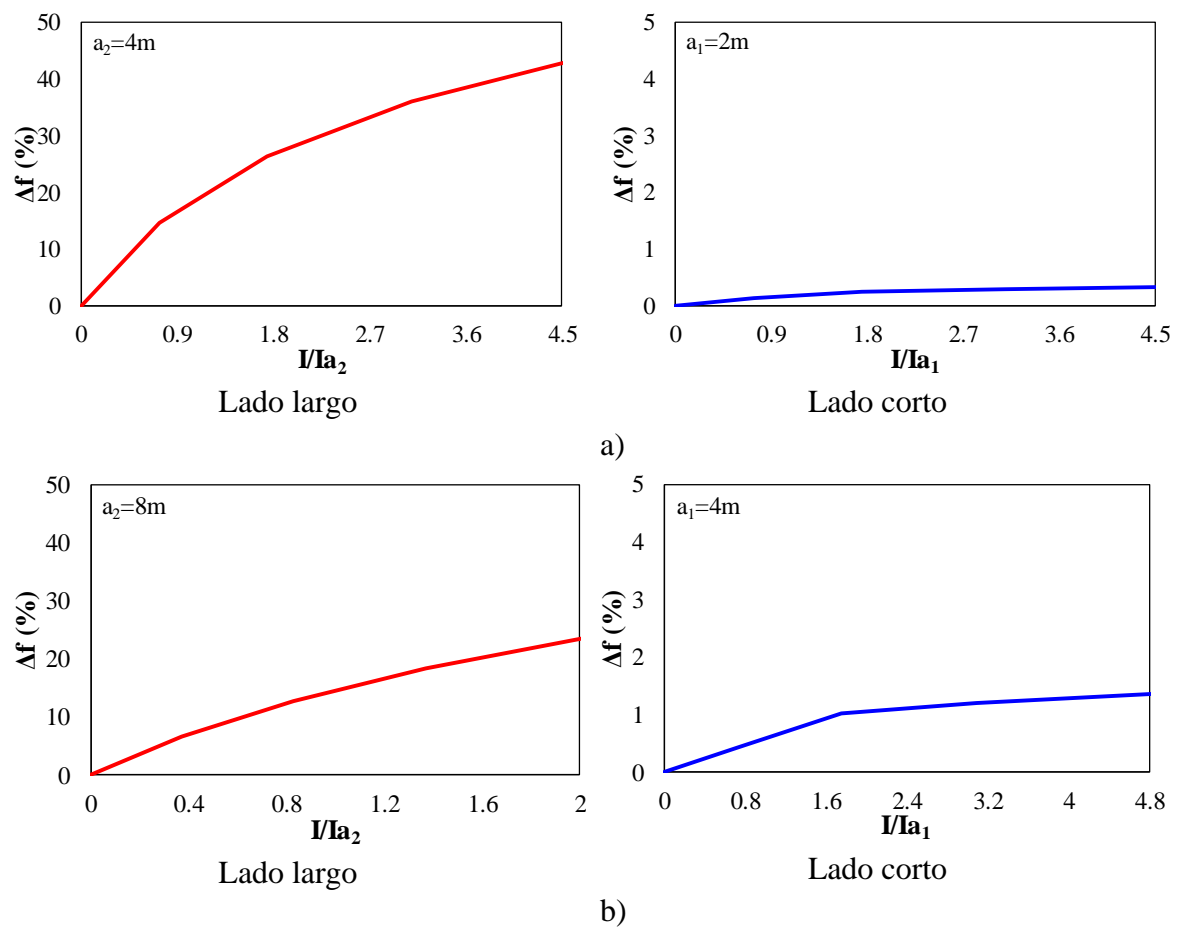


Figura 3.12 Influencia del momento de inercia de vigas en la f_n de losas de concreto reforzado con claros $a_2=4$ y 8 m para relaciones $m=0.5$

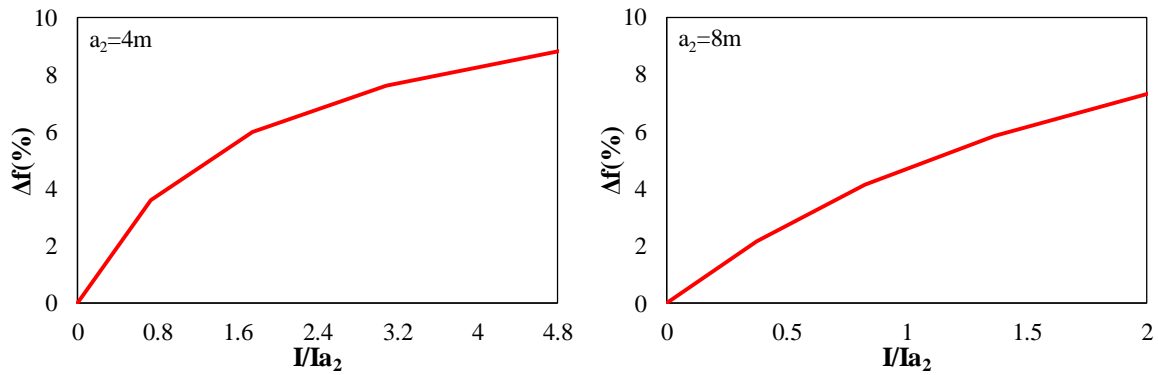


Figura 3.13 Influencia del momento de inercia de vigas en la f_n de losas de concreto reforzado con claros $a_2=4$ y 8 m para relaciones $m=1.0$

En el caso de las losas analizadas como parte de un conjunto de tableros como se muestra en la Figura 3.11 se analizaron sus modos superiores, es decir, otros modos presentes en el sistema continuo conforme se modificaron los momentos de inercia de las vigas, en el que se estudió el cambio de la f_n para cada modo de vibrar presente en el modelo continuo de la Figura 3.11; los momentos de inercia de vigas se modificaron de forma paralela tanto en la dirección larga a_2 como en la corta a_1 , donde se observa que en tableros con relación $m=0.5$, en la dirección del claro a_2 cuyos valores son de 4 y 8m, se tienen valores máximos del 7% aproximadamente; mientras que, en el caso de la dirección a_1 se tiene una influencia en la frecuencia natural menor del 4%, como se muestra en la Figura 3.14. Por otra parte, para las losas con relación $m=1.0$ se tienen valores menores del 5% variando el momento de inercia en cualquier dirección como se observa en la Figura 3.15. En general, la variación de la frecuencia es baja, lo cual muestra que la f_n de un tablero de losa se puede obtener de manera aislada con una aproximación suficiente ante los cambios del momento de inercia como los que se muestran en este apartado. Por otra parte, se muestra que la relación entre momento de inercia y frecuencia no es completamente lineal.

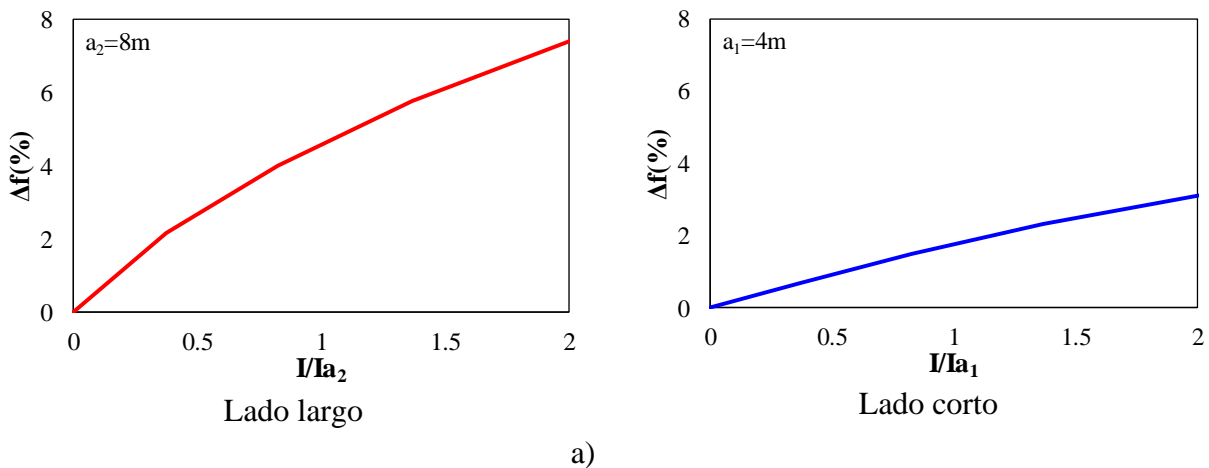
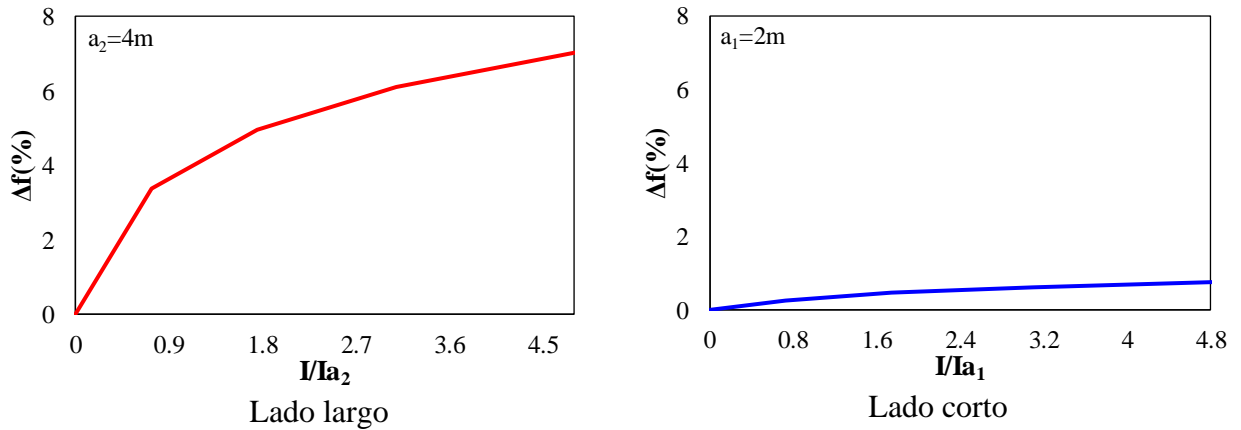


Figura 3.14 Influencia del momento de inercia de vigas en modos superiores de losas de concreto reforzado con claros $a_2=4$ y 8 m para relaciones $m=0.5$.



b)

Figura 3.14 Continuación de Figura

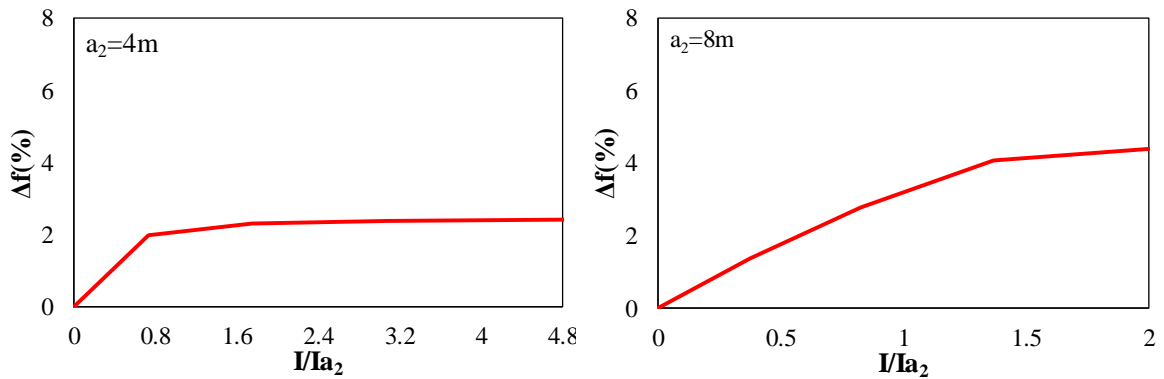


Figura 3.15 Influencia del momento de inercia de vigas en modos superiores de losas de concreto reforzado con claros $a_2=4$ y 8m para relaciones $m=1.0$

3.3.2.4 Influencia del ancho de columnas

En los modelos estudiados de las secciones anteriores, las columnas que soportan losas y vigas de concreto reforzado tienen una sección transversal cuadrada de 30 cm, cuyo ancho satisface lo establecido en los requerimientos de dimensión mínima para marcos de ductilidad alta (NTCC-17, 2017). Para el estudio de la influencia del ancho de las columnas en la f_n , éste se aumentó en ambas direcciones, en incrementos de $\Delta h=5\text{cm}$ hasta tener una sección cuadrada de 60 cm por lado como se muestra en la Figura 3.16.

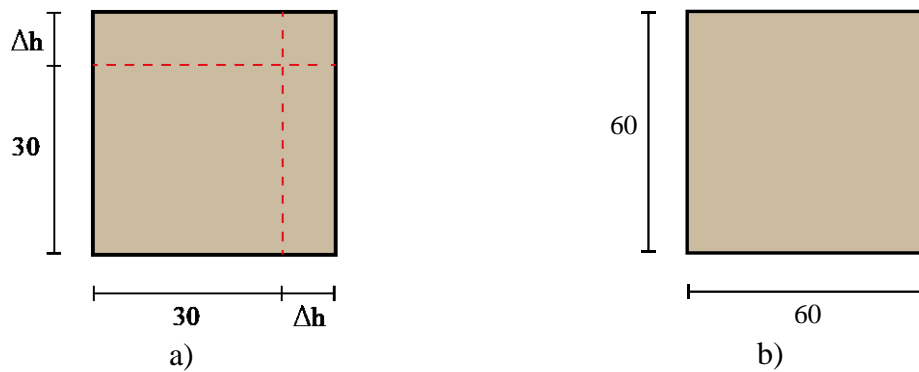


Figura 3.16 Columnas de concreto reforzado: a) incremento inicial de ancho de columna y b) columna con ancho final

En las Figuras 3.17 a 3.18 se muestra el incremento en porcentaje normalizado a la frecuencia del diseño con apoyos rígidos simples en las esquinas para losas cuadradas donde al incrementar el momento de inercia normalizado al correspondiente de una columna con ancho inicial de 30 cm, I_i , se observa una tendencia significativa a la solución con apoyos empotrados al tener una sección incrementada al 100%, principalmente en la losa con claro $a_2=4m$, lo cual muestra que la influencia de las columnas en la f_n es considerable en losas con rigidez alta. Posteriormente, se analizan las relaciones m de 0.5 y 1.0 para cada losa, donde existe un incremento inicial de la frecuencia natural en las losas con a_2 de 4, 5, 6 y 7 m menor del 25, 20, 15 y 5%, respectivamente. Este comportamiento se muestra principalmente en las losas con relaciones m de 0.5; mientras que en las relaciones $m=1.0$ estos porcentajes tienen incrementos menores del 20, 15, 10 y 5%, como se muestra en la Figura 3.18. Por otra parte, se observa que al tener un incremento del ancho de aproximadamente del 90% el comportamiento de la f_n tiende a ser constante como se muestra en la Figura 3.19, por lo que es posible utilizar apoyos empotrados en las esquinas para el análisis. De manera general se deduce que las columnas representan una influencia importante en la f_n de una losa, principalmente cuando la relación m tiende a disminuir. El incremento de la f_n al incrementar el área de la sección transversal de las columnas, se atribuye al incremento de la rigidez axial de las columnas, EA/L , que tiene relación directa con el área. Por lo anterior, aunque se modelen tableros aislados para su estudio, es recomendable modelar sus columnas, pues el valor de la f_n podría variar hasta un 50%.

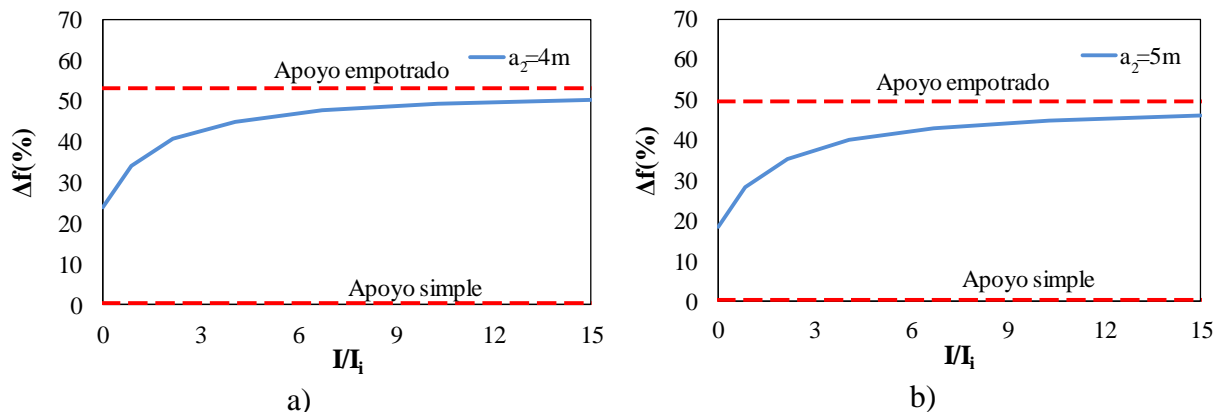
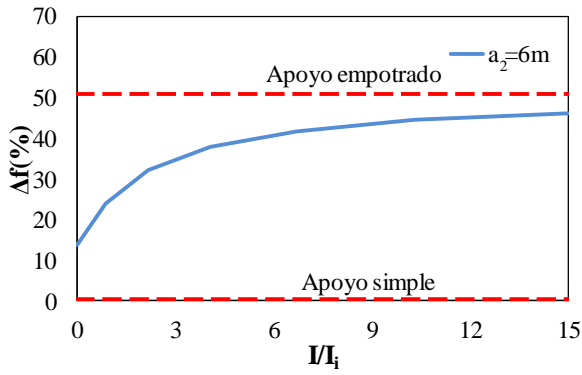
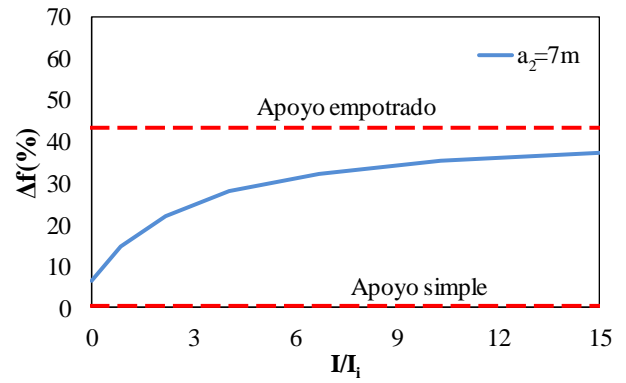


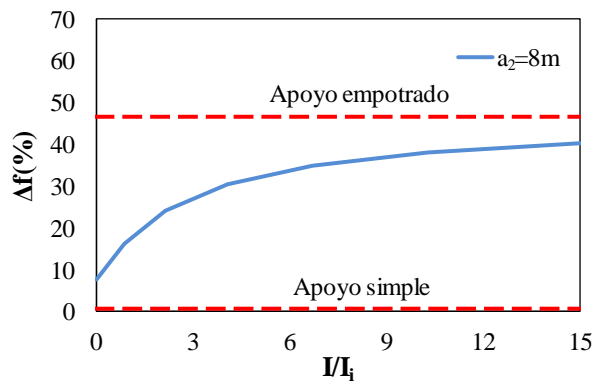
Figura 3.17 Influencia del ancho de columnas cuadradas en la f_n de losas con relación $m=0.5$.



c)

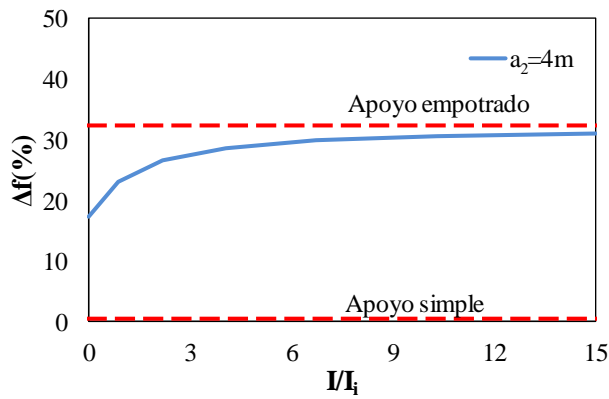


d)

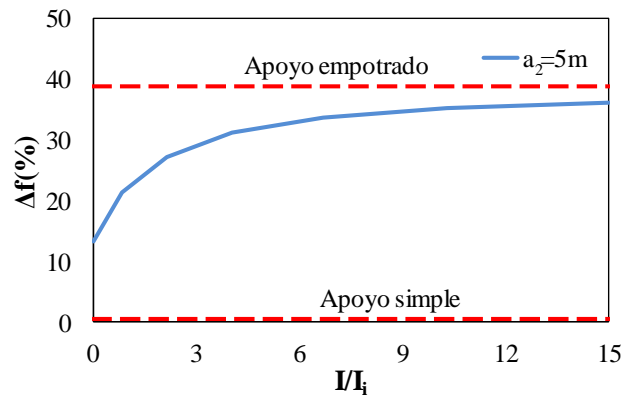


e)

Figura 3.17. Continuación de Figura

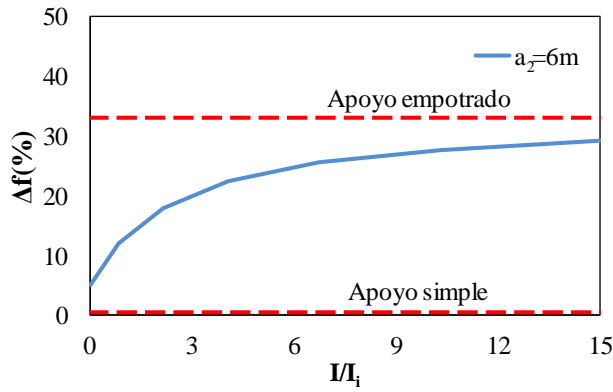


a)

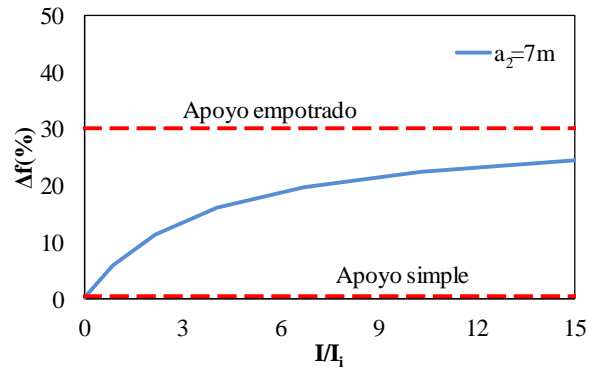


b)

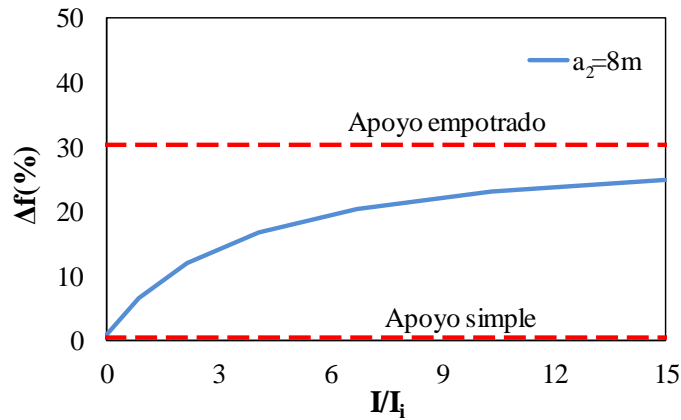
Figura 3.18 Influencia del ancho de columnas cuadradas en la f_n para losas con relación m de 1.0



c)

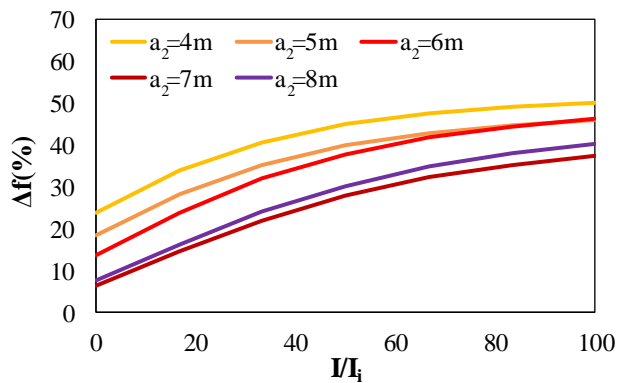


d)

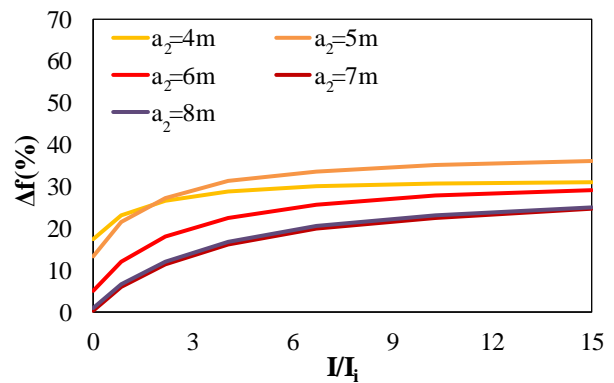


e)

Figura 3.18 Continuación de Figura



a)



b)

Figura 3.19 Influencia del ancho de columnas en losas con relación m : a) 0.5 y b) 1.0.

3.3.2.5 Influencia de vigas secundarias y terciarias

Como se ha visto en el capítulo 2, la frecuencia natural en losas de concreto reforzado depende de su distribución de masa y rigidez sobre el área total. Sin embargo, en ciertos casos existen vigas secundarias, las cuales pueden cambiar las propiedades dinámicas del sistema

de piso. Debido a esto, en este apartado se estudia la influencia de vigas secundarias en la f_n , donde se analiza una losa de concreto cuadrada con claro de 8m como se muestra en la Figura 3.20 y cuyas propiedades se muestran en las Tablas 2.15 y 2.16.

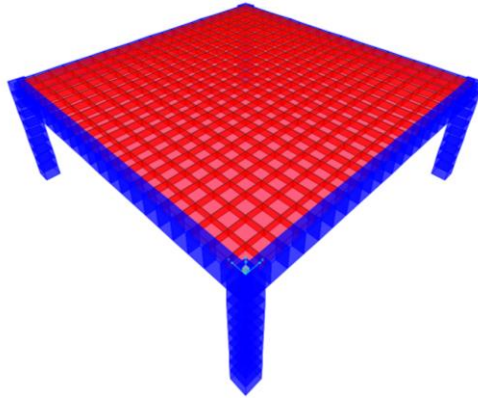


Figura 3.20 Modelo de losa de concreto reforzado con $a_2=8m$

A partir del estudio de una losa con relación de claros $a_2/a_1=1.0$ con claro $a_2=8m$ se colocan vigas secundarias y terciarias como se muestra en las Figuras 3.21 y 3.22. Las vigas tienen dimensiones base= 25 cm y altura= 50 cm; asimismo, se realiza este procedimiento para una losa con claro $a_2=8m$ con relación $a_1/a_2=0.5$. En el caso de la losa con relación de claros $a_2/a_1=1.0$, las vigas secundarias y terciarias tienen las mismas dimensiones que las vigas principales 25 x 50 cm, por lo que se nombra como T-1. En la losa con relación $a_1/a_2=0.5$ las vigas secundarias y terciarias tienen dimensiones de 25 x 25 cm.

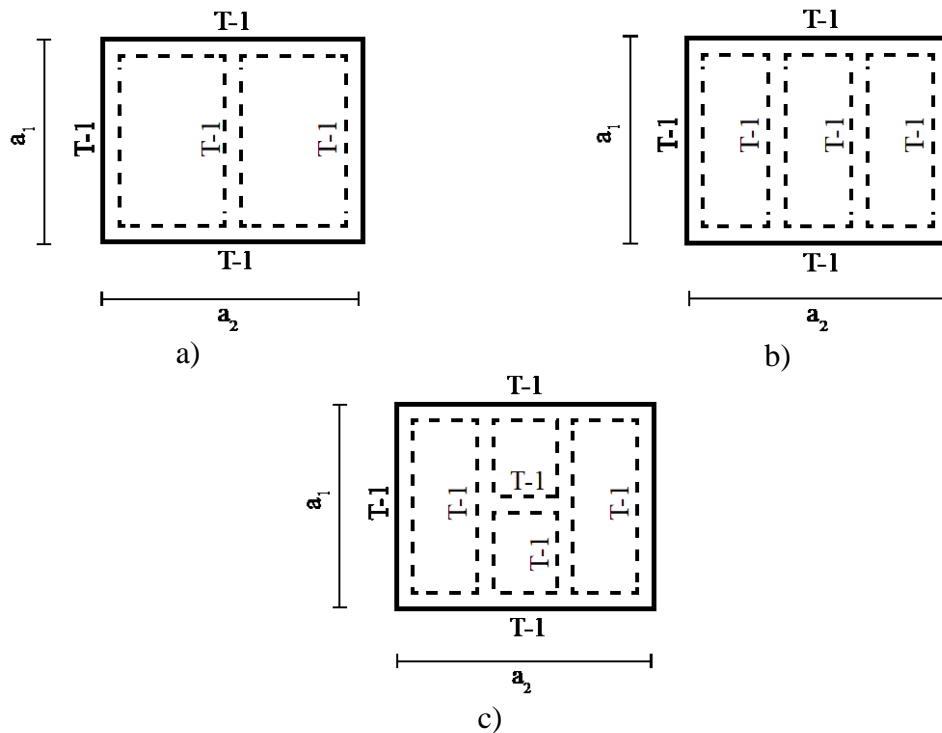


Figura 3.21 Vigas secundarias en losa de concreto reforzado cuyas configuraciones son a: a) centro del claro, b) tercios del claro y c) con viga terciaria

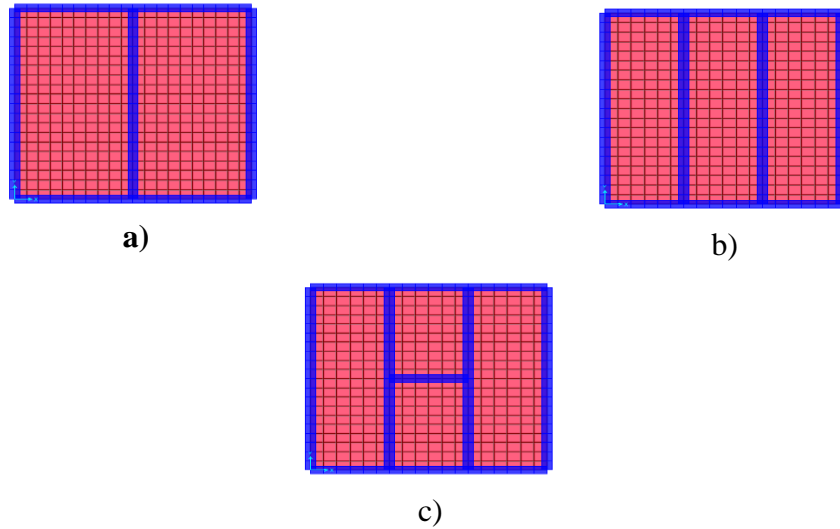


Figura 3.22 Modelos numéricos de vigas secundarias en losa de concreto reforzado cuyas configuraciones son a: a) centro del claro, b) tercios del claro y c) con viga terciaria

En el caso de la losa con relación $m= 0.5$ existe una disminución de la frecuencia natural al incluir las vigas secundarias, principalmente cuando se incluye la viga terciaria, lo cual implica que la influencia de su masa es mayor que la de su rigidez como se muestra en la Tabla 3.2. Por otra parte, en el caso de la losa con relación $m= 1.0$ existe un aumento de la frecuencia natural al incluir las vigas secundarias con valores de entre el 4 y 6%, como se muestra en la Tabla 3.2; cuando se incluye la viga terciaria, existe otro aumento de f_n . Sin embargo, este cambio es mínimo, lo cual implica que la viga terciaria no influye en la energía cinética desarrollada en la losa y las vigas secundarias. En resumen, la variación de la f_n en una losa con vigas secundarias y terciarias es mínima, de tal manera que los tableros derivados de ellas no se pueden analizar como aislados.

Tabla 3.2 Comportamiento de la frecuencia natural colocar vigas secundarias y terciarias en losa con claro $a_2= 8m$

a_1/a_2	Variación de la frecuencia natural Δf_n (%)		
	Mitad del claro	Tercios del claro	Viga terciaria
0.5	-0.60	-0.34	-3.01
1	4.65	6.06	6.48

En este estudio se realizó una evaluación y análisis del comportamiento de f_n para losas de concreto reforzado. En el caso de la evaluación de criterios de perceptibilidad no existe un valor mínimo completamente definido de f_n para evitar vibraciones excesivas, es necesario estudiar de manera detallada estos criterios para el caso de losas de concreto reforzado involucrando otras variables que influyen en la respuesta dinámica y revisando los niveles de susceptibilidad mencionados en la literatura para el análisis de sistemas de piso ante vibración debida al caminar de personas. En el caso de la influencia de cada una de las variables en el

comportamiento de f_n , se considera sólo el modo 1 de vibrar, el cual contribuye principalmente en la respuesta dinámica. Tomando como ejemplo la Figura 3.2, se deduce que incrementar el momento de inercia de vigas principales en la dirección larga es recomendable para colocar un sistema de piso en un umbral de comodidad de manera eficiente. Es preciso mencionar que en este capítulo los modelos numéricos analizados consideraron como fuente de masa y rigidez los elementos propios de la estructura, con lo cual se obtuvo una tendencia del comportamiento de f_n ; en los modelos analizados se tomaron en cuenta las hipótesis de un material homogéneo e isótropo, una sección bruta en los elementos de concreto y una carga uniformemente distribuida del peso de la losa; estas hipótesis no son reales, por lo que este tema requiere de un análisis más profundo. Por lo tanto, el estudio realizado representa un inicio que puede ser útil en el análisis del comportamiento dinámico de un sistema de piso de concreto reforzado.

4 ESTUDIO NUMÉRICO-EXPERIMENTAL DE LOSAS DE VIGUETA Y BOVEDILLA Y LOSA DE CONCRETO REFORZADO EN DOS DIRECCIONES

4.1 Introducción

Uno de los sistemas de piso que comúnmente se utiliza en México es el de vigueta y bovedilla de poliestireno, el cual distribuye las cargas en una dirección. Debido a que este tipo de losa tiene una capa de compresión delgada que se apoya sobre viguetas, es susceptible a vibraciones excesivas producidas por el caminar de personas, lo cual puede producir incomodidad para sus ocupantes; en el caso de México no existen estudios sobre este tema. Otro sistema de piso de gran uso en México es la losa maciza de concreto reforzado en dos direcciones, la cual se caracteriza por ser una losa apoyada sobre vigas en sus cuatro bordes. En el caso de este tipo de sistema de piso, no se encontraron estudios ante vibraciones debidas a actividades humanas, pues sólo se encontraron estudios de vibración en losas macizas de concreto debidos a maquinaria, como los de González y Aranda (2002) y Veras y González (2006). Este sistema comúnmente solo se analiza por cargas verticales estáticas, que producen un desplazamiento máximo en su estado límite de servicio. Por tal razón, en este capítulo se describen pruebas experimentales realizadas a dos losas de vigueta y bovedilla y una losa de concreto reforzado. En el primer tipo de sistema de piso se realiza una prueba experimental de vibración ambiental y forzada con el objetivo de evaluar el comportamiento ante vibración libre y al caminar de personas. En el segundo, se realiza el mismo procedimiento, pero en la parte de vibración forzada se realizan distintos tipos de actividades humanas, las cuales experimenta el sistema durante su uso diario. En cada espécimen se colocaron sensores de aceleración uniaxial en diversos puntos para enviar información a una central de registro digital, la cual se procesó para determinar la frecuencia natural y la aceleración máxima.

La captura de las señales se realizó con un sistema de adquisición de datos SIGLAB modelo 20-42 (Spectral Dynamics Inc., 2001), el cual graba y grafica el procesamiento de los datos obtenidos. Este modelo procesa señales de hasta 20 kHz, las cuales se analizan con un programa basado en MATLAB v2017 (Mathworks Inc., 2017); contiene aplicaciones llamadas instrumentos virtuales, los cuales a partir de una señal de entrada generan funciones o señales de salida. En este trabajo las señales capturadas tienen un procesamiento que consta de convertir una señal analógica (continua) en una señal digital. El equipo de procesamiento utiliza un filtrado analógico y digital para remover energías de alta frecuencia y/o desfase que pudieran existir en el procesamiento de la señal, mayores detalles en Spectral Dynamics Inc. (2001). De tal manera que se obtiene una señal digital en el dominio del tiempo adecuada para su uso. Posteriormente, mediante subrutinas y programas realizados en MATLAB v2017 (Mathworks Inc., 2017), las señales obtenidas se procesan mediante corrección por línea base (Hudson, 1979), obtención de espectros de potencia y diezmado (Smith, 1999 y Mathworks Inc., 2017). En los espectros de potencia obtenidos la banda de interés fue la que

define la frecuencia natural fundamental. Cabe señalar que existen otras frecuencias de vibración que se desarrollan en los sistemas de piso monitoreados. Sin embargo, en este trabajo sólo es de interés identificar la frecuencia natural fundamental principalmente, por lo que no fue necesario aplicar procesos adicionales de filtrado.

La evaluación de cada espécimen se realizó mediante una comparación entre los resultados experimentales con soluciones analíticas y numéricas. En el caso de los sistemas de piso de vigueta y bovedilla, se utilizan las especificaciones propuestas por la Asociación Nacional de Industriales de la Vigueta Pretensada (ANIVIP, 2013); mientras que para el sistema de piso de concreto reforzado se utilizaron las recomendaciones propuestas por el AISC (1997) y las NTCC-17 (2017). En el modelado numérico, se utilizó el método de los elementos finitos, en particular se utilizaron elementos tipo lámina y viga para mallar los elementos estructurales. Se utilizaron funciones de carga que representan diversas actividades humanas, las cuales se aplicaron a los modelos numéricos tal como se muestra en trabajos realizados por Mello *et al.* (2008) y Araujo y Vieira (2014). El análisis comparativo involucra factores como la frecuencia natural y la carga dinámica representativa de actividades humanas. Posteriormente, se realiza una evaluación de la susceptibilidad ante vibraciones excesivas de cada sistema de piso mediante umbrales de comodidad establecidos en las especificaciones mencionadas.

4.2 Equipo de medición

El registro de señales en la losa de prueba se realizó con el equipo que se menciona en la sección 4.1 y los sensores de aceleración se caracterizan por ser medidores piezoeléctricos uniaxiales, tal como se muestra en la Figura 4.1. Los sensores de aceleración piezoeléctricos que se utilizan en este experimento se caracterizan por transformar lecturas de aceleración en señales eléctricas. Las características de los sensores utilizados se resumen en la Figura 4.2a y Tabla 4.1 (PCB, 2018), donde se destacan sus valores de sensibilidad y exactitud, lo cual se considera adecuado para los fines de este trabajo. Dado que en algunas ocasiones las señales de salida de los sensores son muy pequeñas, es necesario utilizar un sistema de amplificación de señal para que el sistema de adquisición de datos procese de manera adecuada la señal registrada. Para ello se utiliza el acondicionador de señal como el que se muestra en la Figura 4.2b (PCB, 2018), donde la señal de salida de los sensores se cambia a un nivel de voltaje requerido.



a)



b)

Figura 4.1. Dispositivos de medición: a) equipo de adquisición de datos y b) sensores de aceleración.



a)



b)

Figura 4.2. Dispositivos de medición: a) sensor de aceleración modelo 393B04 y b) acondicionador de señal modelo 484B06 (adaptado de PCB, 2018).

Tabla 4.1 Características de sensores de aceleración, modelo 393B04 (PCB, 2018)

DESEMPEÑO	Magnitud (SI)
Sensibilidad ($\pm 10\%$)	102 mV/(m/s ²)
Rango de Mediciones	± 49 m/s ² pk
Rango de frecuencias ($\pm 5\%$)	0.06 para 450 Hz
Rango de frecuencias ($\pm 10\%$)	0.05 para 750 Hz
Rango de frecuencias (± 3 dB)	0.02 para 1700 Hz
Frecuencia resonante	≥ 2500 Hz
Resolución (1 to 10000 Hz)	0.00003 m/s ² rms
No linealidad	$\leq 1\%$
Sensibilidad transversal	$\leq 5\%$
AMBIENTAL	
Límite de sobrecarga	± 2950 m/s ² pk
Rango de temperatura	-26 a +80 °C
Sensibilidad a la deformación de base	≤ 0.005 (m/s ²)/ $\mu\epsilon$
ELÉCTRICO	
Voltaje de excitación	18 a 30 VDC
Consumo de energía	2 a 10 mA
Impedancia de salida	<500 Ohm
Tiempo de descarga	5 to 15 sec
Tiempo de estabilidad	<100 sec
Ruido espectral (1 Hz)	2.9 ($\mu\text{m/s}^2$)/ $\sqrt{\text{Hz}}$
Ruido espectral (10 Hz)	1.0 ($\mu\text{m/s}^2$)/ $\sqrt{\text{Hz}}$
Ruido espectral (100 Hz)	0.4 ($\mu\text{m/s}^2$)/ $\sqrt{\text{Hz}}$
Ruido espectral (1 kHz)	0.4 ($\mu\text{m/s}^2$)/ $\sqrt{\text{Hz}}$
FÍSICO	
Elemento sensitivo	Cerámica
Material de cubierta	Titanio
Sellado	Hermético
Diámetro	25 mm
Altura	31 mm
Peso	50 gm
Conexión eléctrica	10-32 Coaxial

4.3 Pruebas de vibración en losa de viga y bovedilla

4.3.1 Descripción de pruebas

Con base en Archundia y Tena (2013), para la identificación de losas se tiene el criptograma mostrado en la Figura 4.3, donde se proporciona si es una prueba en vibración libre o forzada,

el tipo de losa: vigueta y bovedilla o maciza de concreto; el tipo de apoyo: vigas o muros; y el arreglo de los sensores: A1, A2 y A3.

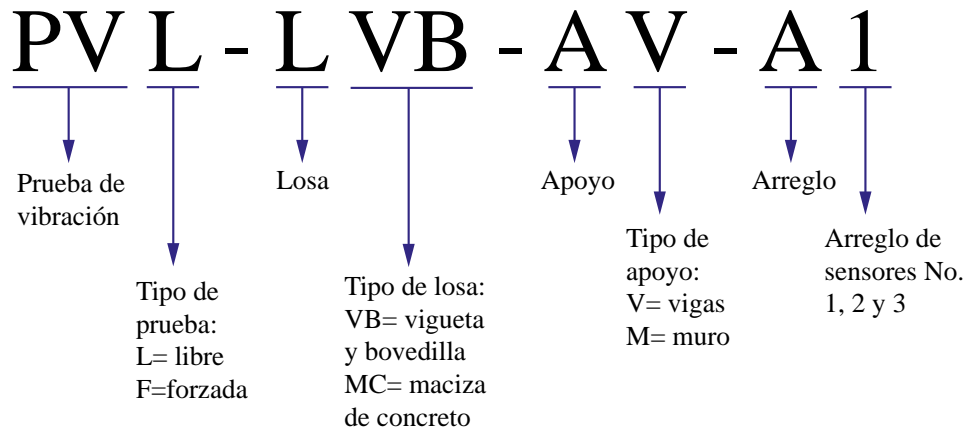


Figura 4.3. Criptograma para nomenclatura de especímenes de prueba

Con el fin de obtener el comportamiento dinámico ante vibración ambiental y vibración forzada de sistemas de piso. La primera prueba consiste de una losa rectangular de vigueta y bovedilla apoyada sobre vigas en dos de sus bordes, la cual fue construida en el laboratorio de estructuras de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco para realizar una prueba de carga. El espécimen LVB-AV es una losa rectangular de vigueta y bovedilla de poliestireno en una dirección, apoyada sobre vigas en sus dos extremos, la cual tiene un espesor de 18 cm, con una geometría como se muestra en la Figura 4.4. La capa de compresión tiene un espesor de 5 cm, la cual es de concreto con una resistencia a compresión de $f'_c=250 \text{ kg/cm}^2$, la malla electrosoldada tiene un esfuerzo de fluencia de $f_y=5000 \text{ kg/cm}^2$ y la vigueta pretensada es del tipo T-5 (Premex, 2013) con una resistencia a compresión del concreto $f'_{cv}=350 \text{ kg/cm}^2$. El peso volumétrico del concreto en vigueta y capa de compresión fue de 2400 y 2200 kg/m^3 , respectivamente. El módulo de elasticidad de la capa de compresión se calculó con las recomendaciones de las NTCC-17, $E_c = 8000\sqrt{f'_c} = 126491 \text{ kg/cm}^2$ y el módulo elástico de las viguetas como $E_c = 14000\sqrt{f'_c} = 261916 \text{ kg/cm}^2$. El módulo de elasticidad utilizado en la capa de compresión es de concreto clase 2, cuyas propiedades mecánicas se deben principalmente a agregados pequeños de baja dureza. El concreto en las viguetas se consideró de clase 1 por utilizar principalmente agregados de dureza alta.

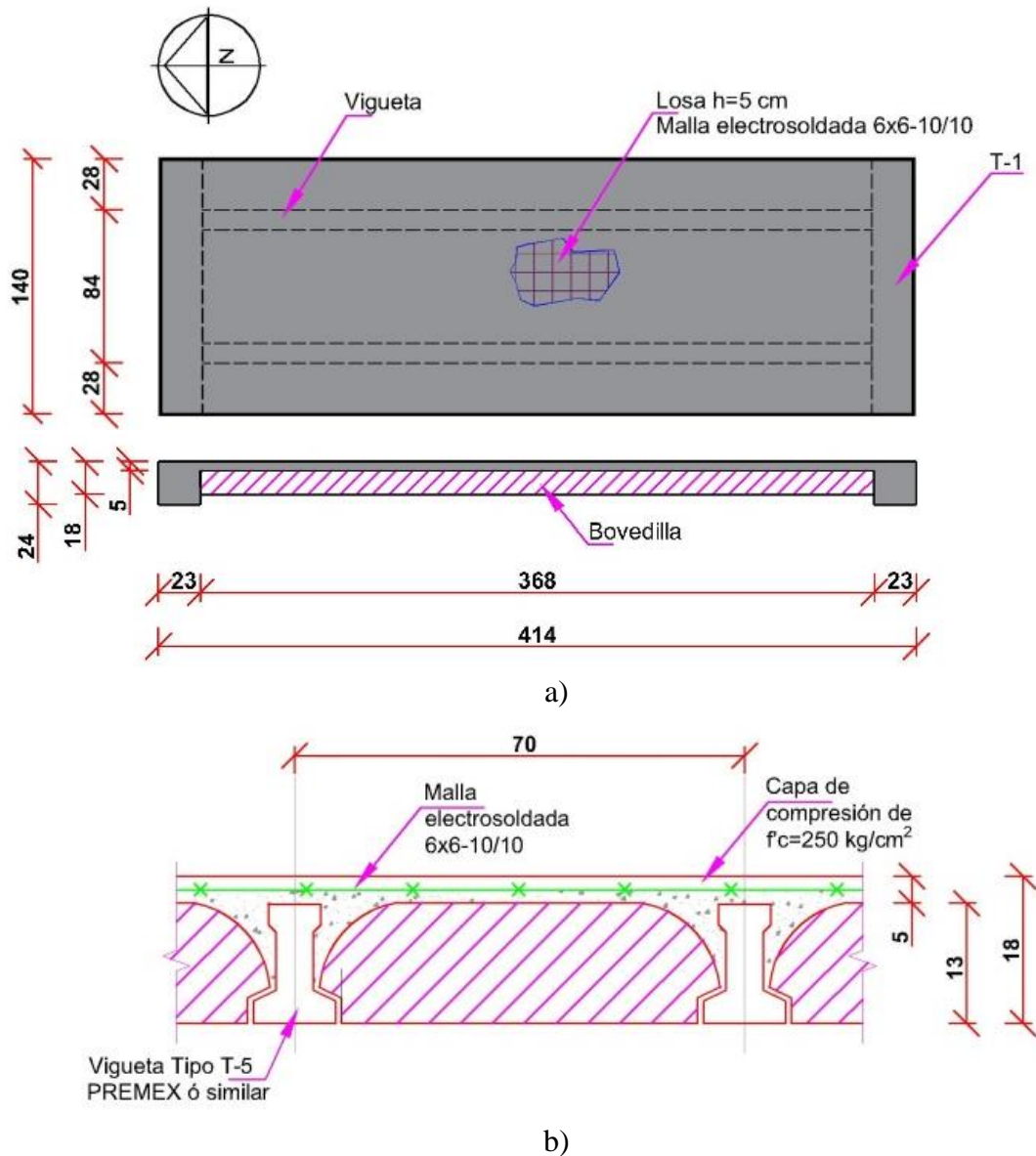
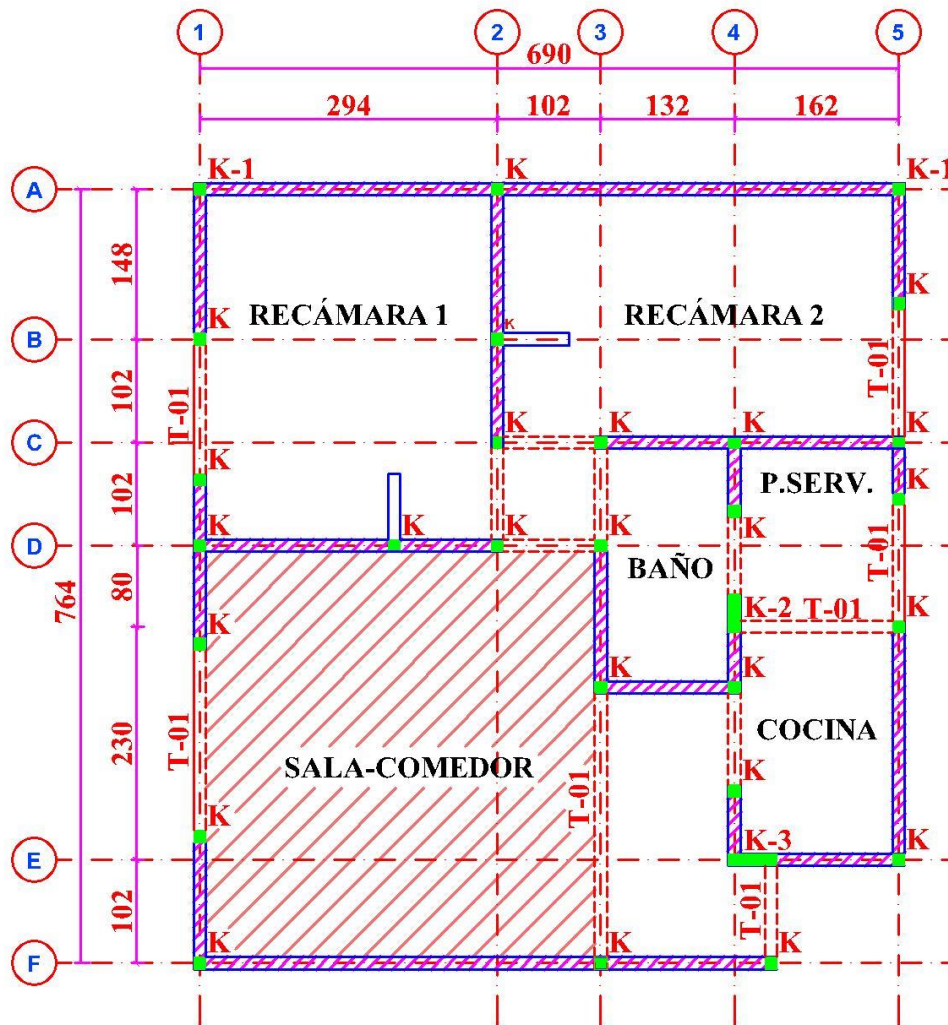


Figura 4.4. Dimensiones y características geométricas del espécimen apoyado en vigas, LVB-AV con vista: a) planta y b) transversal.

El otro espécimen consiste en una losa situada en el nivel 1 de un edificio de mampostería confinada destinado a uso de departamentos. Esta losa de vigueta y bovedilla, LVB-AM, está apoyada sobre muros de mampostería y traves, la cual se ubica en la zona sombreada de la Figura 4.5a. El peso volumétrico del concreto en vigueta, capa de compresión y mampostería fue de 2400, 2200 y 2000 kg/m^3 , respectivamente. Las propiedades mecánicas de los materiales que conforman tanto la losa como el muro de mampostería con espesor de 12 cm se proporcionan en la Tabla 4.2.

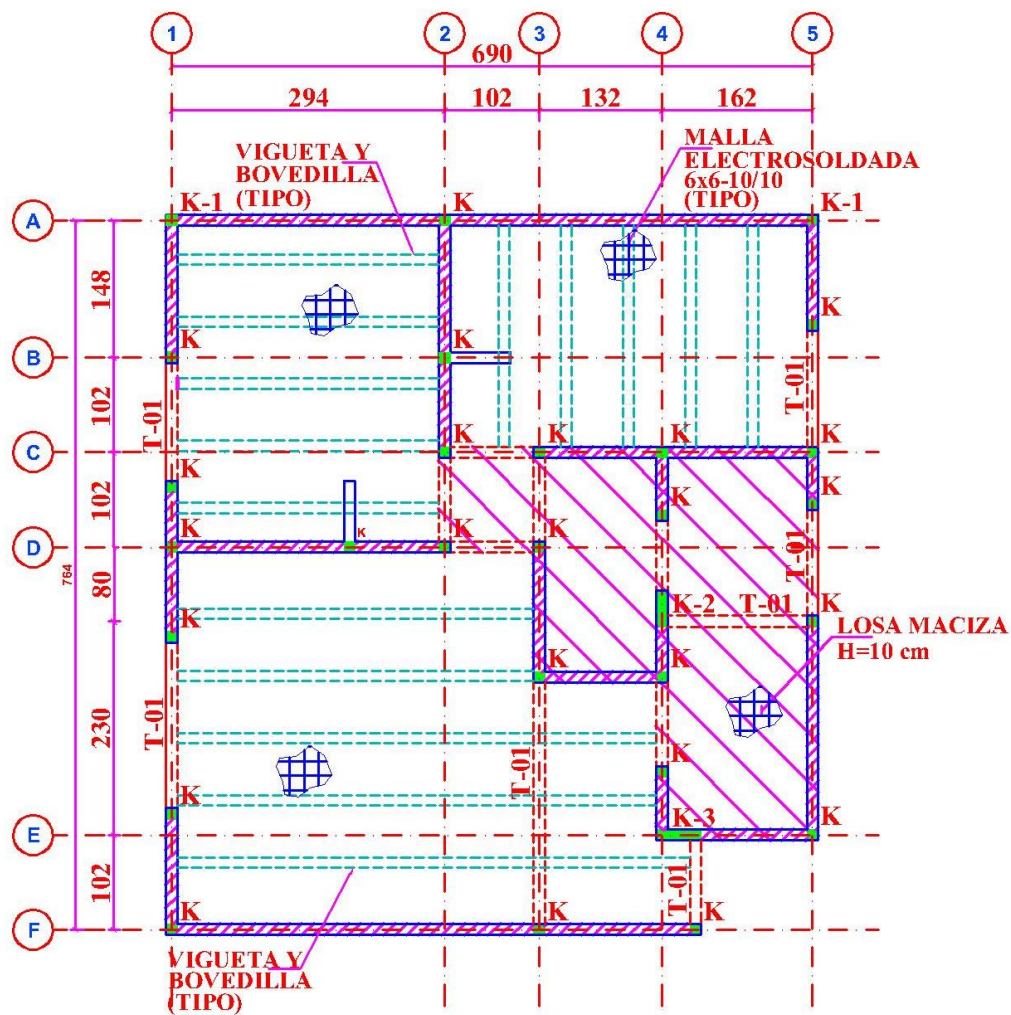
Tabla 4.2 Materiales que conforman la losa de prueba

Propiedades mecánicas (kg/cm ²)		
Capa de compresión (Concreto clase 2)	f'_c	200
	E_c	113137
	$f_{y\text{malla}}$	5000
Vigueta (Concreto clase 1)	f'_c_v	350
	f_{y_v}	15000 - 17000
	E_v	261916
Muro de mampostería	f_m^*	60
	E_m	21000

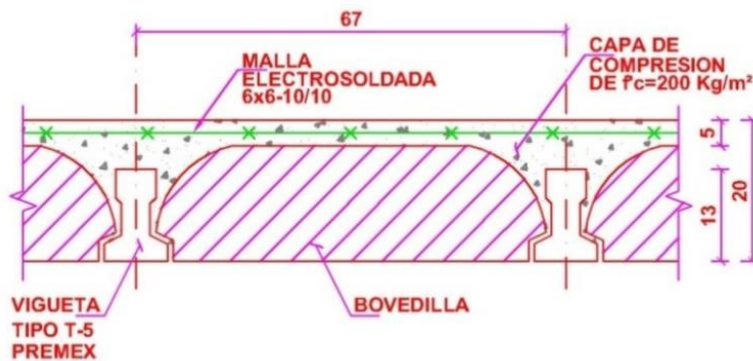


a)

Figura 4.5. Características del espécimen apoyado en muros, LVB-AM: a) ubicación, b) distribución de vigueta y bovedilla y c) dimensiones.



b)



c)

Figura 4.5 Continuación de Figura

4.3.2 Colocación de sensores

La colocación de los acelerómetros se realizó en zonas donde se esperan amplitudes modales máximas. En la LVB-AV se utilizó un criterio basado en el análisis modal de vigas

simplemente apoyadas. En la LVB-AM se realizaron análisis modales con elementos finitos lámina y viga. Una vez calculadas las amplitudes modales máximas, se ubicaron los sensores en planta. En la losa de vigueta y bovedilla apoyada en vigas se realizaron dos arreglos con la ubicación de los sensores como se muestran en la Figura 4.6. En el arreglo A1, los sensores se colocan paralelos a las viguetas para registrar modos de vibrar longitudinales. Por otra parte, en el arreglo A2, los sensores se colocaron perpendiculares a las viguetas para registrar modos de vibrar transversales. En ambos arreglos, el sensor S1 se mantiene en el centro, donde se espera ocurra la amplitud modal máxima. Es importante mencionar que estos modos ocurren en dirección perpendicular al plano de la losa.

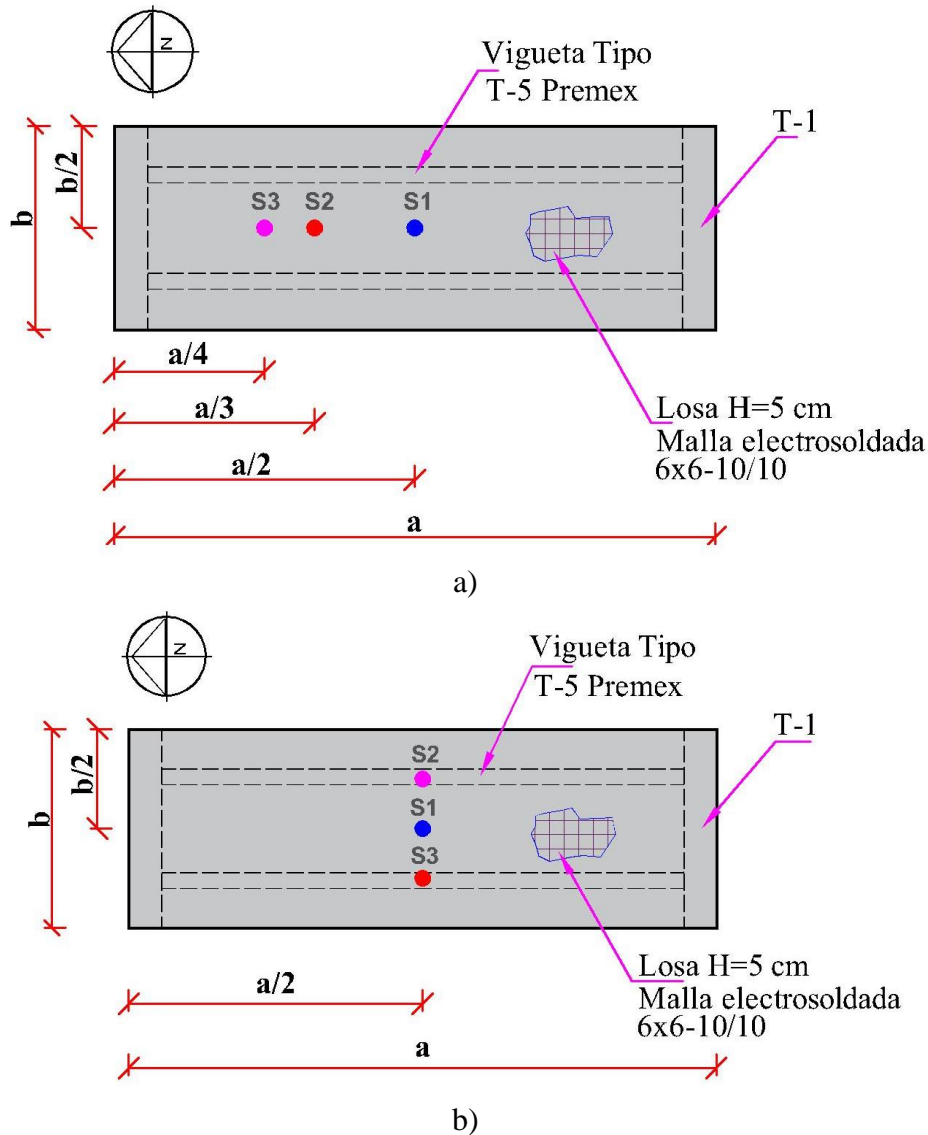


Figura 4.6. Esquema de la ubicación de sensores en la LVB-AV. Arreglos: a) A1 y b) A2.



Figura 4.7. Ubicación de sensores en la PVL-LVB-AV. Arreglos: a) A1 y b) A2.

En la LVB-AM se realizaron tres arreglos con la ubicación de los sensores. En el arreglo A1 los sensores se colocaron alineados a la vigueta central, con una separación de $0.25L_1$ como se muestra en la Figura 4.8a. En el caso del arreglo A2, los sensores se colocaron alineados en dirección perpendicular a las viguetas, a una distancia de $0.46L_1$, con una separación de $0.25L_2$ como se muestra en la Figura 4.8b. Para el arreglo de sensores A3, los sensores se colocaron en diagonal con una separación de $\frac{1}{4}(L_1+L_2)^{1/2}$ como se muestra en la Figura 4.8c. El colocado de sensores en la losa durante la prueba se muestra en la Figura 4.9. Al igual que en la LVB-AV, en esta prueba, el sensor S1 se mantuvo en el centro para registrar las amplitudes modales máximas.

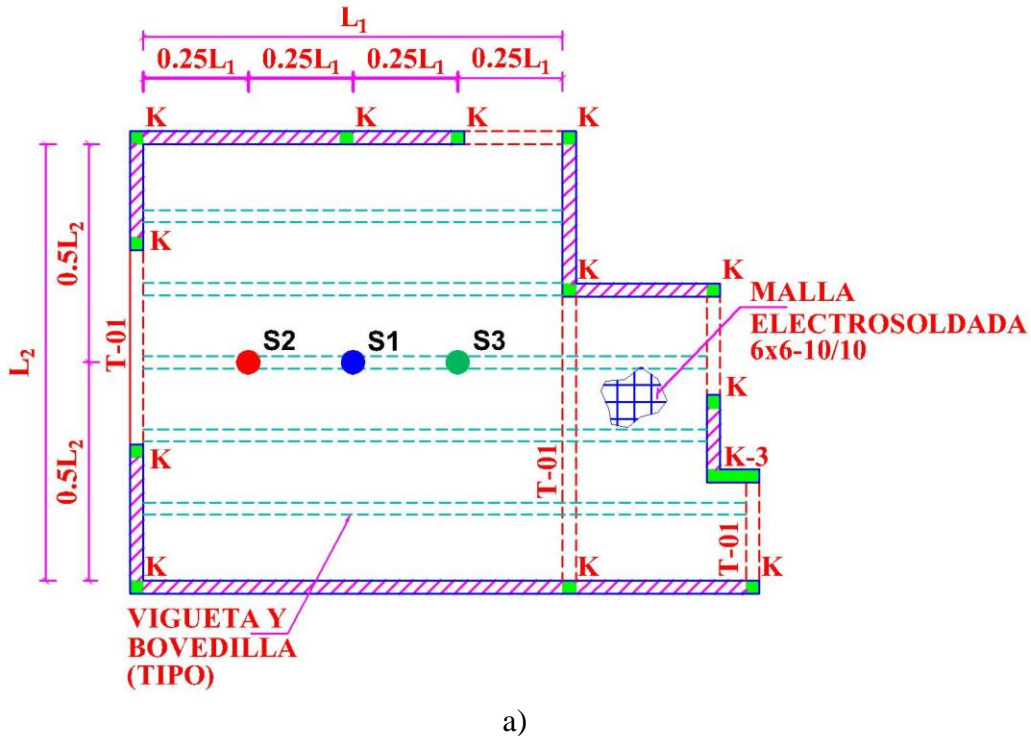
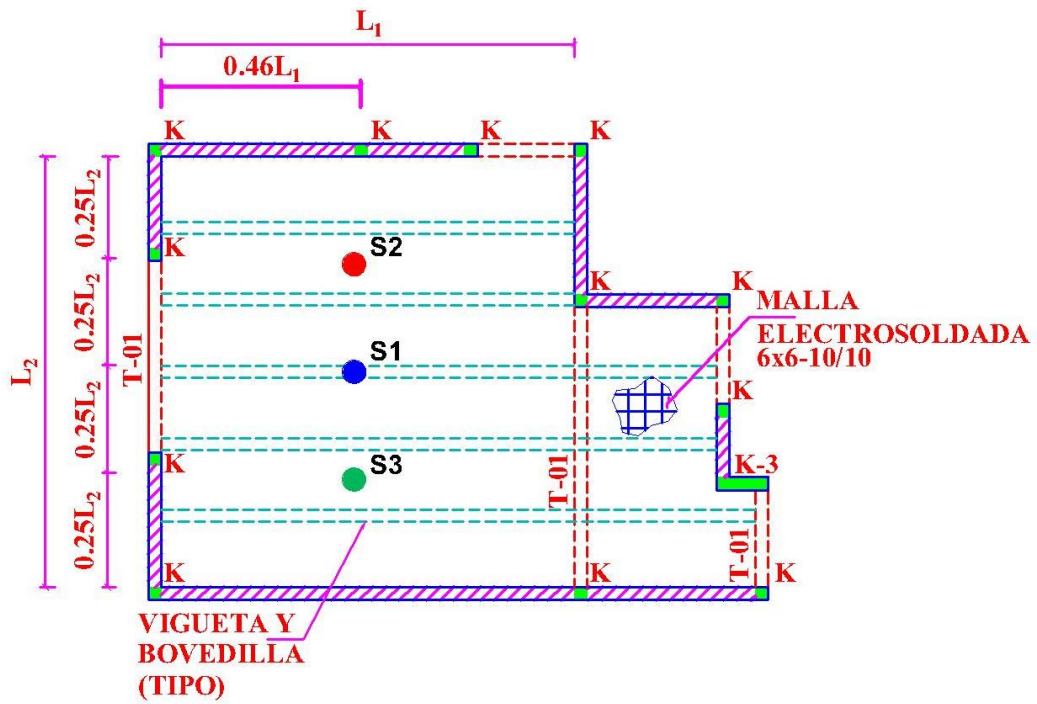
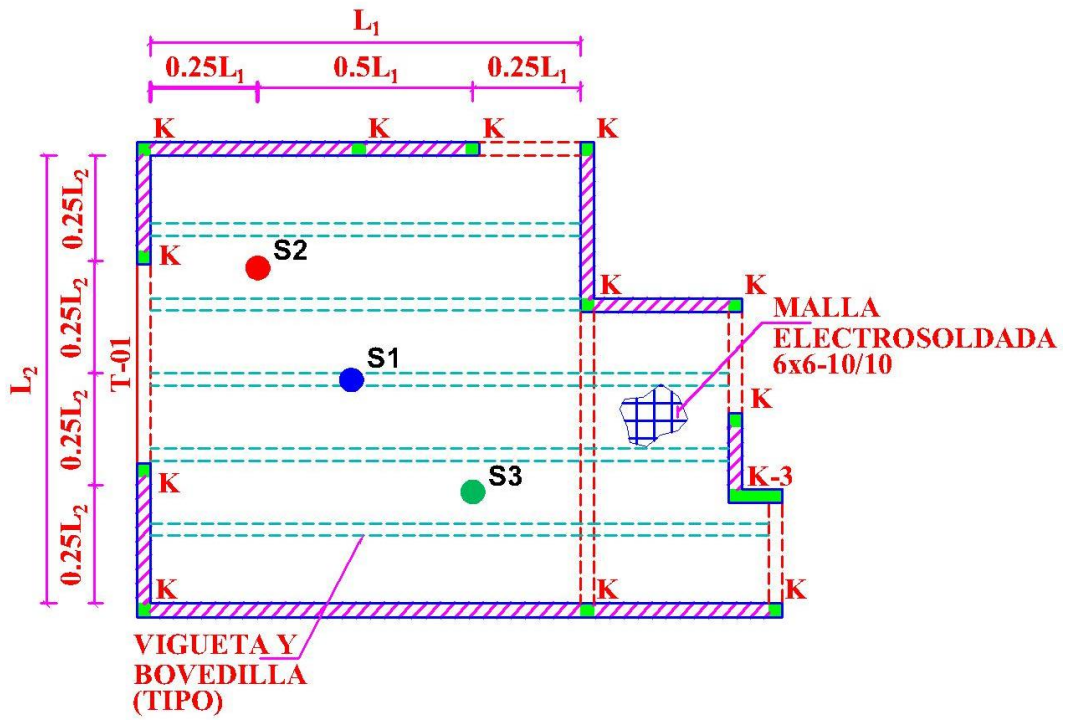


Figura 4.8. Arreglos de sensores en LVB-AM: a) A1 b) A2 y c) A3.



b)



c)

Figura 4.8. Continuación de Figura

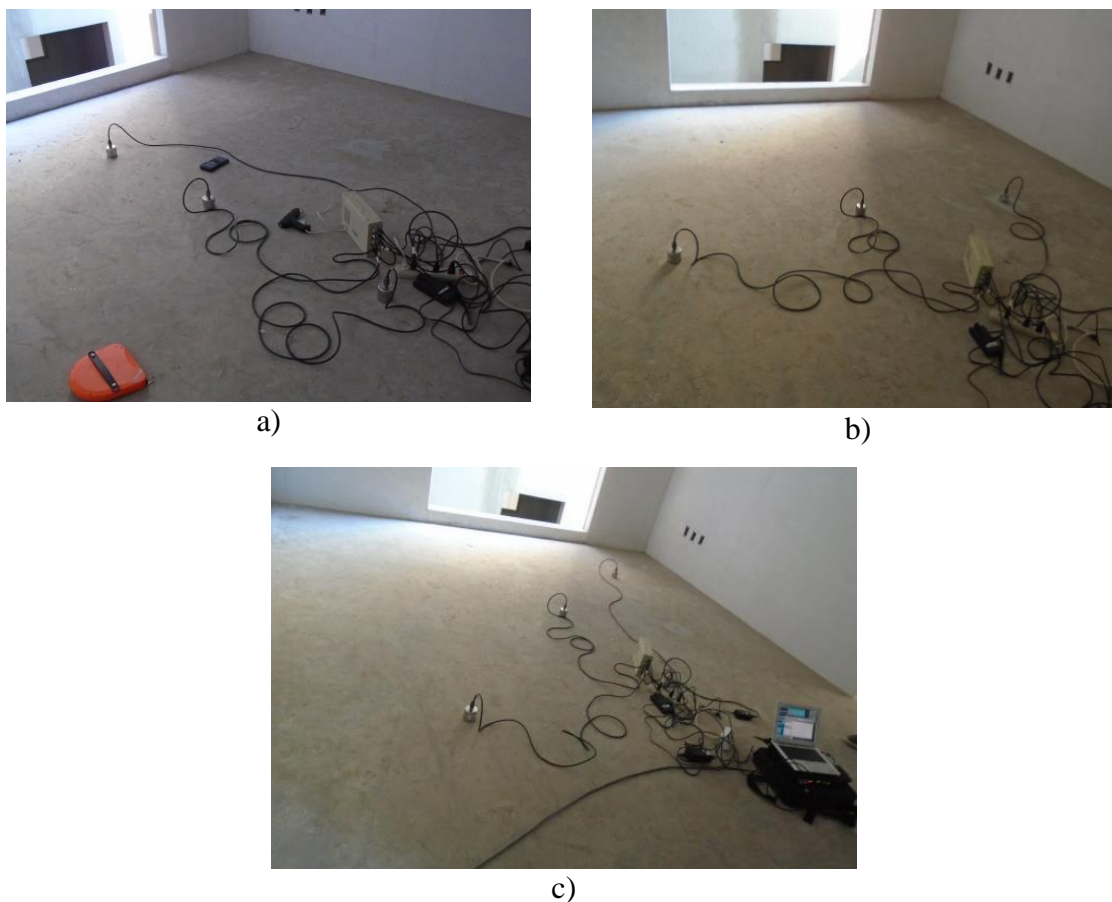


Figura 4.9. Sensores en la LVB-AM con arreglos: a) A1 b) A2 y c) A3.

4.3.3 Prueba de vibración ambiental

En la prueba de vibración en ambos especímenes solamente se registró la respuesta debida a factores externos ambientales. Los registros, así como los espectros de potencia se definieron en términos de voltaje, ya que solo la frecuencia natural fue el parámetro de interés. Con el objetivo de registrar las frecuencias de vibración existentes en el sistema de piso, en la PVA-LVB-AV mostrado en la Figura 4.6a, se realizaron registros de las señales, donde la f_m de cada prueba fue de 512 Hz en un lapso de 300 s. Este valor es alto comparado con los valores de f_m que se utilizan comúnmente en este tipo de pruebas. Sin embargo, se propuso con el fin de obtener un ancho de banda amplio en el muestreo de la señal. Por otra parte, en estos experimentos las bandas de interés son aquellas donde se definen las frecuencias naturales correspondientes al modo de vibrar 1. La respuesta en el dominio de la frecuencia se muestra en la Figura 4.10, donde se observan distintas amplitudes de energía que definen distintas frecuencias de vibración; en el caso de este trabajo sólo interesa identificar la frecuencia natural fundamental de la losa, cuya amplitud máxima se presenta en el sensor S1 con una frecuencia de 15.90 Hz. De la PVA-LVB-AV-A2, mostrado en la Figura 4.6b, se obtuvieron lecturas en el dominio de la frecuencia para cada sensor, tal como se muestra en la Figura 4.11. Se observa que en el sensor S1 existe una amplitud máxima de energía en una frecuencia

de 15.90 Hz aproximadamente, la cual es la frecuencia de interés; mientras que para los sensores S2 y S3 existen dos máximos de amplitud con frecuencias de 15.90 Hz y 32.42 Hz. Realizando una superposición de los registros que representan el espectro de potencia para cada sensor, se observa que en la frecuencia $f_n = 15.90$ Hz se presenta en los todos los sensores de aceleración, por lo que se tiene un valor de frecuencia natural completamente definido, como se muestra en la Figura 4.12. Cabe señalar que los sensores registran una amplitud de movimiento considerable en la frecuencia de 32.42 Hz, lo cual indica que cada vigueta se comporta como un elemento independiente dentro del sistema continuo, desarrollando amplitudes de movimiento incluso mayores que la debida al movimiento correspondiente al modo de vibrar 1.

En el procesamiento de las señales en el dominio de la frecuencia para cada uno de los sensores se observan diversas amplitudes de energía y valores de la frecuencia natural, esto se debe al registro de otros modos de vibración existentes en el edificio en el momento de la prueba. Sin embargo, en este trabajo la frecuencia natural fundamental de los modos perpendiculares a la losa es la variable de interés. Por lo tanto, para obtenerla a partir de las Figuras 4.13 a 4.15, se realiza una comparación entre los diferentes registros para observar las frecuencias naturales involucradas en la estructura, como se muestra en la Figura 4.16, donde se observa que, en todos los espectros de potencia, el sensor 1 es el que registra una amplitud de energía de magnitud alta con $f_n = 24.89$ Hz, lo cual muestra que existe un modo de vibrar definido en esa posición.

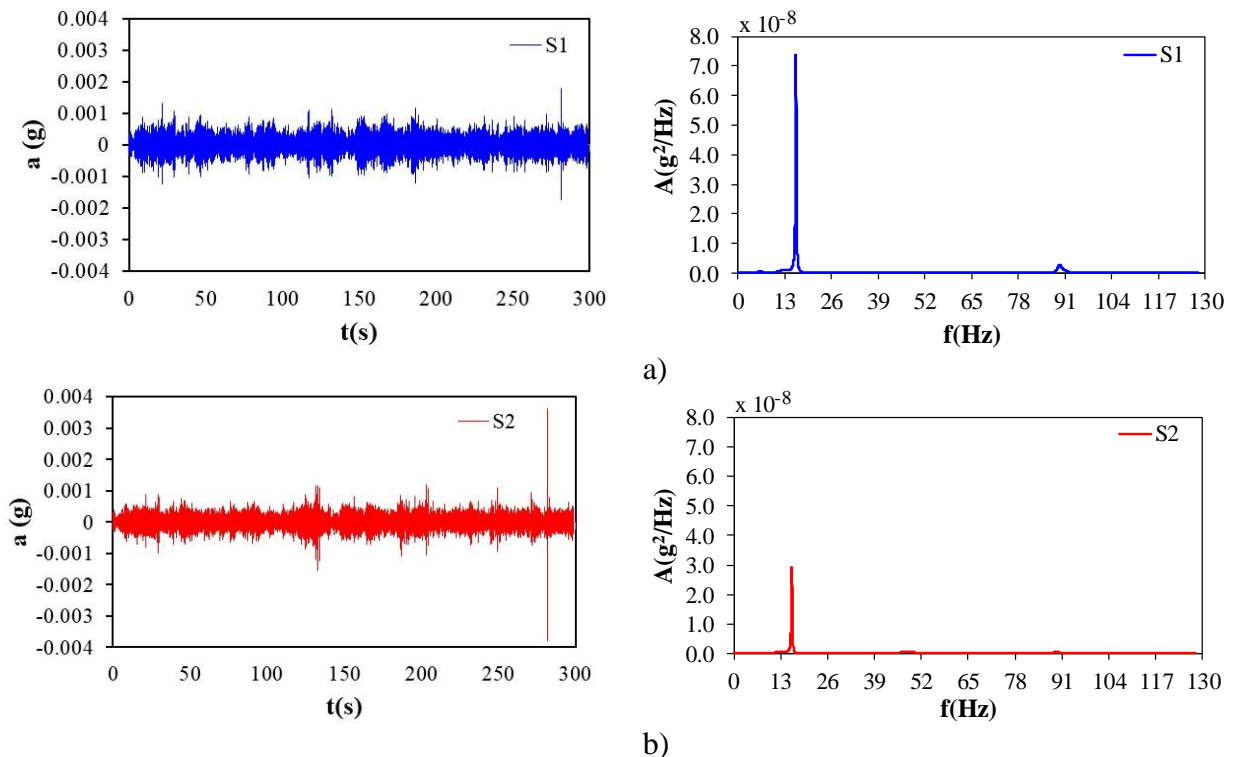
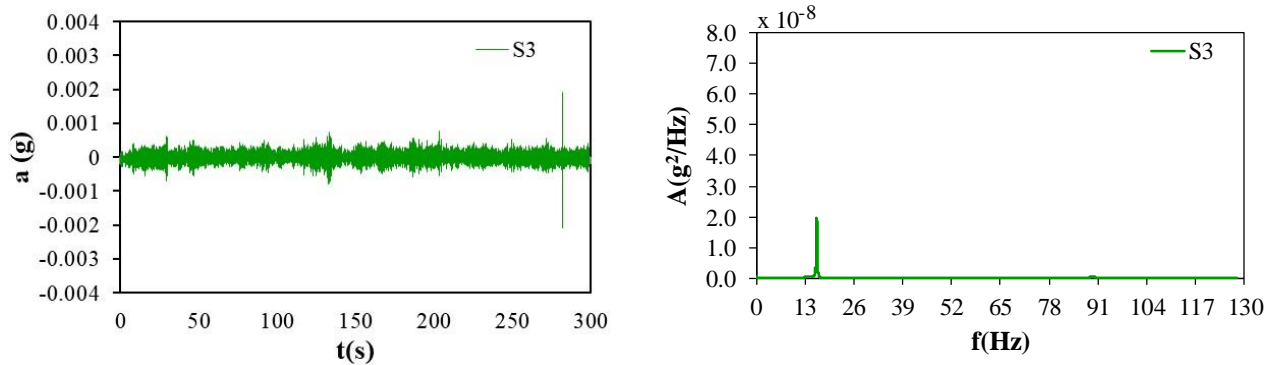
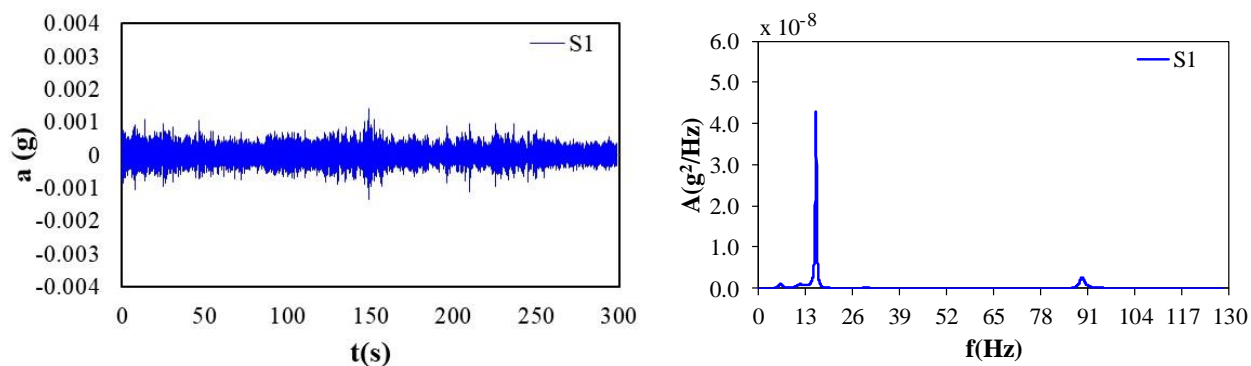


Figura 4.10. Registros de aceleración y espectros de potencia en PVA-LVB-AV-A1 en los sensores: a) S1, b) S2 y c) S3

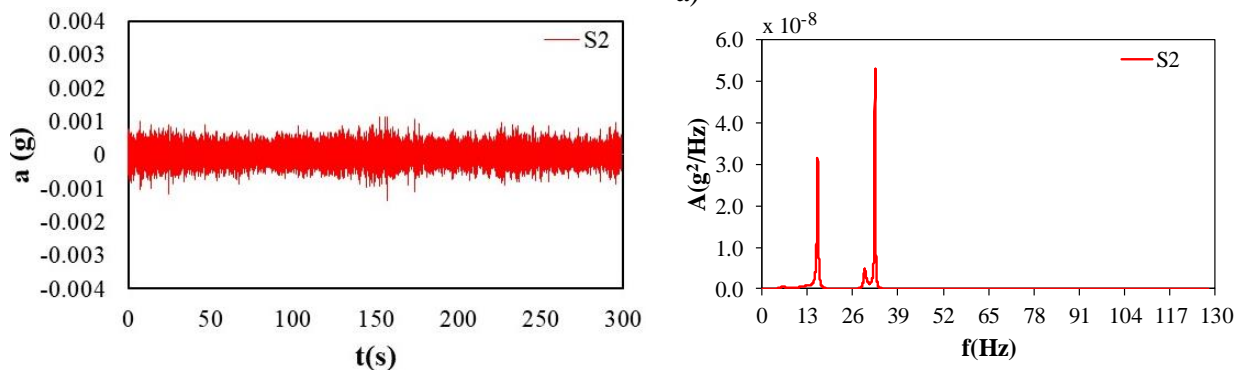


c)

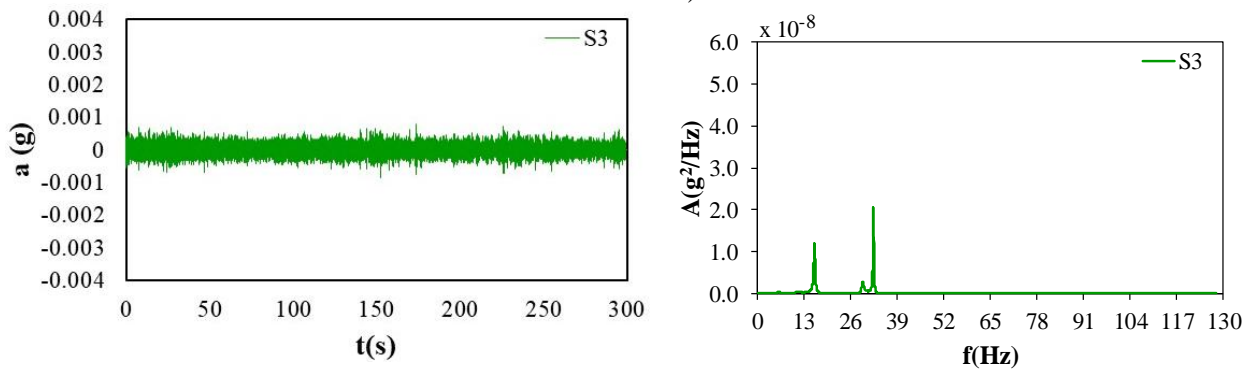
Figura 4.10. Continuación de Figura



a)



b)



c)

Figura 4.11. Registros de aceleración y espectros de potencia en la PVA-LVB-AV-A2 en los sensores: a) S1, b) S2 y c) S3.

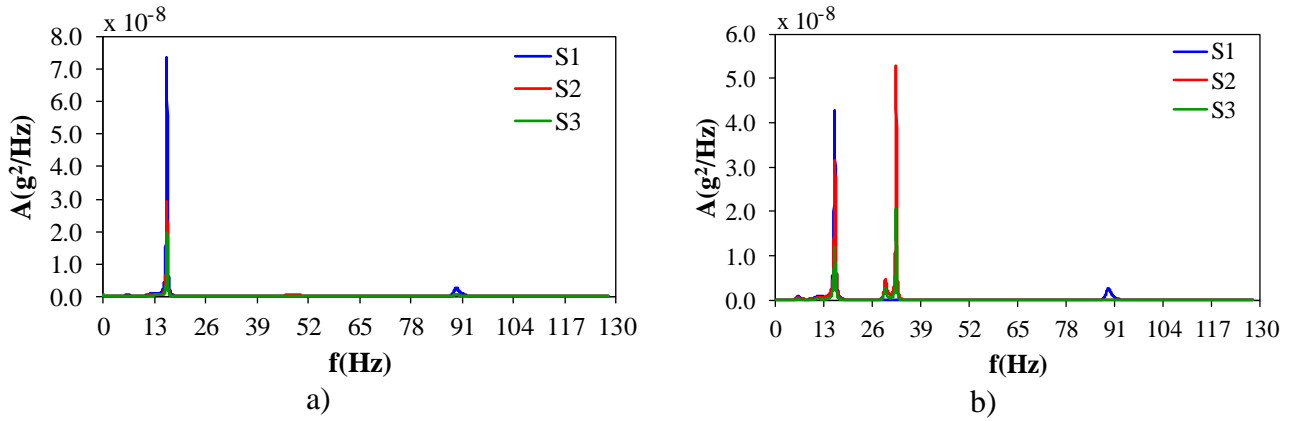


Figura 4.12. Comparación entre espectros de potencia de pruebas de vibración ambiental de LVB-AV en arreglos: a) A1 y b) A2.

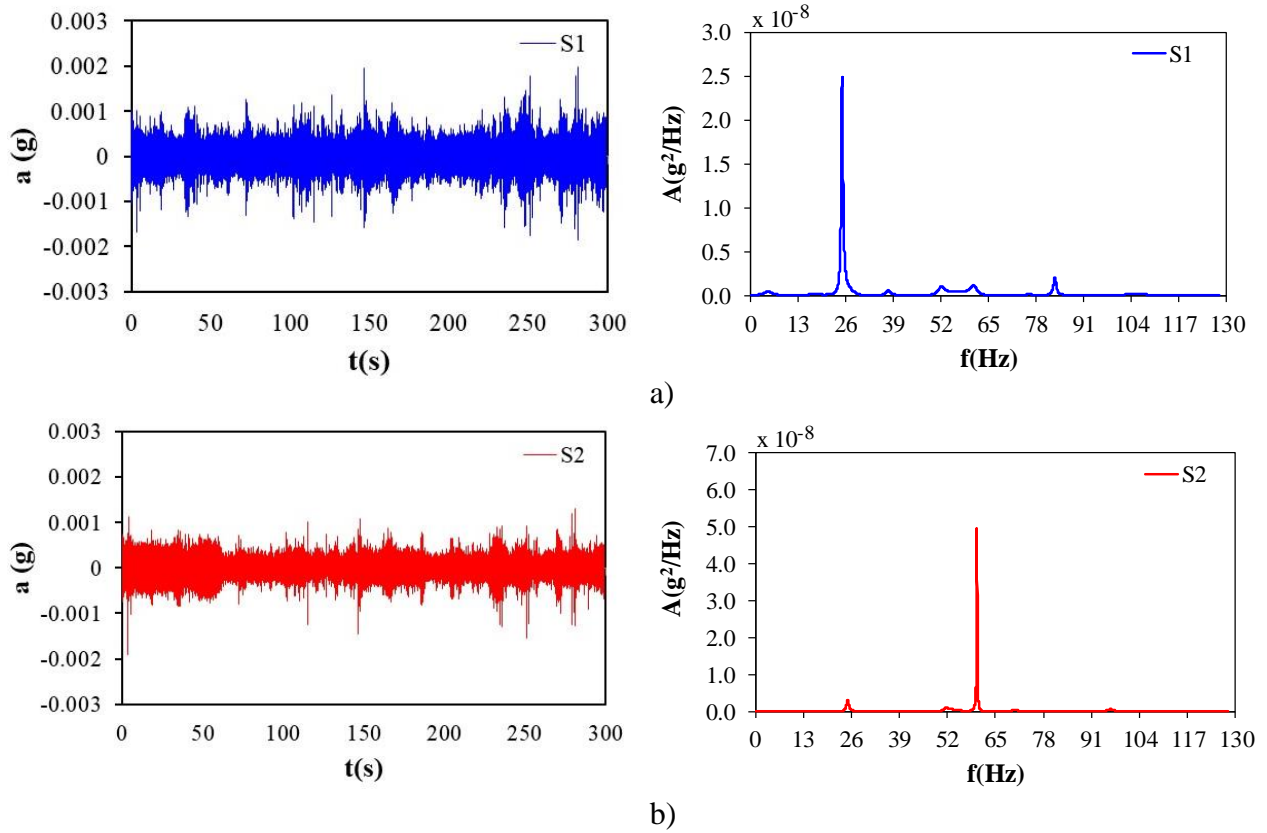
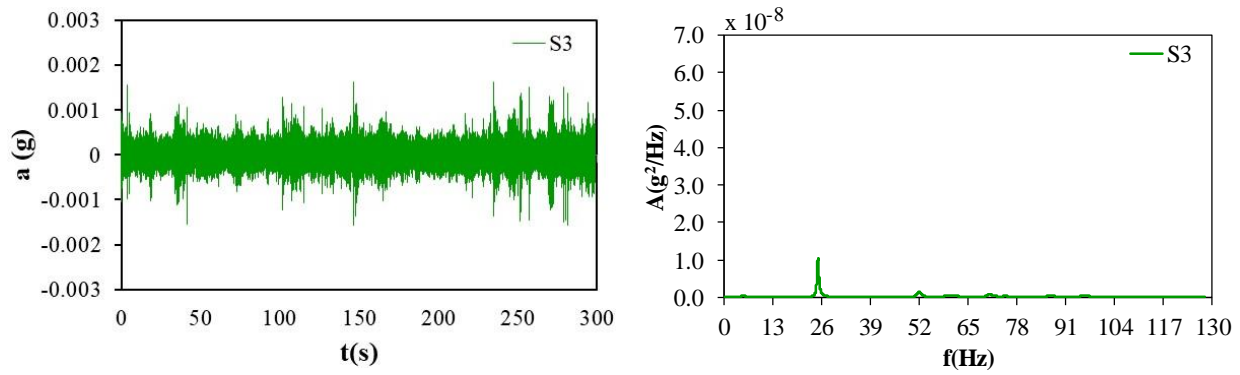
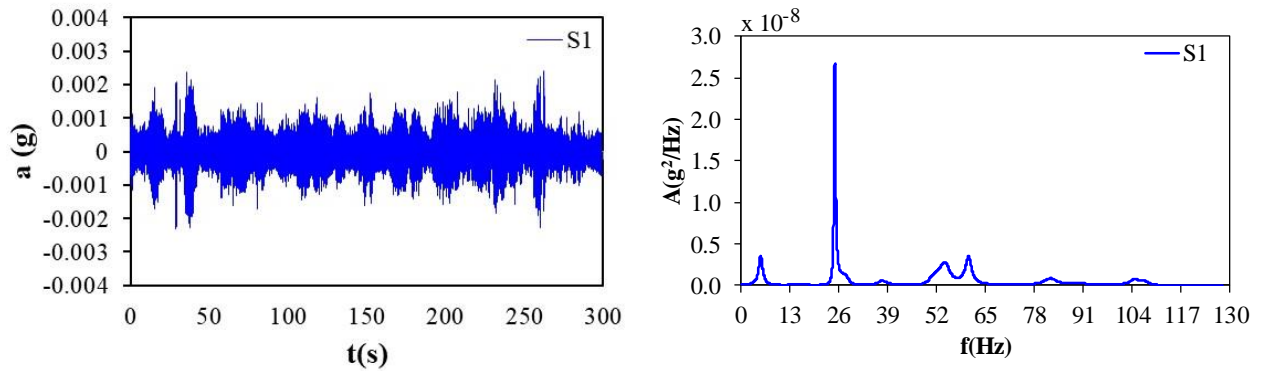


Figura 4.13. Registro y espectro de potencia en LVB-AM-A1 de los sensores: a) S1, b) S2 y c) S3.

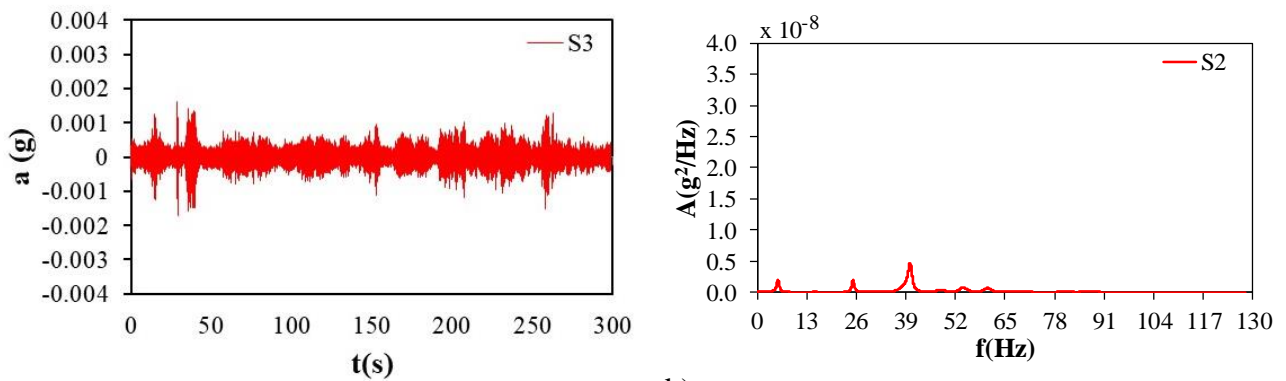


c)

Figura 4.13. Continuación de Figura



a)



b)

Figura 4.14. Registro y espectro de potencia en LVB-AM-A2 de los sensores: a) S1, b) S2 y c) S3.

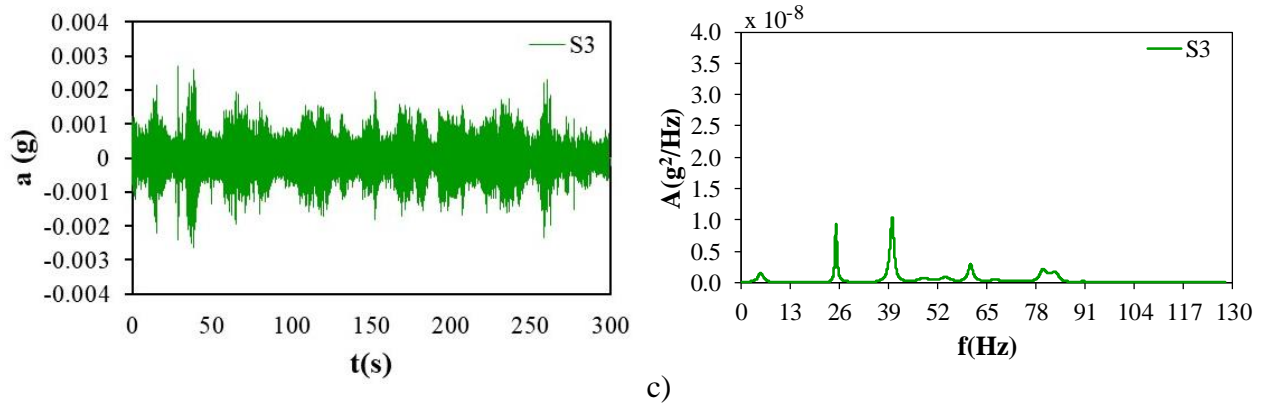


Figura 4.14. Continuación de Figura

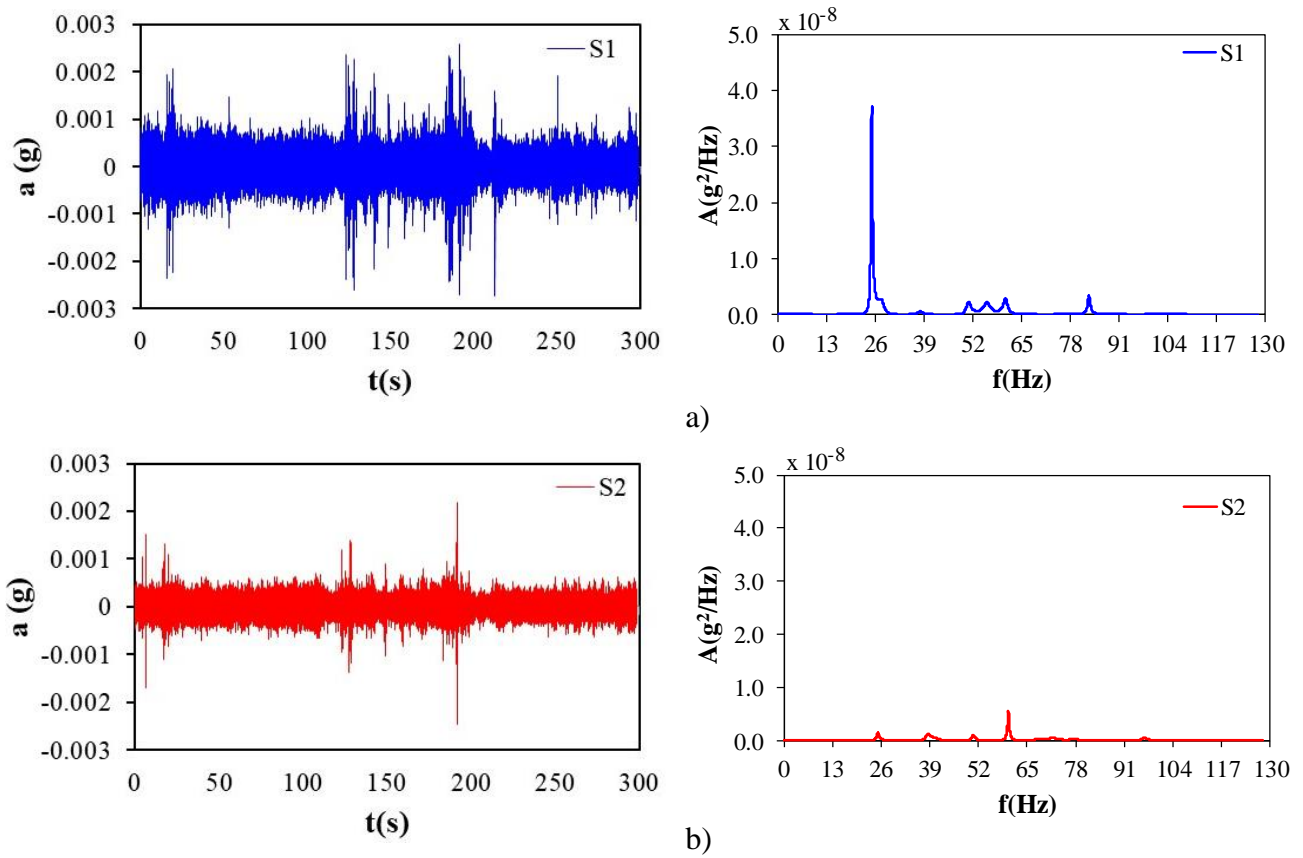


Figura 4.15. Registro y espectro de potencia en LVB-AM-A3 de los sensores: a) S1, b) S2 y c) S3.

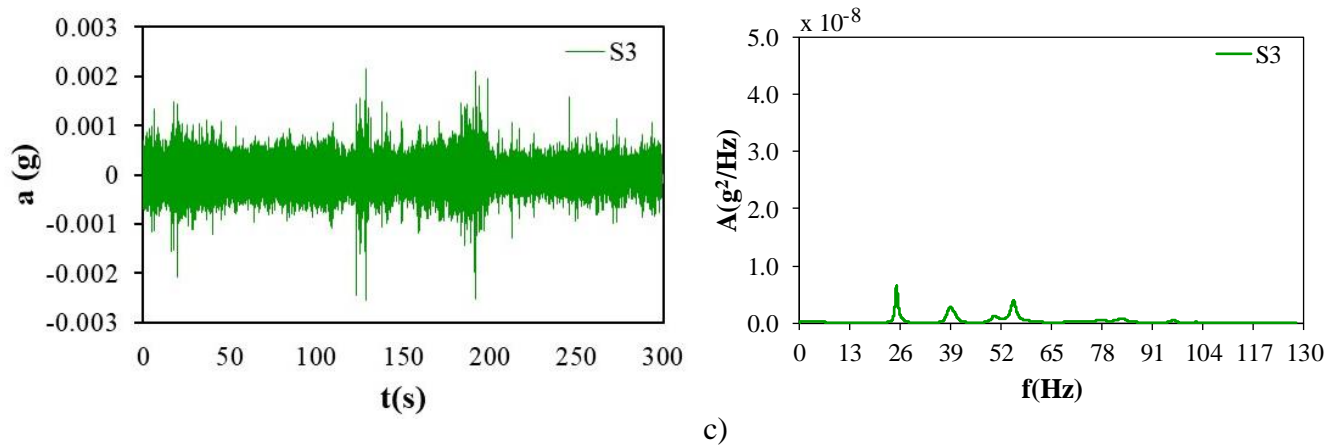


Figura 4.15. Continuación de Figura

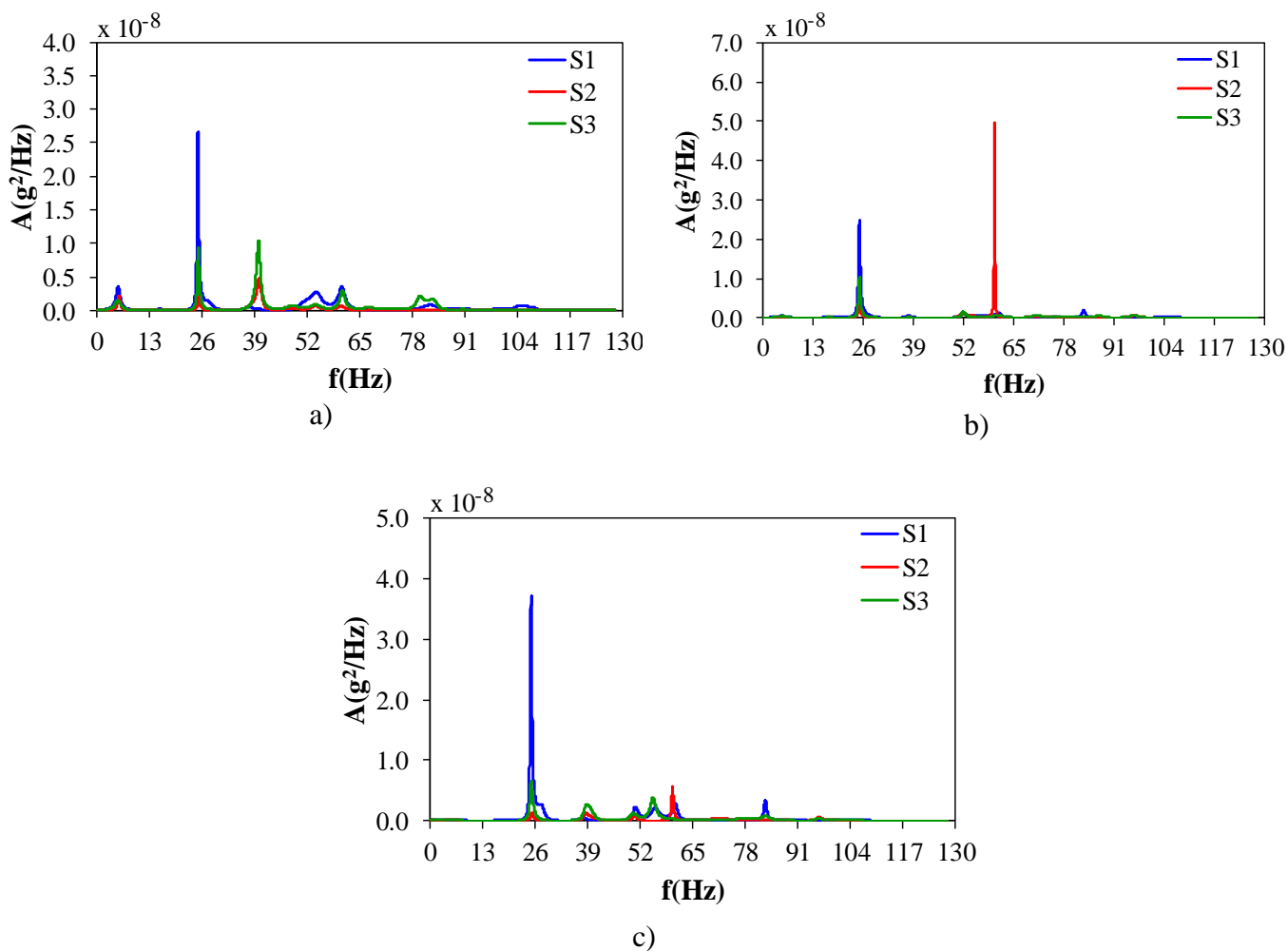


Figura 4.16. Comparación entre espectros de potencia en PVA-LVB-AM en arreglos: a) A1, b) A2 y c) A3

4.3.4 Prueba de vibración forzada

La PVF-LVB-AV se realizó con el caminar de dos personas, nombradas como P₁ y P₂ cuyos pesos fueron de 100 y 86 kg; las frecuencias de paso de cada persona se obtuvieron con base en el promedio de los valores que resumen en la Tabla 4.3, los valores fueron de 1.63 y 1.64 Hz para P₁ y P₂, respectivamente. Las personas caminaron en línea recta de manera simultánea, paralelamente a los bordes libres como se muestra en la Figura 4.17. Para registrar una respuesta dinámica de manera completamente definida, se realizó el registro de cada uno de los sensores con una frecuencia de muestreo de 512 Hz en un lapso de 18 s como se muestra en la Figura 4.17.

Tabla 4.3 Frecuencias de paso de personas P₁ y P₂ en LVB-AV

No. de muestra	No. de pasos	P ₁		P ₂	
		Tiempo (s)	Frecuencia de paso (Hz)	Tiempo (s)	Frecuencia de paso (Hz)
1	4	2.41	1.66	2.53	1.58
2		2.36	1.69	2.47	1.62
3		2.25	1.78	2.46	1.63
4		2.56	1.56	2.35	1.70
5		2.49	1.61	2.42	1.65
6		2.55	1.57	2.4	1.67
7		2.6	1.54	2.4	1.67
8		2.44	1.64	2.42	1.65
9		2.47	1.62	2.4	1.67
10		2.5	1.60	2.5	1.60

En el caso del arreglo de sensores A1 las aceleraciones máximas en términos de *g* ocurren al centro de la losa, donde se encuentra el sensor S1, como se muestra en la Figura 4.18. Por otra parte, en el caso del arreglo A2, los sensores colocados en el centro del claro en su mayoría registraron un valor similar de *g* como se muestra en la Figura 4.19. Por lo tanto, se observa que la aceleración máxima debida al caminar de personas en la losa de prueba es aproximadamente 7.7 % de *g*, tal como se resume en la Tabla 4.4.



Figura 4.17. Prueba de vibración forzada debida al caminar de personas en losa apoyada en vigas.

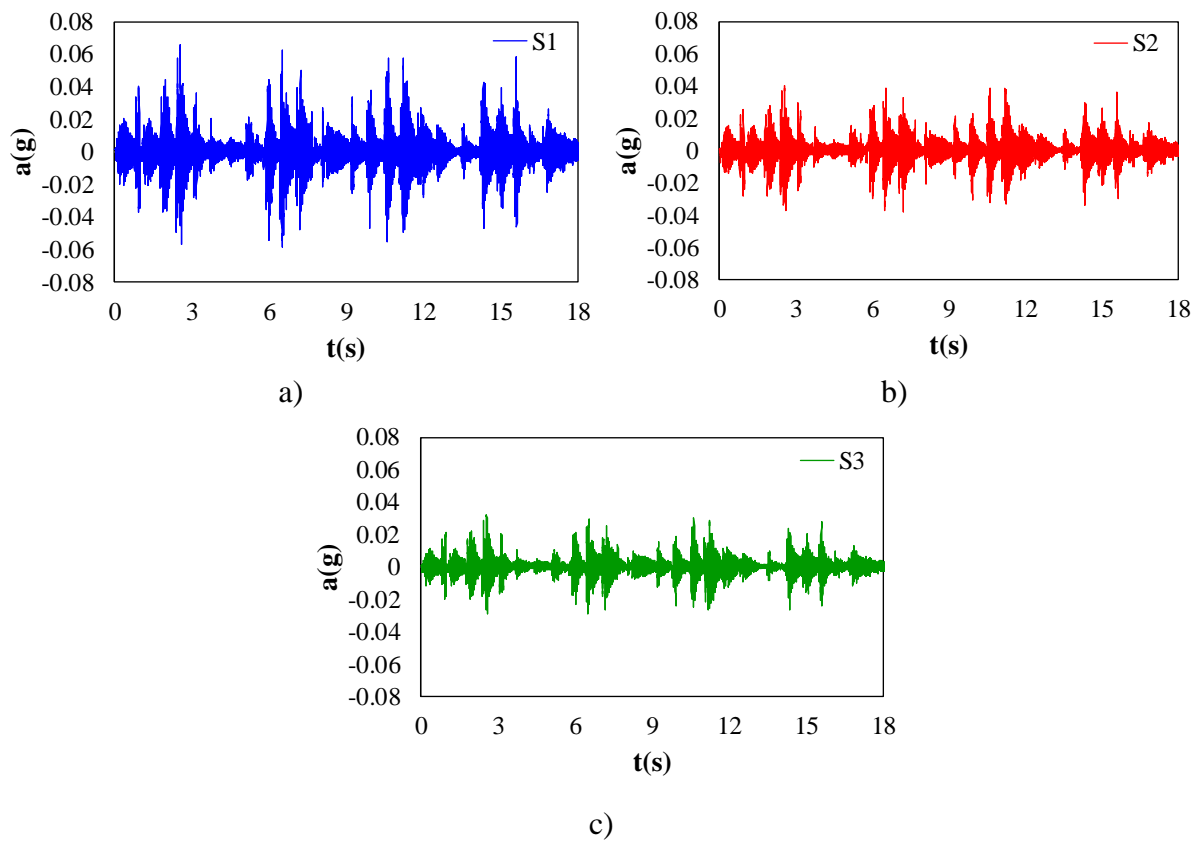


Figura 4.18. Aceleraciones en PVF-LVB-AV-A1 en los sensores: a) S1, b) S2 y c) S3.

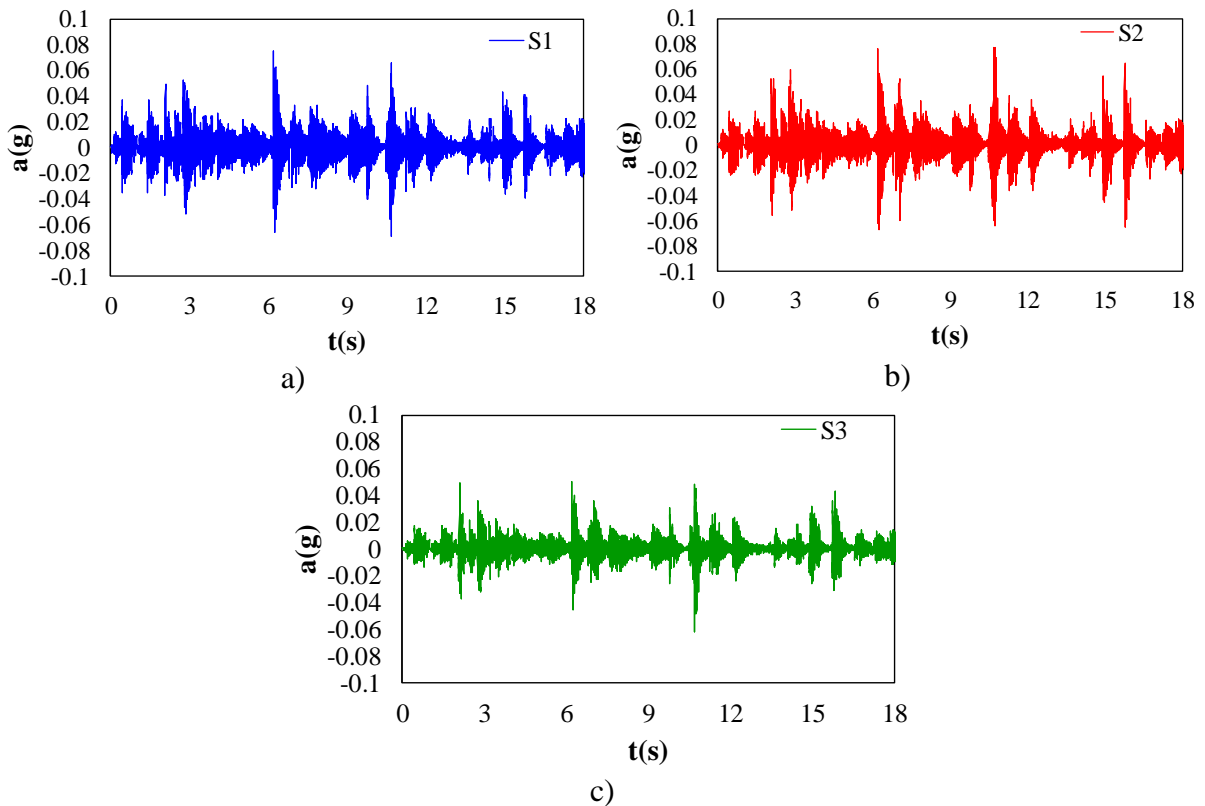


Figura 4.19. Aceleraciones en PVF-LVB-AV-A2 en los sensores: a) S1, b) S2 y c) S3.

Tabla 4.4 Aceleraciones máximas inducidas por dos personas caminando en LVB-AV

Aceleración máxima (%g)		
Sensor	Arreglos	
	A1	A2
S1	6.5	7.5
S2	4.0	7.7
S3	3.1	6.2

En la LVB-AM se realizó la prueba de vibración forzada ante el caminar de dos personas de manera simultánea como se muestra en la Figura 4.20, cuyos pesos y frecuencias de paso corresponden a las mismas personas que caminaron sobre la losa apoyada sobre vigas. La frecuencia de muestreo de cada prueba fue de 512 Hz, en un lapso de 18 s. A diferencia de la losa apoyada sobre vigas, en esta losa, el registro de las aceleraciones de cada sensor consistió en dos casos: primero y segundo. En el primer caso se obtuvo la respuesta para el caminar de una sola persona sobre la superficie total de la losa de manera aleatoria; mientras que, en el segundo, se realizó el mismo procedimiento para el caminado simultáneo de dos personas haciendo énfasis en direcciones diagonales para obtener la máxima respuesta.

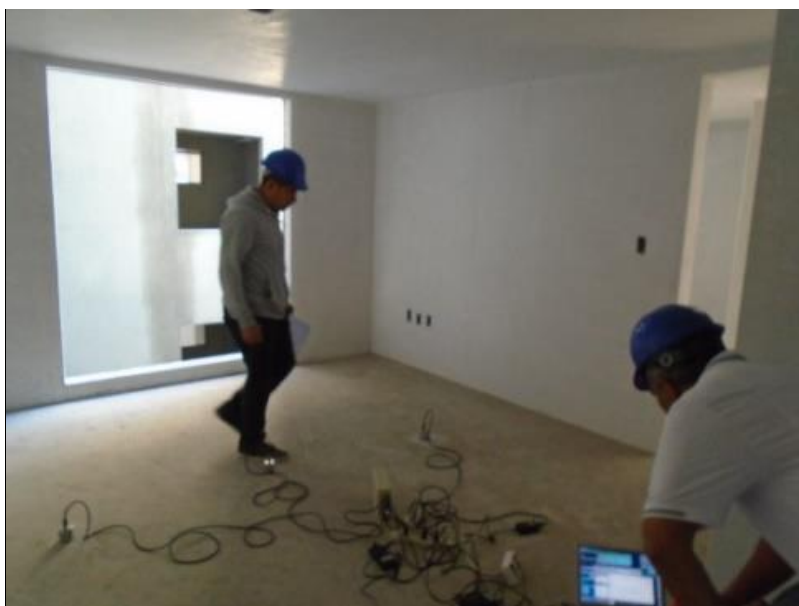


Figura 4.20. Análisis de vibración forzada debida al caminar de personas en losa de prueba.

Para determinar la respuesta dinámica ante el caminar de una persona se obtuvieron las aceleraciones para cada arreglo de sensores, donde el sensor 1 registra las respuestas máximas al centro de la losa como se muestra en las Figuras 4.21 a 4.23. En el caso del caminar de dos personas se obtuvieron las aceleraciones que se muestran en las Figuras 4.24 a 4.26. En general, se observa una serie de respuestas continuas con segmentos intermitentes donde predominan las respuestas máximas. Las zonas con respuestas máximas se presentan en la zona central de la losa como se muestra en la respuesta de los sensores S1 y S3 en la Figura 4.21. En el caso de los arreglos de sensores A2 y A3 se observa que los máximos predominantes están registrados por el sensor S1, como se muestra en las Figuras 4.22 y 4.23.

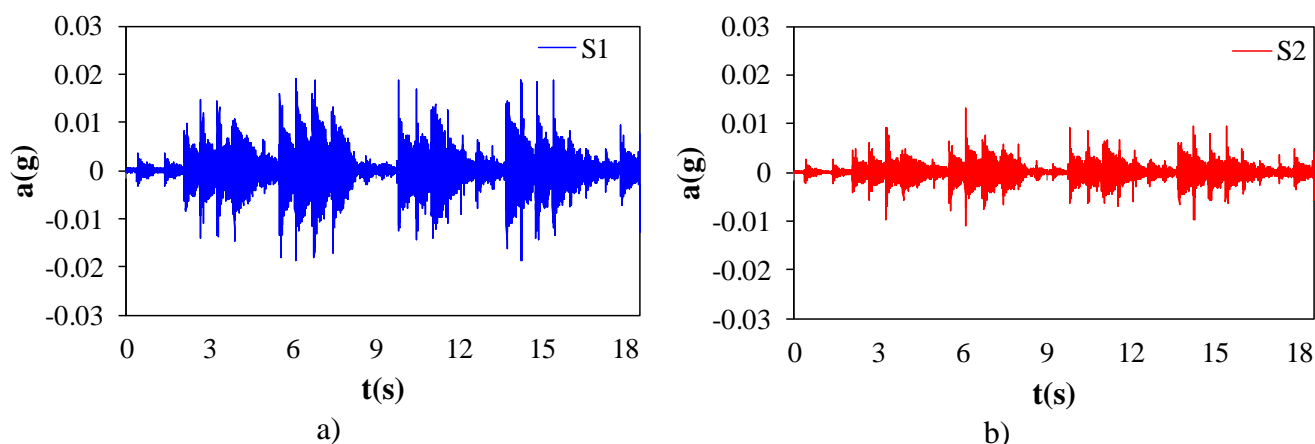
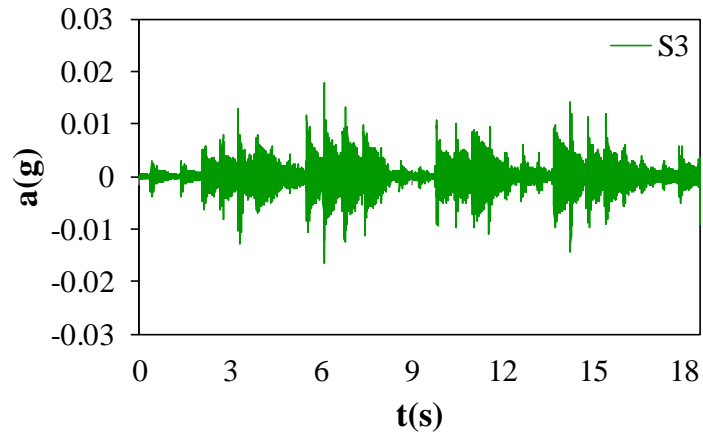
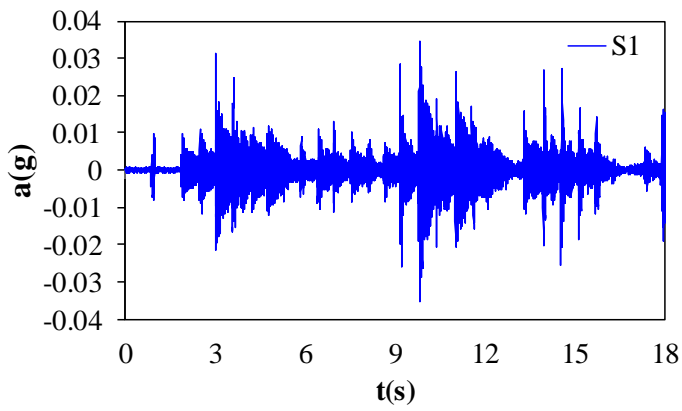


Figura 4.21. Registro de aceleraciones en PVF-LVB-AM-A1 ante el caminar de una persona con sensores: a) S1, b) S2 y c) S3.

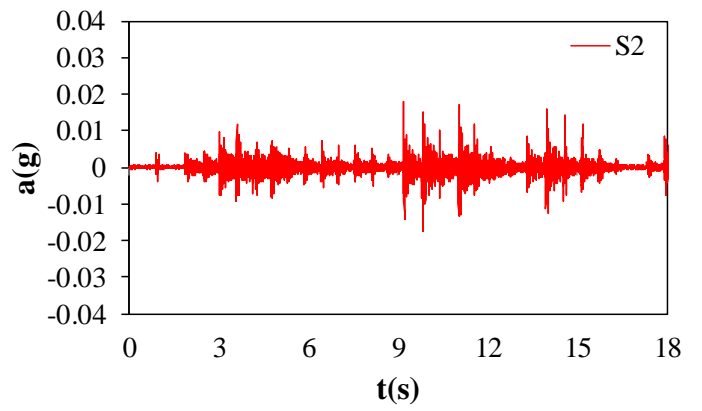


c)

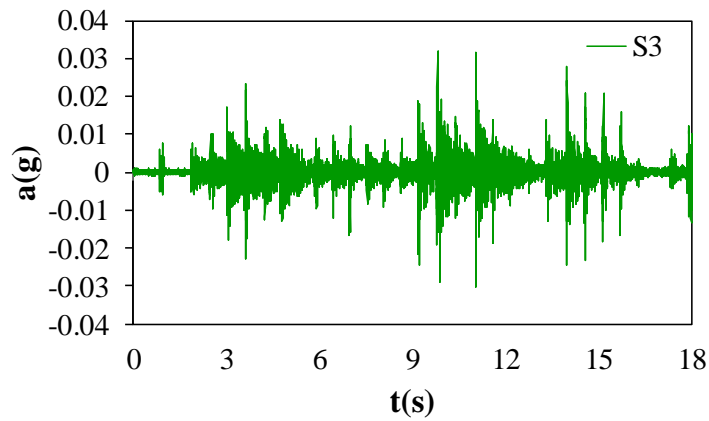
Figura 4.21. Continuación de Figura



a)



b)



c)

Figura 4.22. Registro de aceleraciones en PVF-LVB-AM-A2 ante el caminar de una persona con sensores: a) S1, b) S2 y c) S3

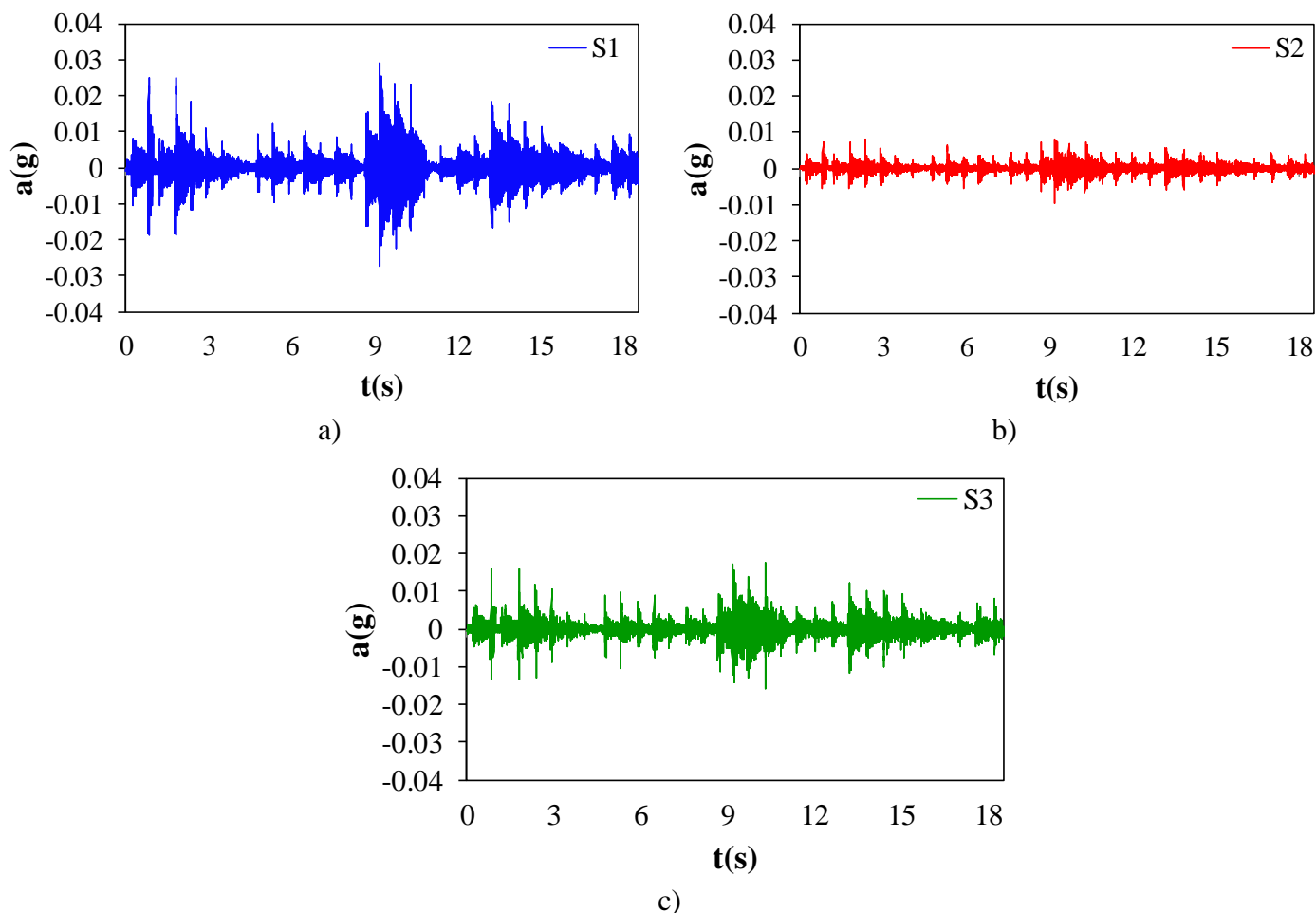


Figura 4.23. Registro de aceleraciones en PVF-LVB-AM-A3 ante el caminar de una persona con sensores: a) S1, b) S2 y c) S3

En el caso de la respuesta dinámica debida al caminar de 2 personas, se observa un comportamiento similar a la prueba con el caminar de una persona. En el arreglo A1 se observa que existen aceleraciones similares en los 3 sensores cuyo valor es de 0.04g, aproximadamente como se muestra en la Figura 4.24. En el caso del arreglo A2 se observa que la respuesta máxima predomina en la zona central de la losa como se muestra en la Figura 4.25. En el caso del arreglo A3 se observa una respuesta más estable, pues son continuas a lo largo del tiempo, tal como se observa en la Figura 4.26. Además, se observa que la magnitud de la aceleración es menor, esto se debe a la superposición de la respuesta ocasionada por cada persona.

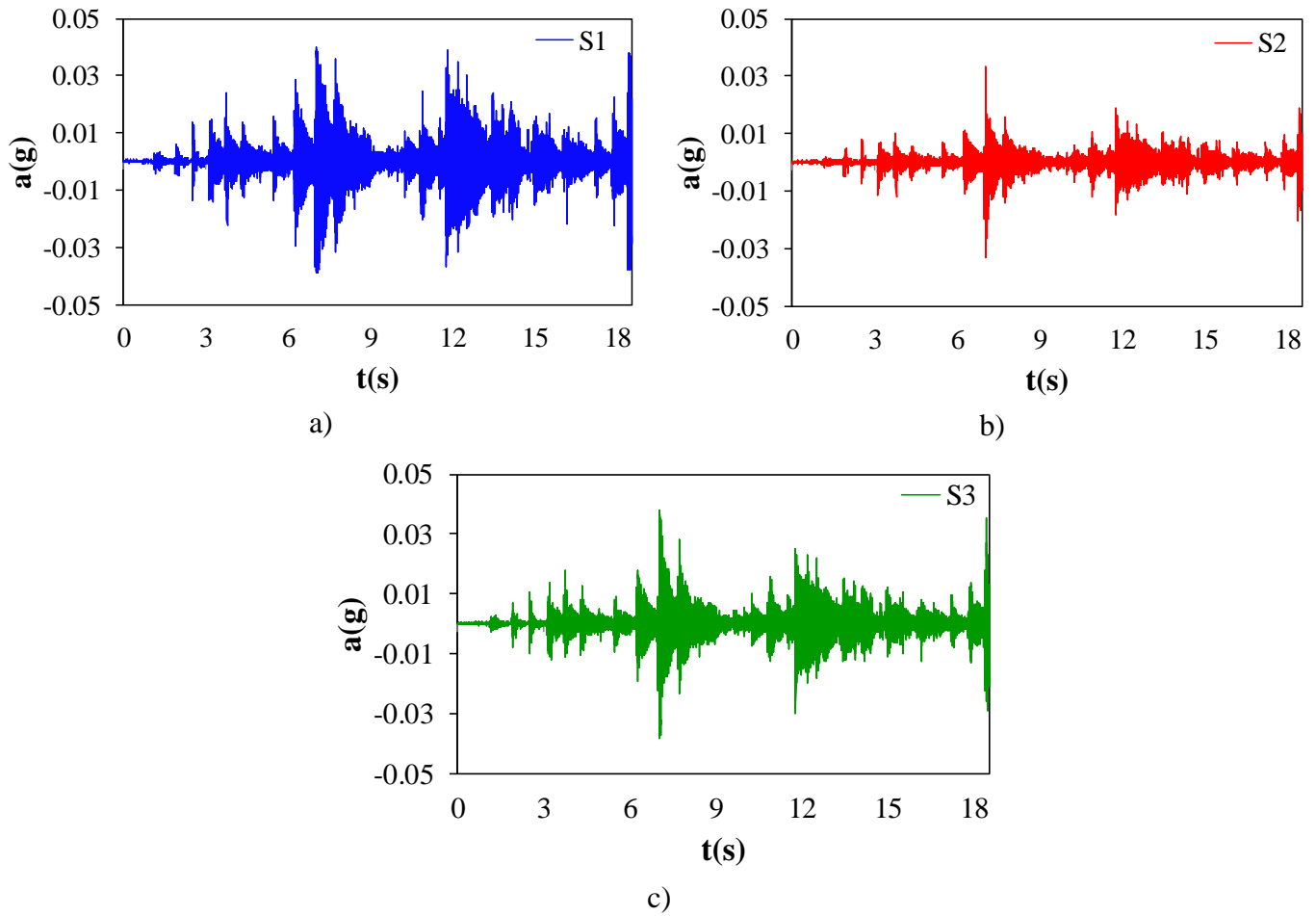


Figura 4.24. Registro de aceleraciones en PVF-LVB-AM-A1 ante el caminar de dos personas con sensores: a) S1, b) S2 y c) S3

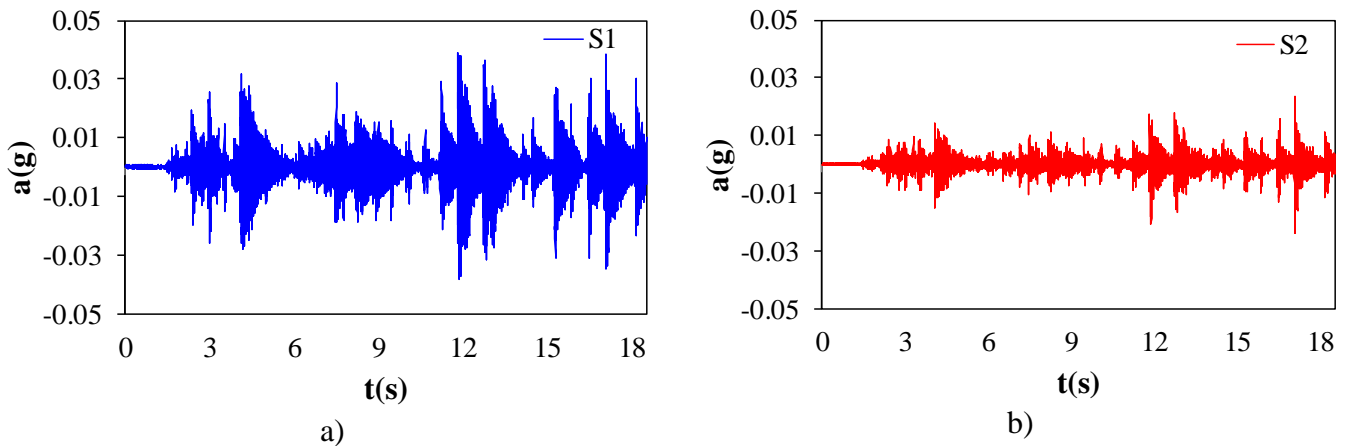
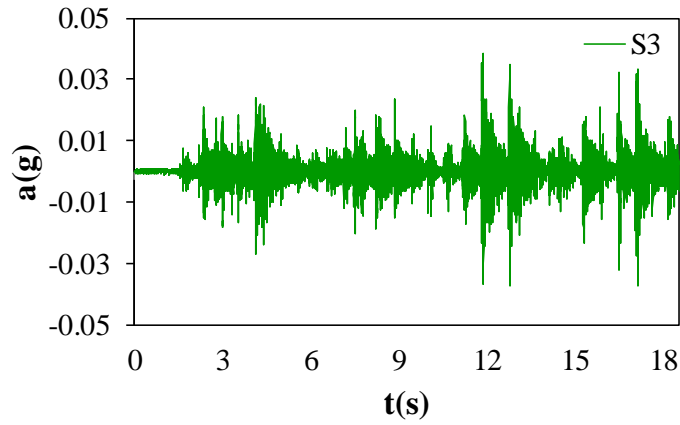
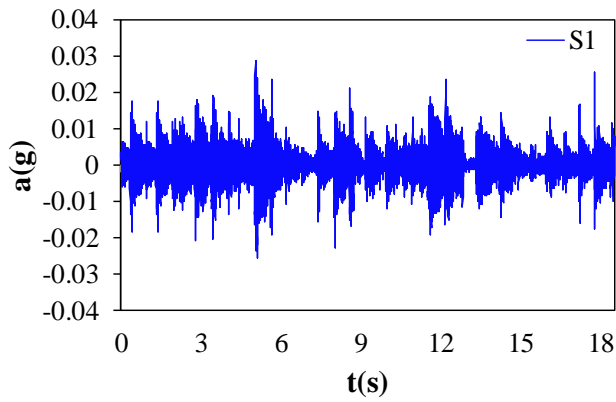


Figura 4.25. Registro de aceleraciones en PVF-LVB-AM-A2 ante el caminar de dos personas con sensores: a) S1, b) S2 y c) S3

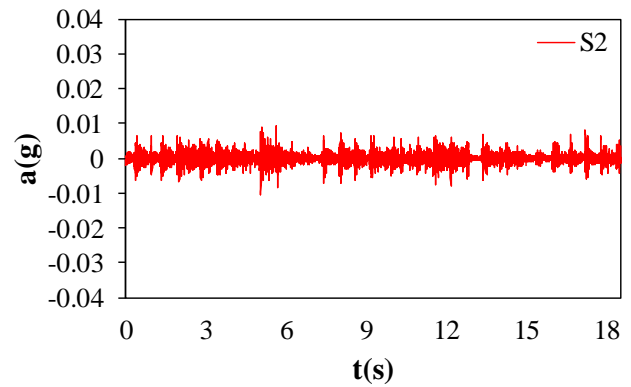


c)

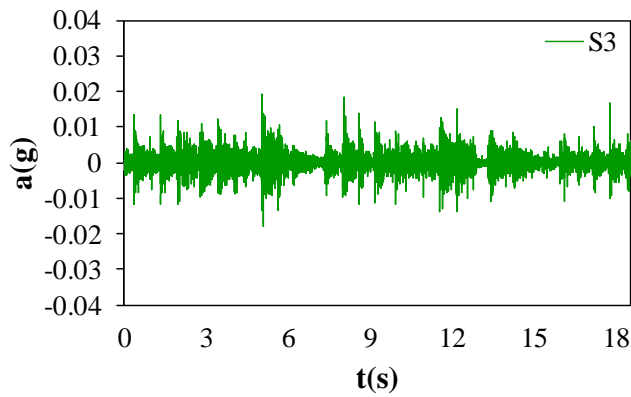
Figura 4.25. Continuación de Figuras



a)



b)



c)

Figura 4.26. Registro de aceleraciones en PVF-LVB-AM-A3 ante el caminar de dos personas con sensores: a) S1, b) S2 y c) S3.

Con el objetivo de tener valores generales de la aceleración en la losa de prueba, se obtuvieron los valores máximos de cada registro como se muestra en las Tablas 4.5 y 4.6, donde se observa que para el caso del caminar de una persona el valor máximo es de 0.035g

en el sensor S1; mientras que para el caminar de dos personas, la aceleración máxima es de 0.039g para el sensor S1. Con ello, se obtiene que el incremento de la magnitud de la aceleración máxima en el centro de la losa para esta prueba sea del 11 %. La variación en los valores máximos de aceleración se debe principalmente a dos factores: la posición de los sensores y la aleatoriedad en el movimiento de las cargas de excitación debida a las personas.

Tabla 4.5 Aceleraciones máximas ante el caminar de una persona en PVF-LVB-AM.

Aceleración máxima (g)			
No. Sensor	Arreglo		
	A1	A2	A3
S1	0.019	0.035	0.029
S2	0.013	0.018	0.009
S3	0.018	0.032	0.018

Tabla 4.6 Aceleraciones máximas ante al caminar de dos personas en PVF-LVB-AM.

Aceleración máxima (g)			
No. Sensor	Arreglo		
	A1	A2	A3
S1	0.039	0.038	0.028
S2	0.033	0.024	0.010
S3	0.038	0.038	0.019

4.4 Cálculo de la f_n en losas de vigueta y bovedilla

4.4.1 Método analítico

En esta sección se calcula la f_n con una aproximación analítica, la cual se compara con los valores experimentales, lo cual permite validar la aproximación analítica. Para ello se utilizan las especificaciones que propone el ANIVIP (2013) para el análisis y diseño ante vibración debida al caminar de personas sobre losas de vigueta y bovedilla. En los especímenes LVB-AV y LVB-AM se estudia una franja de losa que incluye una vigueta; la bovedilla de poliestireno no se toma en cuenta, como se muestra en las Figuras 4.27 y 4.28; las propiedades geométricas y mecánicas de los componentes de estas franjas se enlistan en la Tabla 4.7.

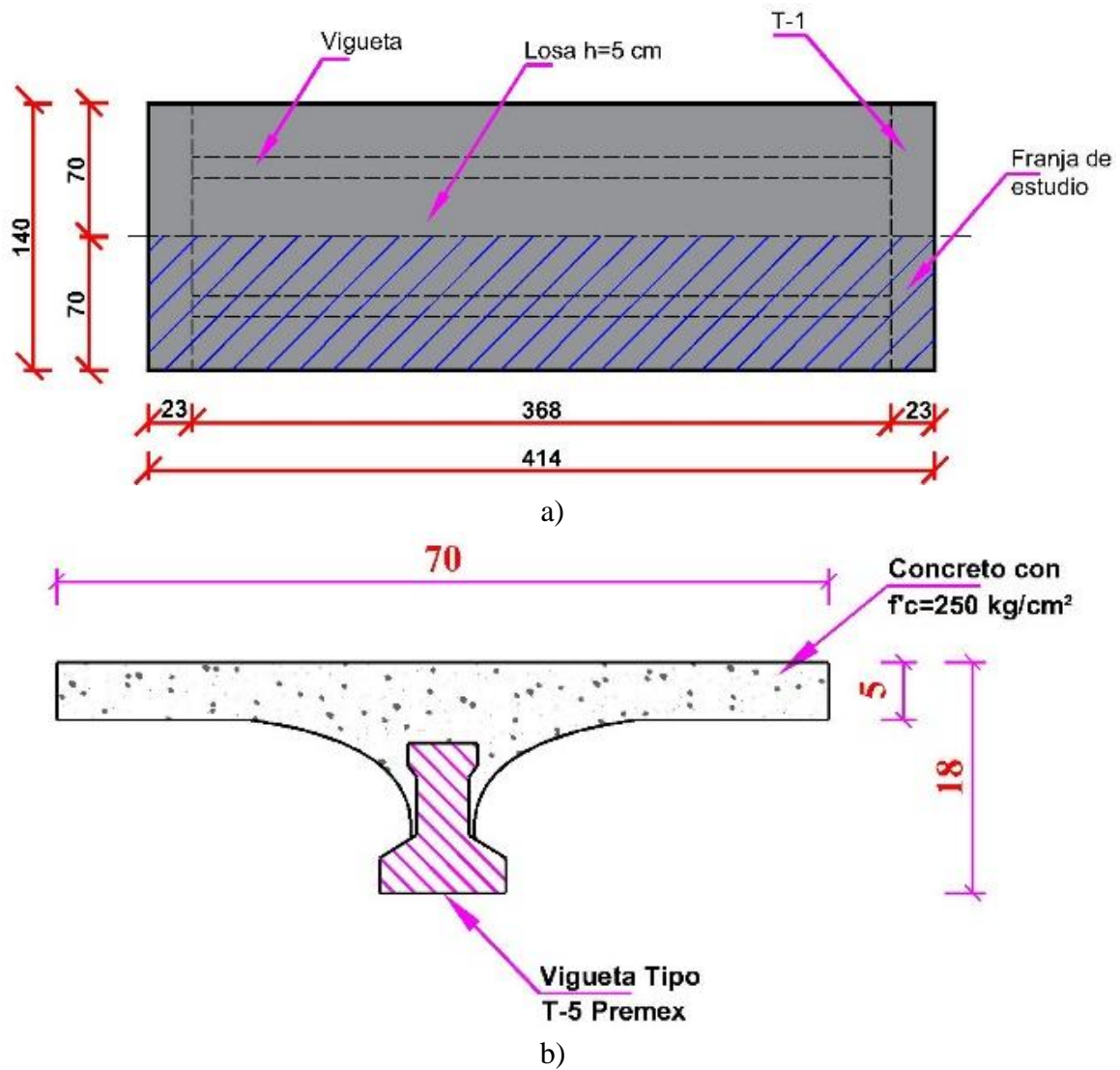
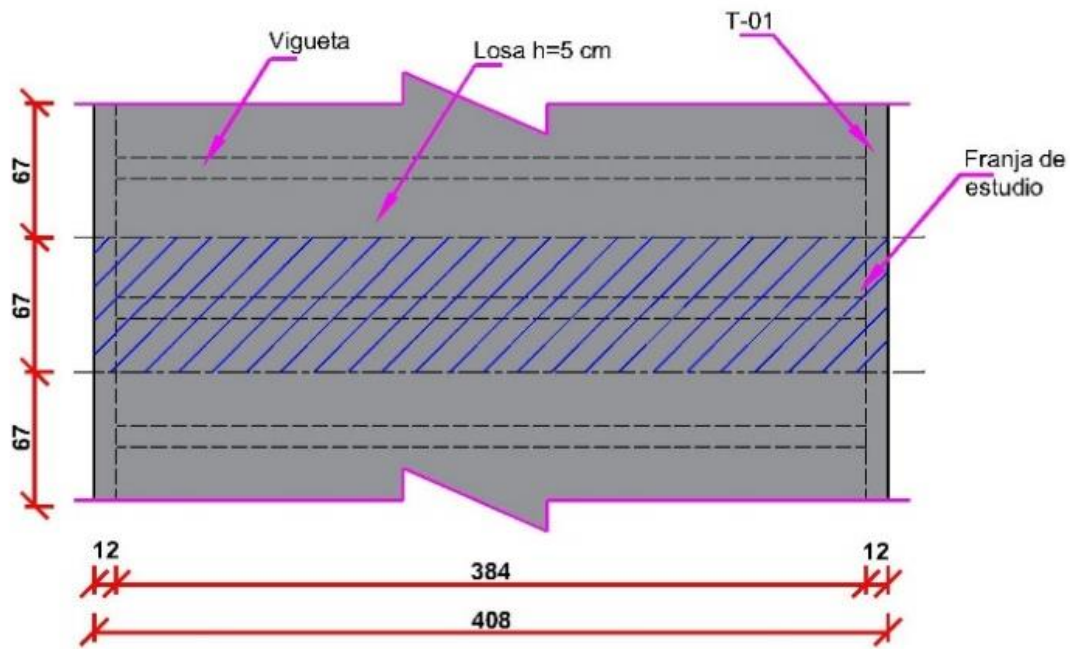


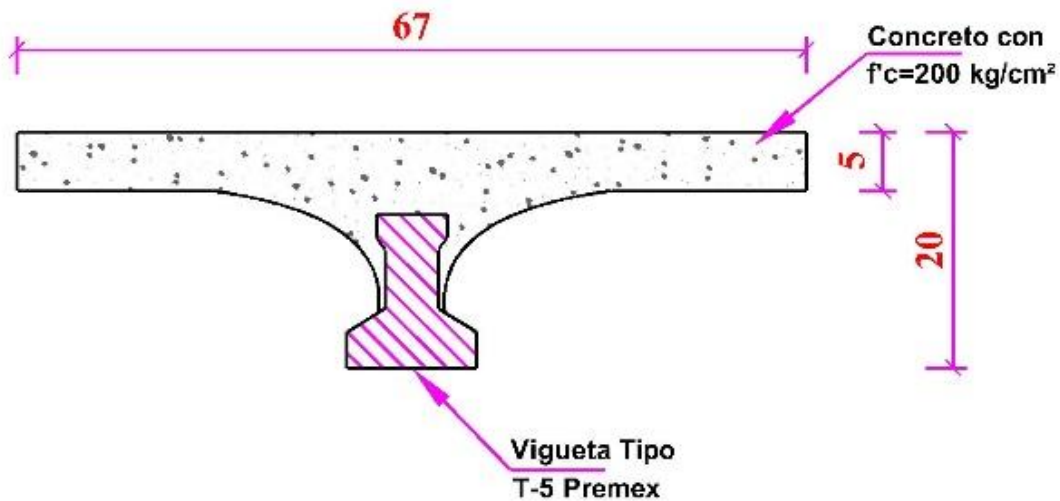
Figura 4.27. Sección viga-losa de LVB-AV: a) franja de estudio y b) sección de análisis.

Tabla 4.7 Características de sección viga-losa

Espécimen	L_{claro} (cm)	$Dist_{\text{ejes}}$ (cm)	W_{propio} (kg/m ²)	$f'c_{\text{vigueta}}$ (kg/cm ²)	$f'c_{\text{firme}}$ (kg/cm ²)	E_{vigueta} (kg/cm ²)	E_{firme} (kg/cm ²)	h_{total} (cm)	h_{firme} (cm)
LVB-AV	414	70	152.16	350	250	261916	126491	18	5
LVB-AM	396	67	194.41	350	200	261916	113137	20	5



a)



b)

Figura 4.28. Sección viga-losa de LVB-AM: a) franja de estudio y b) sección de análisis.

Debido a la diferencia entre propiedades mecánicas que tienen los materiales que constituyen la losa y viga, se utilizó el concepto de sección transformada en la viga, donde la relación de módulos de elasticidad es $n = E_{\text{vigueta}} / E_{\text{firme}}$. Este procedimiento tiene como fin aproximarse adecuadamente al comportamiento dinámico-experimental de los especímenes LVB-AV y LVB-AM, considerando la incertidumbre existente en el sistema losa-viga en las condiciones de mezclado y colocación del concreto. En el caso de la viga, sus

propiedades de resistencia a compresión se mantienen igual debido a que en este tipo de elementos estructurales su control de calidad es tal que sus coeficientes de variación son iguales o menores que el 5 o 6% aproximadamente (González y Robles, 2006). Por otra parte, en la capa de compresión, el concreto es colado *in situ* con una mezcla que comúnmente se diseña para una resistencia mayor a la nominal, denominada resistencia promedio f_p (González y Robles, 2006 con base en Comité ACI 214, 1997), la cual se calcula como:

$$f_p = \frac{f'_c}{1 - tV} \quad (4.1)$$

donde f'_c es la resistencia nominal especificada, t es una constante que depende del porcentaje de datos que pueden ser menores que el valor de resistencia especificado. Además, depende del número de muestras necesario para establecer V , el cual es un coeficiente de variación según el grado de control de calidad del concreto. Teniendo que la resistencia a compresión del concreto en la capa de compresión es $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$; si se tiene una probabilidad de 1 entre 10 de que un espécimen tenga una resistencia menor a la especificada teniendo más de 30 datos, $t = 1.28$ y además, un control de calidad definido como alto, entonces el coeficiente de variación es $V = 0.12$. Sustituyendo en la ec. (4.1) se tiene que $f_p = 295 \text{ kg/cm}^2$, este valor se utilizó como la resistencia a compresión del concreto en este análisis. Con los módulos de elasticidad de la vigueta y el firme, el valor de n es 1.91, en consecuencia la sección original de vigueta aumentará 91%, manteniendo su centro de gravedad como se observa en la Figura 4.29.

En el caso de LVB-AM se consideró el mismo procedimiento que en la LVB-AV, pues se tomaron en cuenta las condiciones de mezclado y colocado del concreto en campo. Por tal motivo, se utilizó la ec. (4.1), donde la resistencia a compresión del concreto en la capa de compresión es $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$ y $t = 1.28$; considerando un control de calidad definido como muy bueno, el coeficiente de variación es $V = 0.15$. Sustituyendo en la ec. (4.1) se tiene que $f_p = 247.52 \text{ kg/cm}^2$. Por ello, en este análisis se propuso una resistencia a compresión del concreto de 250 kg/cm^2 , con lo cual se obtiene valor de la relación de módulos de elasticidad $n = 2.07$. Con este valor, se tiene que el área de la vigueta aumentará 107 % manteniendo su centro de gravedad como se observa en la Figura 4.29.

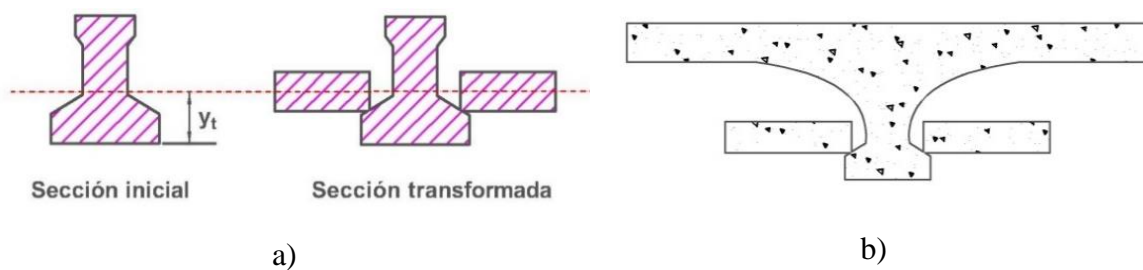


Figura 4.29. Sección viga-losa: a) sección vigueta y b) sección transformada

El cálculo analítico de la frecuencia natural se realiza con la expresión propuesta en las especificaciones dadas por ANIVIP (2013) con base en AISC (1997): $f = 0.18\sqrt{g/\Delta}$, ec. (1.13), donde la deflexión Δ se obtiene con la ec. (4.2), analizando la franja de losa como una viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida. El momento de inercia I corresponde al de la sección transformada, E_{cc} es el módulo de elasticidad de la sección transformada; mientras que el peso w corresponde al de la sección real, obteniendo así frecuencias naturales de 12.28 y 14.09 Hz para LVB-AV y LVB-AM, respectivamente, tal como se muestra en la Tabla 4.8.

$$\Delta = \frac{5wL^4}{384E_{cc}I} \quad (4.2)$$

Tabla 4.8 Frecuencia natural de sección viga-losa

Frecuencia natural		
Variable	Magnitud	
	LVB-AV	LVB-AM
n=	1.91	2.07
L(cm)=	414	396
I(cm⁴)=	14057	19805
w(kg/m)=	106.51	130.25
Δ(cm)=	0.21	0.16
f(Hz)=	12.28	14.09

Las especificaciones establecidas por ANIVIP (2013), las cuales tienen como base los lineamientos de análisis y diseño propuestos por el reglamento AISC (1997), recomiendan que la frecuencia natural de un sistema de piso debe tener una magnitud mínima necesaria para evitar vibraciones excesivas debidas al caminar de personas, esto se realiza a través de una expresión empírica como se muestra en la ec. (4.3):

$$f_n \geq 2.86Ln \left(\frac{K}{\beta W} \right) \quad (4.3)$$

donde K y β son una constante y el factor de amortiguamiento, respectivamente; W es el peso efectivo del sistema losa-viga, donde para obtenerlo se recomienda que el ancho B sea igual a la longitud del claro L . Los valores K y β dependen principalmente del uso de la estructura como se muestra en la Tabla 4.9.

Tabla 4.9 Valores para el cálculo de la frecuencia natural mínima (adaptado de ANIVIP, 2013)

Tipo de edificación	K		β
	Kips	kN	
Oficinas, residencias, iglesias	13	58	0.02 ¹ 0.03 ² 0.05 ³
Centros comerciales	4.5	20	0.02
Pasarelas al aire libre	1.8	8	0.01
1 Para pisos con pocos componentes no estructurales como áreas de trabajo abiertas e iglesias. 2 Para pisos con componentes no estructurales, particiones, cubículos, muebles. 3 Para pisos con particiones de altura completa.			

En el caso de la LVB-AV se consideró su uso como pasarela al aire libre; mientras que para la LVB-AM se propuso su uso como residencial. Con base en esto, se tienen los valores que muestran en la Tabla 4.10. Por lo tanto, para las LVB-AV y LVB-AM se tiene que $12.28 > 9.85$ Hz y $14.09 > 11.92$ Hz, respectivamente, como se muestra en la Tabla 4.10. Por consiguiente, los sistemas de piso no experimentarán vibraciones excesivas debidas al caminar de personas ya que se cumple con el requisito de frecuencia mínima.

Tabla 4.10 Frecuencia natural mínima de secciones viga-losa

Frecuencia natural mínima		
Variable	Magnitud	
	LVB-AV	LVB-AM
K(kg)=	815.50	5914
β=	0.01	0.03
w(kg/m²)=	152.16	194.41
B(m)=	4.14	3.96
L(m)=	4.14	3.96
W(kg)=	2608	3049
f_n(Hz)=	9.85	11.92

Por otra parte, el cálculo de la aceleración se realizó con base en la expresión utilizada por la ANIVIP (2013), $a_p/g = P_o e^{(-0.35f_n)} / \beta W$, ec. (1.33), donde los valores P_o , β están definidos en la Tabla 1.8. Por lo tanto, la pseudo-aceleración para las LVB-AV y LVB-AM es 2.18 y 0.24%, respectivamente, como se muestra en la Tabla 4.11, cumpliendo así con la especificación.

Tabla 4.11 Cálculo de la pseudo-aceleración máxima en losa de prueba

Aceleración máxima (%g)		
Variable	Magnitud	
	LVB-AV	LVB-AM
Po(kg)=	41.8	29.6
f_n (Hz)=	12.28	14.09
β =	0.01	0.03
W(kg)=	2608	3049
a/g (%)=	2.18	0.24

4.4.2 Numérico

En el caso numérico, los especímenes de prueba fueron modelados mediante el método de elementos finitos, donde se utilizaron elementos viga y lámina; los modelos fueron realizados con el programa SAP2000 (CSI-09) como se muestra en las Figuras 4.30 y 4.31. La frecuencia natural fundamental obtenida para la LVB-AV fue de 15.19 Hz con una diferencia del 4.5% con respecto a la medición experimental; en el modo 2 la frecuencia natural fue de 32.22 Hz con una diferencia del 0.6% con respecto a la medición experimental. Por su parte, la LVB-AM se tiene una frecuencia natural fundamental de 24.09 Hz, con una diferencia del 3.2% con la medición experimental. En el caso del modo 2, la frecuencia natural tiene un valor de 40 Hz con una diferencia del 0.3% con respecto a la medición experimental, cuyo valor es 39.90 Hz y se define en la comparación de la Figura 4.16 para los sensores 2 y 3.

Para el cálculo numérico de la respuesta máxima, en términos de la aceleración, se realizó un análisis paso a paso donde se aplicaron dos funciones de carga sobre las losas como fuente de excitación, las cuales representan el: caminar de una persona y una actividad rítmica que representa ejercicios aeróbicos. Ambos tipos de carga se aplicaron de manera uniformemente distribuida sobre las áreas totales de las losas como se muestra en la Figura 4.32.

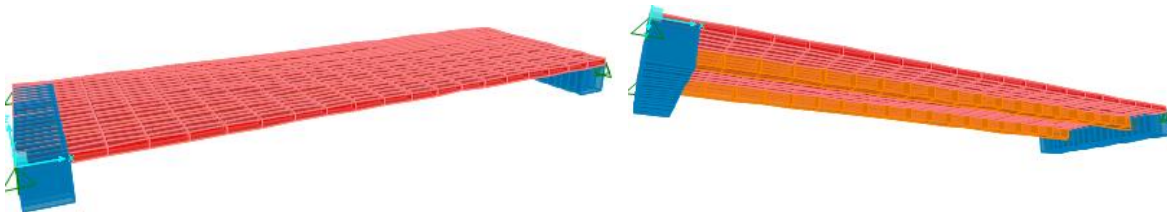


Figura 4.30. Modelo numérico de losa de vigueta y bovedilla apoyada sobre vigas

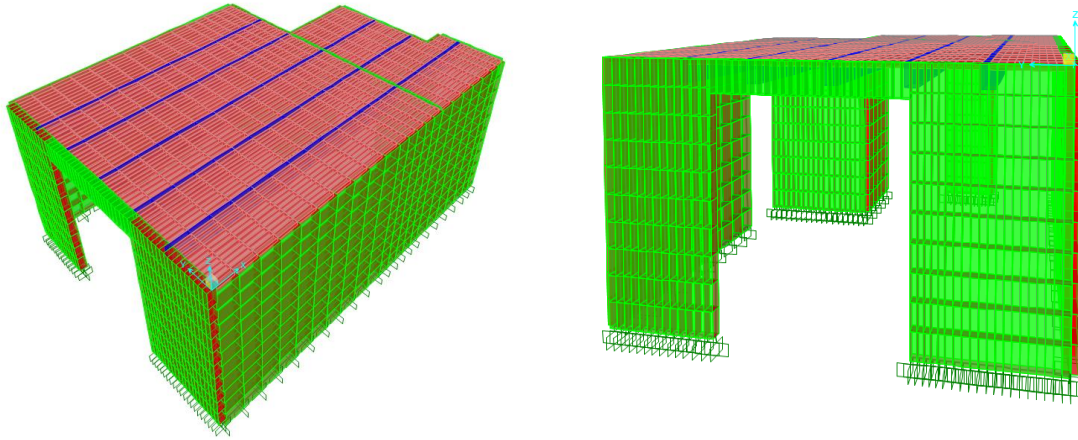


Figura 4.31. Modelo numérico de losa de vigueta y bovedilla apoyada sobre muros

La función de carga que representa estas actividades, propuesta por Bachmann *et al.* (1995), es la siguiente:

$$P(t) = w_p + \sum_{i=1}^n w_p \alpha_i \sin(2\pi i f_p t - \phi_i) \quad (4.4)$$

donde $P(t)$ es la carga dinámica en función del tiempo, w_p es el peso de una persona igual a 90 kg, α_i es el factor de carga dinámica o coeficiente de Fourier del i -ésimo armónico, f_p es la frecuencia de la actividad (Hz), i es el número del i -ésimo armónico, n es el número total de contribuciones armónicas, t es el tiempo, y ϕ_i es el ángulo de desfase del i -ésimo armónico con respecto al primer armónico. La densidad de personas se consideró de 1 personas/m² para el caso del caminar de una persona y de 0.25 personas/m² para actividad rítmica debida a ejercicios aeróbicos. Teniendo en cuenta los valores de la Tabla 4.12 correspondientes a lo establecido por Bachmann *et al.* (1995), se obtienen las funciones de carga que se muestran en la Figura 4.33.

Tabla 4.12 Coeficientes de cargas dinámicas (Bachmann *et al.*, 1995)

Concepto		Caminar de personas	Aeróbicos
Frecuencia de paso	f_p (Hz)	2.0	3.00
Coeficientes de Fourier	α_1	0.40	1.70
	α_2	0.10	1.10
	α_3	0.10	0.50
Ángulo de fase	ϕ_1	0	0
	ϕ_2	1.57	1.26
	ϕ_3	1.57	1.26

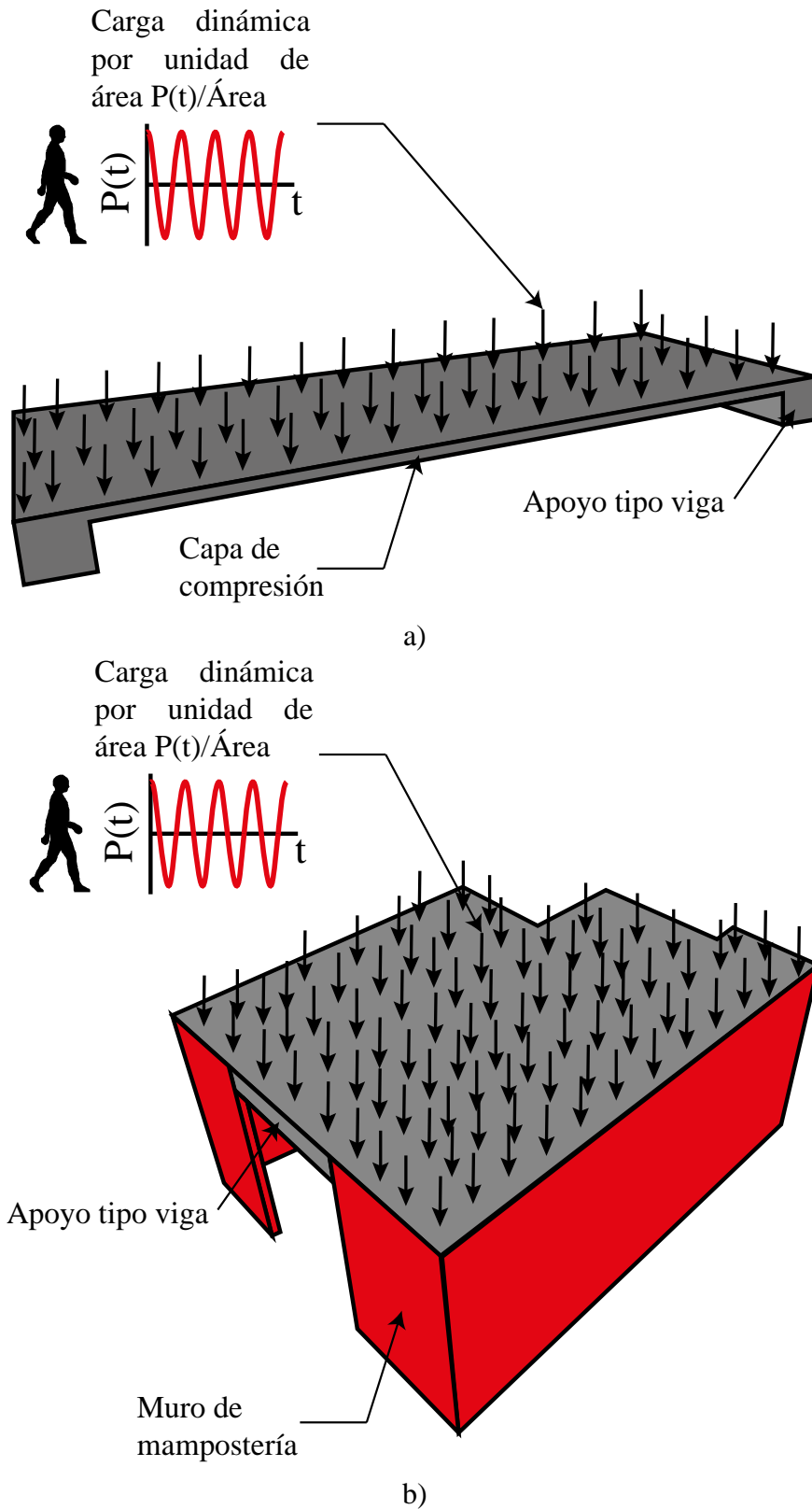


Figura 4.32. Aplicación de funciones de carga en modelos numéricos de losa de viga y bovedilla: a) LVB-AV y b) LVB-AM

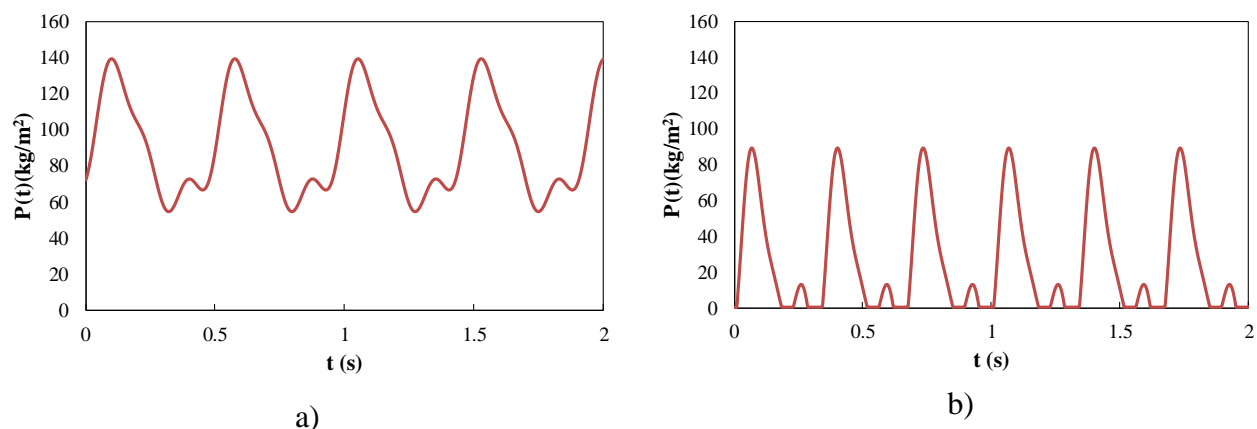


Figura 4.33. Funciones de carga para: a) caminar de una persona y b) actividad rítmica de aeróbicos

Al comparar los resultados analíticos como experimentales, se observa que la frecuencia natural entre ambas es similar; sin embargo, en la aceleración como una fracción de g existe una diferencia notable. En el caso de la LVB-AV, para la f_n , la solución analítica difiere en 23% aproximadamente; mientras que en el caso de la aceleración existe una diferencia del 72%, como se muestra en la Tabla 4.13. Es importante mencionar que, para este caso en particular, la ec. (1.33) para una sola franja proporciona valores adecuados de la frecuencia natural de una losa compuesta de varias viguetas, puesto que estos sistemas de piso están apoyados en una sola dirección. Para la LVB-AM, la f_n , la solución analítica difiere en 43% aproximadamente; mientras que en el caso de la fracción a/g existe una diferencia del 94%, como se muestra en la Tabla 4.14. Esto se debe a que, en la solución analítica, la masa que participa en el movimiento corresponde a la de una viga, siendo que los especímenes involucran la masa de la losa continua.

En el caso numérico se tiene que para los modos 1 y 2, el modelado de vigueta y bovedilla con elementos lámina y viga son adecuados para obtener la frecuencia natural fundamental. Por otra parte, el utilizar cargas dinámicas distribuidas para evaluar la respuesta de un sistema de piso ante el caminar de personas es poco adecuado, aunque se tiene una mejor aproximación que la obtenida con la solución analítica. Por consiguiente, es necesario revisar otras formas de modelar cargas que representen adecuadamente este efecto.

En relación con la respuesta dinámica a/g , para las losas LVB-AV y LVB-AM se tiene una diferencia considerable de la solución analítica con respecto a las soluciones numérica y experimental, tal como se muestra en las Tablas 4.13 y 4.14. Esto se debe a que la ec. (1.33) aplica para análisis de vigas con apoyo en sus extremos. Lo cual es poco representativo de un sistema de piso compuesto de múltiples viguetas donde cada una de ellas contribuyen en el movimiento total del sistema. Por otra parte, teniendo como referencia el resultado experimental, al evaluar los niveles de susceptibilidad ante vibraciones excesivas con el nomograma de perceptibilidad de vibración del ANIVIP (2013), se observa que en la LVB-

AV se está por encima del permitido para el uso de pasillos, como se muestra en la Figura 4.34a. Esto muestra que el sistema es susceptible a vibraciones excesivas que son incómodas para las personas. En cuanto a la LVB-AM, se tiene que se exceden los límites permitidos para el uso de residencia o vivienda como se muestra en la Figura 4.34b. Por lo tanto, el análisis de sistemas de piso de vigueta y bovedilla requieren de un análisis detallado para el caso de vibración ante el caminar de personas, de tal manera que el diseñador estructural evite la posibilidad de exceder ciertos umbrales de incomodidad que afecten a las personas.

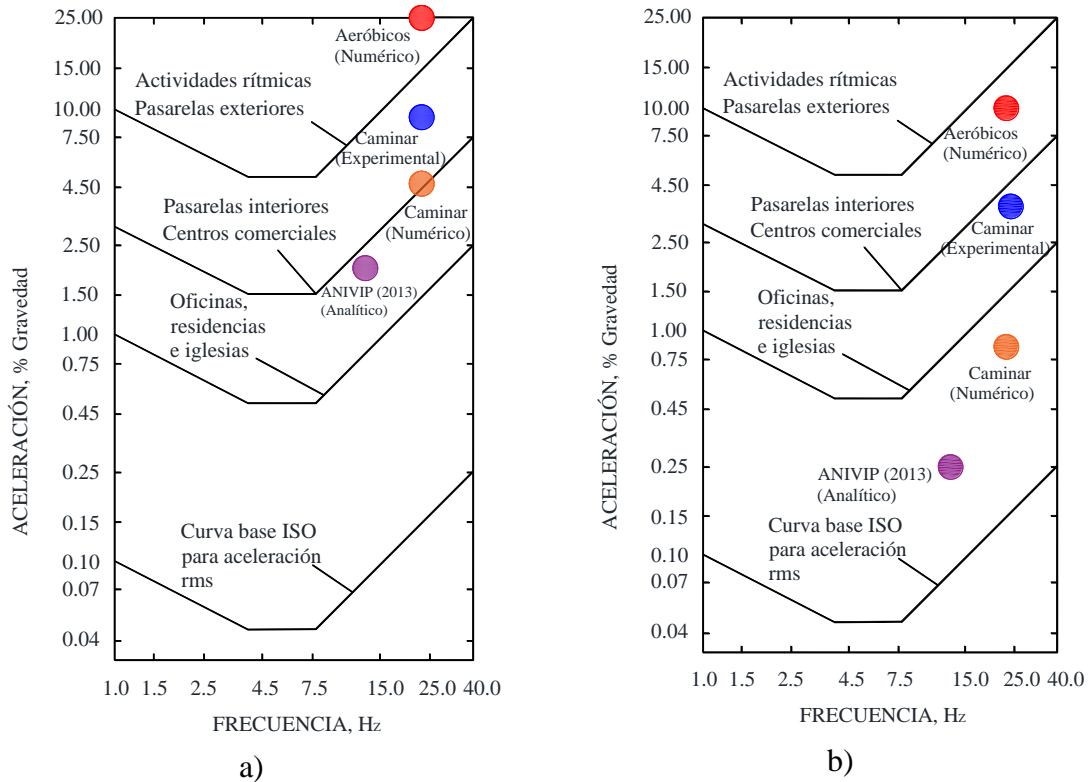


Figura 4.34. Comparativa entre soluciones en la evaluación ante vibración de losas de prueba utilizando los nomogramas de perceptibilidad proporcionados por AISC 1997 y ANIVIP 2013: a) LVB-AV y b) LVB-AM

Tabla 4.13 Comparación entre soluciones en LVB-AV.

Solución	Frecuencia natural (Hz)	a_{max} (%g)
Analítico	12.28	2.18
Experimental-Dos personas	15.90	7.7
Numérico-Paso de personas	15.19	4.2
Numérico-Aeróbicos	15.19	26.0

Tabla 4.14 Comparación entre soluciones en LVB-AM

Solución	Frecuencia natural (Hz)	a_{max} (%g)
Analítica	14.09	0.24
Experimental	24.89	3.90
Caminar de persona (Numérico)	24.09	0.82
Aeróbicos (Numérico)	24.09	11

4.5 Pruebas de vibración en losa de concreto reforzado

Como es evidente, las losas de concreto reforzado son un sistema estructural de uso común en edificación. En la literatura no se encontraron estudios detallados sobre este sistema de piso ante vibración debida a actividades humanas, la mayoría de los estudios corresponden a losacero. Contreras (1977) y las NTCC-17 (2017) proporcionan expresiones analíticas para el análisis ante vibración de losas de concreto reforzado. Por lo anterior se realizó un estudio experimental de una losa maciza de concreto reforzado, la cual se somete a vibración ambiental y vibración forzada; en la condición vibración forzada las cargas dinámicas actuantes son: caminar de una persona y actividades rítmicas de un conjunto de personas. Al igual que en la sección 4.3 se utilizan sensores de aceleración para medir la respuesta dinámica, y así evaluar su nivel de susceptibilidad. En la evaluación de las aceleraciones se utilizan como referencia las recomendaciones del AISC (1997) y NTCC-17 (2017).

4.5.1 Descripción de prueba

Características y propiedades de losa

La losa maciza de concreto reforzada está situada en el nivel 1 del edificio P4 de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, la cual está destinada a uso de oficinas. La losa está apoyada sobre traveses, la cual se ubica en la zona sombreada de la Figura 4.35. La losa es rectangular de concreto reforzado clase 1, la cual tiene 5.60 m x 6.20 m de claros, respectivamente, con espesor de 13 cm. Este tablero tiene una zona que se utiliza como cubículo de alumnos y otra zona que se utiliza como pasillo, estas zonas están divididas por un muro de material ligero. La resistencia a compresión del concreto se obtuvo con esclerómetro, con el cual se realizaron lecturas en la viga del eje G, entre ejes 2 y 3, así como en la columna, localizada en la intersección del eje G y el eje 3. De la prueba con esclerómetro se obtuvo un valor medio de la resistencia a compresión del concreto de $f'_c=460 \text{ kg/cm}^2$, al cual se le consideró un peso volumétrico de 2400 kg/m^3 . Por otra parte, al acero de refuerzo se le consideró un esfuerzo de fluencia de $f_y=4200 \text{ kg/cm}^2$. Las traveses principales tienen una base de 25cm y una altura de 60 cm, denominadas como T-01, las columnas tienen base de 40 cm y altura de 60 cm. El módulo de elasticidad de la losa maciza de concreto reforzado se calculó con la ec. (4.5), la cual es obtenida de las NTCC-17 (2017) y aplica a concretos de alta resistencia.

$$E_{cc} = 8500\sqrt{f'_c} + 110,000 \quad (4.5)$$

teniendo un valor $E_{cc}=292304 \text{ kg/cm}^2$.

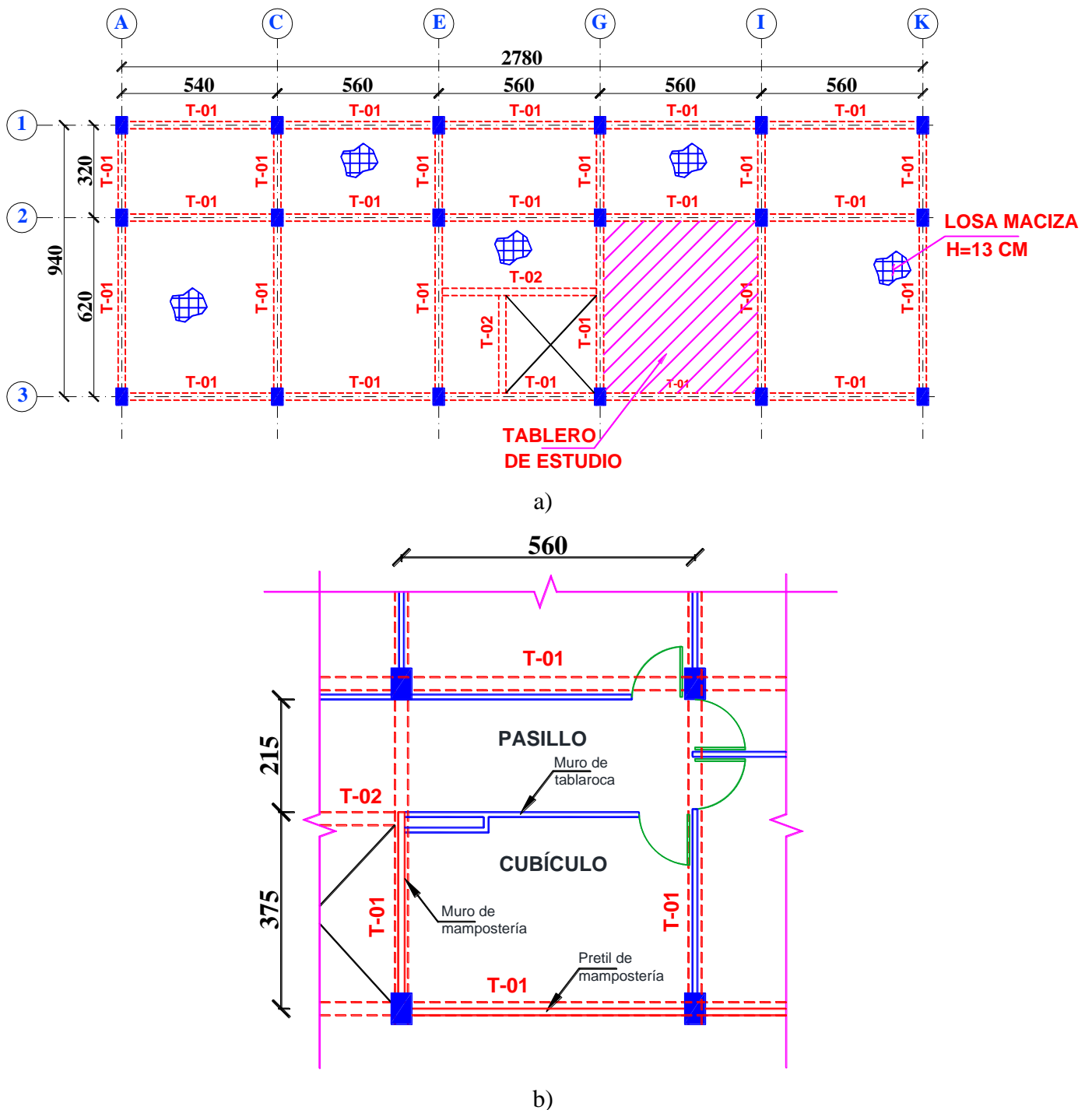


Figura 4.35. Geometría y ubicación de tablero estudiado: a) planta de edificio y b) uso del tablero

4.5.2 Arreglo de sensores

Dado que se desean monitorear las zonas de amplitud máxima en la losa utilizando sensores de aceleración, se consideró la forma modal que se muestra en la Figura 4.36 para su ubicación en planta. El primer sensor (S1) se ubica en el centro de la losa, la cual corresponde

al modo de vibrar 1; los sensores S2 y S3, se colocaron en el centro del claro de dos de sus vigas principales con el objetivo de monitorear sus magnitudes máximas de aceleración. Por consiguiente, los sensores S1 y S2 se colocaron en la zona utilizada como cubículo y el sensor S3 en la zona del pasillo, como se muestra en las Figuras 4.37 y 4.38.

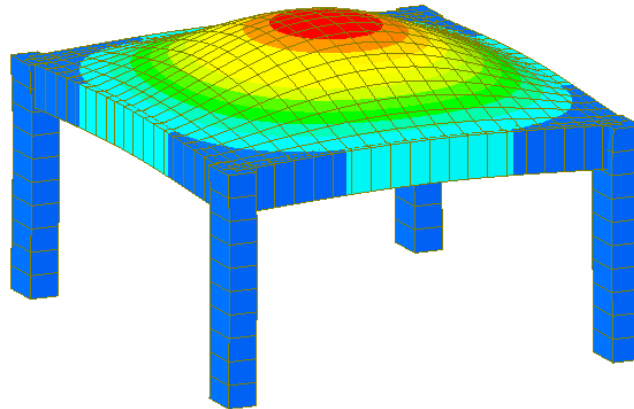


Figura 4.36. Modo de vibrar fundamental en losa de concreto reforzado

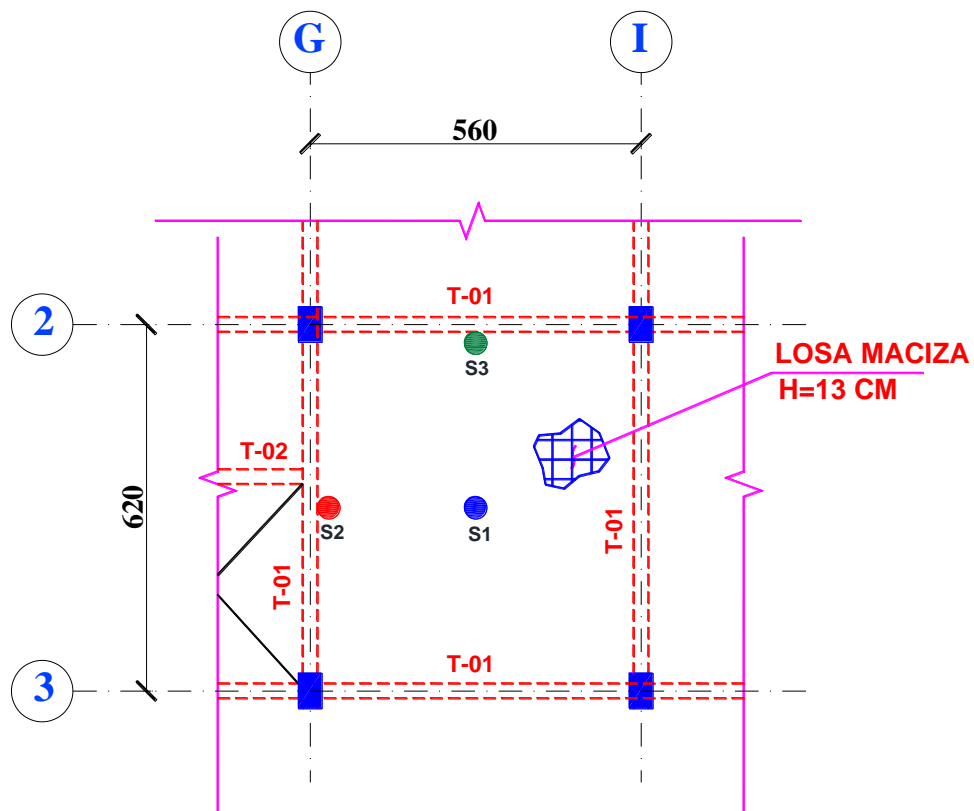


Figura 4.37. Losa con arreglo de sensores



a) b)
Figura 4.38. Sensores en la losa de prueba: a) S1 y S2 y b) S3

4.5.3 Prueba de vibración ambiental

El registro de la aceleración ante vibración ambiental se realizó con una frecuencia de muestreo de 256 Hz, en un lapso de tiempo de 300 s. Es importante mencionar que este valor es menor que el utilizado en el experimento de las losas de vigueta y bovedilla; sin embargo, éste es aún un valor alto de la frecuencia de muestreo. Estos cambios se deben principalmente a la sensibilidad que se adquirió durante el desarrollo de los experimentos, donde se observó que no hay necesidad de muestrear a frecuencias tan altas para obtener una señal adecuada para su análisis. En esta prueba se obtuvieron los registros ante vibraciones ocasionadas por factores externos ambientales, donde la banda de interés es aquella donde se define la frecuencia natural correspondiente al modo de vibrar 1. Cabe señalar que se observan distintas amplitudes de energía que definen distintas frecuencias de vibración; en el caso de este trabajo sólo interesa identificar la frecuencia natural fundamental de la losa. El registro de cada sensor, así como sus espectros de potencia calculados se muestran en la Figura 4.39, donde se observa que en los sensores S1 y S2 se tiene un valor de frecuencia completamente definido de 14.06 Hz; sin embargo, en el sensor S3, se tiene no sólo esta frecuencia, sino también otros valores de 6 y 9 Hz, los cuales se atribuyen a otros modos de vibrar en el edificio. Es importante mencionar que en esta prueba se estudian las frecuencias correspondientes a formas modales perpendiculares a la losa. Los espectros de potencia de los tres sensores se sobreponen como se muestra en la Figura 4.40, donde se observa que los tres sensores registran una acumulación de energía en la frecuencia de 14.06 Hz, pero el sensor S1 registra una amplitud de energía mayor que los otros sensores, lo cual muestra que existe un modo de vibrar bien definido en la posición de amplitud máxima de la losa con un valor de $f_n=14.06$ Hz.

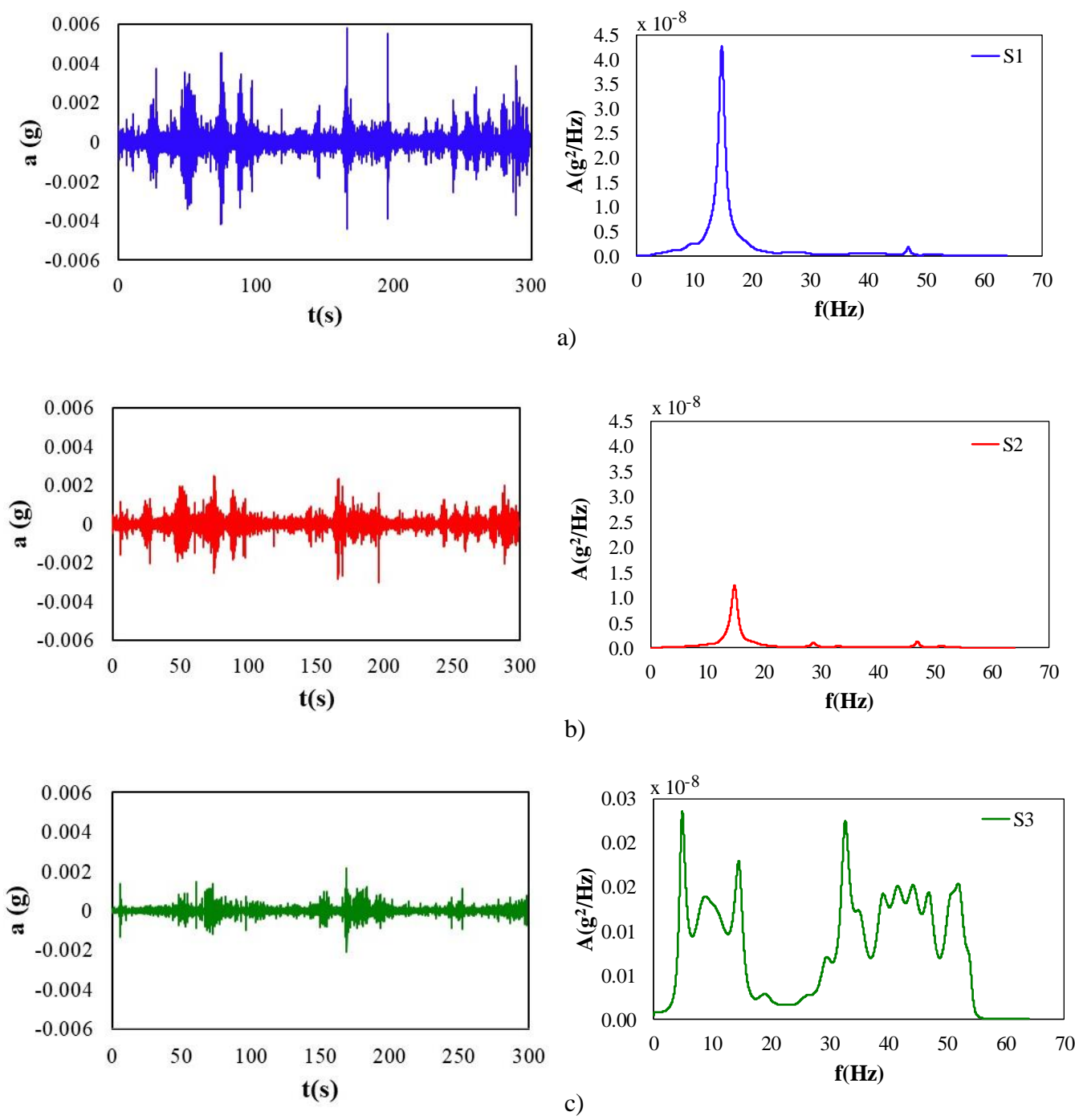


Figura 4.39. Registro y espectro de potencia en el arreglo A1 de los sensores: a) S1, b) S2 y c) S3

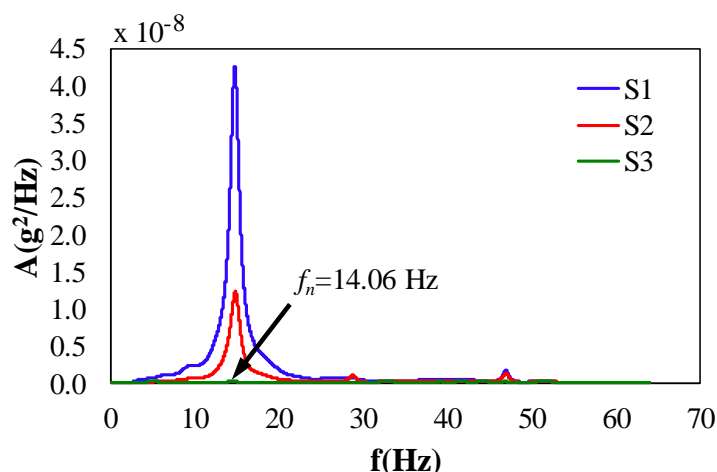


Figura 4.40. Comparación entre espectros de potencia de prueba de vibración ambiental

4.5.4 Pruebas de vibración forzada

Las pruebas de vibración forzada en la losa maciza de concreto se realizaron con distintos tipos de actividades humanas: el caminar de una persona, el correr de una persona, el salto de un grupo de personas y el movimiento de un conjunto de personas. Estas cargas representan las condiciones principales a las que se somete el sistema de piso en su uso diario, es importante mencionar que algunas de ellas generan vibraciones excesivas que en ocasiones son incómodas para sus ocupantes. En cada experimento se utilizó un determinado número de personas, cuyos pesos se enlistan en Tabla 4.15.

Tabla 4.15 Pesos de personas para pruebas experimentales ante actividades humanas

Persona	W(kg)
1	74
2	66
3	71
4	79
5	61
6	97
7	77
8	72
9	64
10	60
11	78

Carga debida al caminar de una persona

En esta prueba, la losa se sometió a vibración forzada ante el caminar de la persona número 6, cuyo peso es de 97 kg y frecuencia de paso promedio de 2.1 Hz con base en los datos de la Tabla 4.16. El registro de las aceleraciones de cada sensor se realizó con base en la

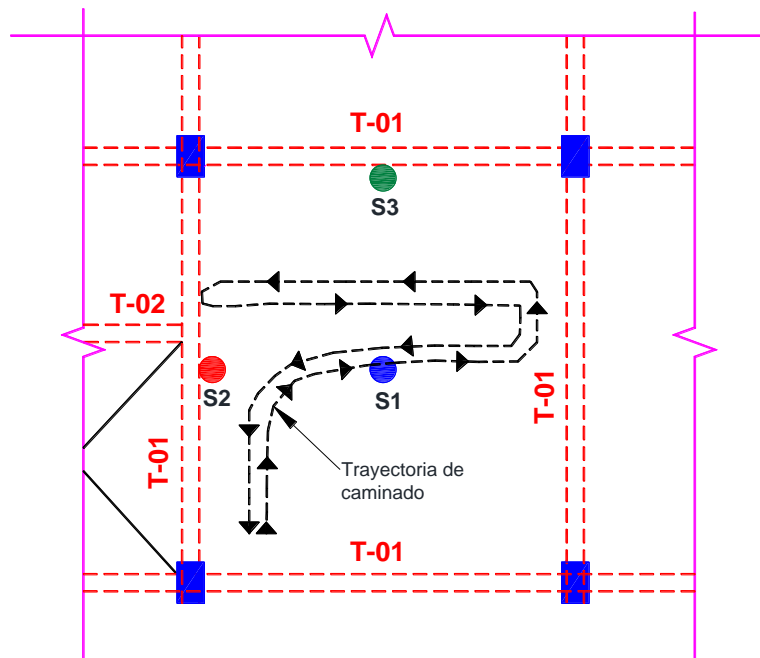
trayectoria que se muestra en la Figura 4.41. La respuesta dinámica se obtuvo para los 3 sensores, donde las respuestas máximas se presentan en el centro del claro. En el caso de las traveses se observan valores bajos de aceleración, lo cual muestra que la masa y rigidez de estos elementos contribuye de manera mínima en la respuesta máxima de la losa, como se muestra en la Figura 4.42.

Tabla 4.16 Datos para la obtención de la frecuencia de paso en experimento de la sección 4.5

No. de pasos	Tiempo (s)	Frecuencia de paso (Hz)
4	2.09	1.91
	1.82	2.20
	2.01	1.99
	2.05	1.95
	2.18	1.83
	1.95	2.05
	2.09	1.91
	2.05	1.95



a)



b)

Figura 4.41. Prueba de vibración debida al caminar de una persona: a) prueba y b) trayectoria de caminado

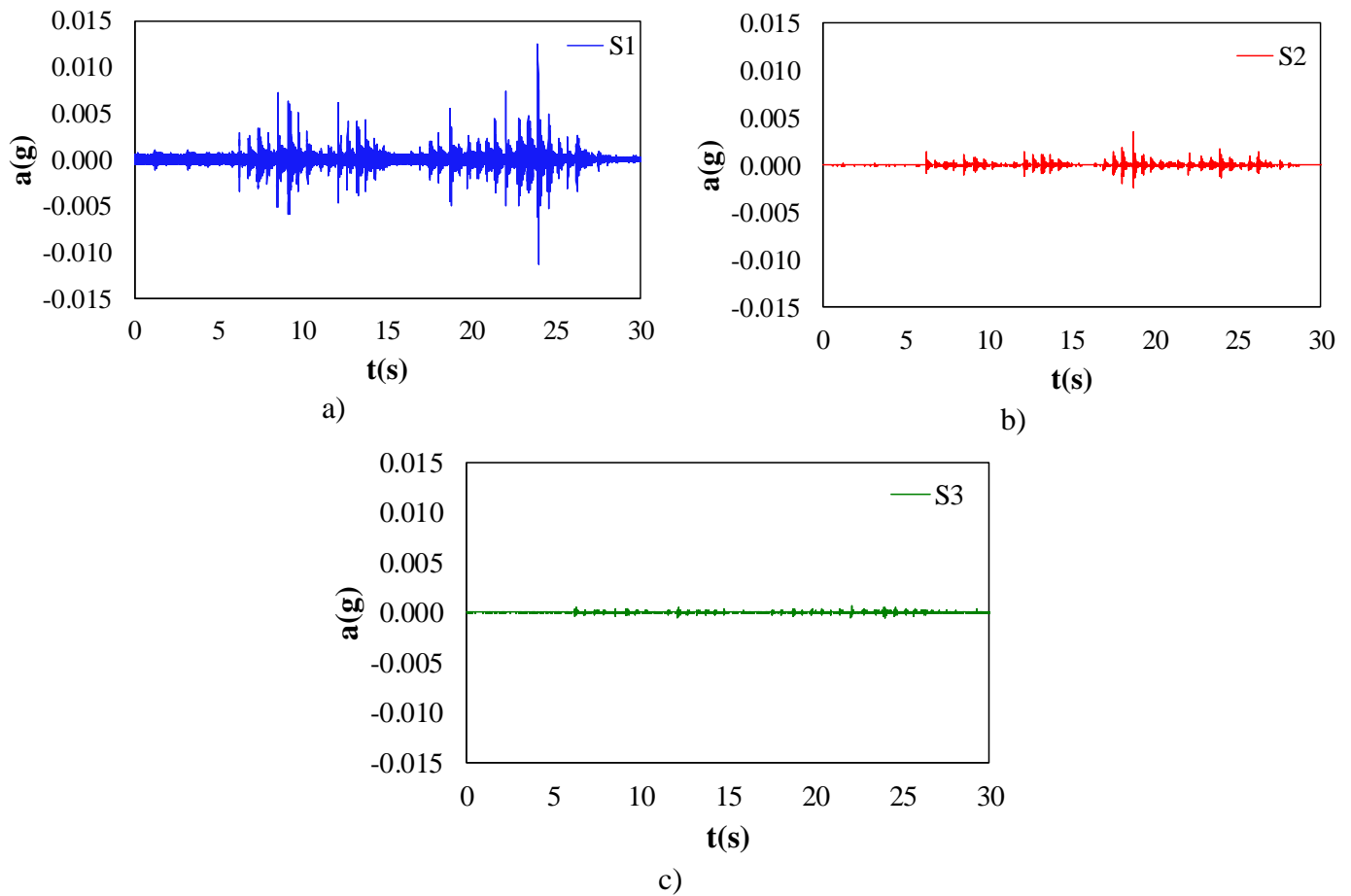
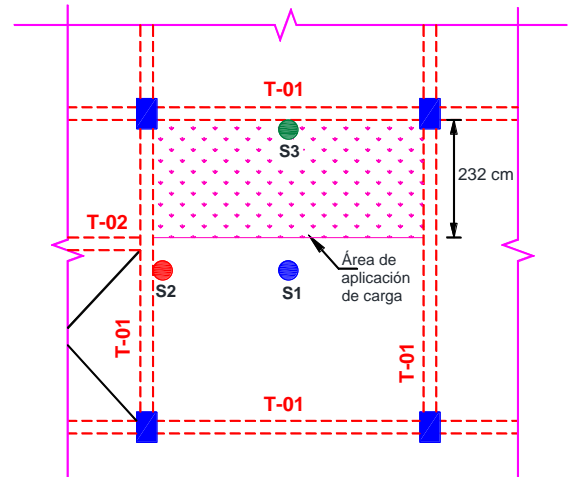


Figura 4.42. Aceleraciones en prueba de vibración forzada ante el caminar de una persona en los sensores: a) S1, b) S2 y c) S3

Carga rítmica por un conjunto de personas

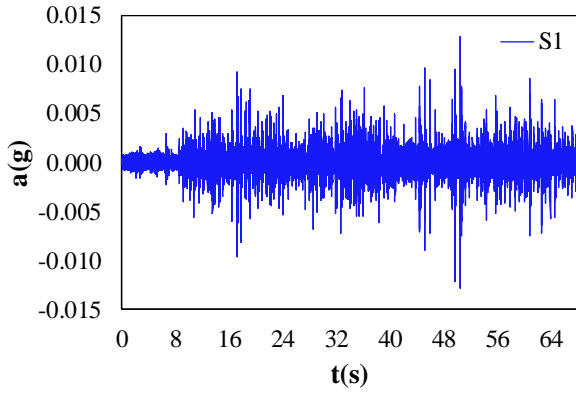
En este tipo de prueba se realizaron dos tipos de actividad humana: balanceo y caminar. En ambas pruebas se involucró la actividad de todas las personas que se muestran en la Tabla 4.15. El primer experimento toma en cuenta el movimiento aleatorio y lento de un conjunto de personas. El segundo experimento involucra el caminar de un conjunto de personas que llegan por las escaleras desde planta baja hacia el sistema de piso de estudio; ambas pruebas se realizan en un espacio delimitado como el que se muestra en la Figura 4.43. La duración de cada prueba fue de 68 s con una frecuencia de muestreo de 256 Hz. Como se muestra en la Figura 4.44, para el registro de la carga por balanceo, el número de personas inicia su actividad en el pasillo, generando una respuesta continua en los tres sensores; mientras que en el registro de la carga por el caminar, la llegada de las personas desde las escaleras genera máximos de aceleración definidos como se observa en la Figura 4.45.



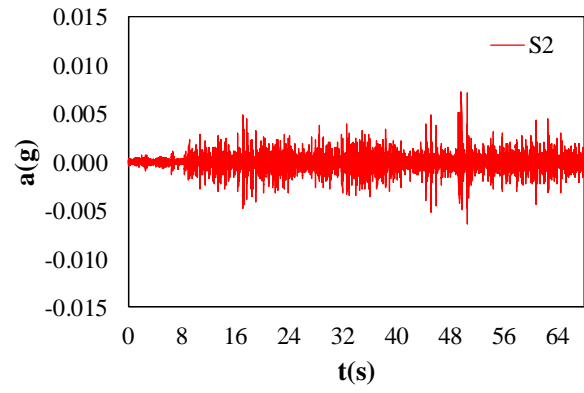
a)

b)

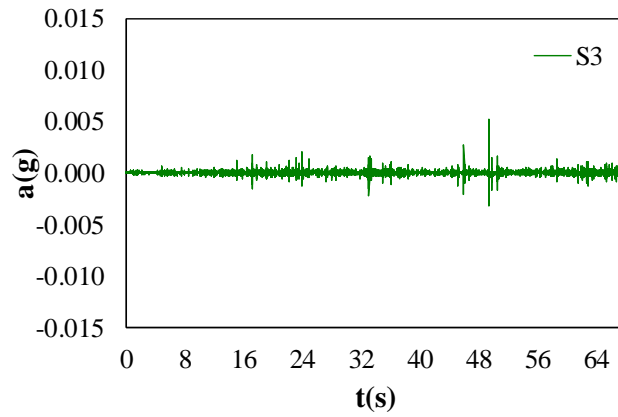
Figura 4.43. Prueba de carga debida a la actividad de un conjunto de personas: a) prueba y b) zona de prueba



a)



b)



c)

Figura 4.44. Aceleraciones en prueba de vibración forzada ante la actividad de un conjunto de personas que se balancean; con sensores: a) S1, b) S2 y c) S3

Comparando la respuesta de la Figura 4.42 con la mostrada en la Figura 4.45, se observa que ambas respuestas tienen un comportamiento intermitente, contrario a un comportamiento continuo. De lo cual se deduce que el caminar de personas genera respuestas de este tipo, independientemente del número de usuarios.

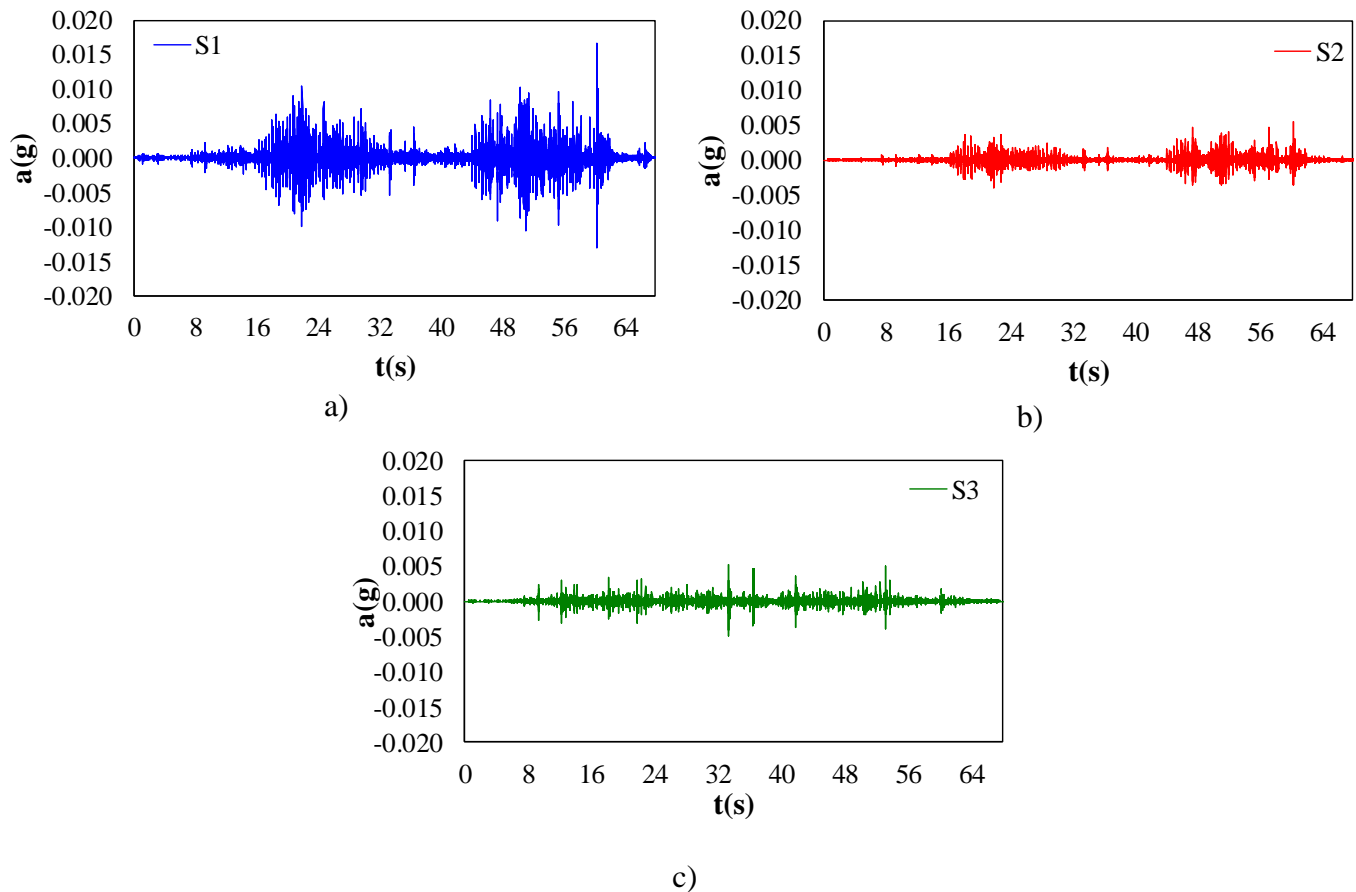


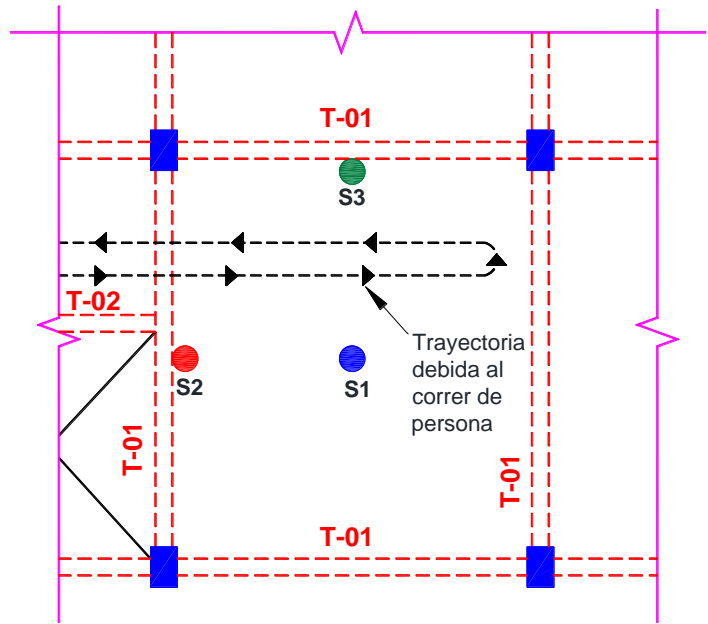
Figura 4.45. Aceleraciones en prueba de vibración forzada ante la actividad de un conjunto de personas que caminan; con sensores: a) S1, b) S2 y c) S3

Carga debida al correr de una persona

En esta prueba, la losa se sometió a vibración forzada ante el correr de la persona número 6, cuyo peso y frecuencia de paso es de 97 kg y 2.3 Hz, respectivamente de acuerdo a la Tabla 4.15. La actividad de la persona tuvo la trayectoria que se muestra en la Figura 4.46. La duración de cada prueba fue de aproximadamente 16s con una frecuencia de muestreo de 256 Hz.



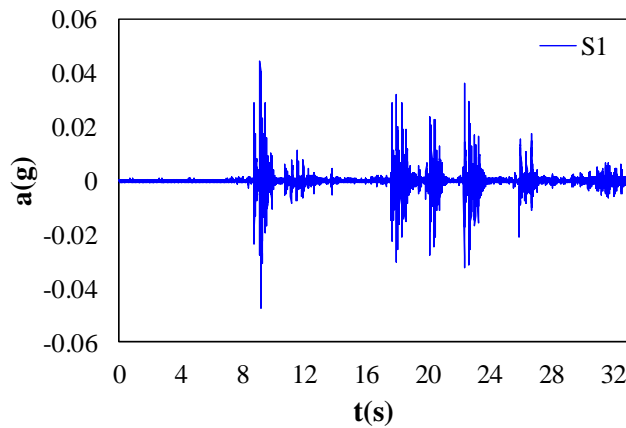
a)



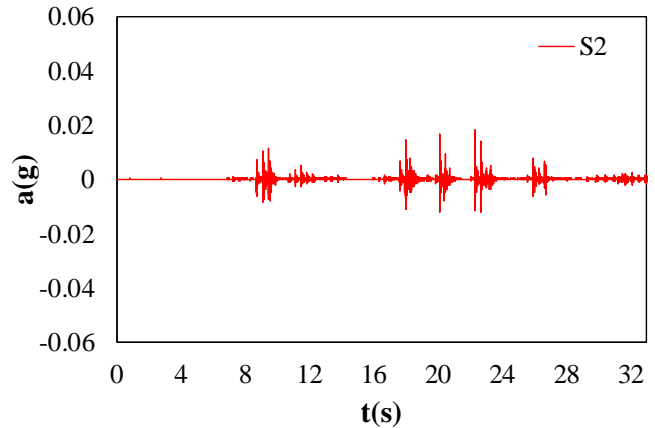
b)

Figura 4.46. Prueba de vibración debida al correr de una persona: a) prueba y b) trayectoria

El registro de aceleraciones en el centro del claro de traves y losa se muestra en la Figura 4.47, donde se observa que durante el trayecto de la persona se presentaron máximos de la respuesta con longitudes de tiempo cortas en los tres sensores. Las aceleraciones máximas se registraron en la zona central de la losa como lo muestra el registro del sensor S1 en la Figura 4.47.

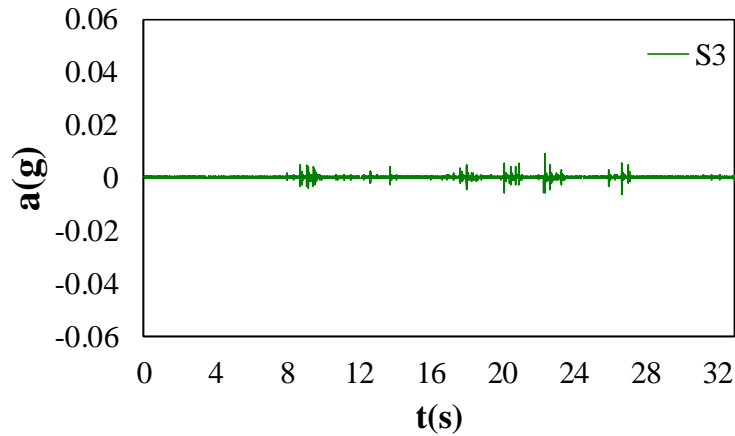


a)



b)

Figura 4.47. Aceleraciones en prueba de vibración forzada ante el correr de una persona con sensores: a) S1, b) S2 y c) S3



c)

Figura 4.47 Continuación de Figura

Carga debida al salto de personas

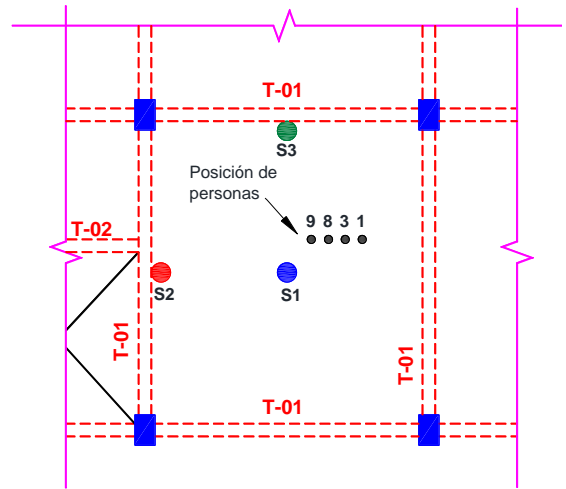
En este tipo de prueba se realizaron dos tipos de salto: uniforme y aleatorio. En los dos casos se utilizó la posición de personas que se muestra en la Figura 4.48, cuyos pesos se muestran en la Tabla 4.17. El primer registro se basó en el salto uniforme de las cuatro personas, donde saltaron juntas al mismo tiempo. Las aceleraciones máximas registradas fueron en el sensor S1 donde se tiene aproximadamente un valor máximo de 0.12g como se observa en la Figura 4.49. El segundo registro involucra el salto aleatorio del mismo conjunto de personas, donde cada persona salta de acuerdo a su propio ritmo o frecuencia, obteniendo así un comportamiento ligeramente continuo en la respuesta dinámica para los tres sensores como se observa en la Figura 4.50. El valor máximo registrado es aproximadamente 0.04g para el sensor S1. En el caso de los sensores S2 y S3 se observa una respuesta máxima, pero que es más notoria con respecto al obtenido en la prueba con salto uniforme. Por lo que existe una influencia importante entre la forma de aplicación de la excitación y la respuesta dinámica global de la estructura.

Tabla 4.17 Pesos de personas para prueba de salto

No. Persona	W(kg)
9	64
8	72
3	71
1	74

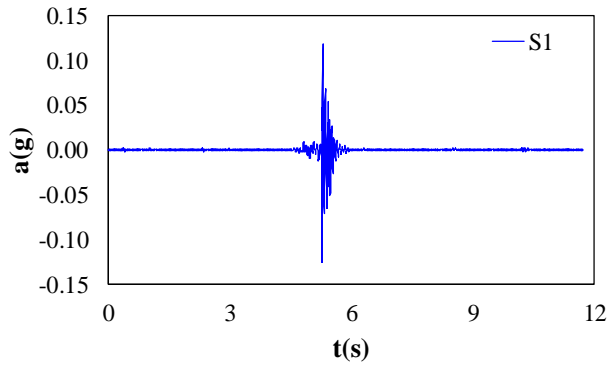


a)

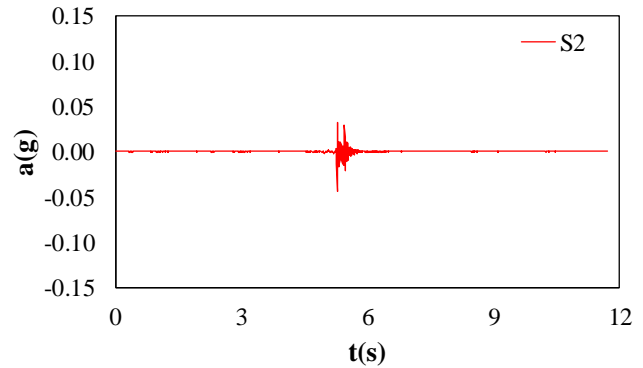


b)

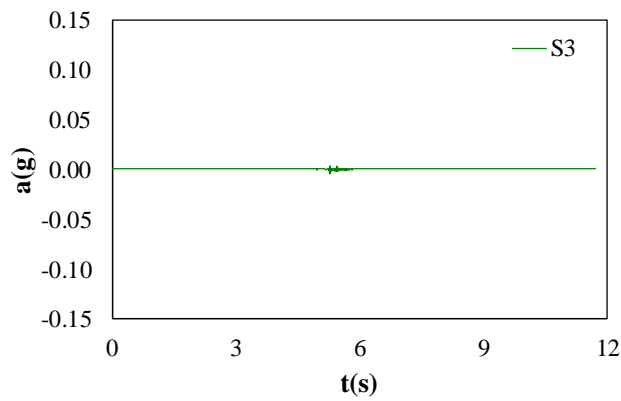
Figura 4.48. Prueba de actividad debida al salto de un conjunto de personas



a)



b)



c)

Figura 4.49. Aceleraciones en prueba de vibración forzada ante salto uniforme en sensores: a) S1, b) S2 y c) S3

Los valores de aceleración máxima registrada para cada tipo de carga se muestran en la Tabla 4.18, donde se observa que para el sensor S1, en el caso del caminar de una persona, el valor máximo es de 0.012g; para el caso del correr de una persona se obtiene un incremento de la

magnitud de la respuesta del 391%. En el caso de la actividad debida a un conjunto de personas se tiene un incremento máximo del 142%; mientras que en el caso del salto de una persona se tiene un incremento en la aceleración del 1050%. Por otra parte, las aceleraciones máximas en las vigas principales se deben principalmente al salto de personas en el centro del claro, con incrementos de hasta 358%. La variación en los valores máximos de aceleración en cada prueba se debe principalmente al cambio en las características de la fuente de excitación, como lo es la cantidad de personas, su posición y en ciertos momentos su aleatoriedad en el movimiento.

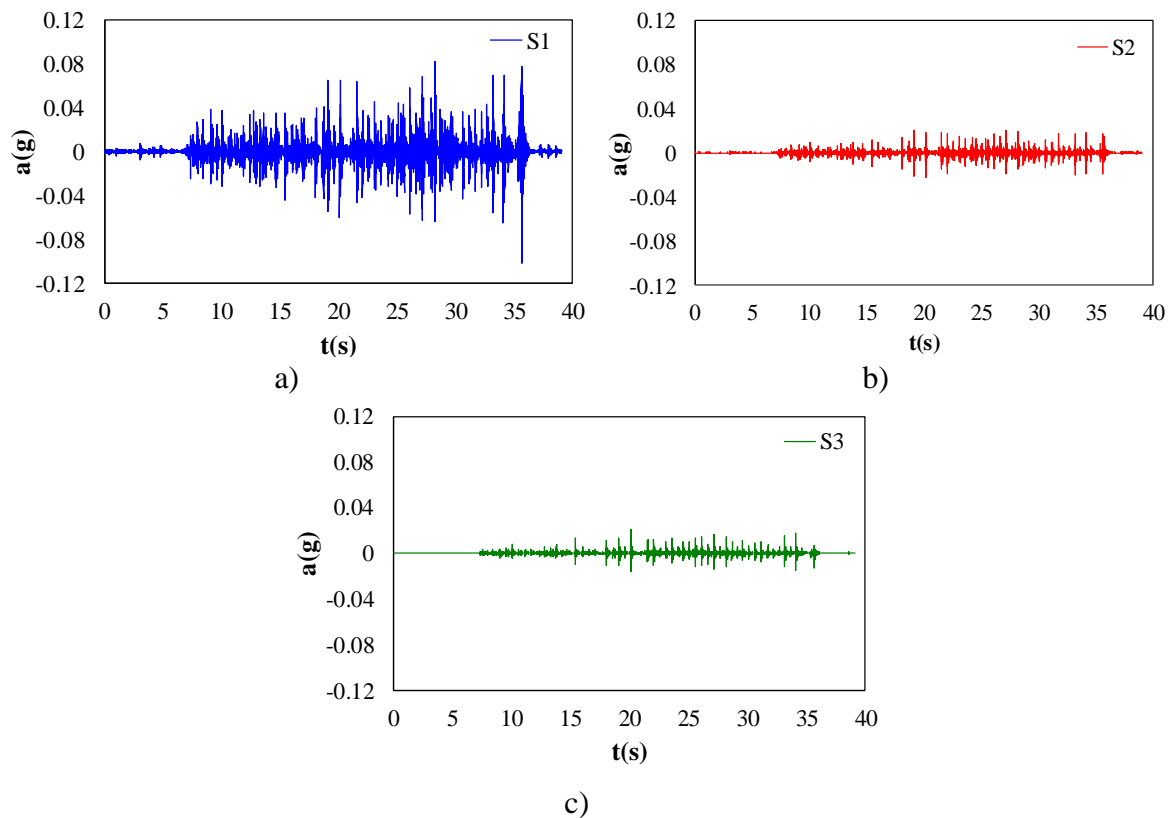


Figura 4.50. Aceleraciones en prueba de vibración forzada ante salto aleatorio en sensores: a) S1, b) S2 y c) S3

Tabla 4.18 Aceleraciones máximas experimentales en losa de prueba ante actividades humanas

Tipo de carga	Aceleración máxima (%g)		
	S1 (centro)	S2 (trabe)	S3 (trabe)
Caminar de persona	1.2	0.3	0.1
Correr de persona	4.7	1.2	0.5
Conjunto de personas	Balaceo	1.3	0.6
	Caminado	1.7	0.5
Salto de 4 personas	Uniforme	12.6	4.3
	Aleatorio	10.2	2.1

Amortiguamiento

En la obtención de este parámetro se utilizó la respuesta debida al salto uniforme de un conjunto de personas como se muestra en la Figura 4.49a, de la cual se observa detalladamente su respuesta máxima en la Figura 4.51. En la obtención de la relación de amortiguamiento ζ se utiliza el concepto de decremento logarítmico. A pesar de que el decremento logarítmico aplica sólo en el caso de vibración libre amortiguada, se decide utilizarlo para este experimento dado que la fuerza excitadora no es armónica, pues es un impulso producido por un conjunto de 4 personas como se muestra en la Figura 4.48, cuyo peso representa sólo el 1.6 % de la masa total del sistema y el 6.40 % de la masa modal correspondiente al modo de vibrar 1. Por lo tanto, teniendo que del máximo a_1 a a_2 se tienen cinco ciclos ($j=5$) y utilizando los datos de la Tabla 4.19, se obtiene ζ en las partes superior e inferior del registro. Con las propiedades del material obtenidas junto con la relación de amortiguamiento $\xi=0.078$ se tienen bases para calibrar modelos numéricos o analíticos posteriormente.

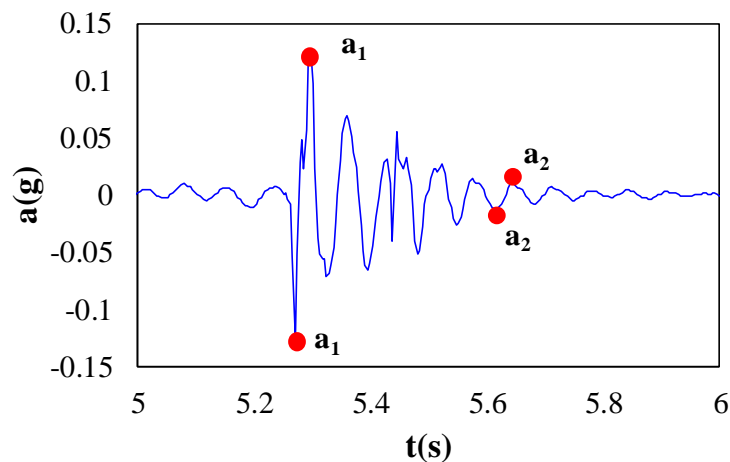


Figura 4.51. Respuesta dinámica debida al salto uniforme de un conjunto de personas

Tabla 4.19 Obtención de relación de amortiguamiento experimental en losa de concreto reforzado

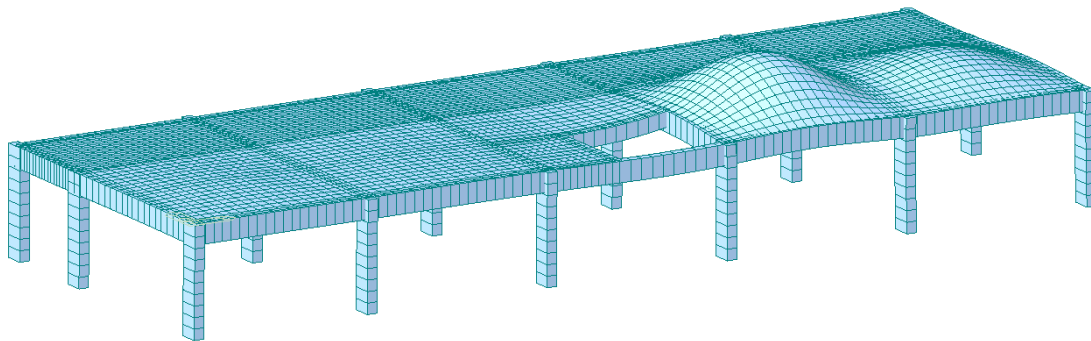
Mediciones	Máximos	Tiempo (s)	a (g)	f_n (Hz)	ξ
Superior	a_1	5.29	0.117	14.28	0.078
	a_2	5.64	0.010		
Inferior	a_1	5.269	0.130	14.40	0.076
	a_2	5.617	0.012		

Como se observa en la Figura 4.51 el decaimiento de la amplitud tiene una tendencia exponencial definida a pesar de ser una prueba de vibración forzada debida a un impulso. Cabe señalar que existe una perturbación entre los segundos 5.4 y 5.5, esto seguramente se atribuye a que, aunque los saltos trataron de ser sincronizados, en algún momento éstos no

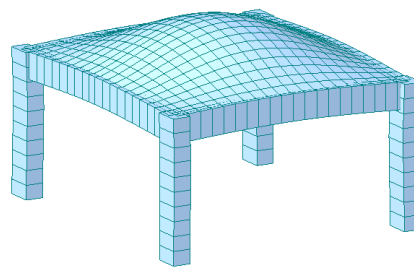
lo fueron. Sin embargo, para los efectos de la obtención del decremento logarítmico, este fenómeno no representa una influencia importante en la obtención de la relación de amortiguamiento por la ubicación de los puntos a_1 y a_2 .

Modelado numérico

Teniendo una medición experimental respecto a la frecuencia natural, se procede a obtener una solución numérica mediante un modelo con elementos finitos tipo lámina y viga realizado en MIDAS GEN V18 (2018), como se muestra en la Figura 4.52a. La frecuencia natural del sistema continuo, la cual corresponde al modo 6 tiene un valor f_{num} de 14.54 Hz, con una diferencia del 3.3% con respecto a la medición experimental $f_n = 14.06$ Hz. Para obtener una definición más clara de la frecuencia natural de la losa, ésta se modeló como un tablero aislado como se muestra en la Figura 4.52b. La frecuencia natural del sistema aislado tiene un valor f_a de 13.26 Hz, con diferencias del 9 y el 6% con respecto a las soluciones numérica y experimental, respectivamente. Por lo tanto, la frecuencia natural del modo 6 corresponde al tablero de estudio.



a)



b)

Figura 4.52. Modelo numérico de losa de concreto reforzado: a) continuo y b) aislado

Para la respuesta máxima de la losa en términos de a/g se realizó un análisis paso a paso considerando tres actividades humanas: correr de una persona, balanceo de un conjunto de personas y salto uniforme de un conjunto de personas. Las funciones para modelar estas actividades fueron desarrolladas por Bachmann *et al.* (1995) y Bachmann y Ammann (1987);

para las primeras actividades se utilizó la función de carga dada en la ec. (4.4), mientras que para la última se utilizó la expresión siguiente:

$$F_p(t) = \begin{cases} k_p G \operatorname{sen}\left(\pi \frac{t}{t_p}\right) & \text{para } t \leq t_p \\ 0 & \text{para } t_p < t \leq T_p \end{cases} \quad (4.6)$$

donde $F_p(t)$ es la función de carga debida a un salto de una persona, t_p es el tiempo de contacto cuyo valor es de 0.18, T_p es igual a $1/f_p$ donde f_p es la frecuencia del salto cuyo valor es de 2 Hz (Bachmann y Ammann, 1987), t es el tiempo y G es el peso de la persona; con estos datos se obtiene un factor de impacto k_p con un valor de 4.5 aproximadamente, como se muestra en la Figura 4.53. En este caso se realizan cuatro funciones de carga para representar el salto uniforme; los pesos de cada persona se muestran en la Tabla 4.17 y la Figura 4.54.

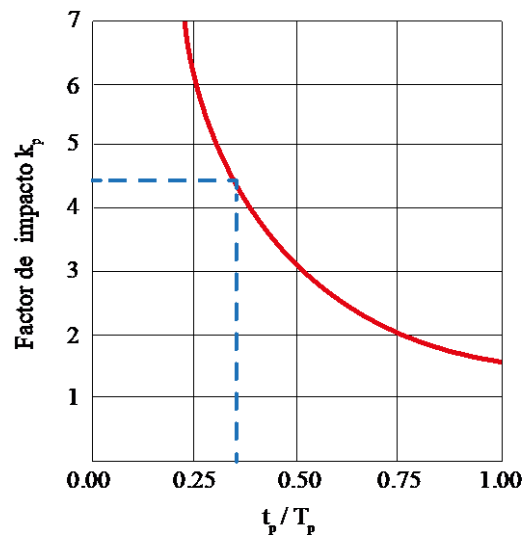


Figura 4.53. Factor de impacto y relación de contacto (tomado de Bachmann y Ammann, 1987)

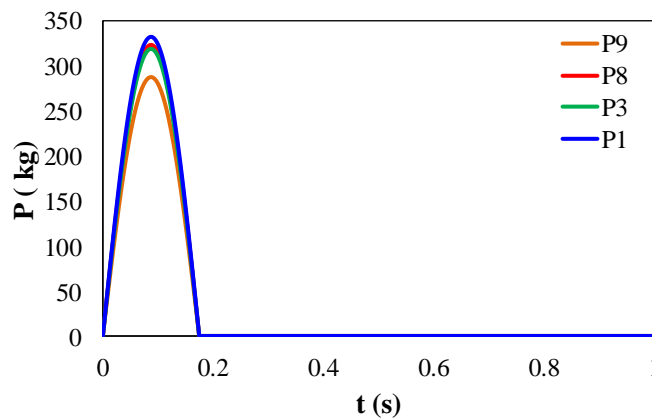


Figura 4.54. Funciones de carga para el salto uniforme de un conjunto de 4 personas

En la Tabla 4.20 se muestran los coeficientes de carga para obtener las funciones de carga correspondientes, las cuales se muestran en la Figura 4.55. En la carga debida al correr de una persona se propone un valor de la frecuencia de paso, cuyo valor es 2.3 Hz. Por otra parte, en la carga debida al balanceo de las personas se consideró una frecuencia de paso de aproximadamente 0.6 Hz (Bachmann y Ammann, 1987) y una densidad de 1 personas/m². El valor de la carga se obtuvo del promedio mostrado en la Tabla 4.15 cuyo valor es de 72.63 kg.

Tabla 4.20 Coeficientes de cargas dinámicas (tomado de Bachmann *et al.*, 1995)

Concepto		Correr de una persona	Balanceo de conjunto de personas
Frecuencia de paso	f_p (Hz)	2.3	0.6
Coeficientes de Fourier	α_1	1.6	0.5
	α_2	0.7	0
	α_3	0.2	0
Ángulo de fase	ϕ_1	0	0
	ϕ_2	0	0
	ϕ_3	0	0

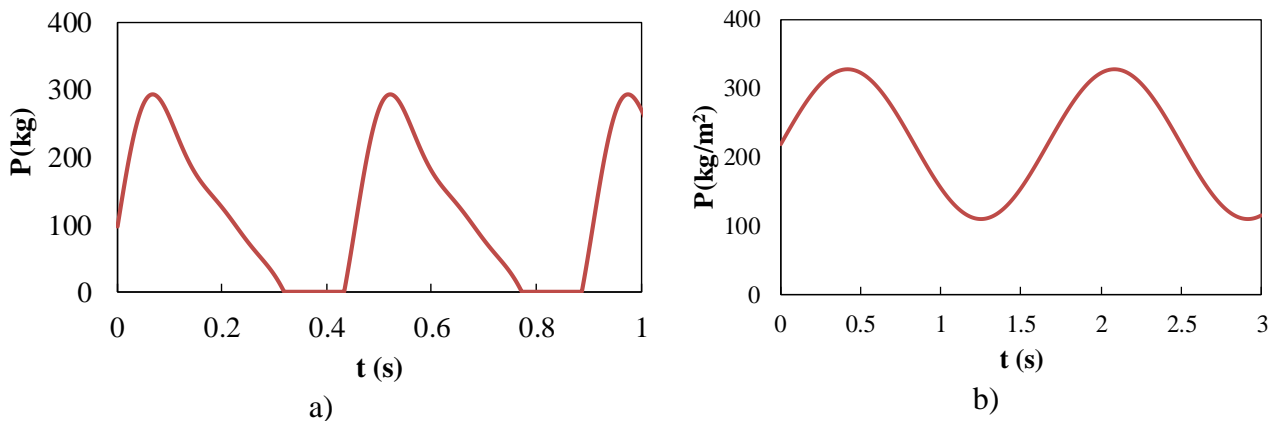


Figura 4.55. Funciones de carga para: a) correr de una persona y b) balanceo de un conjunto de personas

La carga dinámica debida al correr de una persona se colocó en la zona donde la persona recorre su trayecto, a una distancia de 1.5m del sensor S1 como se observa en la Figura 4.56a. En el caso de la carga de balanceo, ésta se aplicó en todo el pasillo, como se muestra en la Figura 4.56b. Por otra parte, las cargas debidas al salto de personas se aplicaron en cuatro nodos cerca del sensor S1, como se observa en la Figura 4.56c.

Dado que se desea evaluar solo el nivel de aproximación de las cargas dinámicas rítmicas mediante la obtención de las aceleraciones máximas en el modelo numérico, se realiza una

comparación entre estas soluciones con las soluciones experimentales. En esta parte no se incluye el estudio de la respuesta dinámica ante el caminar de una persona, ya que se analiza de manera detallada en el siguiente capítulo de este trabajo. Por lo tanto, teniendo los valores de la respuesta máxima en la Tabla 4.21, se observa una diferencia de aproximadamente el 57% en el caso del correr de una persona; en el caso segundo caso se observa una diferencia del 277%; mientras que en el caso del salto uniforme se obtiene una diferencia del 51%.

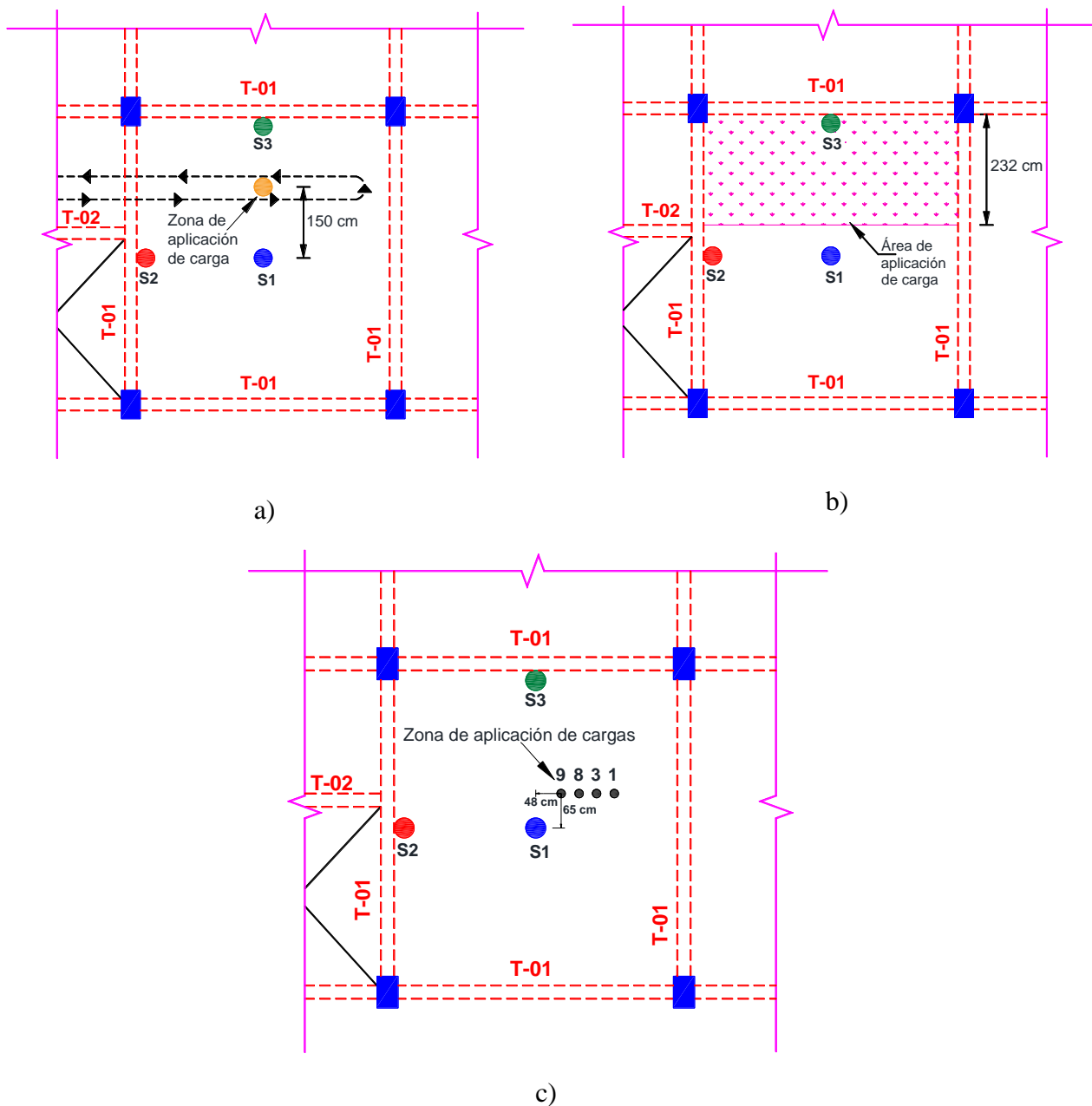


Figura 4.56. Funciones de carga aplicadas en modelo numérico: a) correr de una persona y b) balanceo de un conjunto de personas y c) salto uniforme de personas

Tabla 4.21 Comparación entre solución numérica y experimental

Tipo de carga	Experimental		Numérico	
	f_n (Hz)	a/g (%)	f_n (Hz)	a/g (%)
Correr de una persona	14.06	4.7	14.52	2.0
Balanceo de un conjunto de personas		1.3		4.9
Salto uniforme de un conjunto de personas		12.6		6.2

En el caso del salto uniforme de un conjunto de personas, el valor del factor de impacto k_p tiene un valor de 4.5 (Bachmann y Ammann, 1987), es decir, este valor multiplicado por la carga de excitación. Sin embargo, estos autores reportan que, de acuerdo con pruebas experimentales, k_p llega a tener valores de entre 6 y 7. Por lo tanto, utilizando un valor $k_p=7$ se tiene un valor de $a/g= 10 \%$, cuya aproximación es mejor que la anterior de 6.2%. Las cargas dinámicas evaluadas en el modelo numérico presentan una tendencia significativa hacia al modelo experimental. A pesar de que la aproximación de estas cargas es baja, es posible utilizarlas si se desea un valor tentativo de la respuesta dinámica ante las actividades rítmicas aquí estudiadas.

4.5.5 Evaluación de la perceptibilidad ante vibraciones debido a actividades rítmicas

AISC (1997)

Al tener las aceleraciones experimentales del sistema de piso, se evalúan las aceleraciones que pueden ser incómodas para sus ocupantes. En este caso se evalúan las actividades mostradas en la Tabla 4.18 utilizando los criterios de aceleración máxima que propone el código AISC (1997), como se muestran en la Tabla 4.22.

Tabla 4.22 Aceleraciones límite para actividades rítmicas (tomado de AISC, 1997)

Aceleraciones límite para actividades rítmicas	
Tipo de actividad u ocupación	a (%g)
Oficina o residencial	0.4-0.7
Comedor o gimnasio	1.5-2.5
Solo actividad rítmica	4-7

Utilizando los límites de la Tabla 4.22 se realiza una comparación en la Figura 4.57, donde se observa que las aceleraciones máximas se registran en el sensor S1, las cuales son mayores al límite permitido para el uso de oficinas, como es el caso del sistema de piso en estudio. En las zonas de apoyo de la losa, como las trabes principales, las aceleraciones registradas por los sensores S2 y S3 cumplen ante actividades como el balanceo, caminado y para el correr de una persona. La aceleración mayor fue causada por el salto uniforme de personas, principalmente en la zona central ya que se está fuera de cualquier límite de aceleración establecido por la Tabla 4.22. En general, el sistema de piso es susceptible a vibraciones incómodas.

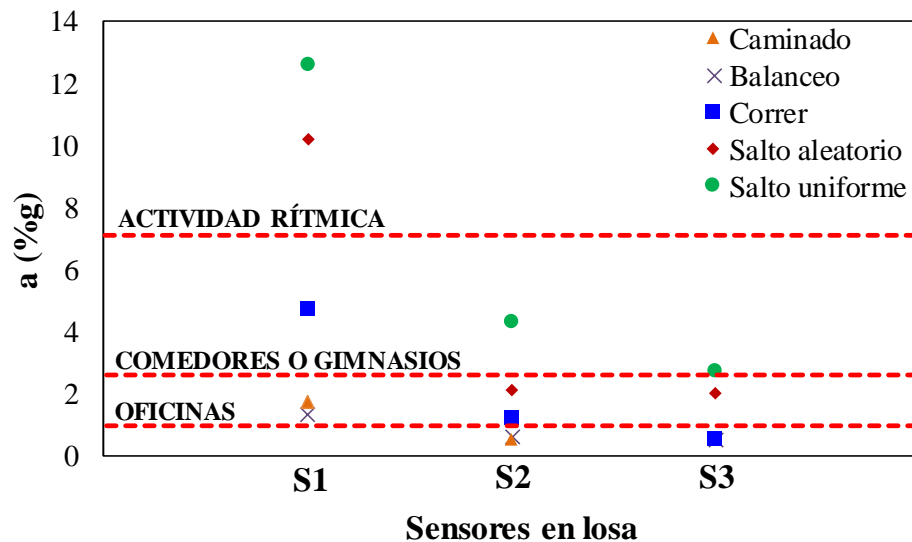


Figura 4.57. Evaluación de aceleraciones máximas en sensores ubicados en losa de concreto ante las actividades rítmicas

NTCC-17 (2017)

En la solución analítica se utilizan las especificaciones que propone las NTCC-17 (2017) para el análisis y diseño ante vibración debida a actividades rítmicas en losas de concreto reforzado a partir de la ec. (1.40), la cual se define como:

$$K = \frac{d}{\sqrt{2}} \frac{f^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_{10}}\right)^2}} \quad (4.7)$$

Las NTCC-17 (2017) no proporcionan cómo calcular el desplazamiento d . Sin embargo, es posible determinarlo a partir de la ec. (4.8) que depende de la velocidad v o la aceleración a (Bachmann y Ammann, 1987); esta expresión se utiliza solo cuando la vibración es armónica, es decir, cuando la función de excitación contiene funciones periódicas seno o coseno. Sin embargo, se puede utilizar de manera suficientemente aproximada en pruebas

experimentales, un ejemplo de ello se muestra en Kim *et al.* (2004) con base en las especificaciones DIN-4150 (1986), donde se utiliza una expresión similar a la ec. (1.40) junto con la ec. (4.8).

$$d = \frac{v}{2\pi f} = \frac{a}{4\pi^2 f^2} \quad (4.8)$$

Sustituyendo las aceleraciones experimentales máximas de la Tabla 4.18 en la ec. (4.8) y, posteriormente, en la ec. (1.40), se obtienen los valores de K que se enlistan en las Tablas 4.23 a 4.25, donde se observa que hay niveles de vibración que son considerablemente perceptibles para las zonas de monitoreo del sistema de piso, lo cual sugiere que una actividad rítmica no solo demanda amplitudes máximas de movimiento en el centro del claro, si no en otros elementos más rígidos que la losa. Como se observa, los criterios utilizados para la evaluación de la susceptibilidad ante vibración coinciden con los umbrales de incomodidad que prevalecen en el sistema de piso ante distintas actividades humanas. Los tipos de actividad humana se eligieron de acuerdo a las demandas de excitación a las que está sometida la estructura en su uso diario.

En general, como se observa, el estudio experimental de la losa de concreto se basó en el monitoreo del centro del claro en la losa y traveses principales, donde las aceleraciones máximas se registraron en los sensores S1 y S2 que corresponden al centro del claro de la losa y a una trabe principal; en el caso del sensor S3, la trabe principal mostró aceleraciones que fueron menores, esto es debido a que ésta se ubica junto a un tablero rígido, el cual tiene una f_n mayor que la de la losa de estudio. Caso contrario se observa en el sensor S2, donde al tener un tablero apoyado en una trabe secundaria perpendicular a la trabe principal, como se muestra en la Figura 4.35a, se llegan a sobrepasar los límites de aceleración incómoda. Por lo tanto, se deduce que un tablero basado en vigas secundarias influye de manera mínima en la respuesta dinámica de tableros contiguos basados en traveses principales.

Tabla 4.23 Comparación entre solución experimental y analítica en el sensor S1 (NTCC-17, 2017)

Tipo de prueba		a_{\max} (cm/s^2)	d_{\max} (mm)	K	Evaluación de K	Efecto en seres humanos
Correr de persona		47	0.054	4.73	$4 \leq K < 10$	Muy fuertemente perceptible
Conjunto de personas	Balanceo	13	0.015	1.30	$0.63 \leq K < 1.6$	Fácilmente perceptible
	Caminado	17	0.019	1.70	$1.6 \leq K < 4$	Fuertemente perceptible
Salto de conjunto de personas	Uniforme	126	0.145	12.57	$10 \leq K < 25$	Muy fuertemente perceptible
	Aleatorio	102	0.12	10.40	$10 \leq K < 25$	Muy fuertemente perceptible

Tabla 4.24 Comparación entre solución experimental y analítica en el sensor S2 (NTCC-17, 2017)

Tipo de prueba		a_{max} (cm/s ²)	d_{max} (mm)	K	Evaluación de K	Efecto en seres humanos
Correr de persona		12	0.014	1.20	$0.63 \leq K < 1.6$	Fácilmente perceptible
Conjunto de personas	Balanceo	6	0.007	0.60	$0.25 \leq K < 0.63$	Perceptible
	Caminado	5	0.006	0.50	$0.63 \leq K < 1.6$	Fácilmente perceptible
Salto de conjunto de personas	Uniforme	43	0.050	4.31	$4 \leq K < 10$	Muy fuertemente perceptible
	Aleatorio	21	0.024	2.10	$1.6 \leq K < 4$	Fuertemente perceptible

Tabla 4.25 Comparación entre solución experimental y analítica en el sensor S3 (NTCC-17, 2017)

Tipo de prueba		a_{max} (cm/s ²)	d_{max} (mm)	K	Evaluación de K	Efecto en seres humanos
Correr de persona		5	0.006	0.50	$0.25 \leq K < 0.63$	Perceptible
Conjunto de personas	Balanceo	5	0.006	0.50	$0.25 \leq K < 0.63$	Perceptible
	Caminado	5	0.006	0.50	$0.25 \leq K < 0.63$	Perceptible
Salto de conjunto de personas	Uniforme	27	0.031	2.70	$1.60 \leq K < 4$	Fuertemente perceptible
	Aleatorio	20	0.023	2.00	$1.60 \leq K < 4$	Fuertemente perceptible

Cabe mencionar que las excitaciones ocurren sin llegar al estado de resonancia en el modo fundamental, ya que las frecuencias de excitación de las actividades humanas son de alrededor de 2 Hz. En el caso del modelado se observa que las cargas dinámicas propuestas tienen diferencias importantes con respecto a las soluciones experimentales, lo cual puede atribuirse a diversos factores como la influencia de la masa de los ocupantes en la masa y el amortiguamiento del sistema estructural.

En cuanto a la relación de amortiguamiento, se tiene que ésta depende de elementos estructurales y no estructurales en el sistema de piso; asumiendo, con base en la Tabla 1.7 (HIVOSS, 2007), que la relación de amortiguamiento es $D = D_{muebles} + D_{acabados} + D_{estructura} = 2\% + 1\% + 2\% = 5\%$, se llega a un valor por debajo del experimental, cuyos valores son de 7.8 y 7.6%, de aquí que el valor de la relación de amortiguamiento para una losa de concreto reforzado destinado a oficinas oscila entre el 5 y el 8%. A pesar de ello, es necesario profundizar en el estudio de este parámetro.

Por último, después de estudiar esta losa de concreto se deduce que cualquier sistema de piso debe ser evaluado ante distintas fuentes de excitación, independientemente de su tipología estructural, ya que, el espécimen estudiado en este capítulo estaba diseñado para el uso de oficinas, donde el caminar de personas es la acción principal sobre la losa; sin embargo, en su uso diario está sometido a otras actividades humanas como las mostradas en la Tabla 4.23, las cuales son distintas a las que comúnmente están contempladas en el diseño.

5 ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DINÁMICA EN TÉRMINOS DE LA ACELERACIÓN DE LOSAS DE CONCRETO REFORZADO

5.1 Introducción

Debido a que se encontraron pocas recomendaciones para calcular la respuesta dinámica de una losa de concreto en dos direcciones ante el caminar de personas, tal como se reporta en HIVOSS (2007) y Contreras (1977), en este capítulo se propone una metodología de análisis y diseño. Este procedimiento se basa en una expresión propuesta para el estudio de la aceleración de un S1GDL, el cual tiene como base cinco elementos para su análisis: frecuencia natural fundamental, función de carga dinámica, rigidez y masa equivalentes a un S1GDL y relación de amortiguamiento.

La carga dinámica se propone a partir de la evaluación de algunas funciones de carga propuestas en la literatura para modelar el caminar humano. Por otra parte, la frecuencia natural fundamental se obtiene de las expresiones propuestas en el capítulo 2. Por otra parte, la rigidez, masa y amortiguamiento se obtienen a partir de las recomendaciones de Smith *et al.* (2007) para el análisis dinámico de losas con masa y rigidez distribuida como S1GDL. En la evaluación de estas variables se utiliza el modelo experimental de la losa de concreto reforzado de la sección 4.5 como base para calibrar.

5.2 Calibración de frecuencia natural

Dada la ec. (2.46), propuesta en la sección 2.3 para el cálculo de la f_n en losas de concreto reforzado apoyadas sobre vigas, se utiliza el modelo numérico y experimental de la sección 4.5 para su calibración. Para la losa de estudio de la sección 4.5, cuyo tablero se muestra en la Figura 5.1, es necesario calcular los desplazamientos tanto de la viga principal de claro a_2 como de la franja central de losa. El peso en la losa se deriva del peso propio y de las cargas que se resumen en la Tabla 5.1. En el caso de la viga es necesario realizar una bajada de cargas correspondiente a partir del concepto de áreas tributarias, así como el cálculo del peso de la viga como se muestra en la Figura 5.1a y la Tabla 5.2. En el caso de la losa se analiza una franja con ancho unitario, donde se incluye el peso propio, así como la carga adicional de la Tabla 5.1, como se muestra en la Figura 5.1b y la Tabla 5.3.

Tabla 5.1 Cargas muertas en losa maciza de concreto reforzado

Carga	Magnitud (kg/m²)
$W_{\text{instalación}}$	20
W_{plafond}	20
W_{loseta}	20
W_{oficina}	30
$W_{\text{adicional}}$	90

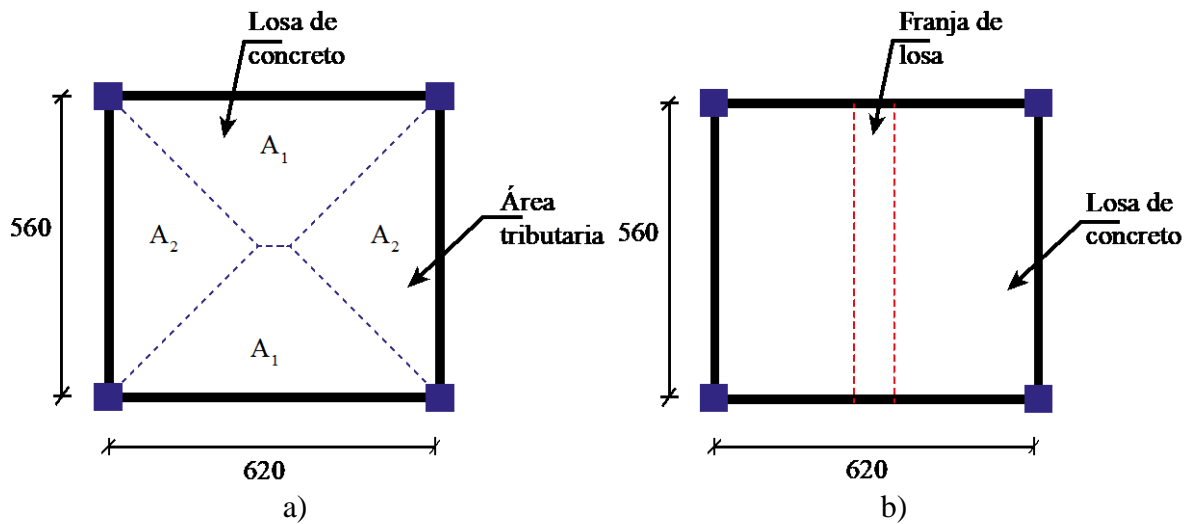


Figura 5.1. Áreas tributarias de losa de concreto de la sección 4.5

Tabla 5.2 Cargas muertas en trabe de concreto reforzado

Variable	Magnitud
a_1 (cm)	560
a_2 (cm)	620
w_{propio} (kg/cm ³)	0.0024
$w_{adicional}$ (kg/cm ²)	0.0090
A_1 (cm ²)	95200
w_{bajada} (kg/cm)	6.18
w_{viga} (kg/cm)	3.60
w_{total} (kg/cm)	9.78

Tabla 5.3 Cargas muertas en franja de losa concreto reforzado

Variable	Magnitud
Ancho de franja (cm)	100
a_1 (cm)	560
w_{propio} (kg/cm ³)	0.0024
$w_{adicional}$ (kg/cm ²)	0.0090
w_{franja} (kg/cm)	4.02

Utilizando la ec. (5.1) para obtener la deflexión máxima $\Delta_{m\acute{a}x}$, el cual corresponde a una viga doblemente empotrada con carga distribuida, se obtienen los desplazamientos derivados de cada elemento estructural. Sustituyendo los valores del desplazamiento en la ec. (2.46) se

obtiene una frecuencia natural, f_a , de 13.03 Hz, como se muestra en la Tabla 5.4, la cual tiene una diferencia del 8% con respecto a la medición experimental. Por lo tanto, esta expresión se considera como suficientemente aproximada en el cálculo de la f_n en losas macizas de concreto reforzado. En la Tabla 5.5 se presenta un resumen de la f_n obtenida con las soluciones analítica, numérica y experimental, donde se valida que la expresión analítica propuesta es útil para fines prácticos en el cálculo de f_n es adecuada para su utilización. Además, el modelo numérico realizado también es adecuado para evaluar de la respuesta dinámica de la losa de concreto reforzado.

$$\Delta_{m\acute{a}x} = \frac{wI^4}{384E_{cc}I} \quad (5.1)$$

Tabla 5.4 Cálculo de la f_n de losa de concreto reforzado con la ec. (2.46)

Frecuencia natural	
Concepto	Magnitud
$w_{viga}(kg/cm)$	9.78
$w_{losa}(kg/m)$	4.02
$\Delta_{trabe}(cm)$	0.029
$\Delta_{viga}(cm)$	0.19
$f_a(Hz)$	13.03

Tabla 5.5 Comparación de soluciones para el cálculo de la f_n

Tipo de solución	f (Hz)
Analítica	13.03
Numérica	14.52
Experimental	14.06

5.3 Datos experimentales

Con base en la prueba experimental de vibración forzada que se realizó a la losa de concreto reforzado, que se reporta en la sección 4.5, en este apartado se utiliza como punto de referencia la aceleración máxima y la frecuencia de caminado, correspondiente al caminar de una persona. La respuesta máxima en el centro del claro, se compara entre dos registros, 1 y 2, como se muestra en la Figura 5.2, donde los máximos coinciden en una magnitud de 0.010g aproximadamente. Este registro corresponde al caminado en la cercanía del sensor S1, donde se registraron magnitudes similares entre ambas mediciones en tiempo y forma. Por lo tanto, se utilizan estos registros para la calibración necesaria.

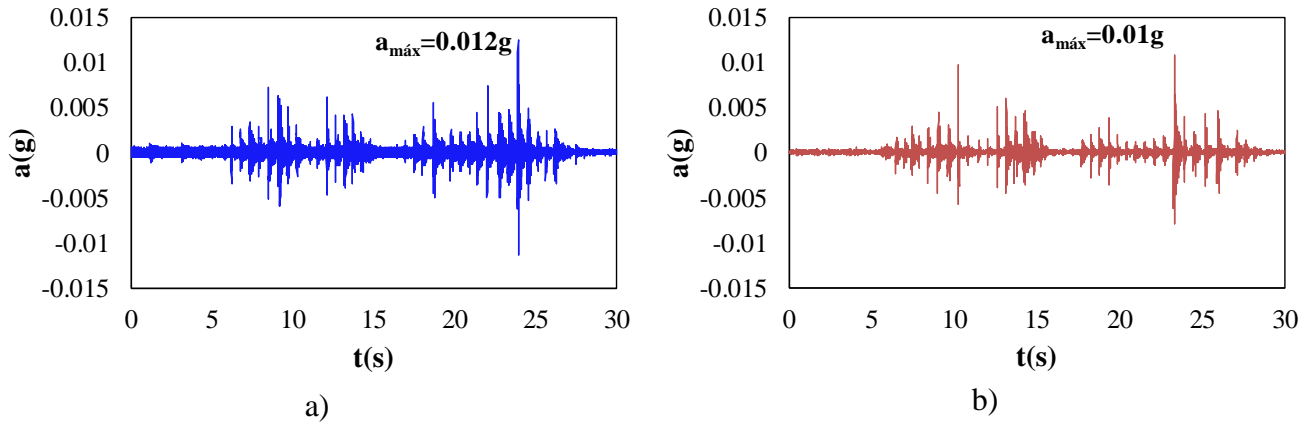


Figura 5.2. Registros de aceleración de losa de concreto reforzado en el centro del claro con mediciones: a) 1 y b) 2

5.4 Calibración de carga y respuesta dinámica

Para obtener la respuesta dinámica en términos de la aceleración en un modelo de elementos finitos es necesario definir un criterio de mallado con base en la convergencia de la aceleración y las divisiones por borde. Para ello, se realizó el modelo de una losa cuadrada de concreto reforzado con claro de 4 m y espesor de 8 cm, como se muestra en la Figura 5.3. En el modelado de la losa se utilizaron elementos finitos lámina, a los que se les asignó material homogéneo e isotrópico constituido de concreto clase 1 con una resistencia a la compresión del concreto de $f'_c=300 \text{ kg/cm}^2$. En los bordes del modelo se propusieron dos condiciones de apoyo: simple y empotrado. La carga dinámica utilizada es la función de carga representativa del caminar de personas que se muestra en la ec. (1.18), donde $P= 97 \text{ kg}$, $\alpha_i= 0.5$, $f_s= 2 \text{ Hz}$, $i= 1$ y cuya gráfica es la que se muestra en la Figura 5.4. Esta función de carga se aplicó en el centro del claro.

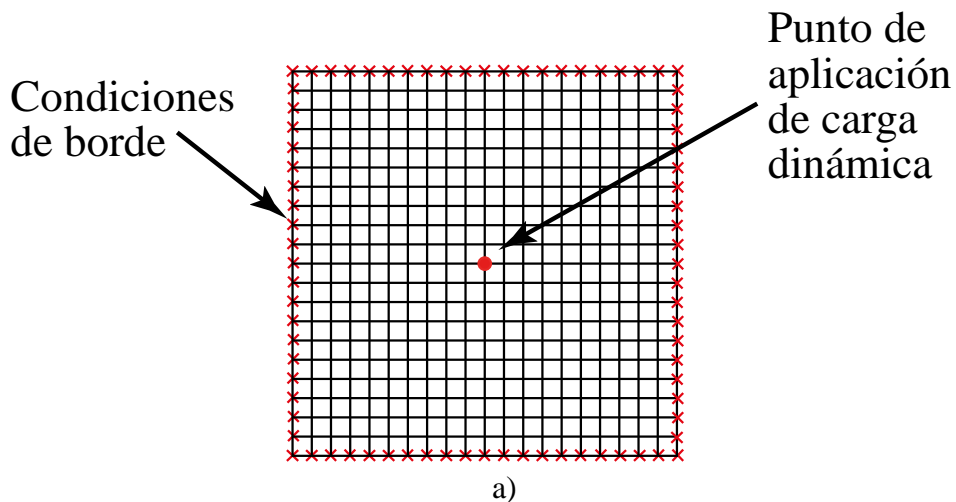


Figura 5.3. Modelo numérico de losa de concreto reforzado con apoyos rígidos: a) vista en planta y b) sección transversal

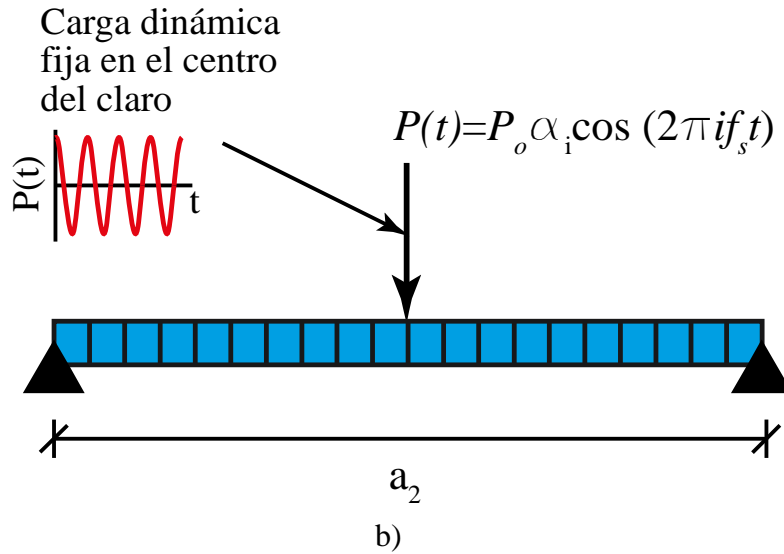


Figura 5.3 Continuación de Figura

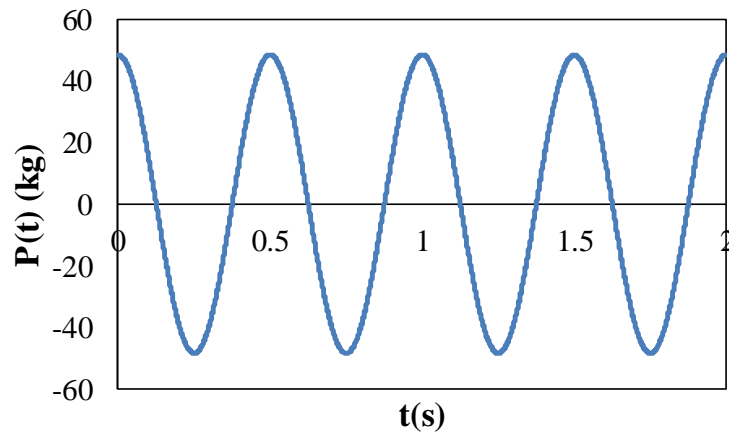
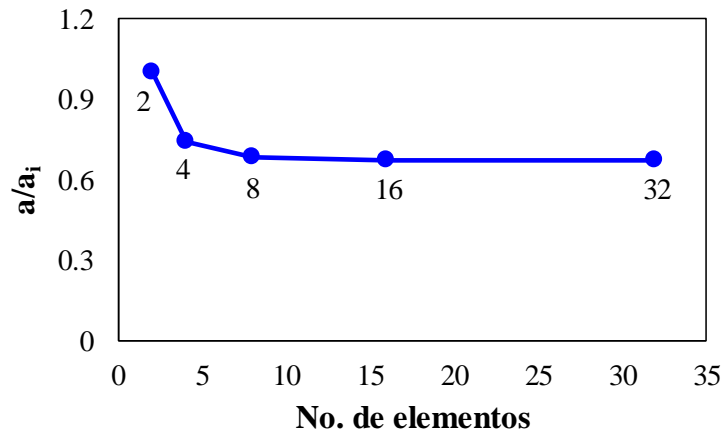
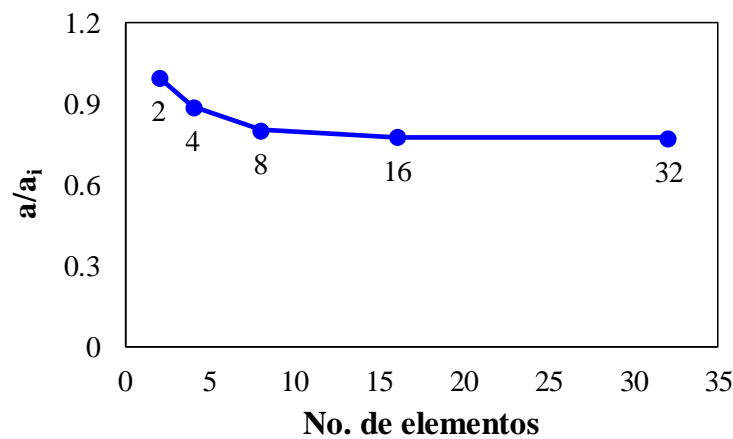


Figura 5.4. Función de carga aplicada en modelo de losa de concreto

Tomando en cuenta sólo el modo fundamental en la respuesta máxima, en la Figura 5.5 se muestran las curvas de la aceleración máxima normalizada al modelo con dos elementos por borde a_i contra el número de divisiones por borde para las dos condiciones de apoyo, donde se observa que a partir de 8 elementos por borde se tiene un valor suficientemente aproximado de la aceleración máxima, pues el tener un mayor número de divisiones sólo incrementaría el costo computacional. Sin embargo, en este trabajo se utilizaron 20 elementos por borde para modelar las losas.



a)



b)

Figura 5.5. Curvas de aceleración contra número de divisiones por borde en modelos de losas con bordes: a) simplemente apoyados y b) empotrados

5.5 Calibración de función de carga dinámica para representar el caminar de persona

Una vez obtenido el criterio de mallado, se procede a la calibración de una función de carga dinámica representativa del caminar de una persona. Para lo cual, se representa el caminar humano, mostrado en las Figuras 5.2 y 5.6a, mediante funciones de carga aplicadas de manera puntual y fija en el centro del claro de la losa. Estas funciones son como las que se muestran en la Figura 5.6b, las cuales se aplican ya sea de manera individual o mediante la combinación de ellas.

Las funciones de carga que involucran el caminar de una persona son como se muestra en la sección 1.2.2, cada función de carga está dada por las ecs. (1.17) y (1.18) de las especificaciones AISC (1997); así como las propuestas por Bachmann y Ammann (1987), Rainer *et al.* (1988) y Varela (2004), dadas por las ecs. (1.19), (1.16) y (1.21), respectivamente. Por lo tanto, se definen propiedades de las funciones de carga como se

muestra en la Tabla 5.6 y Figura 5.7, donde se considera el peso de la persona cuyo valor es 97 kg y una frecuencia de paso promedio de 2.1 Hz obtenida experimentalmente con los valores que se resumen en la Tabla 4.16 en el momento del experimento.

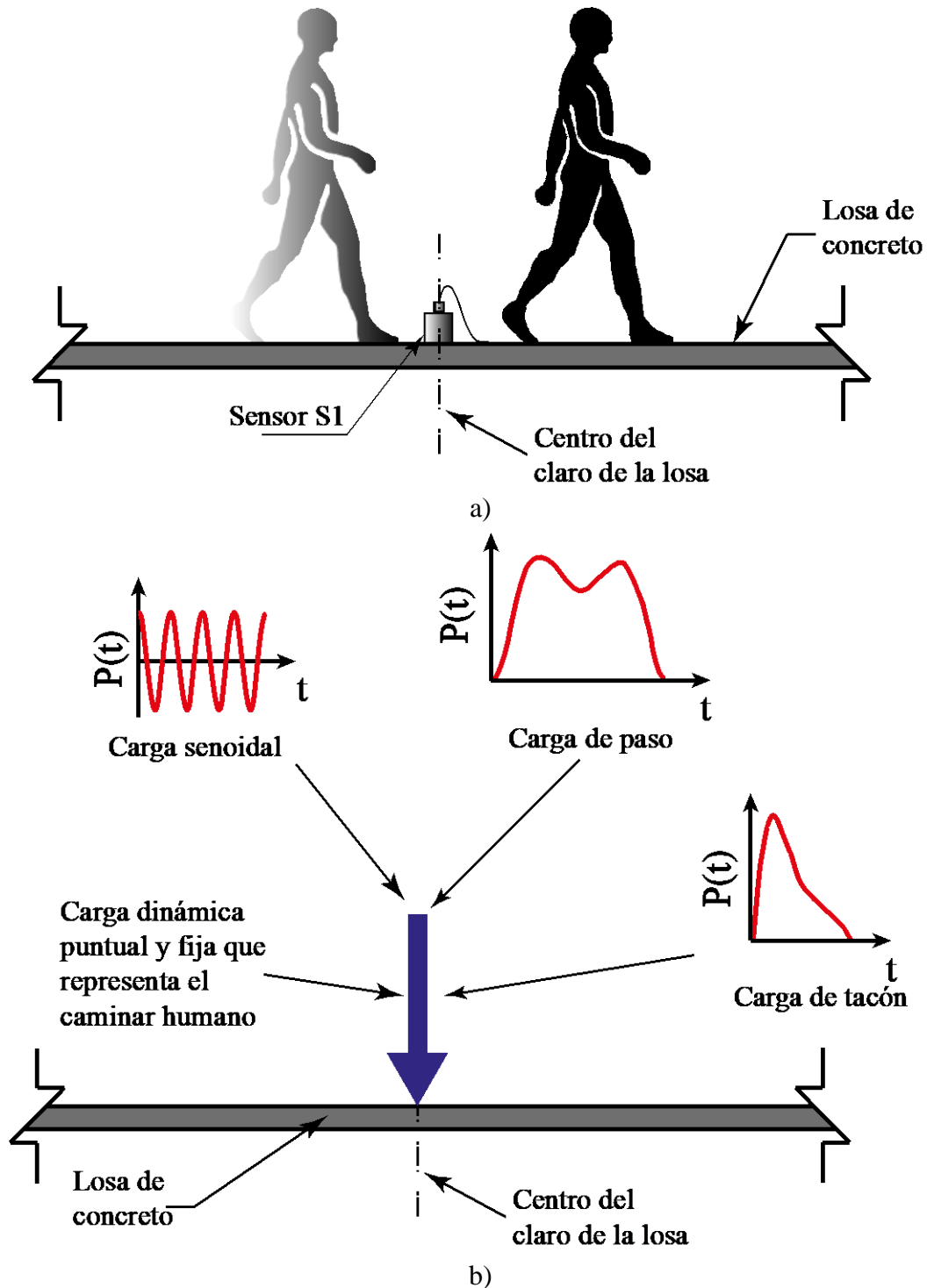


Figura 5.6. Modelado del caminar de una persona en losa de concreto reforzado: a) caminar de persona y b) funciones de carga representativas

Tabla 5.6 Coeficientes de cargas dinámicas

Concepto	Carga 1 AISC (1997) ec. (1.18)		Carga 2 AISC (1997) ec. (1.17)	Carga 3 AISC (1997) ec. (1.17)	Carga 4 Bachmann y Ammann (1987) ec. (1.19)	Carga 5 Rainer <i>et al.</i> (1988) ec. (1.16)	Carga 6 Varela (2004) ec. (1.21)
	Coefficiente de carga	α_1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.33
	α_2	-	0.2	0.2	0.2	0.14	0.12
	α_3	-	0.1	0.1	0.1	0.05	0.07
	α_4	-	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
Ángulo de fase	ϕ_1	-	0	-	0	0	0
	ϕ_2	-	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$
	ϕ_3	-	$\pi/2$	π	π	$\pi/2$	π
	ϕ_4	-	$\pi/2$	$3\pi/2$	$3\pi/2$	$\pi/2$	$3\pi/2$

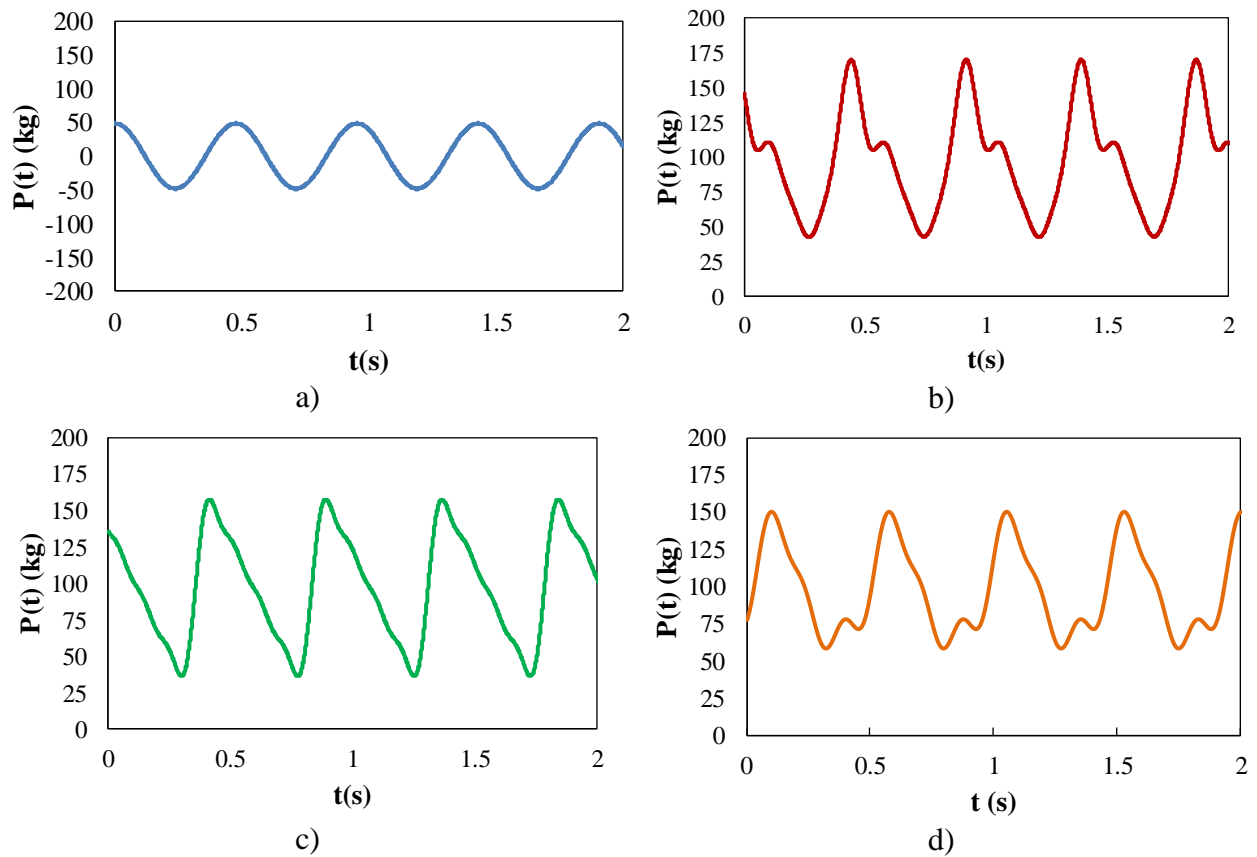


Figura 5.7. Funciones de carga para representar el caminar de una persona con las ecuaciones: a) carga 1, b) carga 2, c) carga 3, d) carga 4, e) carga 5 y f) carga 6

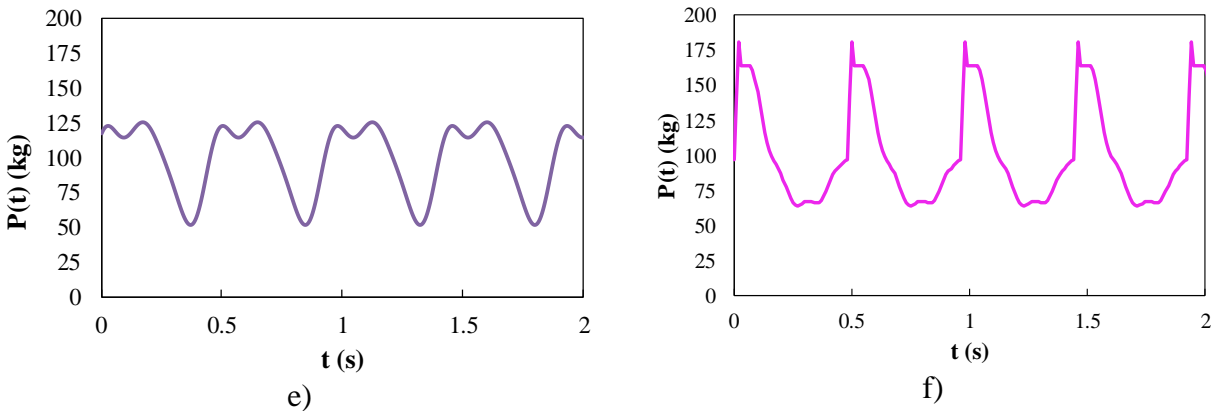


Figura 5.7. Continuación de Figura

Dadas las condiciones de carga mostradas en la Figura 5.7, así como las propiedades del modelo numérico $f_n= 14.52$ Hz y $\xi=0.078$, se realiza un análisis dinámico paso a paso para obtener las aceleraciones, como se muestran en la Figura 5.8. Estas aceleraciones numéricas se compararon con las aceleraciones experimentales mediante dos magnitudes: la aceleración máxima a_{max} y la aceleración a_{rms} . El primero representa una aceleración pico, mientras que el segundo involucra cada uno de los puntos que conforman una curva. En el caso de una señal discreta, a_{rms} se calcula con la ec. (5.2), como se define en Hicks (2004):

$$a_{rms} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (5.2)$$

donde n es el número de puntos que conforman un máximo en la aceleración y x_i es el valor de la aceleración en el punto i . Tomando como punto de referencia el primer máximo en las respuestas como se muestra en la Figura 5.9, se obtienen los valores que se resumen en la Tabla 5.7, donde para cada solución se tiene que la relación a_{max}/a_{rms} es aproximadamente 1.4, esto muestra que las soluciones numéricas tienen una tendencia adecuada en la aceleración máxima y en la energía desarrollada en las respuestas.

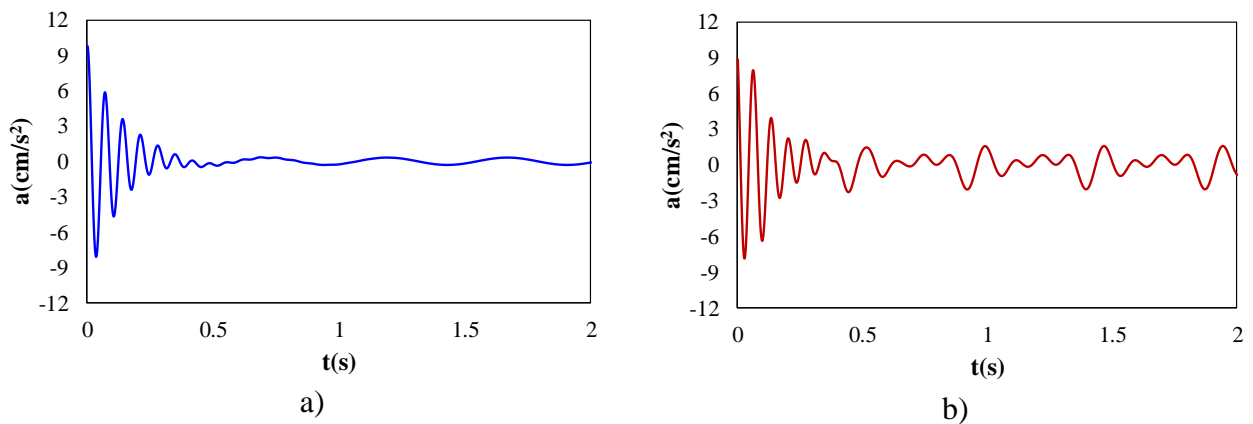


Figura 5.8 Respuesta dinámica numérica ante el caminar de una persona con las ecuaciones: a) carga 1, b) carga 2, c) carga 3, d) carga 4, e) carga 5 y f) carga 6

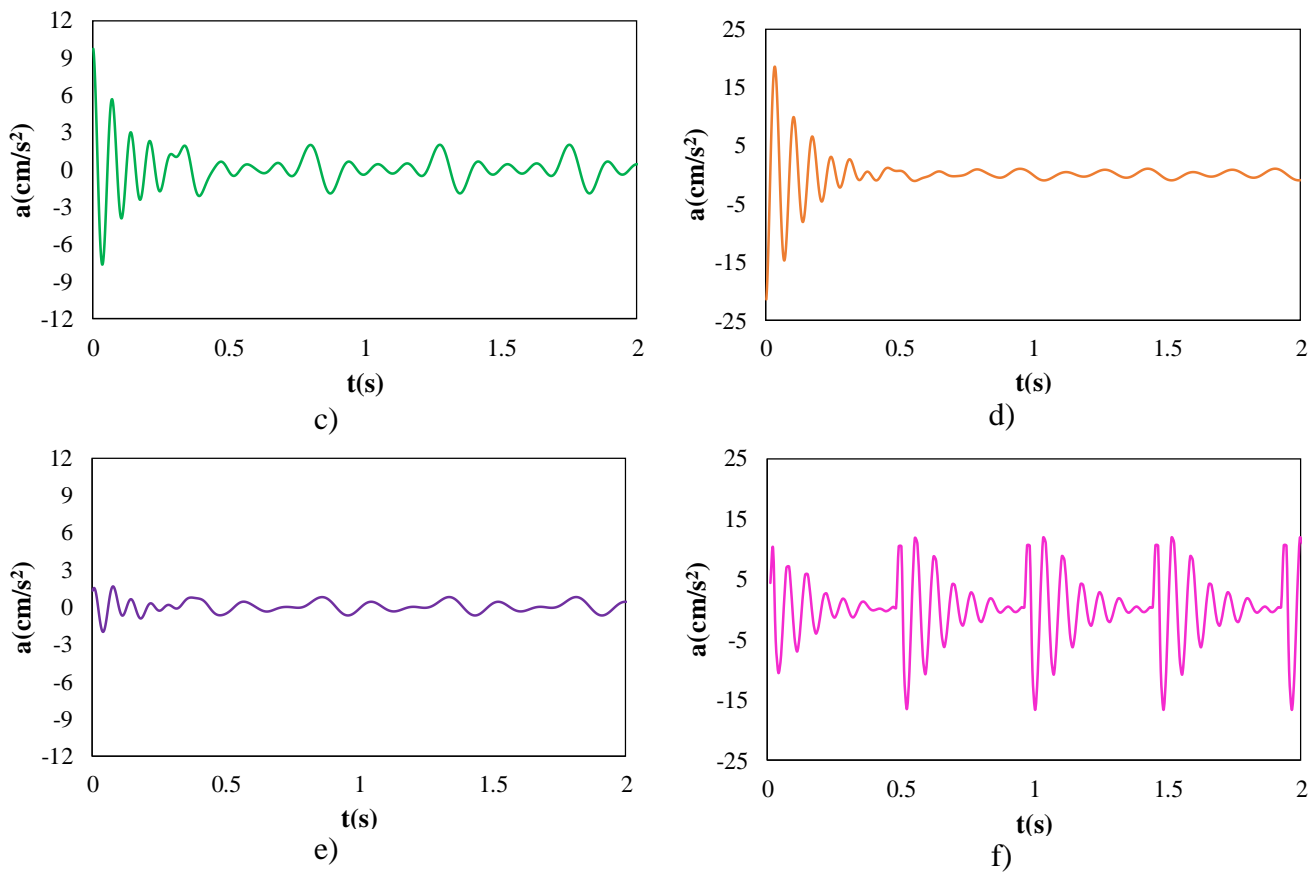


Figura 5.8 Continuación de Figura

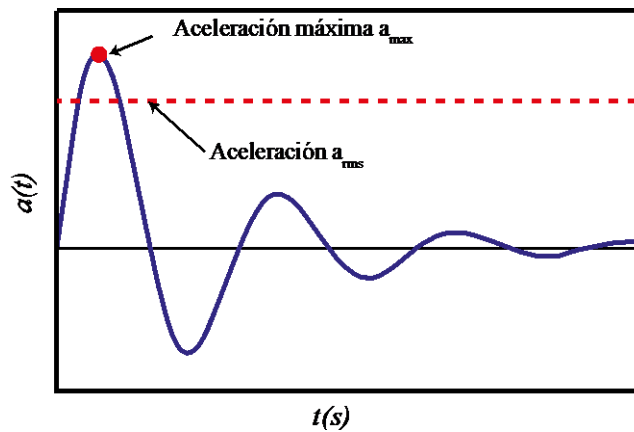


Figura 5.9. Aceleración máxima a_{rms} y aceleración efectiva a_{rms} ante vibración debida al caminar de personas

Tabla 5.7 Aceleraciones máximas y efectivas registradas tanto numérica como experimentalmente

Tipo de respuesta	Aceleración máxima (cm/s^2)							
	Experimental		Numérica					
	Medición 1	Medición 2	Carga 1	Carga 2	Carga 3	Carga 4	Carga 5	Carga 6
a_{max}	11.10	7.84	8.12	7.87	7.69	18.57	2.0	16.85
a_{rms}	7.28	5.75	5.80	5.57	5.44	13.15	1.42	11.46

Por otra parte, otra manera de evaluar las aceleraciones calculadas con las funciones de carga dinámicas aquí propuestas es mediante una esquematización en nomogramas de perceptibilidad como se muestra en la Figura 5.10, donde se observa que tanto para la aceleración máxima como para la aceleración *rms* existen vibraciones excesivas. Para esta última, se sobrepasa la curva con múltiplo 4, que corresponde al uso de oficinas.

Con base en los valores resumidos de la Tabla 5.7 se observa que existe una adecuada aproximación de las cargas 1, 2 y 3 con la medición 2 experimental, con errores menores del 3.6 y 12%. En el caso de las cargas 4, 5 y 6 se obtiene una aproximación baja en la aceleración. Por lo tanto, considerando la variación de los resultados de la prueba experimental se puede considerar el uso de la mayoría de las funciones de carga para representar de manera adecuada el caminar de personas.

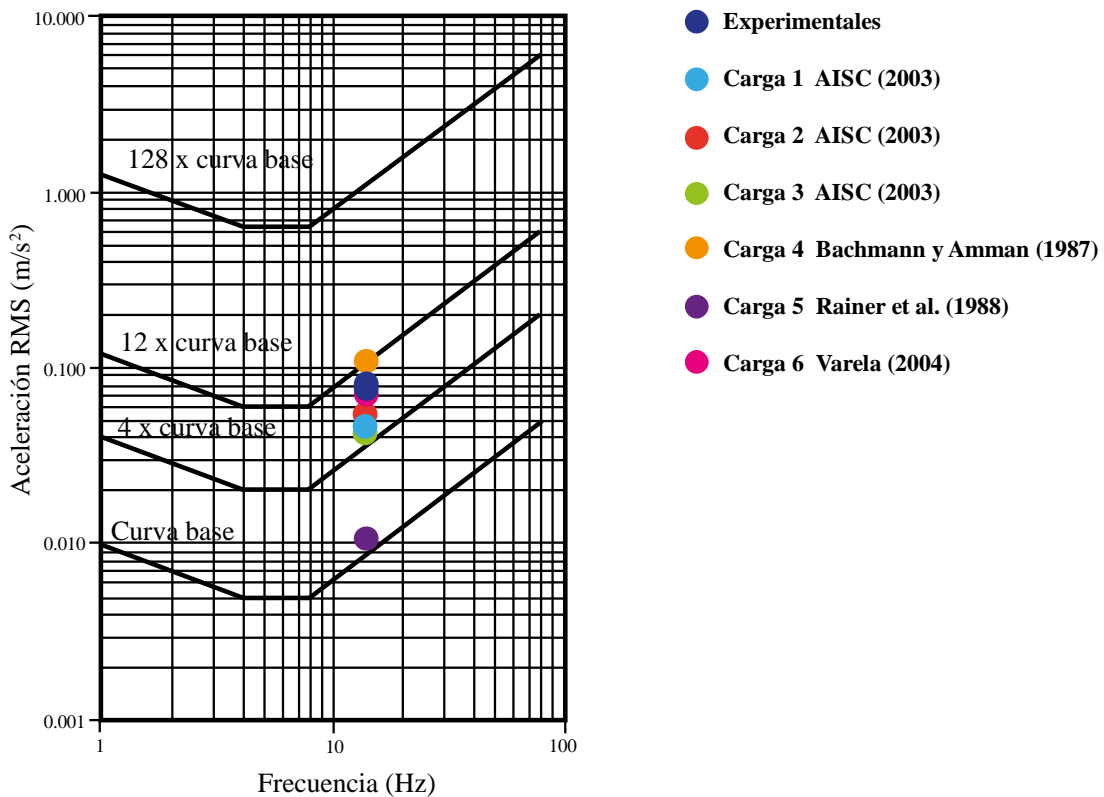


Figura 5.10. Evaluación de la aceleración a_{rms} ante vibración debida al caminar de personas

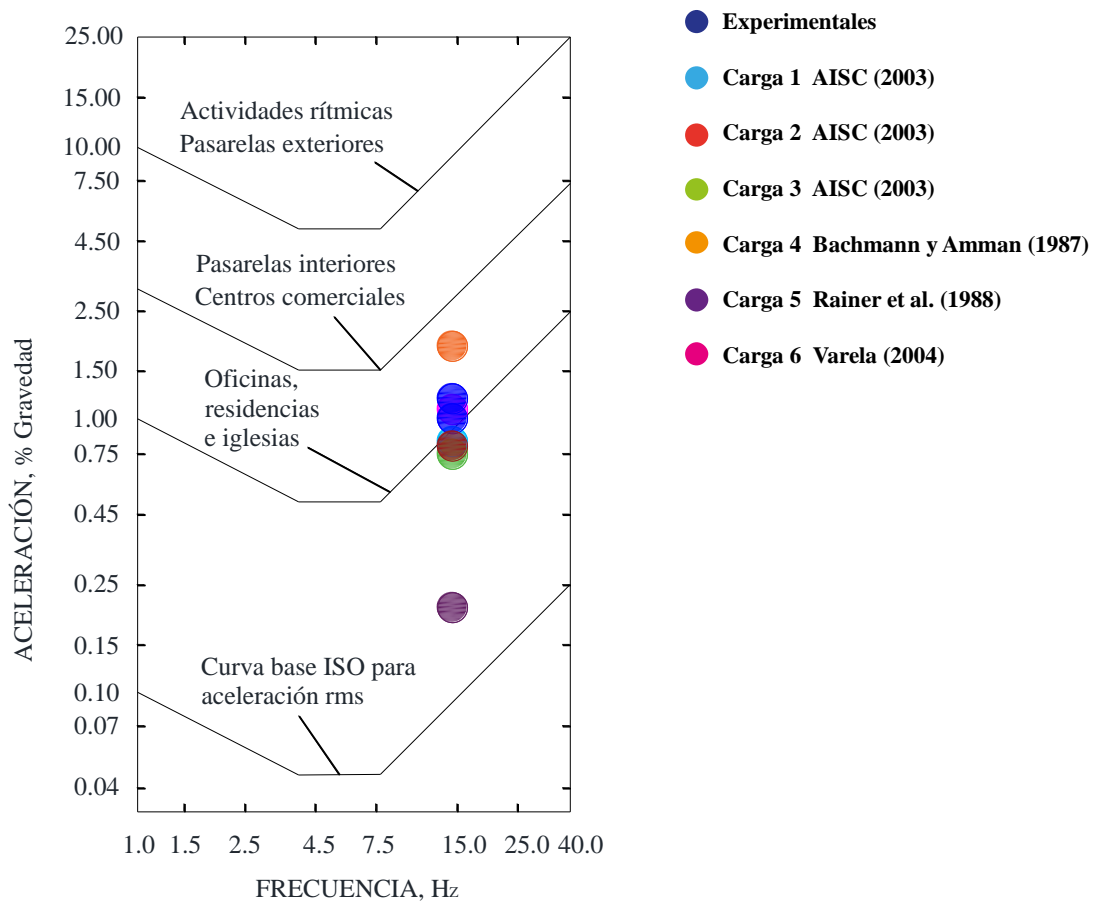


Figura 5.11. Evaluación de la aceleración máxima a_{max} ante vibración debida al caminar de personas

5.6 Formulación analítica para el cálculo de la aceleración en losas de concreto reforzado en dos direcciones

Se desarrolla una solución analítica de la ecuación de movimiento de una losa idealizada como un S1GDL, tal como lo hace el HIVOSS (2007). En este caso, se utiliza la carga dinámica 1 del AISC (1997), la cual está dada por la ec. (1.18). Un sistema continuo con masa y rigidez distribuida, se puede analizar a partir de un sistema equivalente de un grado de libertad, como se realizó en el capítulo 2, donde se utiliza una coordenada que representa el movimiento del punto con amplitud modal máxima. Por lo que, una losa, la cual tiene un número infinito de grados de libertad, puede idealizarse con su masa y rigidez equivalentes. La masa equivalente, conocida como masa modal, se obtiene a partir de la ecs. (1.8) y (1.10). Con base en estas expresiones, el manual europeo HIVOSS (2007) propone calcular M_{mod} donde η es igual a 0.25 para el caso de losas con apoyos rígidos simples. Dado que M_{mod} , así como la f_n son variables que se pueden calcular directamente, la rigidez modal K_{mod} se obtiene a partir de la expresión siguiente:

$$K_{mod} = (2\pi f_n)^2 M_{mod} \quad (5.3)$$

Con la M_{mod} y K_{mod} de una losa se plantea la ecuación de movimiento para un SIGDL equivalente tal que:

$$M_{mod}\ddot{u} + C_{mod}\dot{u} + K_{mod}u = F(t) \quad (5.4)$$

que equivale a:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P_o \cos \omega t \quad (5.5)$$

Dividiendo la ec. (5.5) entre M_{mod} , se tiene:

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n\dot{u} + \omega_n^2u = \frac{P_o}{m} \cos \omega t \quad (5.6)$$

La solución de la ecuación diferencial de segundo orden (5.6) se obtiene de su parte homogénea y su parte no homogénea con base en la teoría reportada en la literatura (Clough y Penzien, 1975). La solución de la ecuación homogénea se obtiene de la expresión siguiente:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (5.7)$$

La solución homogénea de la ec. (5.7) tiene la forma:

$$u(t) = e^{-\xi\omega_n t} (a_1 e^{i\omega_D t} + a_2 e^{-i\omega_D t}) \quad (5.8)$$

donde:

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (5.9)$$

λ es una constante desconocida, a_1 y a_2 son constantes complejas; utilizando las relaciones de Euler y desarrollando este procedimiento se obtiene la solución homogénea:

$$u_h(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) \quad (5.10)$$

donde A y B son valores reales y constantes, los cuales pueden determinarse en términos de las condiciones iniciales. Por otra parte, la solución particular no homogénea tiene la forma:

$$u_{nh}(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t \quad (5.11)$$

donde C y D son constantes reales y ω es la frecuencia de excitación. Dado que la solución completa de la ec (5.6) es la suma de la solución homogénea y la no homogénea se tiene que:

$$u(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + C \sin \omega t + D \cos \omega t \quad (5.12)$$

Por lo tanto, la ec. (5.12) así como sus derivadas, representan la respuesta dinámica del S1GDL equivalente. En la obtención del valor de cada coeficiente, se procede primero con C y D , los cuales se obtienen a partir de la primera y segunda derivada de la ec. (5.11):

$$u'_p = C\omega \cos \omega t - D\omega \sin \omega t \quad (5.13)$$

$$u''_p = -C\omega^2 \sin \omega t - D\omega^2 \cos \omega t \quad (5.14)$$

sustituyendo las ecs. (5.13) y (5.14) en la ec. (5.6) y ordenando términos se tiene que:

$$\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) C - \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right) D \right] \sin \omega t + \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) D + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right) C \right] \cos \omega t = \frac{P_o}{k} \cos \omega t \quad (5.15)$$

donde los términos que contienen C y D son coeficientes indeterminados y, para calcular su valor se igualan con los términos del lado derecho de la ecuación, teniendo el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) C - \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right) D = 0 \quad (5.16)$$

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) D + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right) C = \frac{P_o}{k} \quad (5.17)$$

despejando C de la ec. (5.16), sustituyendo en la ec. (5.17) y reordenando términos, se tiene que:

$$D = \frac{P_o}{k} \frac{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right]^2} \quad (5.18)$$

sustituyendo la ec. (5.18) en la ec. (5.16), se obtiene el valor siguiente:

$$C = \frac{P_o}{k} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right]^2} \quad (5.19)$$

Teniendo los valores definidos de C y D , se procede a calcular los valores de los coeficientes A y B , que se encuentran en la solución homogénea. Derivando el desplazamiento de la ec. (5.12) se tiene la velocidad como:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = & -e^{-\xi\omega_n t} (A\omega_D \text{sen } \omega_D t - B\omega_D \text{cos } \omega_D t) - D \text{sen } \omega t + C\omega \text{cos } \omega t - \\ & -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t} (A \text{cos } \omega_D t + B \text{sen } \omega_D t) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Considerando como condiciones iniciales $u(0)=u_o$ y $\dot{u}(0)=v_o$ en la ec. (5.12) se tiene que:

$$u(0) = A + D \Rightarrow A = \underbrace{u(0)}_{u_o} - D \quad (5.21)$$

mientras que para la velocidad en la ec. (5.20) se tiene:

$$\dot{u}(0) = \underbrace{B\omega_D + C\omega - \xi\omega_n A}_{v_o} \Rightarrow B = \frac{\dot{u}(0) + \xi\omega_n A - C\omega}{\omega_D} \quad (5.22)$$

Sustituyendo el valor de A de la ec. (5.21) en la ec. (5.22) se tiene que:

$$B = \frac{\dot{u}(0) + \xi\omega_n u(0) - \xi\omega_n D - C\omega}{\omega_D} \quad (5.23)$$

Sustituyendo los valores de A y B en la ec. (5.12), se obtiene la solución general de la ecuación de movimiento de un SIGDL equivalente de la ec. (5.6):

$$\begin{aligned} u(t) = & e^{-\xi\omega_n t} \left((u(0) - D) \text{cos } \omega_D t + \frac{\dot{u}(0) + \xi\omega_n u(0) - \xi\omega_n D - C\omega}{\omega_D} \text{sen } \omega_D t \right) + \\ & + C \text{sen } \omega t + D \text{cos } \omega t \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde C y D están determinadas por las ecs. (5.18) y (5.19). La velocidad se obtiene sustituyendo los valores de A , B , C y D en la ec. (5.20), mientras que la aceleración se obtiene sustituyendo estos valores en la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) = & e^{-\xi\omega_n t} \left[(2A\omega_D \xi\omega_n + B\xi^2 \omega_n^2 - B\omega_D^2) \text{sen}(\omega_D t) + \right. \\ & + (A\xi^2 \omega_n^2 - 2B\omega_D \xi\omega_n - A\omega_D^2) \text{cos}(\omega_D t) + \\ & + (A\xi^2 \omega_n^2 - 2B\omega_D \xi\omega_n - A\omega_D^2) \text{cos}(\omega_D t) \left. \right] - \\ & - [C\omega^2 \text{sen}(\omega t) + D\omega^2 \text{cos}(\omega t)] \end{aligned} \quad (5.25)$$

Cabe señalar que las ecs. (5.24) y (5.25) están en función de frecuencias circulares, donde la frecuencia de la carga dinámica ω depende de la frecuencia de paso f_s y del armónico i , de tal forma que:

$$\omega = 2\pi i f_s \quad (5.26)$$

Por otra parte, para el término que define el peso de la persona se tiene que:

$$P_o = P\alpha_i \quad (5.27)$$

donde P es el peso de la persona y α_i es un coeficiente dinámico con valor de 0.5, tal como se muestra en la ec. (1.18).

5.7 Validación de solución analítica

Para validar la solución analítica dada en la ec. (5.24), la cual corresponde al movimiento de una losa analizada como un S1GDL, se compara con dos tipos de soluciones aproximadas: método de Newmark para un S1GDL y el método de integración directa para un modelo de elementos finitos de múltiples grados de libertad. El primer método se basa en una metodología iterativa para resolver la ecuación de movimiento; los valores de γ y β son de 1/2 y 1/4, respectivamente, los cuales se consideran adecuados para analizar S1GDL (Clough y Penzien, 1975). Por otra parte, el modelo de elementos finitos realizado con el programa MIDAS GEN V18 (2018), calcula el movimiento de la losa para cada incremento del tiempo mediante el método de Newmark, cuyos valores de γ y β son de 1/2 y 1/4, respectivamente.

El modelo base para comparar las 3 soluciones consta del tablero de estudio de la Figura 4.35 con apoyos rígidos simples en sus bordes, con claro largo $a_2=620$ cm y claro corto $a_1=560$ cm, espesor es de 13 cm. El concreto tiene un módulo de elasticidad de 292304 kg/cm^2 y una relación de amortiguamiento de 0.078. Se incluyó una carga muerta adicional de 90 kg/m^2 . Por otra parte, la carga dinámica aplicada es la función mostrada en la Figura 5.7a, que corresponde a una función $F(t)=P\alpha_i \cos(2\pi i f_s t)$ dada en la ec. (1.18) y cuyos valores de coeficientes se muestran en la Tabla 5.8

Es importante mencionar que la función de carga se aplicó en un sólo nodo en el centro del claro. La masa y rigidez modales se calcularon con las ecs. (1.10) y (5.3), respectivamente. Por lo que, al sustituir estos valores junto con los de la Tabla 5.8 en la ec. (5.24), se tienen los valores resumidos en la Tabla 5.9.

Tabla 5.8 Propiedades dinámicas de fuente de excitación

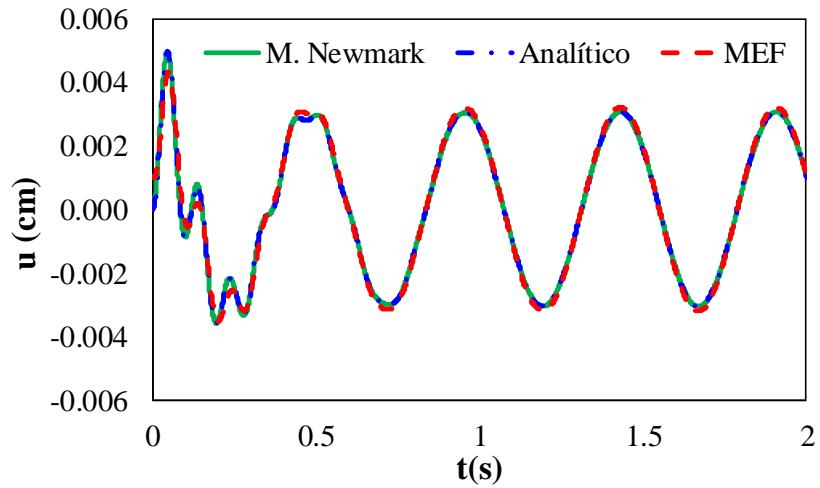
Concepto	Valor
P (kg)	97
α_i	0.5
P_o (kg)	48.5
Armónico i	1
f_s (Hz)	2.1

Tabla 5.9 Propiedades dinámicas de losa de concreto

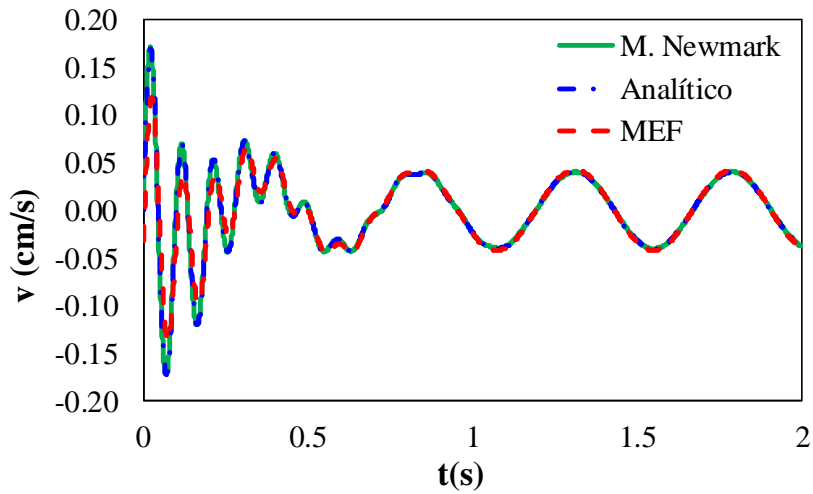
Variables	Magnitud
M_{mod} (kgs²/cm)	3.73
K_{mod} (kg/cm)	16483.14
P_o/k_{mod} (cm)	0.003

El tablero de la Figura 4.35 se resolvió con las tres aproximaciones, con las cuales se determinó el desplazamiento, velocidad y aceleración. Estas soluciones se muestran en la Figura 5.12, donde se observa una diferencia de aproximadamente el 14% en el desplazamiento entre la solución analítica y la numérica. La velocidad y la aceleración tienen diferencias de aproximadamente el 20 y el 26 %, respectivamente, entre la solución analítica y la numérica. Esta diferencia mayor se atribuye a la suavización de la respuesta en la transición del desplazamiento a la aceleración en el modelo numérico. En las tres soluciones se observa una convergencia similar conforme predomina la respuesta estacionaria. Por lo tanto, se valida la solución analítica desarrollada en las ecs. (5.24) y (5.25) para calcular $u(t)$, $\dot{u}(t)$ y $\ddot{u}(t)$ en un tablero de concreto.

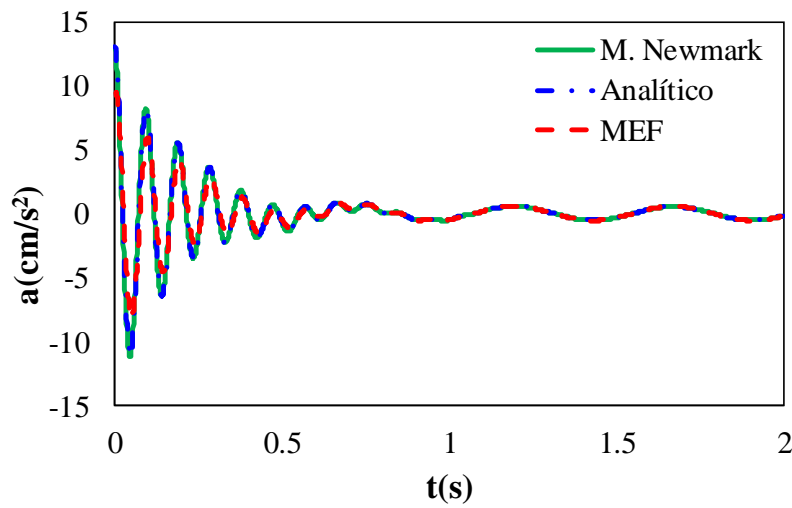
Una vez validada la solución analítica con la solución de Newmark y la del Método de elementos finitos se procede a validarla con un resultado experimental del modelo mostrado en la Figura 4.52, cuyas aceleraciones se muestran en la Figura 5.8. Para la validación de la solución analítica se utilizaron dos mediciones realizadas en campo en el centro de la losa, de las cuales se utilizó un intervalo de los registros de 1.5 s, aproximadamente, como se muestra en las Figuras 5.13 y 5.14, que corresponde al momento en el que la persona camina cerca del sensor S1 durante la prueba, como se muestra en la Figura 4.41b. En este intervalo de tiempo ocurre una aceleración que es mayor que cualquier otro máximo registrado durante el trayecto de la persona sobre otras áreas de la losa.



a)

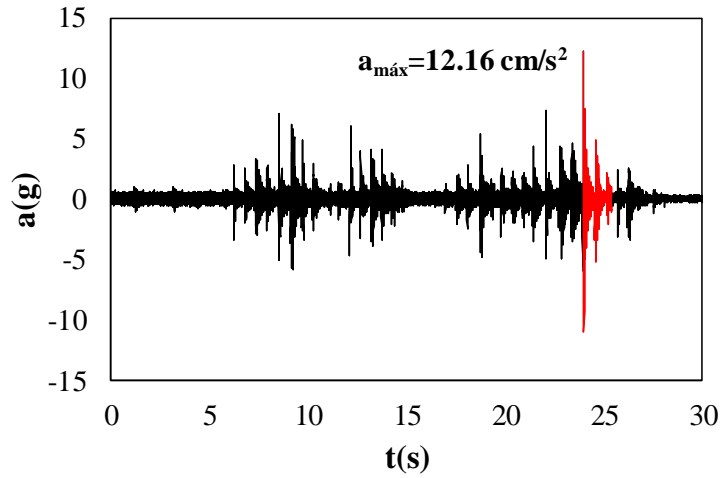


b)

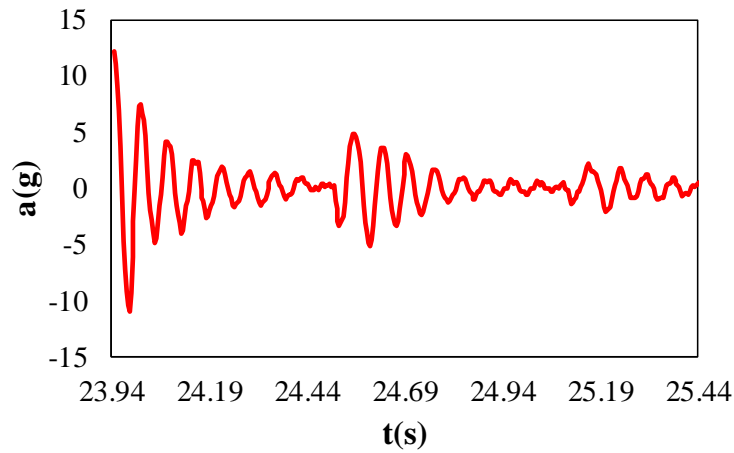


c)

Figura 5.12. Comparación entre las soluciones analítica, método de Newmark y modelo numérico de las variables siguientes: a) desplazamiento, b) velocidad y c) aceleración.

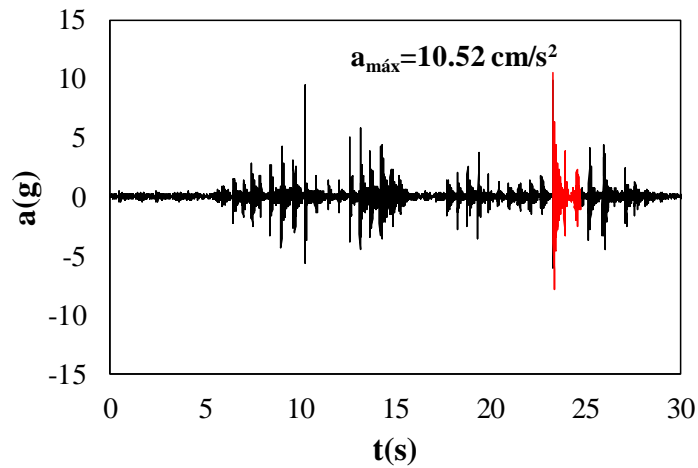


a)



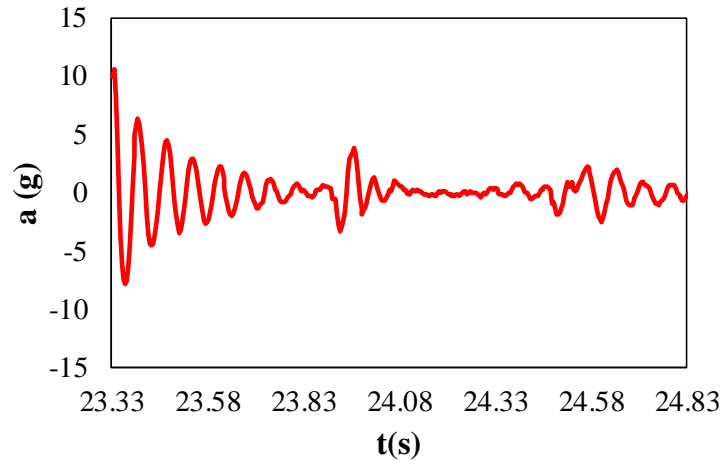
b)

Figura 5.13. Aceleración de losa de concreto en el centro del claro, medición 1 con: a) segmento de registro tomado para calibración y b) segmento de registro



a)

Figura 5.14. Aceleración de losa de concreto en el centro del claro, medición 2 con: a) segmento de registro tomado para calibración y b) segmento de registro



b)

Figura 5.14. Continuación de Figura

Teniendo las aceleraciones máximas experimentales, se calculan las soluciones numéricas y analíticas. En el caso analítico, la M_{mod} y f_n se obtienen del modelo numérico. La rigidez modal K_{mod} se obtiene con la ec. (5.3), como se resume en la Tabla 5.10. Los coeficientes de la Tabla 5.11 se obtienen con las variables de la Tabla 5.8. La aceleración se obtiene de la ec. (5.25) como se observa en la Figura 5.15, donde se tiene una aceleración máxima de 10.89 cm/s^2 . En el caso numérico, al aplicar la carga dinámica se tiene una aceleración máxima de 9.79 cm/s^2 como se muestra en la Figura 5.16.

Tabla 5.10 Propiedades dinámicas de losa de concreto reforzado

Variable	Magnitud
$M_{mod} \text{ (kgs}^2\text{/cm)}$	4.45
$f_n \text{ (Hz)}$	14.52
$k_{mod} \text{ (kg/cm)}$	37038.05
$P_0/k_{mod} \text{ (cm)}$	0.0013

Tabla 5.11 Coeficientes para la ec. (5.25)

Coeficientes	Unidades (cm)
A	-0.0013
B	-0.0001
C	0.00003
D	0.00134

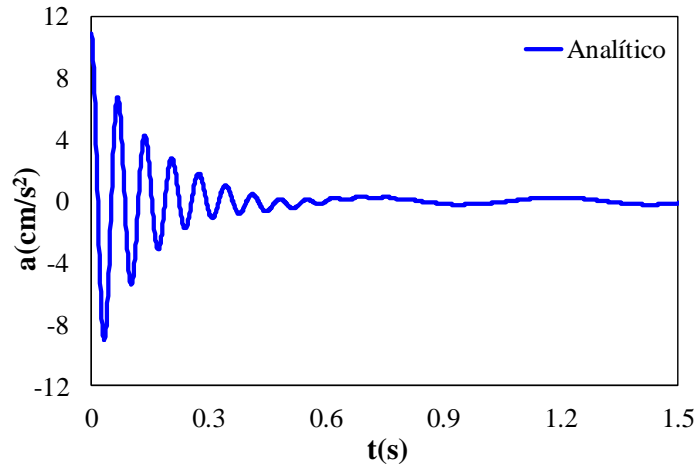


Figura 5.15. Solución analítica de respuesta dinámica en términos de aceleración

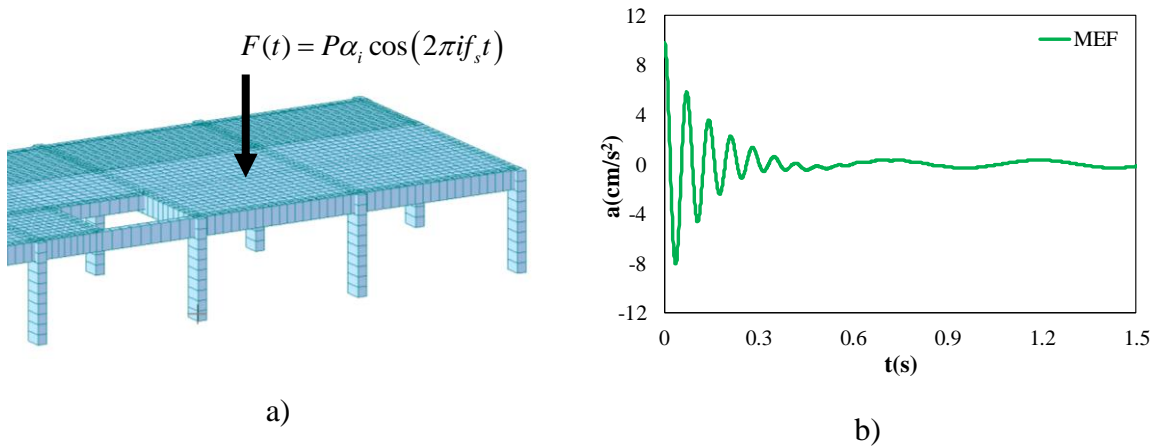
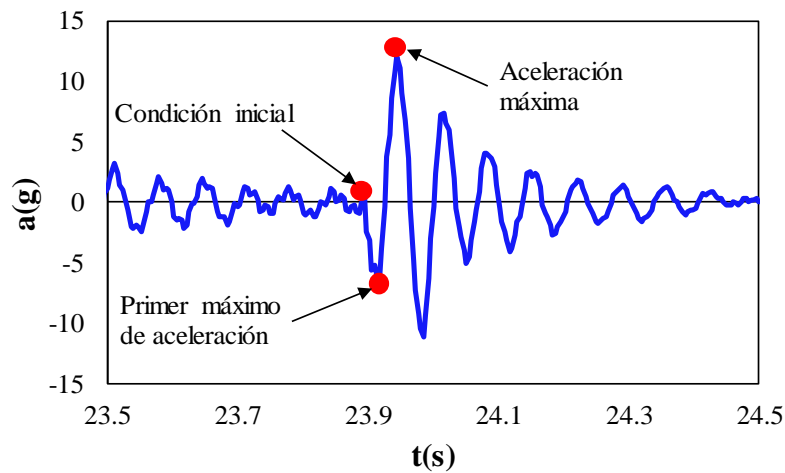


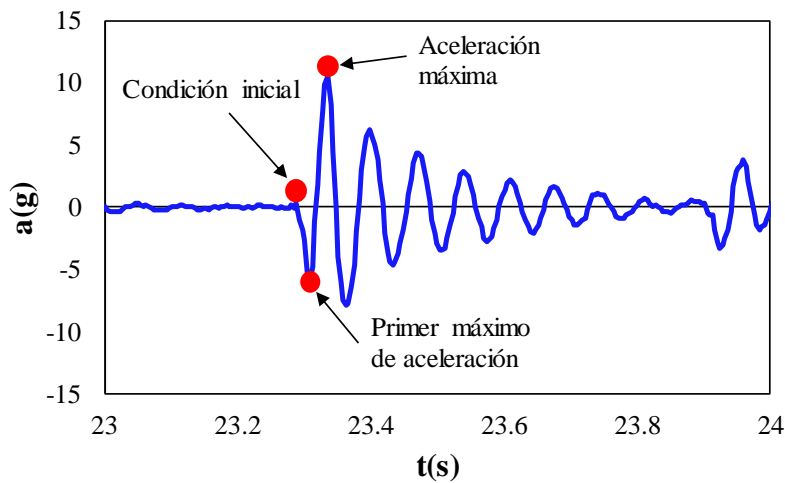
Figura 5.16. Carga aplicada en modelo numérico para análisis dinámico de tablero de estudio: a) aplicación de carga y b) aceleración

Teniendo las soluciones experimental, analítica y numérica, se procede a evaluar la aproximación de las dos últimas. Por lo tanto, se toma como base las mediciones experimentales que se muestran en la Figura 5.17 donde se observan las amplitudes de aceleración que se desarrollan en el centro del claro de la losa ante el caminar de una persona. Primeramente, para la condición de aceleración máxima, la cual se desarrolla después del primer máximo de aceleración como se muestra en la Figura 5.17 se realiza una comparación con las soluciones analítica y numérica. En la Figura 5.18 se muestra que la diferencia con la medición experimental es aproximadamente de entre 10 y el 20% en la medición 1; mientras que, en la medición 2 se tienen diferencias de aproximadamente el 3.5 y el 7% como se muestra en la Tabla 5.12, lo cual es aceptable. En la comparación de la Figura 5.18a se tiene que, cuando $t=1s$, ocurrieron dos pasos cerca del sensor S1, ya que la frecuencia del caminar es de 2.1 Hz, dos pasos por segundo aproximadamente. Bajo esta condición se observa una diferencia importante entre la parte estacionaria de la solución analítica y la experimental,

como se observa también en la Figura 5.18b. Esto se atribuye a que en el caminar de una persona existen frecuencias altas de excitación que pueden activar modos superiores en la losa. Como ejemplo de este efecto se tienen las aceleraciones en las Figuras 5.8b o 5.8c, donde existen amplitudes mínimas de aceleración después de la zona inicial de máximos, lo cual se debe a las funciones de carga que incluyen frecuencias altas, como las definidas en las ecs. (1.17), (1.19), (1.16) y (1.21). Este efecto no es visible en la solución analítica desarrollada, ya que la función de carga utilizada, cuyo valor es de 2.1 Hz, sólo excita un solo modo del sistema de piso. Sin embargo, esta solución es aceptable, ya que la frecuencia más baja de excitación es la más próxima a generar demandas máximas en un modo fundamental de vibración. Es importante mencionar que, en la calibración con las mediciones experimentales, el modelo analítico parte del inicio del reposo, es decir, en $t=0$ s, $u(0)=0$ cm, $\dot{u}(0)=0$ cm/s.

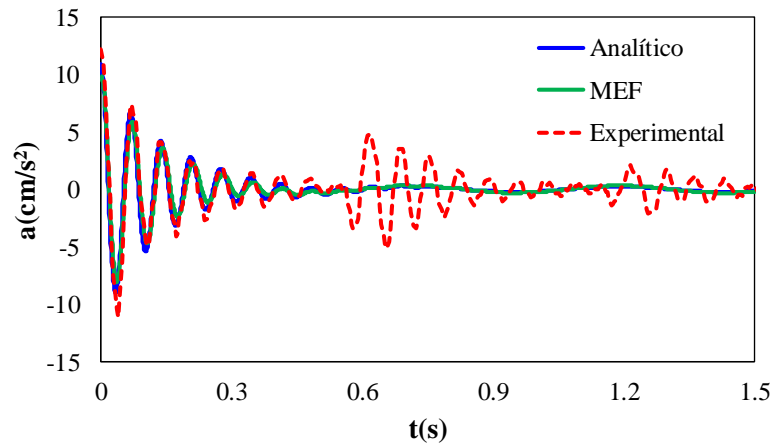


a)

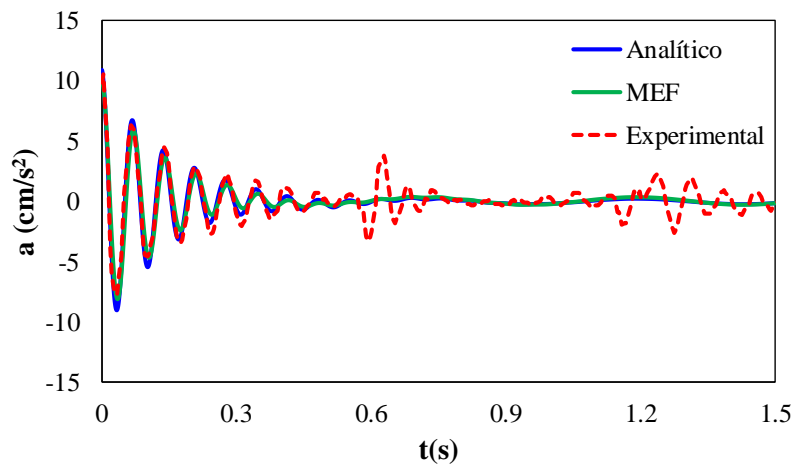


b)

Figura 5.17. Condiciones iniciales obtenidas de aceleraciones experimentales para las mediciones: a) 1 y b) 2



a)



b)

Figura 5.18. Aceleraciones de las soluciones analítica, numérica y experimental con las mediciones: a) 1 y b) 2

Tabla 5.12 Comparación entre soluciones en losa de prueba

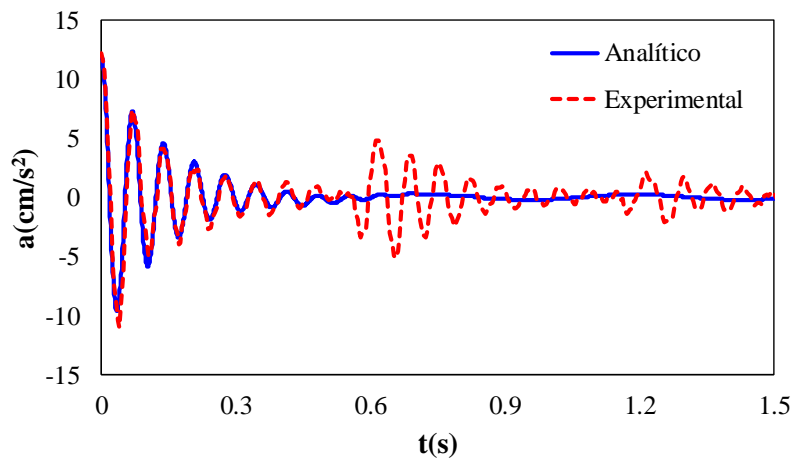
Mediciones experimentales	Diferencia (%)	
	Analítico	Numérico
1	10.00	19.50
2	3.50	7.00

Considerando las condiciones iniciales en la comparación de los resultados experimentales y la solución analítica, se parte de los registros de la Figura 5.17, donde se observa el primer máximo de aceleración se debe a la primera respuesta del sistema conforme la persona completa su amplitud máxima de excitación hasta llegar al punto de aceleración máxima. Por lo que, las condiciones iniciales de aceleración se obtienen apartir de un instante antes del inicio del cambio en la excitación como se observa en la Figura 5.17, cuyos valores se resumen en la Tabla 5.13. Comparando las respuestas obtenidas para las mediciones 1 y 2, se tiene una tendencia similar como se observa en la Figura 5.19 donde las diferencias entre

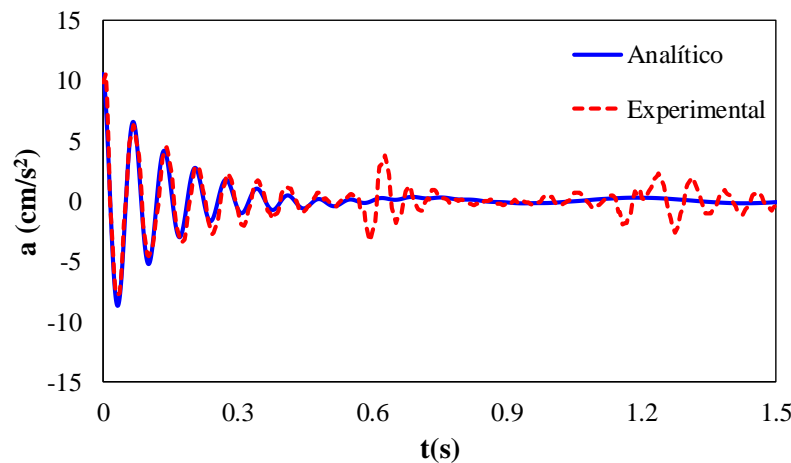
la solución analítica y los resultados experimentales es de aproximadamente 3 y 0.1% para las mediciones 1 y 2, respectivamente. Esto se debe principalmente a la magnitud mínima de movimiento antes del inicio de la excitación por el caminar, la cual es semejante a la de las condiciones iniciales utilizadas en la comparación de la Figura 5.18.

Tabla 5.13 Condiciones iniciales obtenidas de pruebas experimentales

Mediciones experimentales	Magnitudes de movimiento		
	Aceleración Experimental cm/s^2	Pseudo velocidad cm/s	Pseudo desplazamiento cm
1	0.46	0.0050	0.00006
2	0.33	0.0036	0.00004



a)



b)

Figura 5.19. Comparación de aceleraciones analíticas y experimentales considerando las condiciones iniciales que se resumen en la Tabla 5.13 para las mediciones: a) 1 y b) 2.

Sin embargo, es necesario considerar que la solución analítica será utilizada por un diseñador estructural que no cuenta con condiciones iniciales durante el diseño. Por lo que, la comparación resumida en la Tabla 5.12 se considera aceptable en la obtención de la aceleración máxima en un sistema de piso.

En las soluciones mostradas en la Figura 5.18, tanto la f_n como la M_{mod} se obtuvieron del modelo numérico con el objetivo de validar la solución analítica. En casos prácticos, estas variables se calculan a partir de expresiones analíticas, las cuales, a pesar de tener un nivel de aproximación aceptable pueden presentar una diferencia considerable con respecto a la solución real, tal como se muestra para la f_n en la Tabla 5.5. El mismo caso se presenta para el cálculo de la relación de masa modal, donde al comparar su valor $\eta=0.25$ de la ec. (1.8) con el valor numérico $\eta=0.23$, se tiene una diferencia del 8% aproximadamente, lo cual se considera aceptable. Por lo tanto, si se desea una mejor aproximación tanto de la masa modal como de la f_n , es necesario realizar modelos numéricos.

5.8 Ejemplo analítico-práctico de evaluación de vibración en losas

Se presenta un procedimiento analítico-práctico para el análisis de losas de concreto reforzado ante vibración debida al caminar de personas. Tomando como ejemplo el sistema de piso estudiado en la sección 4.5, se calcula la aceleración a partir de la solución analítica desarrollada. Primeramente, se calcula la f_n a partir del análisis de un tablero aislado, como se muestra en la Tabla 5.4, teniendo como resultado $f_n=13.07$ Hz. En el cálculo de la masa modal, se obtiene la masa total del tablero como se muestra en la Tabla 5.14; utilizando la ec. (1.8), donde $\eta=0.25$ se tiene que la masa modal M_{mod} es igual a $5.24 \text{ kgs}^2/\text{cm}$.

Tabla 5.14 Peso de losa de concreto reforzado

Elementos en estructura	Peso de tablero (kg)	Masa de tablero (kgs^2/cm)
Trabes	6651	6.78
Losa	10791	11
Carga adicional	3120	3.18
Total	20562	20.96

Teniendo la f_n y la M_{mod} , se sustituyen en la ec. (5.3) para obtener la rigidez modal:

$$K_{mod} = (2\pi f_n)^2 M_{mod} = (2\pi(13.07))^2 5.24 = 35338 \text{ kg/cm}$$

En resumen, teniendo las propiedades dinámicas de la losa, como se muestra en la Tabla 5.15, y la carga de excitación $F(t)=P\alpha_i \cos(2\pi f_s t)$, donde $P=97 \text{ kg}$, $\alpha_i=0.5$, $i=1$ y $f_s=2.1 \text{ Hz}$, se obtienen los coeficientes que se muestran en la Tabla 5.16.

Tabla 5.15 Propiedades dinámicas de losa de concreto

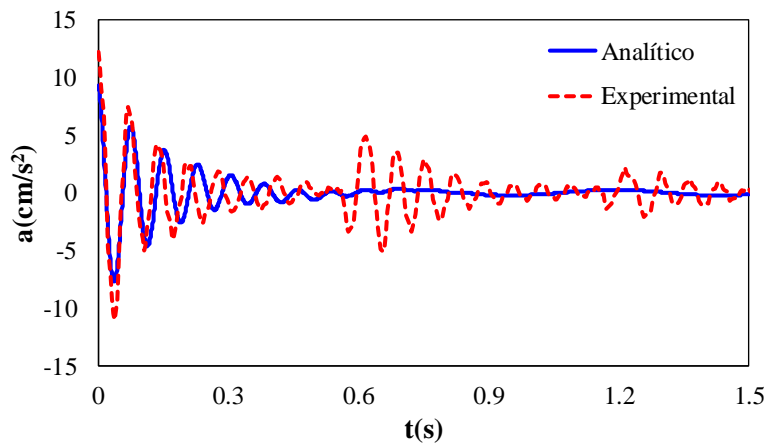
Concepto	Valor
$M_{mod} (\text{kgs}^2/\text{cm})$	5.24
$f_n (\text{Hz})$	13.03
$k_{mod} (\text{kg/cm})$	35122
$P_0/k_{mod} (\text{cm})$	0.0014

Tabla 5.16 Coeficientes de ec. (5.25) para obtención de la aceleración

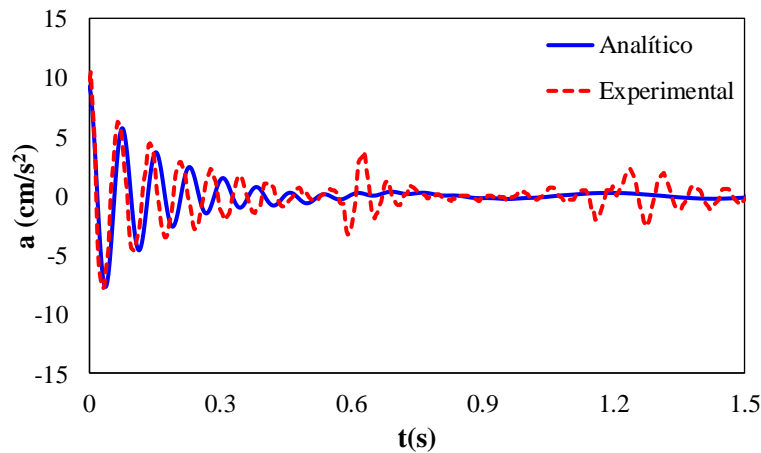
Coeficientes	Unidades (cm)
A	-0.0014
B	-0.0001
C	0.00004
D	0.0014

Sustituyendo los datos de las Tablas 5.15 y 5.16 en la ec. (5.25), se calcula la aceleración máxima, la cual se compara con la medición experimental, mostrada en las Figuras 5.13 y

5.14, como se muestra en la Figura 5.20. La diferencia entre respuestas máximas es de aproximadamente el 24 y 13% con las mediciones experimentales 1 y 2, respectivamente. Como se observa, esta diferencia es relativa debido a las incertidumbres que pueden existir durante la excitación; sin embargo, se observa que existe una tendencia aceptable entre la solución exacta y la experimental. Por lo tanto, se concluye que los procedimientos analíticos para obtener las propiedades dinámicas de la estructura y de la carga de excitación son aceptables para calcular la respuesta dinámica máxima en un sistema de piso de concreto reforzado.



a)



b)

Figura 5.20. Comparación de la aceleración entre las soluciones establecidas por la ec. (5.25) y la medición experimental con las mediciones: a) 1 y b) 2

5.9 Metodología de análisis

Con el objetivo de establecer una metodología de análisis para obtener la respuesta dinámica de un sistema de piso de concreto reforzado ante el caminar de personas, se define una serie de pasos como se muestra en la Figura 5.21, donde se observa que para realizar tal evaluación es necesario obtener 4 parámetros. Variables como la f_n , se obtienen de los procedimientos mostrados en la sección 2.3; mientras que, M_{mod} y K_{mod} , se calculan como se muestra en la sección 5.6. Por su parte, la relación de amortiguamiento se obtiene a partir de recomendaciones derivadas de la literatura como las mostradas en la Tabla 1.7.

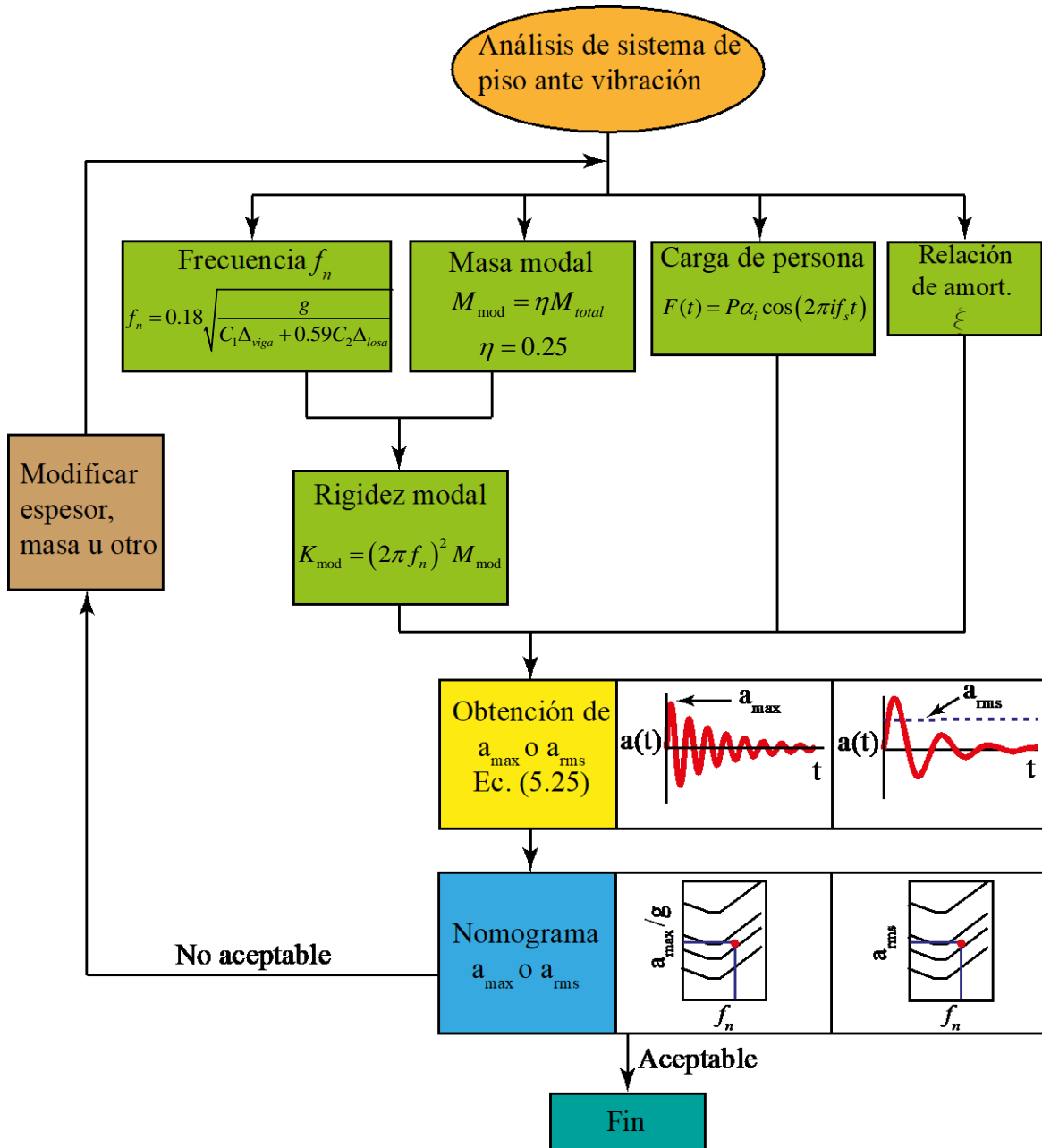


Figura 5.21. Diagrama de flujo del cálculo de una losa de concreto reforzado ante vibración debida al caminar de personas

Descripción de modelos de análisis

Se estudia una losa de concreto reforzado con claro largo a_2 de 8m con relaciones de claro $m=a_1/a_2$ de 0.5 y 1.0; cada losa consta de paneles aislados con columnas cuadradas en sus esquinas con un ancho de 50 cm. En este procedimiento se realiza una comparación de la solución analítica con la derivada de modelos numéricos, los cuales se muestran en la Figura 5.22. En general, los modelos tienen una resistencia a compresión del concreto $f'_c=300$ kg/cm², el módulo de elasticidad es $E=14000(300)^{1/2}=242487$ kg/cm² de acuerdo a NTCC-17 (2017) para concretos clase 1, cuyo agregado es tipo basáltico. Para el diseño se utilizan cargas distribuidas debidas a carga muerta con los elementos que se enlistan en la Tabla 2.14 cuyo valor total es 280 kg/m², de acuerdo a lo especificado en las NTCC-17 (2017) para el uso de oficinas, despachos y laboratorios. Mientras que, como fuente de masas se toma en cuenta la carga por peso propio. Los requerimientos de dimensionamiento de traveses cumplen con los requisitos mínimos para marcos dúctiles de las NTCC-17 (2017). Es importante mencionar que sólo se realizaron análisis debidos a carga gravitacional. Por otra parte, se realizó el diseño por resistencia de vigas y losa, así como la correspondiente revisión por estado límite de servicio; en este último se verificó que la relación entre el desplazamiento calculado en la losa y el desplazamiento permisible fuera lo más cercano a la unidad. En la Tabla 5.17 se muestran los peraltes de losas y traveses, en este último se utilizó un ancho de trabe de 25 cm.

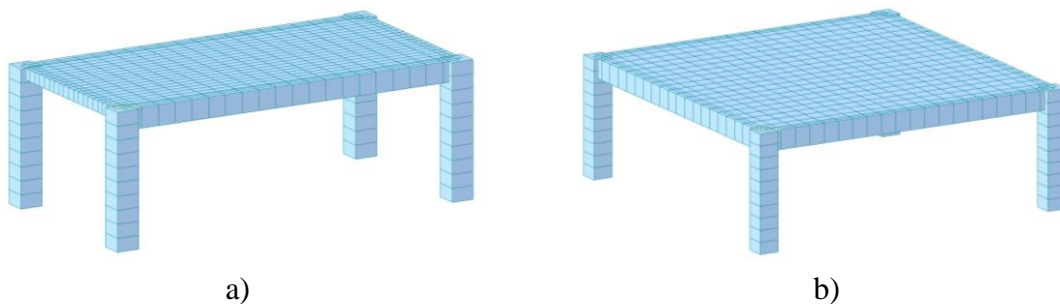


Figura 5.22. Losas con claro largo $a_2=8\text{m}$ con relaciones de claro a_1/a_2 de: a) 0.5 y b) 1.0

Tabla 5.17 Peraltes de losas y vigas

m	a_2 (cm)		
	800		
	e_{losa} (cm)	$h_{\text{claro } a_1}$ (cm)	$h_{\text{claro } a_2}$ (cm)
0.5	11	25	45
1	17	50	50

Evaluación de losas de concreto

1.- Cálculo de la frecuencia natural

La losa rectangular tiene una distribución de la carga sobre las vigas como se muestra en la Figura 5.23a, de la cual se considera una franja corta como se muestra en la Figura 5.23b.

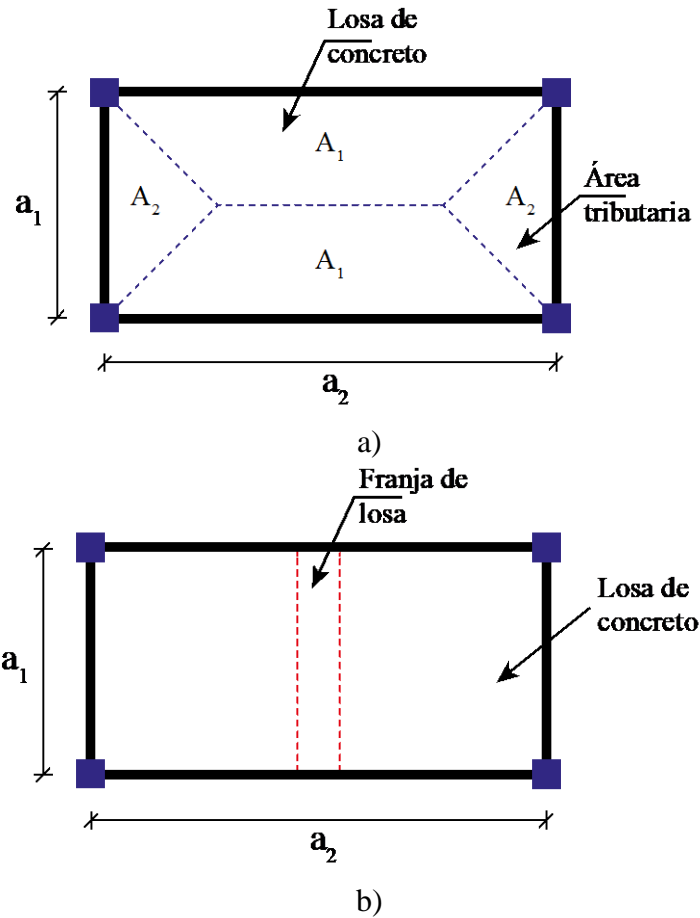


Figura 5.23. Distribución de cargas sobre: a) vigas y b) franja de losa

La bajada de cargas sobre la trabe en la dirección a_2 , como para la losa en la dirección a_1 , se resume en las Tablas 5.18 y 5.19, respectivamente.

Tabla 5.18 Cargas muertas en trabe de concreto reforzado

Variable	m=0.5	m=1.0
	Magnitud	
a_1 (cm)	400	800
a_2 (cm)	800	800
A_1 (cm ²)	120000	160000
w_{propio} (kg/cm ³)	0.0024	0.0024
w_{bajada} (kg/cm)	3.96	8.17
w_{trabe} (kg/cm)	2.70	3.00
w_{total} (kg/cm)	6.67	11.17

Tabla 5.19 Cargas muertas en franja de losa de concreto reforzado

Variable	m=0.5	m=1.0
	Magnitud	
Ancho de franja (cm)	100	100
a ₁ (cm)	400	800
w _{propio} (kg/cm ³)	0.0024	0.0024
w _{franja} (kg/cm)	2.64	4.08

Para el cálculo de la frecuencia natural se utilizan las ecs. (2.44) y (2.45). Por lo que, en la losa con relación m=0.5 se tiene que:

$$C_1 = 1.56 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{0.29} = 1.56 \left(\frac{400}{800} \right)^{0.29} = 1.27$$

$$C_2 = 1.18 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{-0.69} = 1.18 \left(\frac{400}{800} \right)^{-0.69} = 1.90$$

Para el cálculo de la deflexión máxima, se utiliza la ecuación del desplazamiento máximo en una viga empotrada:

$$\Delta_{viga} = \frac{w_{total} l^4}{384EI} = \frac{6.67(800)^4}{384(242387)(189843)} = 0.15 \text{ cm} \quad (5.28)$$

$$\Delta_{losa} = \frac{w_{franja} l^4}{384EI} = \frac{2.64(400)^4}{384(242387)(11092)} = 0.065 \text{ cm} \quad (5.29)$$

Sustituyendo en la ec. (2.46) para obtener el valor de la frecuencia natural fundamental, se tiene que:

$$f_n = 0.18 \sqrt{\frac{g}{C_1 \Delta_{viga} + 0.59 C_2 \Delta_{losa}}} = 0.18 \sqrt{\frac{981}{1.27(0.15) + 0.59(1.90)(0.065)}} = 10.83 \text{ Hz}$$

En el caso de la losa con relación m=1.0, se realiza un procedimiento similar al de la losa con relación m=0.5, como se muestra en la Tabla 5.20.

Tabla 5.20 Cálculo de la frecuencia natural en losa con relación m=1.0

Variable	Magnitud
c ₁	1.56
c ₂	1.18
Δ _{viga} (cm)	0.19
Δ _{losa} (cm)	0.44
f _n (Hz)	7.28

2.- Cálculo de la masa modal M_{mod}

La masa modal de un sistema de piso depende de la masa total M_{total} y un factor η , como se muestra en la ec. (1.8). Para obtener M_{total} , se calcula el peso total de cada sistema de piso, como se muestra en la Tabla 5.21.

Tabla 5.21 Peso de losas de concreto reforzado con relaciones m de 0.5 y 1.0

Elementos en estructura	m=0.5		m=1.0	
	Peso de tablero (kg)	Masa de tablero (kgs²/cm)	Peso de tablero (kg)	Masa de tablero (kgs²/cm)
Trabes	3936	4.01	6336	6.46
Losa	8448	8.61	26112	26.61
Total	12384	12.62	32448	33.07

Dado que η depende de una configuración deformada de la losa, la cual es similar ante cualquier condición de borde, se propone $\eta=0.25$. Por lo tanto, la masa modal en la losa con relación $m=0.5$ es:

$$M_{mod} = \eta M_{total} = 0.25(12.62) = 3.15 \text{ kgs}^2 / \text{cm}$$

Para la losa con relación $m=1.0$ se tiene que:

$$M_{mod} = \eta M_{total} = 0.25(33.07) = 8.27 \text{ kgs}^2 / \text{cm}$$

3.- Cálculo de la rigidez modal K_{mod}

La rigidez K_{mod} , correspondiente a la rigidez traslacional en la losa se obtiene de la ec. (5.3). En el caso de la losa con relación $m=0.5$:

$$K_{mod} = (2\pi f_n)^2 M_{mod} = [2\pi(10.83)]^2 (3.15) = 14586 \text{ kg} / \text{cm}$$

En el caso de la losa con relación $m=1.0$:

$$K_{\text{mod}} = (2\pi f_n)^2 M_{\text{mod}} = [2\pi(7.28)]^2 (8.27) = 17303 \text{ kg / cm}$$

4.- Definición de función de carga

La función de carga utilizada en la solución analítica está representada por $F(t) = P \alpha_i \cos(2\pi i f_s t)$ (AISC, 1997), cuyos valores se resumen en la Tabla 5.22. En este caso se propone el peso de una persona distinto al del experimento; el valor de i permanece como 1, ya que sólo se involucra la frecuencia más baja del caminar de la persona; el valor de α_i es de 0.5 y la frecuencia de paso f_s es de 2.1 Hz.

Tabla 5.22 Propiedades dinámicas de fuente de excitación

Variable	Magnitud
P (kg)	70
α_i	0.5
P _o (kg)	35
Armónico i	1
f _s (Hz)	2.1

5.- Definición de coeficiente de amortiguamiento

Ya que el sistema de piso a analizar está diseñado para el uso de oficinas se propone la relación de amortiguamiento obtenida en la prueba experimental de este trabajo, cuyo valor es $\xi=0.078$. Cabe, mencionar que en la literatura existen recomendaciones para proponer este valor, como se ha mencionado en el capítulo 1 de este trabajo.

6.- Obtención de coeficientes A, B, C y D para el cálculo de la aceleración

Los coeficientes C y D dependen principalmente de la frecuencia de la carga dinámica y de la frecuencia natural de la losa, ambos en términos de la frecuencia angular. Por lo tanto, para ambos modelos la frecuencia de carga es:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(2.1) = 13.19 \text{ rad/s} \quad (5.30)$$

Dado que la losa con relación $m=0.5$ tiene una $f_n=10.83$ Hz, su frecuencia angular es:

$$\omega_n = 2\pi f_n = 2\pi(10.83) = 68.00 \text{ rad/s} \quad (5.31)$$

Sustituyendo las ecs. (5.30) y (5.31) en las ecs. (5.16) y (5.17) se tiene que:

$$D = \frac{P_o}{K_{\text{mod}}} \frac{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2} = \frac{35}{14586} \frac{\left[1 - \left(\frac{13.19}{68.00}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{13.19}{68.00}\right)^2\right]^2 + \left[2(0.078) \frac{13.19}{68.00}\right]^2} = 0.0025 \text{ cm} \quad (5.32)$$

$$C = \frac{P_o}{K_{\text{mod}}} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2} = \frac{35}{14586} \frac{2(0.078) \left(\frac{13.19}{68.00}\right)}{\left[1 - \left(\frac{13.19}{68.00}\right)^2\right]^2 + \left[2(0.078) \frac{13.19}{68.00}\right]^2} = 0.00008 \text{ cm} \quad (5.33)$$

Con la obtención de C y D, se obtienen los coeficientes A y B sustituyendo en las ecs. (5.21) y (5.23) se tiene que, A=-0.0025 cm y B=-0.0002 cm. El mismo procedimiento se realiza para la losa con relación $m=1.0$, cuyos valores de la frecuencia angular y de los coeficientes A, B, C, y D se resumen en la Tabla 5.23.

Tabla 5.23 Variables para cálculo de la aceleración

Variable	Magnitud
$f_n(\text{Hz})$	7.28
$\omega_n (\text{rad/s})$	45.74
A (cm)	-0.0022
B (cm)	-0.0002
C (cm)	0.00011
D (cm)	0.0022

7.- Obtención de la aceleración

La respuesta dinámica se obtiene de la Tabla 5.24, donde P_o , M_{mod} , K_{mod} , f_n , ξ , y por consiguiente, ω , ω_n y ω_D , son los elementos principales para la obtención de la aceleración:

Tabla 5.24 Propiedades para obtención de la aceleración

Variable	m=0.5	m=1.0
	Magnitud	
ξ	0.078	0.078
$\omega(\text{rad/s})$	13.19	13.19
$\omega_n (\text{rad/s})$	68.00	45.74
$\omega_D(\text{rad/s})$	67.84	45.60
A (cm)	-0.0025	-0.0022
B (cm)	-0.0002	-0.0002
C (cm)	0.00008	0.00011
D (cm)	0.0025	0.0022

Por lo tanto, sustituyendo los valores de la Tabla 5.24 en la ec. (5.25), se tiene una respuesta dinámica como la que se muestra en la Figura 5.24. En este caso la magnitud de interés es la respuesta máxima, cuyos valores son 11.11 y 4.23 cm/s^2 para las losas con relación $m=0.5$ y $m=1.0$, respectivamente. Como es evidente, la losa con $m=1.0$ tiene una aceleración menor que la de la losa con $m=0.5$. A pesar de que su frecuencia natural es más baja, lo cual supone un movimiento amplitud alta, tiene una rigidez mayor que la de la losa con $m=0.5$, lo cual disminuye la magnitud de la aceleración.

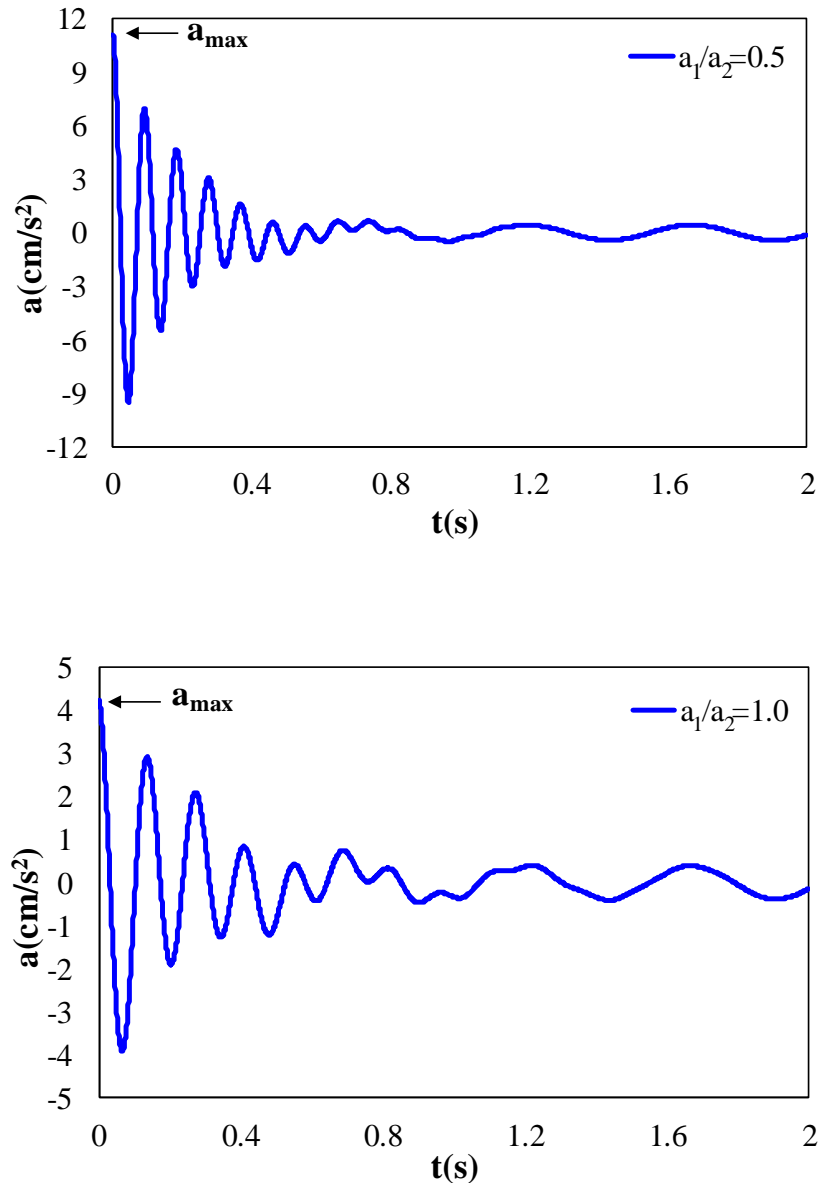


Figura 5.24. Respuesta dinámica de losa con claro largo $a_2=8\text{m}$

8.- Evaluación de la perceptibilidad ante vibraciones excesivas.

Teniendo los elementos necesarios para evaluar la perceptibilidad de las personas como se muestra en la Tabla 5.25, se grafican los puntos correspondientes a cada losa como se muestra en la Figura 5.25, donde se utiliza el nomograma propuesto por AISC (1997). Dado que los sistemas de piso están destinados a uso de oficinas, se observa que la losa con relación $m=1.0$ evitan vibraciones excesivas; mientras que la losa con $m=0.5$ requiere de elementos de masa o rigidez que disminuyan las incomodidades por vibración. Con esto, se realiza la evaluación correspondiente de un sistema de piso de concreto reforzado ante el caminar de personas.

Tabla 5.25 Propiedades para obtención de la aceleración

Respuesta dinámica		
Relación m	$f_n(\text{Hz})$	a/g (%)
0.5	10.83	1.13
1	7.28	0.43

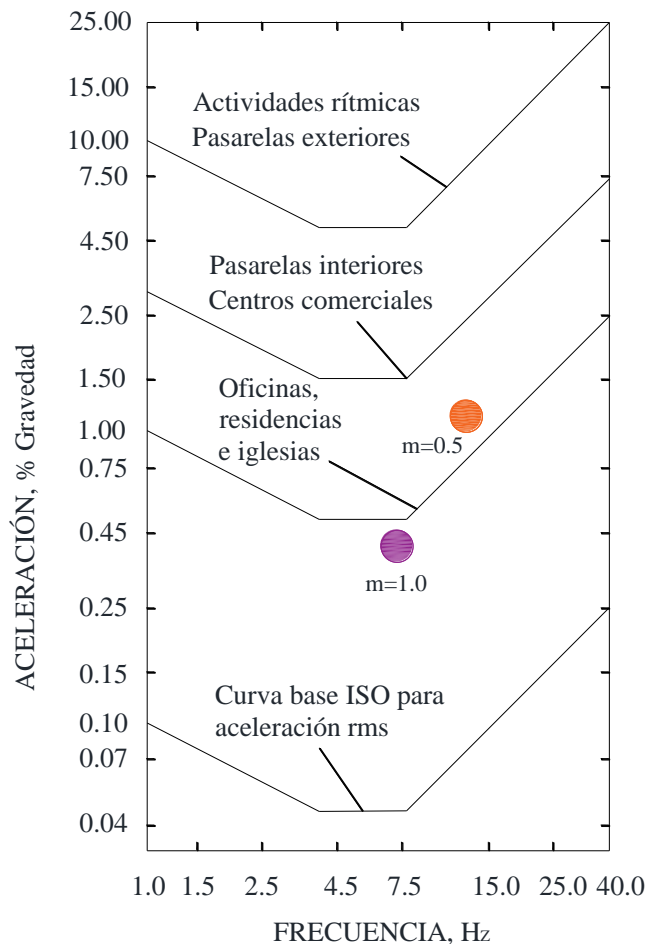


Figura 5.25. Evaluación de la perceptibilidad de losa de concreto con relaciones de claro $m=0.5$ y 1.0

Modelos numéricos

Dadas las respuestas obtenidas con la solución analítica, se realiza un modelo numérico de cada uno de ellos como se muestra en la Figura 5.22; teniendo así las respuestas dinámicas como se muestra en la Figura 5.26. Las respuestas máximas fueron de 7.80 y de 2.83 cm/s^2 para las losas con relación de claros de 0.5 y 1.0, respectivamente.

Comparando entre ambas respuestas como se muestra en la Figura 5.27, se observa que existen diferencias entre ambas soluciones de aproximadamente el 30 y el 33% en la respuesta máxima. Como se había comentado, estas diferencias se deben al error acumulado en la derivación desde el desplazamiento a la aceleración en el modelo numérico. Además, por su naturaleza práctica, el procedimiento propuesto toma en cuenta incertidumbres que no están en el modelo numérico. Por lo tanto, se tiene que la solución exacta tiene una buena aproximación con la medición experimental.

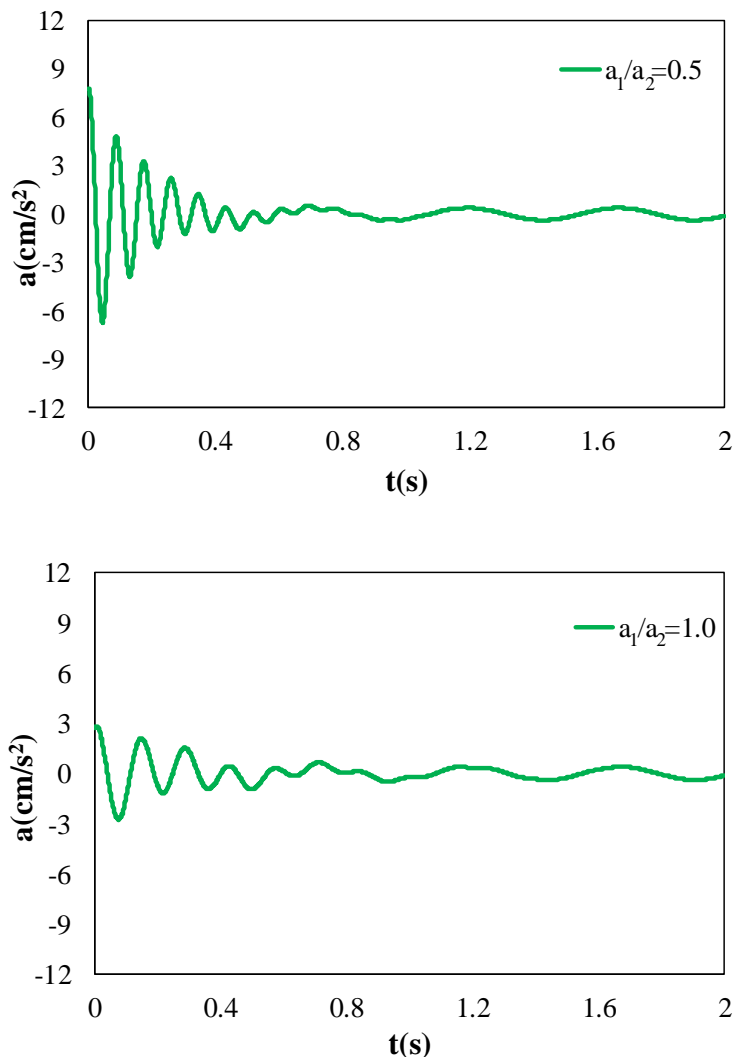
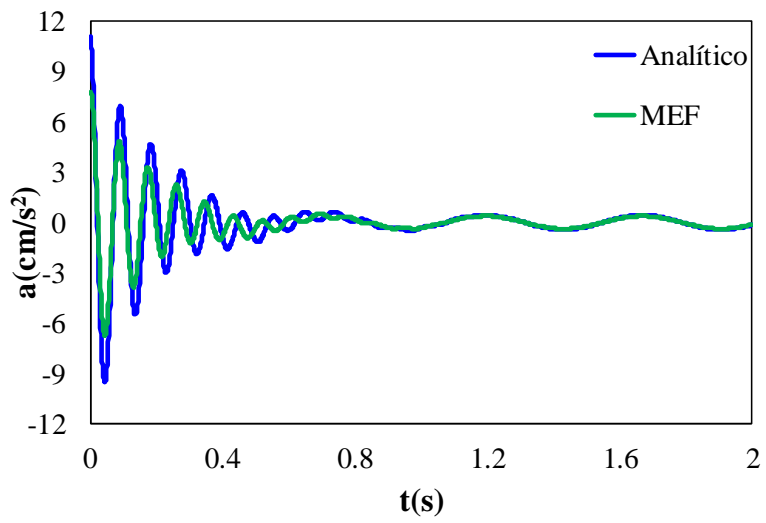
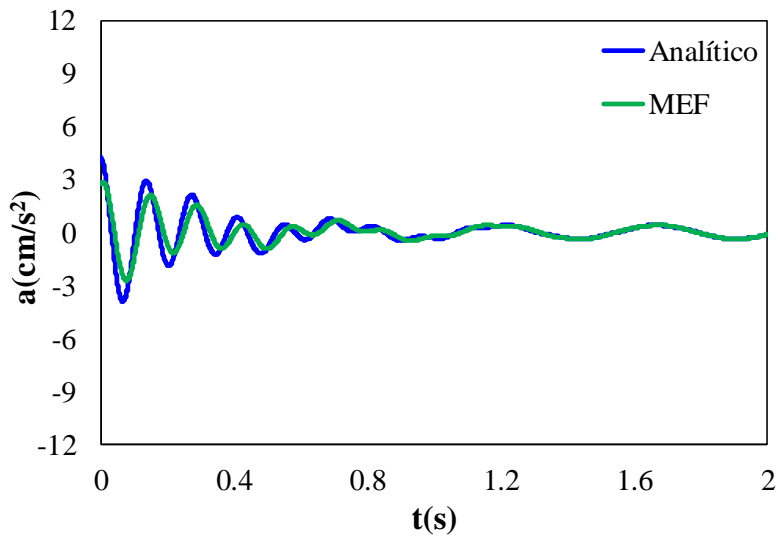


Figura 5.26. Respuesta dinámica numérica de losa con claro largo $a_2=8\text{m}$



a)



b)

Figura 5.27. Respuesta dinámica numérica de losa con claro largo $a_2=8\text{m}$ con relaciones de claro a_1/a_2 de: a) 0.5 y b) 1.0

5.10 Evaluación de la aceleración máxima en losa de concreto reforzado ante la influencia de sus principales elementos estructurales

Considerando el modelo numérico realizado para la prueba experimental de la sección 4.5, como se muestra en la Figura 4.52a, se evalúa la influencia de parámetros como espesor de losa, peralte de trabes y vigas secundarias en la aceleración máxima de una losa de concreto reforzado. En este proceso se modifican las dimensiones de los principales elementos que conforman la losa y se obtiene la aceleración máxima en el centro del claro.

En este estudio se utilizan dos tipos de carga dinámica: puntual y distribuida. La carga puntual está definida por la función $F(t) = P \alpha_i \cos(2\pi f_i t)$ (AISC, 1997), la cual representa el caminar de una persona como una carga concentrada en el centro del claro, los datos de la carga se resumen en la Tabla 5.8. Por otra parte, la carga dinámica distribuida es la definida en la ec.(1.20), cuyos valores se muestran en la Tabla 4.20 para caso del balanceo de un conjunto de un conjunto de personas sobre el área total de la losa. En ambos casos se monitorea la aceleración máxima en el centro del claro de la losa. Es importante mencionar que en el modelado se incluyó la masa de las personas involucradas en la actividad, así como la masa de los elementos estructurales.

Influencia del espesor de la losa

Al incrementa el espesor de la losa, teniendo un espesor inicial de 13 cm, se tiene un incremento máximo de la aceleración del 13% y del 9% cuando el espesor es de 14 cm en cada caso de carga; además se tiene un incremento mínimo del 3% cuando el espesor es de 16 cm en ambos casos de carga, como se muestra en la Figura 5.28. En general el espesor de la losa es una variable que puede generar un aumento en la aceleración máxima.

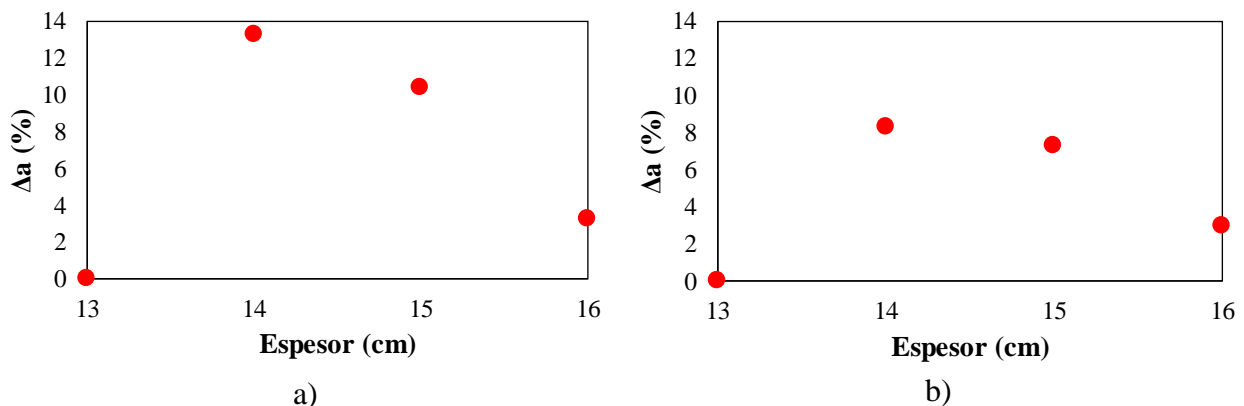


Figura 5.28. Variación de la aceleración contra el incremento del peralte de losa ante carga: a) puntual y b) distribuida

Influencia del incremento del peralte en vigas principales

En este caso se modificó el peralte de las trabes en las direcciones a_1 y a_2 . En el caso de la carga puntual, en la Figura 5.29a se muestra que al incrementar el peralte de las vigas paralelas a la dirección a_1 ocurre un incremento de la aceleración en intervalos del 8% aproximadamente hasta un incremento máximo del 34%; una tendencia similar se observa al incrementar los peraltes de las vigas paralelas a la de la dirección a_2 , donde se tiene un incremento de la aceleración de hasta el 17%. Una situación similar ocurre con el modelo con carga dinámica distribuida, donde las vigas paralelas a la dirección a_2 tienen una influencia menor que las vigas paralelas al claro corto, como se muestra en la Figura 5.29b. En general las vigas paralelas al lado largo tienen una influencia menor en la aceleración, caso contrario al de la frecuencia natural fundamental, donde el peralte de viga tiene una influencia significativa como se menciona en la sección 3.3.2.3.

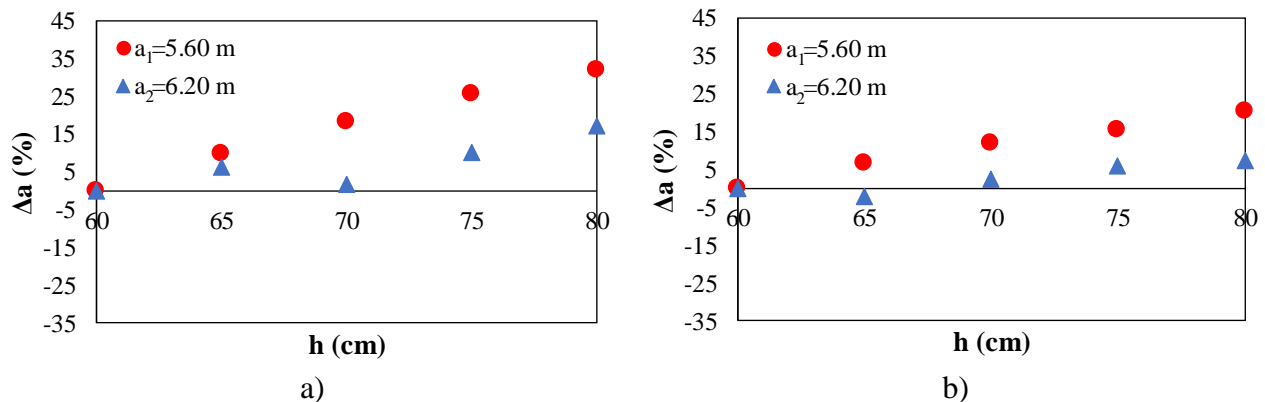


Figura 5.29. Variación de la aceleración contra incremento del peralte de vigas en las direcciones a_1 y a_2 ante carga: a) puntual y b) distribuida

Influencia de vigas secundarias y terciarias

En este estudio se consideran tres configuraciones en la colocación de vigas secundarias y terciarias. Las dimensiones de las vigas son similares a las de las vigas principales, es decir, 60 x 25 cm. Primero se coloca una viga secundaria, después dos vigas secundarias y por último dos vigas secundarias más una viga terciaria como se muestra en la Figura 5.30. Dado que el centro del claro de la losa es la zona de aceleración máxima, se obtienen los incrementos de aceleración en términos de porcentaje para las condiciones de carga dinámica: puntual y distribuida. La variación de la aceleración para ambos casos es similar como se observa en la Figura 5.31; en el caso del modelo con la carga puntual se observa una disminución en promedio del 75% como se muestra en la Figura 5.31a, lo cual muestra que con incluir sólo una viga secundaria se disminuye considerablemente la aceleración. En el caso del modelo con carga dinámica distribuida se observa una disminución del 40% ante la colocación de la primera viga secundaria; posteriormente, la aceleración sigue disminuyendo de manera gradual conforme se incluyen otras vigas hasta llegar a una disminución de aproximadamente 70% como se muestra en la Figura 5.31b. En general, el incluir elementos

que incrementan la rigidez de la losa influye significativamente en la aceleración de una losa de concreto reforzado. Por lo que el utilizar otros elementos ligeros rigidizantes puede tener un mejor desempeño en la regulación de la aceleración de este tipo de sistemas.

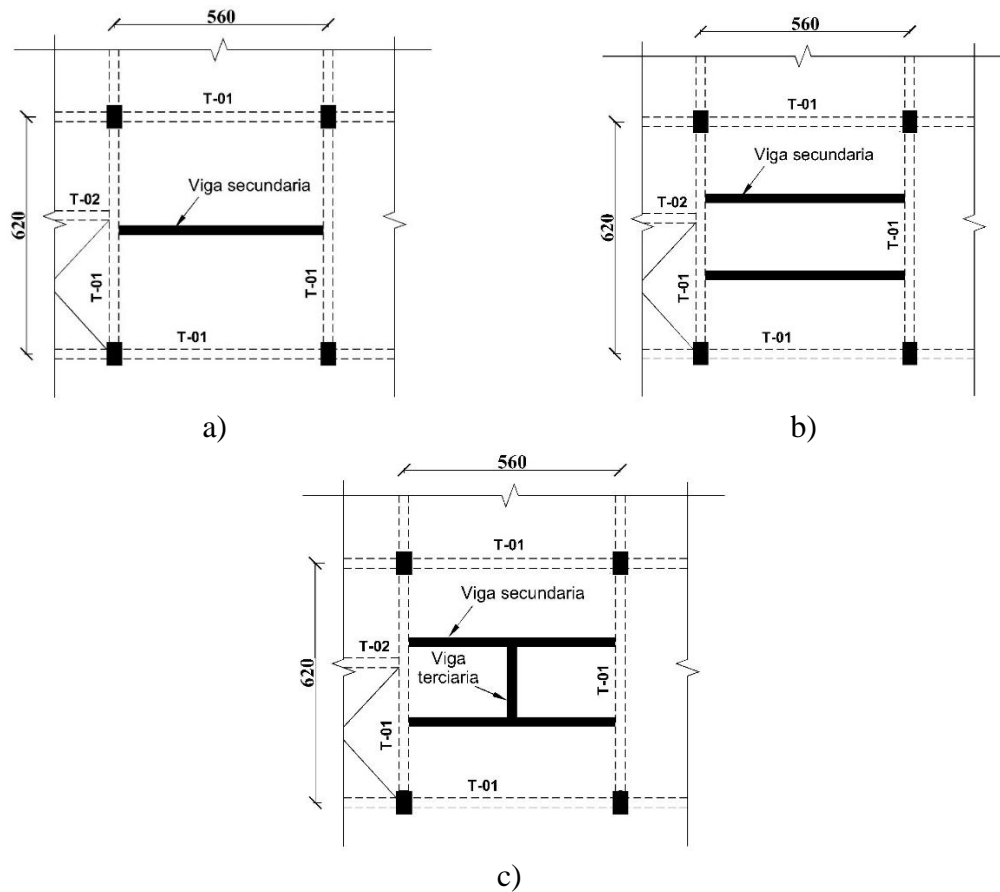


Figura 5.30. Ubicación de vigas secundarias y terciaria: a) una viga secundaria, b) dos vigas secundarias y c) dos vigas secundarias y una terciaria

Con los resultados de aceleración se evalúa la comodidad del sistema de piso utilizando los límites establecidos por el AISC (1997). La aceleración debida a las cargas puntual y distribuida es de 9.79 cm/s^2 (1.0% de g) y 214.60 cm/s^2 (21.87% de g), respectivamente, en la losa apoyada originalmente solo sobre vigas principales. En el caso del caminar de una persona, se tiene una disminución de la aceleración de 3 cm/s^2 (0.3% de g) tal que se evitan los límites de incomodidad para el uso de oficinas como se muestra en la Figura 5.32a. En el caso de la carga distribuida, se tiene una disminución de la aceleración de 76.45 cm/s^2 (7.74% de g) como se muestra en la Figura 5.32b, donde se exceden las aceleraciones permitidas para sistemas de piso destinados a oficinas, lo cual sugiere que la losa analizada seguramente desarrolla vibraciones excesivas que pueden ser incómodas para otros usuarios dentro del sistema de piso. Como se observa en ambos casos de carga, la variación de la aceleración es similar. Por otra parte, en el caso de una losa existente, posiblemente es poco factible la modificación en campo de las masas e inercias de los elementos estructurales para modificar la aceleración de manera importante. Sin embargo, se pueden utilizar alternativas como el

uso vigas secundarias, sistemas ligeros rigidizantes o mediante la adaptación de algún disipador de energía.

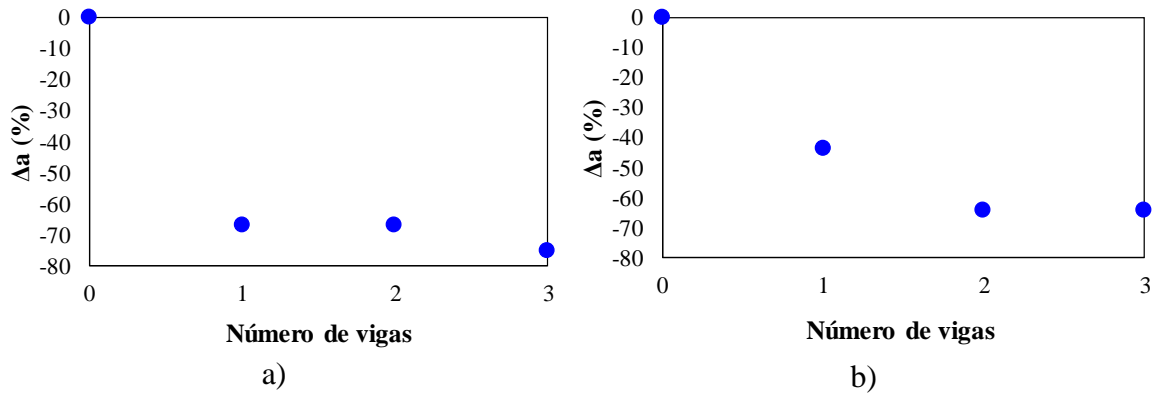


Figura 5.31. Variación de la aceleración contra la inclusión de viga secundaria para las cargas: a) puntual y b) distribuida

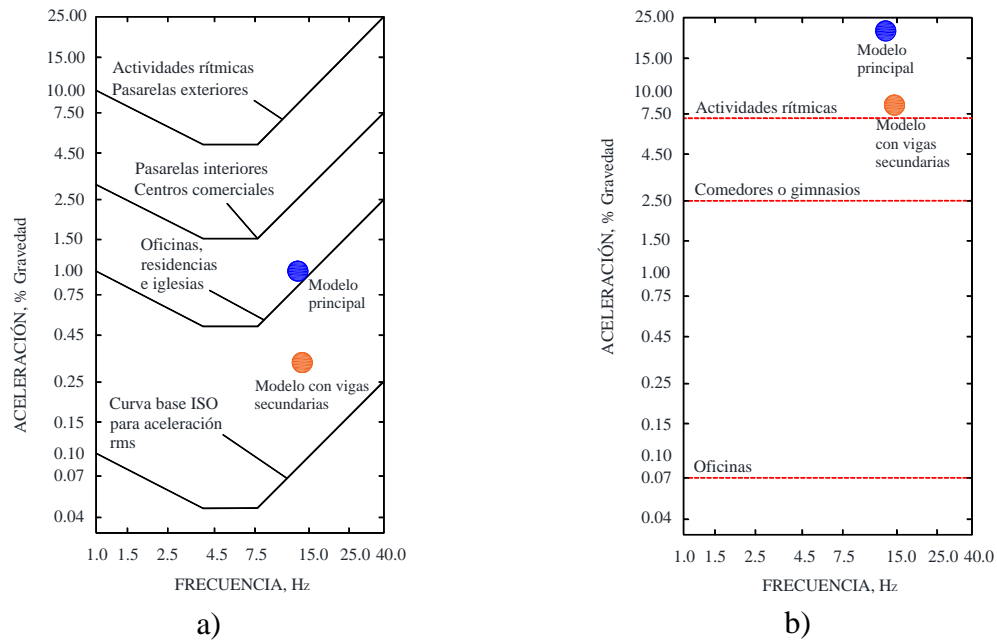


Figura 5.32. Evaluación de la comodidad ante vibración vertical de losa de concreto reforzado para las cargas dinámicas: a) puntual y b) distribuida

6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 Introducción

En este trabajo se determinaron recomendaciones para el análisis de losas ante vibración. Primeramente, teniendo como base la propuesta establecida en las NTCC-17 (2017) para el cálculo de la aceleración en sistemas de piso de concreto reforzado, se desarrollaron aproximaciones analíticas para el cálculo de la f_n en losas con distintas configuraciones de apoyos rígidos. Por otra parte, se realizaron estudios tanto de las variables que influyen en la magnitud de la f_n , como de la susceptibilidad ante vibraciones excesivas debidas al caminar de personas en losas macizas de concreto reforzado con base en la normatividad existente. Se realizaron modelos numéricos con elementos finitos tipo lámina y viga, donde se utilizó un material homogéneo, elástico e isótropo. También, se realizó un estudio analítico, numérico y experimental de dos losas de vigueta y bovedilla y una losa de concreto reforzado con el objetivo de evaluar la metodología existente de análisis y diseño ante vibración debida a actividades humanas. Por último, se proporcionó como recomendación una metodología para el análisis de losas macizas de concreto reforzado ante vibración debida al caminar de una persona con base en soluciones analíticas propuestas que fueron calibradas con una prueba experimental.

6.2 Conclusiones

Las expresiones desarrolladas para el cálculo de la f_n en losas macizas con bordes infinitamente rígidos a partir de análisis de sistemas equivalentes de un grado de libertad se basan en el concepto de energía cinética y en una calibración con el método de mínimos cuadrados, donde se obtienen diferencias entre la solución propuesta y los resultados numéricos en un porcentaje no mayor del 2.5 %, lo cual se considera adecuado. En este procedimiento se pretende describir el comportamiento dinámico de una losa de concreto reforzado idealizada como una placa homogénea de espesor uniforme con base en el análisis de vigas con masas y rigideces distribuidas y puntuales. Es importante mencionar que este procedimiento es una línea de investigación que requiere de más estudio. Aunque, por su aproximación, con las expresiones desarrolladas en este trabajo se tiene una solución adecuada de la f_n .

Dada la complejidad que existe para obtener una solución cerrada o incluso aproximada en losas apoyados sobre vigas en sus cuatro bordes mediante la teoría de placas, la expresión propuesta para calcular f_n en una losa maciza de concreto apoyada sobre vigas es una herramienta adecuada, tomando en cuenta sólo la contribución de la viga del claro más largo y un ancho unitario de franja central de losa como elementos que contribuyen a la forma modal fundamental.

En el caso del análisis numérico de losas, el utilizar como mínimo ocho divisiones por borde de cada panel es suficiente para obtener la f_n de un sistema de piso, utilizando elementos lámina-delgada y viga-columna. Por su parte, en el caso de la influencia de las variables que intervienen en el comportamiento de la frecuencia natural fundamental, se tiene que para el

análisis modal de un sistema de piso basta con modelar un sólo tablero aislado, el que tiene el perímetro más desfavorable, pues los tableros pequeños, generalmente tienen frecuencias altas. El espesor de la losa y el módulo elástico del material tienen poca influencia en la magnitud de la f_n de losas de concreto reforzado, por lo que son poco factibles para modificar su magnitud de acuerdo con los requerimientos del diseñador. Posteriormente, al apoyar las losas sobre columnas, la frecuencia natural fundamental incrementa principalmente en los primeros intervalos de Δh a partir de la dimensión de columna mínima establecida por NTCC-17 (2017), llegando a valores de más del 60% cuando se aumenta el ancho de las columnas en un 100%. Aunque comúnmente las columnas no es una variable que tienda a modificarse, es importante resaltar que existe una relación directa entre la flexibilidad de las columnas y la f_n de vibración de la losa. Por otro lado, el colocar vigas secundarias y terciarias no influye en gran medida la magnitud de la f_n , lo cual muestra la baja influencia de la posición de éstas. Un aspecto importante en la modificación de f_n sería analizar el sistema de piso ante la inclusión de sistemas rigidizantes ligeros de acero, los cuales, por sus características de masa y rigidez, podrían modificar f_n considerablemente. Por lo tanto, el incrementar el peralte de vigas perimetrales o el peralte a la losa es una opción principal para modificar la f_n considerablemente en los sistemas de piso.

En general se tiene que criterios como el HIVOSS (2007) y el AISC (1997) son similares para controlar vibraciones excesivas ante el caminar de personas; mientras que los valores límites propuestos a las NTCC-17 (2017), muestran que la susceptibilidad ante vibraciones excesivas es mínima para los modelos analizados. Las tres especificaciones tienen en común que sus umbrales de comodidad se derivan de la percepción de la vibración de las personas ante el caminar de una persona, lo cual es independiente del tipo de sistema estructural. Por lo que, comparando los tres criterios se tiene la necesidad de homologar los límites en los que la f_n de la losa es más perceptible. Un ejemplo de ello se observa en los límites frecuencia mínima establecidos por estos códigos, donde se establece que en sistemas de piso con f_n fundamental mayor que 10 Hz se evitan vibraciones incómodas. Sin embargo, este parámetro difiere de los resultados obtenidos en las pruebas experimentales realizadas en este trabajo, ya que se tuvieron f_n mayores de los 10 Hz y a pesar de ello, se tienen aceleraciones incómodas de acuerdo a los criterios de perceptibilidad que utilizan estas tres especificaciones. Por lo anterior, los nomogramas que se utilizan en este trabajo representan una ayuda importante en la definición de la susceptibilidad de los sistemas de piso. A partir de ello, se decidió establecer un criterio práctico para evitar vibraciones excesivas en sistemas de piso. Sin embargo, es necesario definir un criterio sobre frecuencia mínima para evitar vibraciones excesivas ante cualquier tipo de actividad humana. Además, se observa la necesidad de realizar estudios experimentales y estadísticos locales, que involucren principalmente las características de las personas y el sistema de piso, para regular los niveles de vibración ante distintas actividades cotidianas.

En el caso de la experimentación, se observó que para realizar pruebas de vibración en sistemas de piso es necesario realizar modelos numéricos detallados para identificar las zonas

de amplitud modal que se desean monitorear, ya que estos sistemas pueden tener amplitudes máximas en cualquier parte del sistema continuo por su flexibilidad.

En la mayoría de los análisis de vibración ambiental realizados en cada espécimen, los espectros de potencia obtenidos muestran bandas de frecuencias de gran amplitud que, además de corresponder a las frecuencias naturales de vibración, se deben a niveles altos de ruido por herramientas o actividad humana aleatoria que ocurrieron durante los experimentos. En el caso de este trabajo, se obtuvo solamente la f_n en cada sistema de piso. En el caso de los experimentos de vibración forzada, se registraron aceleraciones debidas a distintas actividades humanas que se desarrollan en los sistemas de piso en su uso cotidiano.

En el caso de losas de vigueta y bovedilla, el uso de elementos lámina y viga-columna se considera adecuado para el modelado de sistemas de piso. Por lo que, utilizar secciones equivalentes rectangulares con un material homogéneo e isótropo proporciona resultados adecuados, considerando que su masa y rigidez actúa en la dirección perpendicular al plano de la losa. El mismo caso sucede con la losa de concreto reforzado, donde la f_n se obtiene de manera suficientemente aproximada, así como la respuesta dinámica ante el caminar de personas. Aunado a lo anterior, en el caso de las losas probadas y estudiadas se deduce que es adecuado utilizar elementos finitos lámina y viga-columna para modelar losas de vigueta y bovedilla y losas de concreto reforzado en dos direcciones, considerando que las hipótesis mencionadas para el modelado representan una idealización de las propiedades físicas de los materiales, así como el acoplamiento entre ellos.

En la evaluación comparativa entre soluciones analíticas, numéricas y experimentales, se observa que, en el caso de losas de vigueta y bovedilla, tanto el valor de la frecuencia natural fundamental como el de la respuesta dinámica difieren de las pruebas experimentales. Esto se debe principalmente a que el método analítico ANIVIP (2013) considera factores empíricos de reducción que involucran el tipo de respuesta (transitoria o estacionaria), así como la actividad y la posición de las personas durante la excitación. Además, la cantidad de masa que participa en el movimiento del sistema de piso, cuyo valor es 50% del peso total de la viga para ANIVIP (2013) es diferente a la del sistema continuo ya que todos sus elementos componentes contribuyen con cierto porcentaje de participación durante el movimiento. Por otra parte, es preciso señalar que otro factor que influye en la diferencia entre los resultados de ambos procedimientos es que las pruebas experimentales incluyen la contribución de modos superiores, lo cual no se considera en ANIVIP (2013). Otro aspecto a considerar es que para los modelos de las losas de vigueta y bovedilla las cargas dinámicas fueron propuestas como carga dinámica distribuida (Bachmann *et al.*, 1995) lo cual es poco representativo del caminar de una persona, el utilizar una carga puntual tiene una mayor aproximación como se muestra en el experimento de la losa de concreto. En el caso de la actividad rítmica no se tuvo una magnitud de comparación experimental, pero se tiene una aceleración numérica aceptable en el nomograma del AISC (1997).

En general, las losas de viga y bovedilla requieren de recomendaciones para su análisis y diseño ante vibración debida a actividades humanas ya que los procedimientos establecidos no representan de manera suficientemente aproximada este fenómeno. Por lo tanto, como una primera aproximación para evaluar este sistema es necesario realizar un modelo numérico con elementos lámina y viga-columna con una carga dinámica simple no móvil como la de la ec.(1.18) en la zona de amplitud modal máxima y considerar la contribución del modo 1 principalmente en la obtención de la respuesta. En cuanto a los valores de la relación de amortiguamiento se toman como referencia los obtenidos de la literatura. Cabe destacar que el cálculo experimental del amortiguamiento no es preciso, ya que existen factores que pueden variar su magnitud. Aunque existen metodologías para su cálculo, es necesario realizar estudios sobre este parámetro de manera que su obtención sea práctica, suficientemente aproximada y aplicable en la simplificación de sistemas de múltiples grados de libertad.

En el caso de losas de concreto reforzado se tiene que no se analizan comúnmente ante vibraciones debidas al caminar de personas, como lo es la losacero u otros sistemas ligeros. Al realizar la misma evaluación que en las losas de viga y bovedilla, se tiene que al comparar la f_n analítica obtenida de las expresiones propuestas en este trabajo con las soluciones numérico-experimentales se obtiene una aproximación aceptable.

En el caso de las cargas dinámicas utilizadas en el modelo numérico se tiene que las cargas puntuales presentan una aproximación más cercana a la medición experimental, tal como se observó para el caso del salto uniforme y para el caminar de personas. En el caso de las cargas dinámicas rítmicas asignadas como distribuidas, se observa una aproximación baja, esto se debe a la posibilidad de que la masa de un conjunto de personas modifica las características dinámicas del sistema de piso durante el movimiento (interacción humano-estructura).

Aunque las cargas debidas al caminar de personas se pueden modelar rigurosamente como cargas dinámicas puntuales y móviles sobre el sistema de piso, el utilizar cargas dinámicas puntuales y fijas en el centro del claro es suficiente para obtener la respuesta máxima, aceleración, velocidad y desplazamiento. La función de carga utilizada en la metodología propuesta no incluye detalladamente los efectos de la planta del pie en el contacto con el sistema de piso. Sin embargo, con ello es suficiente para obtener una respuesta dinámica razonable.

En cuanto a la respuesta dinámica, se tiene que, al someter el sistema de piso a diversas fuentes de excitación, la expresión analítica propuesta por las NTCC-17 (2017) presenta valores que describen razonablemente los umbrales de incomodidad en los que se encuentra el sistema de piso, tal como se observó al comparar el criterio de aceleraciones máximas a/g propuestas por el código AISC (1997). Además, con esta evaluación se deduce que para evitar umbrales de incomodidad en un sistema de piso es necesario evaluarlo ante distintos tipos de actividad humana, por que las personas son impredecibles y en ciertos momentos realizan actividades inesperadas que pueden generar vibraciones incómodas para los

ocupantes. Por otra parte, dado que no existen especificaciones completamente definidas para el análisis ante vibración de losas de concreto reforzado, en el capítulo 5 se realizó una propuesta de obtención de la respuesta dinámica de una losa de concreto reforzado ante el caminar de personas a partir de la idealización de un S1GDL como lo hace el AISC (1997) o la Comisión Europea (Feldmann *et al.*, 2009), con la diferencia de que el procedimiento propuesto considera una forma práctica y más entendible para obtener la respuesta máxima. En relación con la carga dinámica de la ec. (1.18) utilizada para representar el caminar de una persona (AISC, 1997), se observa una aproximación adecuada a pesar de no involucrar frecuencias altas de excitación como otras funciones de carga que se mencionaron en este trabajo.

La aceleración máxima que se obtiene del procedimiento propuesto involucra el monitoreo del centro del claro, donde se considera sólo el modo 1 para obtener la respuesta dinámica, es decir, la solución analítica considera un comportamiento como un S1GDL a pesar de que la losa se comporta realmente como un sistema de múltiples grados de libertad. Además, se involucra una relación de amortiguamiento global del sistema. Por otra parte, se utiliza una función de carga no móvil que considera sólo la frecuencia fundamental de excitación. Con ello se obtiene una aproximación razonable de la respuesta dinámica, principalmente al inicio de la excitación donde ocurre la amplitud máxima de movimiento. Cabe señalar que en la metodología propuesta no se considera el efecto de la actividad de otras personas en el sistema de piso al momento de la excitación, con lo cual se puede subestimar o sobreestimar la respuesta dinámica. Sin embargo, por las magnitudes de aceleración observadas en la losa de concreto reforzado ante distintos tipos de actividad humana, se obtienen niveles de respuesta razonables que se pueden evaluar con cualquier nomograma de comodidad definido en la literatura.

Aparte de las recomendaciones planteadas en este trabajo, se tiene como objetivo ampliar las bases para el análisis y diseño de sistemas de piso ante vibración debida a actividades humanas, sobre todo para sistemas de piso distintos a los sistemas comunes de acero-concreto. Cabe mencionar que, en la práctica profesional los análisis por vibración debida a actividades humanas no son comunes. Sin embargo, es importante estudiar este efecto porque tiene que ver con la comodidad de sus ocupantes; la comodidad tiene gran importancia en las actividades del ser humano, tal que rige totalmente en la efectividad de una estructura donde existe la actividad humana.

REFERENCIAS

- [1] AISC (1997), “Steel Design Guide 11, Floor vibrations due to human activity”, *American Institute of Steel Construction*, Chicago, Estados Unidos.
- [2] Allen, D.E. y Murray, T.M. (1993), “Design criterion for vibrations due to walking”, *Engineering Journal, AISC*, Fourth Quarter, pp. 117-129.
- [3] Allen, D.E. y Rainer, J.H. (1976), “Vibration criteria for long span floors”, *Canadian Journal of Civil Engineering*, 3(2), pp. 165-173.
- [4] ANIVIP (2013), “Guía de diseño por vibración debido a la actividad humana en pisos prefabricados”, *Asociación de Nacional de Industriales de la Vigueta Pretensada A.C.*, México, D.F.
- [5] Archundia, H.I. y Tena, A. (2013), “Comportamiento y diseño a cortante de traveses de concreto reforzado conforme a modelos de armadura y campos de esfuerzo”, *Reporte técnico UAM-A/DMAE-2013/06*, pp. 27.
- [6] Araujo, T. y Vieira, Y. (2014), “Evaluation of dynamic behavior of waffle slab to gym center”, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 11(7), pp. 1114-1131.
- [7] Bachmann, H. y Ammann, W.J. (1987), “Vibration in structures: induced by man and machines”, *International Association for Bridge and Structural Engineering*, Zurich.
- [8] Bachmann, H., Ammann, W.J., Deischl, F., Eisenmann, J., Floegl, I., Hirsch, G.H., Klein, G.H., Lande, G. J., Mahrenholtz, O., Natke, H.G., Nussbaumer, H., Pretlove, A., Rainer, J.H., Saemann, E., y Steinbeisser, L. (1995), “Vibration problems in structures”, *Practical guidelines*, Berlin: Birkhauser, Alemania.
- [9] Bapat, A.V. and Venkatramani, N. (1988), “Simulation of classical edge conditions by finite elastic restrains in the vibration analysis of plates”. *Journal of Sound and Vibration*. 120(1), 127-140.
- [10] Bares, R. (1971), “Tables for the analysis of plates, slabs and diaphragms based on the elastic theory”, *Bauverlag GmbH*, Wiesbaden und Berlin.
- [11] Blanchard, J. (1977), “Design criteria and analysis for dynamic loading of footbridges”, *Symposium on Dynamic Behaviour of Bridges at the Transport and Road Research Laboratory*, Crowthorne, Berkshire, UK, May 19, pp. 90–106.
- [12] Blevins, R.D. (1979), “Formulas for natural frequency and mode shape”, Primera Edición, *Van Nostrand Reinhold Company*, Nueva York.

- [13] BS 6472 (2008), “Guide to evaluation of human exposure to vibration in buildings, Part 1: Vibration sources other than blasting”, *British Standard*, Reino Unido.
- [14] Brownjohn, J.M.W. y Middleton, C.J. (2008), “Procedures for vibration serviceability assessment of high-frequency floor”, *Computers & Structures*, 30(1), pp. 1548-1559.
- [15] Chen, Y. (1999), “Finite element analysis for walking vibration problems for composite precast building floors using ADINA: modeling, simulation and comparison”, *Computers & Structures*, 72(1), pp. 109-126.
- [16] Clough, R.W. y Penzien, J. (1975), “Dynamics of structures”, *McGraw-Hill*, New York, Estados Unidos.
- [17] Contreras, H. (1977), “Vibraciones en losa”, *Recomendaciones para reglamento*, Instituto de Ingeniería, UNAM.
- [18] Cox, H.L. and Benfield, W.A. (1959), “Vibration of uniform square plates bounded by flexible beams”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 31 (7), 963-966.
- [19] CSI (2009), “Analysis reference manual for SAP2000”, *Computers & Structures*, Berkley.
- [20] De Silva, S.S. y Thambiratnam, D.P. (2009), “Dynamic characteristics of steel deck composite floors under human-induced loads”, *Computers & Structures*, 87(1), pp. 1067-1076.
- [21] DIN-4150 (1975), “Part: 2- Human Exposure to Vibration in buildings”, *Deutsches Institut für Normung: Structural vibrations*. Alemania.
- [22] DIN-4150 (1986), “Part: 2- Human Exposure to Vibration in buildings”, *Deutsches Institut für Normung: Structural vibrations*. Alemania.
- [23] DIN-4150 (1999), “Part: 2- Human Exposure to Vibration in buildings”, *Deutsches Institut für Normung: Structural vibrations*. Alemania.
- [24] Ellingwood, B. y Tallin, A. (1984), “Structural serviceability: Floor vibrations”, *Journal of Structural Engineering*, 110(2), pp. 401-418.
- [25] Ellis, B.R. (1994), “Floor vibration: floor vibration by dance type loads: theory”, *Journal of Structural Engineering*, 72(3), pp. 37-44.

- [26] Elishakoff, I. y Sternberg, A. (1980), “Vibration of rectangular plates with edge-beams”, *Acta mechanica*. 36, 195-2012.
- [27] Feldmann M., Heinemeyer Ch., Butz Chr., Caetano E., Cunha A., Galanti F., Goldack A., Hechler O., Hicks S., Keil A., Lukic M., Obiala R., Schlaich M., Sedlacek G., Smith A., Waarts P. (2009), “Design of floor structures for human induced vibrations”, *Joint Research Centre*, Institute for the Protection and Security of the Citizen. Luxemburgo.
- [28] Goldman, D.E y Gierke, H.E.V. (1976), “The effects of shock and vibration on man”, In: Harris, C.M., Crede C.E., Handbook of shock and vibration control, *Mcgraw-hill*, Estados Unidos de América.
- [29] Gorman D.J. (1978), “Free vibration of rectangular plates with inelastic lateral support on the diagonals”. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 64(3), 823-826.
- [30] Gorman, D.J. (1990), “A general solution for the free vibration of rectangular plates resting on uniform elastic edge supports”, *Journal of Sound and Vibration*, 139(2), 325-335.
- [31] Gorman, D. J. (2003), “Free vibration analysis of corner-supported rectangular plates with symmetrically distributed edge beams”, *Journal of Sound and Vibration*, 263, 979-1003.
- [32] González, O. M. (2014), Comunicación personal, *Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco*, Ciudad de México, México.
- [33] González, O.M. y Robles, F. (2006), “Aspectos fundamentales del concreto reforzado”, *Limusa*, México.
- [34] Hewitt, C. M. y Murray T. M. (2004), “Office fit-out and floor vibrations”, *Modern Steel Construction*, April, pp. 35-38.
- [35] Hicks, S.J. (2004), “Vibration characteristics of steel–concrete composite floor systems”, *Progress in Structural Engineering and Materials banner*, 6(1), pp. 21-38.
- [36] Hillerborg, A. (1996), “Strip method desing handbook”, *E & FN Spon*, Reino Unido.
- [37] HIVOSS (2007), “Human induced vibration of steel structures”, *Research Fund for Coal & Steel*, European Commission, pp. 1-19.

- [38] Huang, M., Ma, X. B., Sakiyama, T., Matsuda, H. y Morita C. (2010), "Free vibration analysis of continuous rectangular plates". *Journal of Sound and Vibration*, 329, 485-496.
- [39] Hudson, D.E. (1979), "Reading and interpreting strong motion accelerograms", *Earthquake Engineering Research Institute Monograph, Vol.1*, pp. 112.
- [40] González, O.M. y Robles, F. (2006), "Aspectos fundamentales del concreto reforzado", *Limusa*, México.
- [41] ISO (1989), "ISO 2631-2, Mechanical vibration and shock: Evaluation of human exposure to whole-body vibration-part 2: human exposure to continuous and shock-induced vibrations in buildings (1 to 80 Hz)", *International Organisation for Standardisation*. Geneva.
- [42] Katabatake, H. y Nagareda, Y. (1998), "A simplified analysis of elastic plates with edge beams", *Computers and Structures*, 70, 129-139.
- [43] Kerr, S.C. (1998), "Human induced loading on staircases", *Tesis doctoral*, University of London, Reino Unido.
- [44] Kollár, L.P. y Pap, Z.B. (2018), "Modal mass of floors supported by beams", *Structures*, 13,119-130.
- [45] Kim, S.D., Kim, D.H., Chung, K.R., Yoon, S., Kang, S., Chun, S., Lee, Y. y Ju Y. (2004), "Experimental assessment of floor vibration using iTECH composite beam", *Council on Tall Buildings and Urban Habitat, CTBUH 2004 Seoul Conference*, pp. 488-495.
- [46] Lenzen, K.H. (1966), "Vibration of steel joist-concrete slab floors", *Engineering Journal, 3rd Qtr, AISC*, 3(3), pp. 133-136.
- [47] Leissa, A.W. (1969), "Vibration of plates", *NASA SP-160*. Washington D.C.
- [48] Leissa, A.W. (1973), "The free vibration of rectangular plates". *Journal of Sound and Vibration*, 31(3), 257-293.
- [49] Levy, C. (1991), "An iterative technique based on the Dunkerley method for determining the natural frequencies of vibrating systems", *Journal of Sound and Vibration*, 150(1), 111-118.

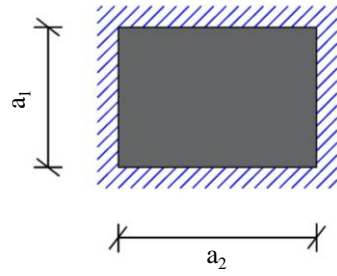
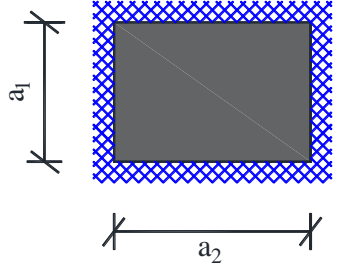
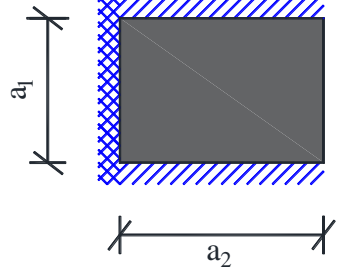
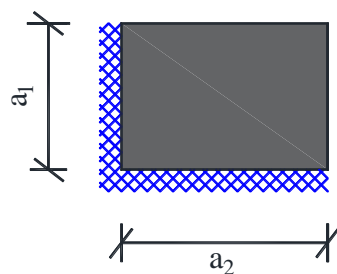
- [50] Li, W. L. (2004), "Vibration analysis of rectangular plates with general elastic boundary supports", *Journal of Sound and Vibration*. 273, 619-635.
- [51] Liu, B. y Xing, Y. (2011), "Exact Solutions for free vibration of orthotropic rectangular Mindlin plates", *Composite Structures*, 93, 1664-1672.
- [52] Liu, F., Battini, J., Pacoste, C., y Granberg, A. (2017), "Experimental and numerical dynamic analyses of hollow concrete floors", *Structures*, Vol. 12, pp. 286-297.
- [53] PREMEX (2013), "Manual técnico de losas prefabricadas PREMEX", *Presforzados Mexicanos de Tizayuca S.A de C.V*, México.
- [54] Mello, A., Da Silva, J., Da S. Vellasco, P., De Andrade, S. y De Lima, L. (2008), "Dynamic analysis of composite systems made of concrete slabs and steel beams", *Journal of Constructional Steel Research*, 64(1), pp. 1142-1151.
- [55] MIDAS/GEN (2018), "General Structural Design System, MIDAS /Gen Ver. 18", *Midas Information Technology Co. Ltd*.
- [56] Murray, T.M. (1975), "Design to prevent floor vibrations," *Engineering Journal, AISC*, 12(3), pp. 82-87.
- [57] NTCA-17 (2017), "Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Acero del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal". *Gaceta Oficial del Distrito Federal*. México D.F.
- [58] NTCC-17 (2017), "Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal". *Gaceta Oficial del Distrito Federal*. México D.F.
- [59] NTCE-17 (2017), "Criterios y Acciones para el Diseño Estructural de las edificaciones del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal". *Gaceta Oficial del Distrito Federal*. México D.F.
- [60] Paz, M. (1992), "Dinámica estructural, teoría y cálculo", *Reverté*, Barcelona.
- [61] Pavic, A. y Willford, M. (2005), "Appendix G- Vibration serviceability of posttensioned concrete floors, In: CSTR 43", *The Concrete Society*.
- [62] Petyt, M. y Mirza, W.H. (1972), "Vibration of column-supported floor slabs". *Journal of Sound and Vibration*, 21(3), 355-364.

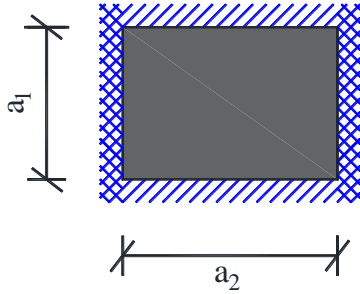
- [63] Ramu, I. y Mohanty, S.C. (2012), "Study on free vibration analysis of rectangular plate structures using finite element method", *Procedia Engineering*, 38, 2758-2766.
- [64] Reiher, H. y Meister F.J. (1931), "The effect of vibration on people," Translated from *Forsch. Geb. Ing. Wes*: 2 (11) 381-6, by U. S. Air Material Command. Translation F-TS616-RE. Wright Field, Ohio.
- [65] Rainer, J.H., Pernica, G. y Allen, D.E. (1986), "Dynamic loading and response of footbridges", *Proceedings C.S.C.E. Second International Conference on Short and Medium Span Bridges, Ottawa, Ontario*, Vol. 2. pp. 335-347.
- [66] Smith, A.L., Hicks, S.J. y Devine, P.J. (2007), "Design of floors for vibrations: a new approach", *Steel Construction Institute. SCI*, Ascot, Reino Unido.
- [67] Spectral Dynamics Inc. (2001), "SIGLAB Manuals, User's Guide".
- [68] Tena, A. (2018), "Algunos aspectos a considerar en el modelado de estructuras para el análisis y diseño por sismo", *Memorias, XXI Congreso Nacional de Ingeniería Estructural*, Campeche, Campeche, Noviembre. pp. 1-100.
- [69] Varela, W.D. (2004), "Modelo teórico-experimental para análisis de vibrações induzidas por pessoas caminando sobre lajes de edificios", *Tesis Doctoral*, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.
- [70] Varela W.D y Battista R.C. (2011), "Control of vibrations induced by people walking on large span composite floor decks", *Engineering Structures*, 33(9), pp. 2485-2494.
- [71] VOF (2006), "Generalisation of criteria for floor vibrations for industrial, office and public buildings and gymnastic halls", *Technical Steel Research*, European Commission.
- [72] Warburton, G.B. y Edney, S.L. (1984), "Vibration of rectangular plates with elastically restrained edges", *Journal of Sound and Vibration*, 95(4), 537-552.
- [73] Wiss, J.F. and Parmelee, R.A. (1974), "Human perception of transient vibrations", *Journal of the Structural Division*, 100(ST4), pp. 773-787.
- [74] Willford, M., Young, P. and Field, C. (2007), "Predicting footfall-induced vibration: part 1", *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings*, 160(2), pp. 65-72.

- [75] Yoneda, M. (2002), " A Simplified method to evaluate pedestrian-induced maximum response of cable-supported pedestrian bridges", *International Conference on the Design and Dynamic Behaviour of Footbridges*, Paris, Francia, pp. 255–256.
- [76] Young, P. (2001), "Improved floor vibration prediction methodologies", *Arup Vibration Seminar on Engineering Structural Vibration*, Current Developments in Research and Practice, London, Reino Unido.
- [77] Younis, A., Avci, O., Hussein M., Davis, B. and Reynolds P. (2017), "Dynamic forces induced by a single pedestrian: A literature review", *Applied Mechanics Reviews*, (69)2, Paper No: AMR-16-1066, doi: 10.1115/1.4036327.
- [78] Zhou, D. (2001), "Vibrations of Mindlin rectangular plates with elastically restrained edges using static Timoshenko beam functions with the Rayleigh-Ritz method", *International Journal of Solids and Structures*. 38, 5565-5580.

APÉNDICE

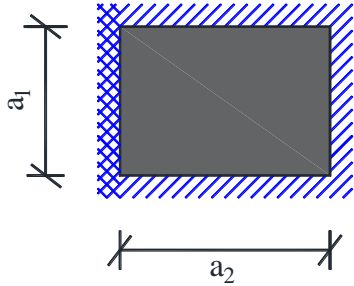
CÁLCULO DE LA FRECUENCIA NATURAL FUNDAMENTAL f_n EN LOSAS DE CONCRETO REFORZADO SOBRE APOYOS INFINITAMENTE RÍGIDOS

Tipo de losa	Frecuencia natural	Coeficiente
	$f_n = \frac{1.165}{\pi} C \sqrt{\frac{(1.577a_2^4 + a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{losa})}}$	$C = 1.56 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{0.36}$
	$f_n = \frac{0.87}{\pi} C \sqrt{\frac{(15a_2^4 + 8a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{losa})}}$	$C = 0.83 + 0.43 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2$
	$f_n = \frac{0.593}{\pi} C \sqrt{\frac{(3a_2^4 + a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{losa})}}$	$C = 1.23 + 0.65 \left(\frac{a_1}{a_2} \right) - 0.27 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2$
	$f_n = \frac{0.06}{\pi} C \sqrt{\frac{(85a_2^4 + 96a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{losa})}}$	$C = 0.52 + 1.62 \left(\frac{a_1}{a_2} \right) - 0.84 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2$



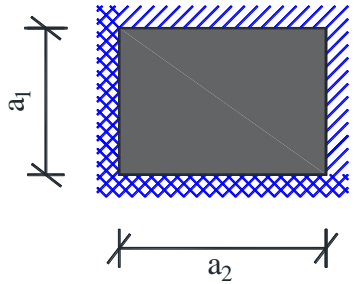
$$f_n = \frac{0.87}{\pi} C \sqrt{\frac{(3a_2^4 + 8a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{losa})}}$$

$$C = 0.5 + 1.97 \left(\frac{a_1}{a_2} \right) - \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2$$



$$f_n = \frac{0.604}{\pi} C \sqrt{\frac{(5.92a_2^4 + 8.87a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{losa})}}$$

$$C = 0.53 + 1.83 \left(\frac{a_1}{a_2} \right) - 0.87 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2$$



$$f_n = \frac{0.604}{\pi} C \sqrt{\frac{(2.77a_2^4 + 8.88a_1^4) Eh^3}{(a_1 a_2)^3 (m_{losa})}}$$

$$C = 2.44 + 0.33 \left(\frac{a_1}{a_2} \right) - 0.83 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2$$

 Simple
  Empotrado

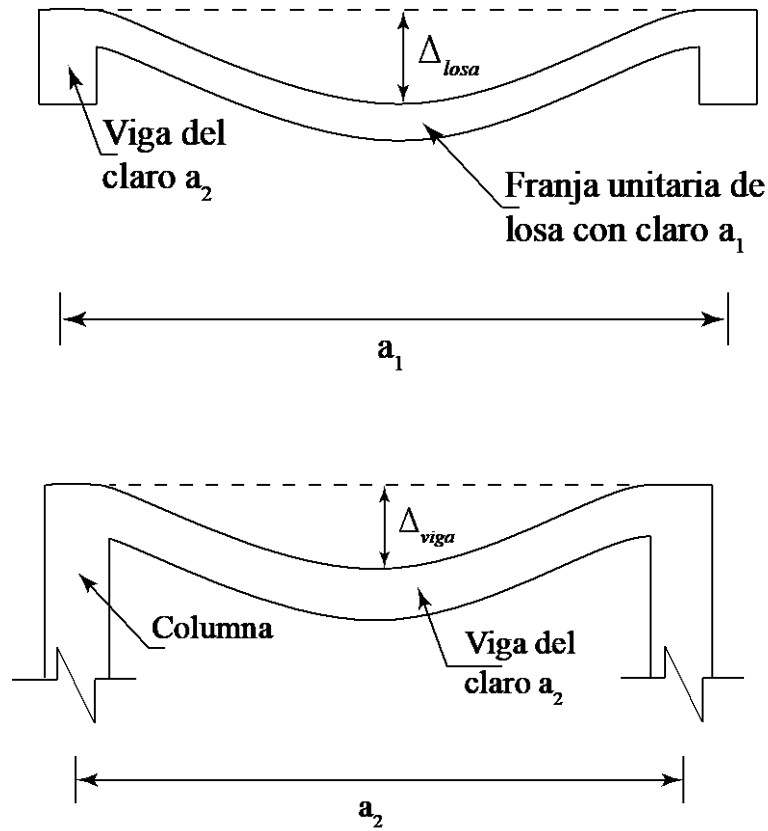
CÁLCULO DE LA FRECUENCIA NATURAL FUNDAMENTAL f_n EN LOSAS DE CONCRETO REFORZADO APOYADAS SOBRE VIGAS

$$f_n = 0.18 \sqrt{\frac{g}{C_1 \Delta_{viga} + 0.59 C_2 \Delta_{losa}}}$$

$$C_1 = 1.56 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{0.29}$$

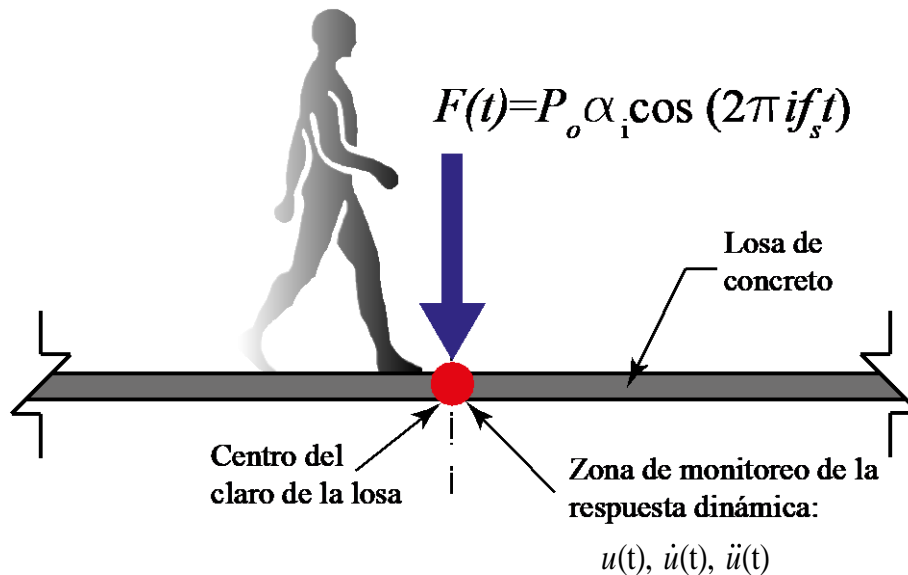
$$C_2 = 1.18 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{-0.69}$$

Los desplazamientos se esquematizan de la siguiente manera:



CARGA DINÁMICA REPRESENTATIVA DEL CAMINAR DE PERSONAS

Aplicación de carga dinámica en losa de concreto reforzado en el centro del claro.



RESPUESTA DINÁMICA DE LOSA DE CONCRETO REFORZADO ANTE EL CAMINAR DE UNA PERSONA

DESPLAZAMIENTO

$$u(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left((u(0) - D) \cos \omega_D t + \frac{\dot{u}(0) + \xi\omega_n u(0) - \xi\omega_n D - C\omega}{\omega_D} \sin \omega_D t \right) + C \sin \omega t + D \cos \omega t$$

VELOCIDAD

$$\dot{u}(t) = -e^{-\xi\omega_n t} (A\omega_D \sin \omega_D t - B\omega_D \cos \omega_D t) - D\omega \sin \omega t + C\omega \cos \omega t - \xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t)$$

ACELERACIÓN

$$\ddot{u}(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left[(2A\omega_D \xi\omega_n + B\xi^2\omega_n^2 - B\omega_D^2) \sin(\omega_D t) + (A\xi^2\omega_n^2 - 2B\omega_D \xi\omega_n - A\omega_D^2) \cos(\omega_D t) + (A\xi^2\omega_n^2 - 2B\omega_D \xi\omega_n - A\omega_D^2) \cos(\omega_D t) \right] - [C\omega^2 \sin(\omega_D t) + D\omega^2 \cos(\omega_D t)]$$

CÁLCULO DE COEFICIENTES A, B, C Y D

$$A = u(0) - D$$

$$B = \frac{\dot{u}(0) + \xi\omega_n u(0) - \xi\omega_n D - C\omega}{\omega_D}$$

$$C = \frac{P_o}{K_{\text{mod}}} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right]^2}$$

$$D = \frac{P_o}{K_{\text{mod}}} \frac{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right]^2}$$

DEFINICIÓN DE VARIABLES ADICIONALES

$$K_{\text{mod}} = (2\pi f_n)^2 M_{\text{mod}}$$

$$M_{\text{mod}} = \eta M_{\text{total}}$$

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\omega = 2\pi f_s$$

$$P_o = P\alpha_i$$

NOMENCLATURA

a_1	longitud del claro corto de la losa
a_2	longitud del claro largo de la losa
E	módulo de la elasticidad del material
h	espesor de la losa
m_{losa}	masa total de la losa
g	aceleración de la gravedad con valor de 981 cm/s^2
Δ_{viga}	desplazamiento máximo de la viga del claro más largo
Δ_{losa}	desplazamiento máximo de la franja unitaria de losa perpendicular al claro más largo
M_{mod}	masa modal del sistema de piso
η	relación de masa modal
M_{total}	masa total de la losa
ω_n	frecuencia circular natural fundamental de la losa
ω	frecuencia circular de excitación debida al caminar de persona
ω_D	frecuencia circular amortiguada
t	tiempo
ζ	relación de amortiguamiento modal
f_s	frecuencia cíclica de paso (Hz)
f_n	frecuencia cíclica natural de vibración (Hz)
K_{mod}	rigidez modal de la losa
P	peso de persona
α_i	coeficiente dinámico con valor de 0.5
i	número de armónico, $i=1$
$u(0)$	condición inicial de desplazamiento
$\dot{u}(0)$	condición inicial de velocidad