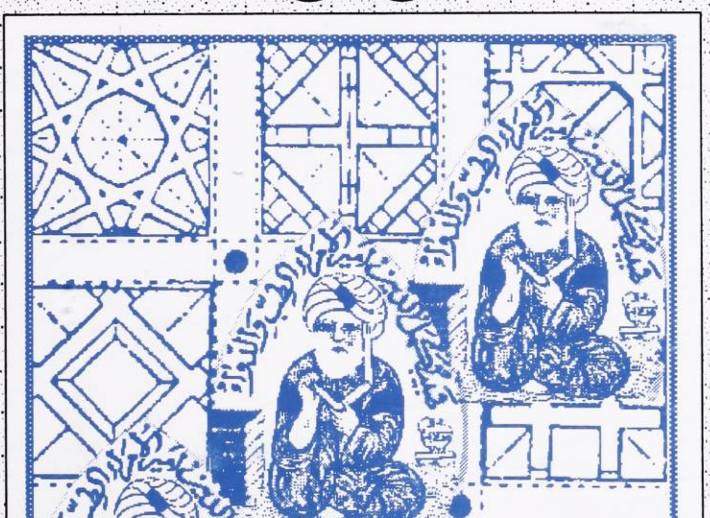
Salvador Álvarez Ballesteros
Jaime Grabinsky Steider

Introducción al álgebra lineal



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Introducción al álgebra lineal

Salvador Álvarez Ballesteros
Jaime Grabinsky Steider

Introducción al álgebra lineal

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Coordinación S.A.I.

ISBN: 970-654-505-0

Corrección:
Marisela Juárez Capistrán
Ilustración de portada:
Consuelo Quiroz Reyes
Diseño de Portada:
Modesto Serrano Ramírez

Sección de producción
y distribución editoriales
Tel. 5318-9222 / 9223
Fax 5318-9222

Universidad Autonóma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180
Col. Reynosa Tamaulipas
Delegación Azcapotzalco
C.P. 02200
México, D.F.

1a. edición, 1979
2a. edición, 2000
2a. reimpresión, 2004

Impreso en México

INTRODUCCIÓN

El álgebra lineal es una de las ramas de las matemáticas más paradójicas: combina una aparente simplicidad con una cantidad enorme de aplicaciones que trascienden con mucho los confines de las ciencias físicas; combina también la facilidad de adaptarse a múltiples problemas reales con la generalización y utilización de muchos de sus conceptos de las áreas más abstractas de las matemáticas. Es posiblemente la materia que más modelos ha aportado a la práctica de las matemáticas aplicadas por ingenieros y otros profesionales.

Muchos de sus conceptos se pueden visualizar en el espacio tridimensional y con problemas de geometría plana. Pero se abstraen y se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Al abstraerse permiten obtener nueva información, inaccesible previamente sobre las curvas en el plano y otros problemas geométricos. Pero también permiten enfrentar en forma compacta problemas de cálculo de varias variables. Muchos de sus conceptos aparecen en otros escenarios como en ecuaciones diferenciales, por lo que se enfatiza durante el curso la comprensión teórica, libre del contexto. Además de la belleza que experimenta la mayoría de la gente después de un tiempo de manejar y emplear conceptos abstractos en forma precisa, su valor como formativo de espíritus críticos, serenos e independientes es enorme.

Tal vez el teorema más rico, abstracto y práctico del curso, es el teorema 7 de la página 221 que relaciona propiedades de matrices, solución y existencia de soluciones de ecuaciones, determinantes y conceptos de espacios vectoriales.

Su comprensión y el manejo de las técnicas asociadas es uno de los principales objetivos de estudio.

GUIA S.A.I.

TEXTO:

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

Howard Anton. Ed. Limusa.

REFERENCIA:

ÁLGEBRA LINEAL

Seymour Lipschutz, Ed. McGraw Hill.

LECTURA SUGERIDA:

Colección de problemas de rectas, planos, sistemas de ecuaciones, cuadráticas.

José Ventura Becerril, Jaime Grabinsky, José Guzmán.

Publicación UAM-Azcapotzalco.

Revisado por: M. en C. Jaime Grabinsky Steider.
Última Revisión: Mayo de 1991.

Mecanografiado por: Irma C. Mendoza García.

PROGRAMA DE ÁLGEBRA LINEAL

UNIDAD I	Vectores en R^2 y R^3.
UNIDAD II	Álgebra de Matrices y Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales.
UNIDAD III	Espacios Euclideanos R^n. Espacios Vectoriales en General.
UNIDAD IV	Bases y Dimensión de Espacios Vectoriales.
UNIDAD V	Espacios Euclideanos.
UNIDAD DE REVISIÓN I	
UNIDAD VI	Transformaciones Lineales.
UNIDAD VII	Matrices y Transformaciones Lineales.
UNIDAD VIII	Determinantes.
UNIDAD IX	Valores y Vectores Característicos.
UNIDAD DE REVISIÓN II	

UNIDAD I

VECTORES EN R^2 Y R^3

Introducción:

El objetivo de esta unidad es el de revisitar o en su defecto estudiar por primera vez la parte correspondiente a los vectores del plano y del espacio ordinario. Esto servirá de base para generalizar las ideas de vector, ángulo, ortogonalidad, distancia, etc., a sistemas algebráicos que se comporten esencialmente como vectores; así mismo, acostumbrar al alumno a manejar los métodos vectoriales para la solución de problemas geométricos.

Objetivos:

1. Definir los vectores del espacio R^2 y R^3.
2. Manejar las operaciones de adición y multiplicación por escalares.
3. Utilizar las propiedades de las operaciones anteriores.
4. Utilizar la multiplicación escalar para obtener el módulo de un vector, ángulo entre vectores, ortogonalidad, proyección ortogonal.
5. Utilizar el producto vectorial para la solución de ciertos problemas físicos.
6. Aplicar los vectores a la solución de problemas geométricos: ecuaciones de rectas y planos, distancia, distancia de un punto a una recta o un plano, etc.

Procedimiento:

Para lograr los objetivos anteriores tendrás que:

1. Estudiar el capítulo II del texto, página 101 a 136.
2. Hacer los ejercicios siguientes:

   Página 110, sección 3.1: 3, 5, 6, 8, 9, y 11.

Página 113, sección 3.2: 1, 2, 3, 7, 9 y 13.
Página 120, sección 3.3: 3, 4, 8, 10, 13, 14, 15 y 16 (dos maneras).
Página 128, sección 3.4: 1, 3, 6, 7, 8, 11 y 13.
Página 135, sección 3.5: 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12 y 15.

3. Leer el capítulo I del libro de referencia (Álgebra Lineal, autor Seymour Lipschutz).

4. Hacer un resumen de las definiciones y simbología dadas.

Autoevaluación:

1. Sean los vectores u y v dados por u = (1,2,3) y v = (3,2,1). Encontrar 3u, u + v, u·v   v , d(u,v), uxv.

2. Dar la ecuación vectorial del plano que pasa por el punto (3,2,0) y que contiene al segmento de recta que une (-1,3,2) y (1,1,-1).

3. Encontrar la ecuación vectorial de un plano que pasa por (1,2,3) y es ortogonal al vector (1,-1,0).

4. Demuestre que la recta $\begin{aligned} x &= -1 + 3t \\ y &= 2 - 2t \\ z &= 3 - t \end{aligned}$ es paralela al plano. $7x + 5y + 11z = 22$

5. Dados los vectores a,b,c,d; ¿tiene sentido: (a·b)·(c·d), (a·b)(c·d) o (a·b) x (c·d)?

6. Dado el plano S: 3x + 4y - 5z = 13 y el punto (1,1,-1) calcule la distancia de P a S.

7. Demuestre el Teorema 3, página 118 del texto.

8. Demuestre el Teorema 6, página 130 del texto.

9. Defina proyección ortogonal del vector u sobre el vector v y la componente de u ortogonal a v. Cuál es la forma punto normal de la ecuación del plano.

UNIDAD II

ÁLGEBRA DE MATRICES Y SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Introducción:

El concepto de matriz aparece en una gran variedad de aplicaciones de las matemáticas a las ciencias físicas así como en las ciencias sociales; por ejemplo: es un modelo excelente para describir los llamados problemas lineales ya sea en circuitos eléctricos, sistemas mecánicos, transferencia de calor, etc.; por tal motivo las operaciones algebraicas entre matrices así como sus propiedades deben ser conocidas para poder aplicar adecuadamente este concepto en la solución de los modelos mencionados. Así mismo, se sistematizarán los métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales empleando el método de Gauss.

Objetivos:

Al concluir esta unidad podrás:

1. Conocer las operaciones de adición de matrices, multiplicación de matrices por escalares, multiplicación de matrices así como sus correspondientes propiedades.

2. Determinar las condiciones para que exista la inversa de una matriz.

3. Obtener la inversa de una matriz.

4. Aplicar el concepto de matriz para obtener soluciones en sistemas de ecuaciones lineales.

Procedimiento:

1. Estudiar del libro de texto el capítulo I, página (16 a 66). Revise con cuidado las páginas 63 y 64.

2. Resolver de la:

   Sección 1.1. los ejercicios 1, 2, 3, 4, y 6.
   Sección 1.2. los ejercicios 1, 2, 3, 5, 7 y 11.
   Sección 1.3. los ejercicios 1, 2, 4, 6 y 8.
   Sección 1.4. los ejercicios 1, 2, 4, 5 y 11.
   Sección 1.5. los ejercicios 1, 2, 4, 6 y 10.

Sección 1.6. los ejercicios 1, 3, 5, 8, 9, 10 y 11.
Sección 1.7. los ejercicios 1, 2, 3, 6 y 8.
Sección 1.8. los ejercicios

3. Leer del capítulo 2 del libro de referencia, la introducción Ecuación lineal, sistemas de ecuaciones lineales, solución de un sistema de ecuaciones lineales, solución de un sistema homogéneo.

4. Leer del libro de referencia el capítulo 3, páginas 35-44, introducción, matrices, adición de matrices y multiplicación por un escalar, multiplicación de matrices, transpuesta, matrices y sistemas de ecuaciones lineales, matrices escalón, equivalencia de filas y operaciones elementales con filas, matrices cuadradas, álgebra con matrices cuadradas y matrices invertibles y los problemas resueltos 3.1 a 3.25 (página 46 a 55).

Autoevaluación:

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

calcular:

a) $2A - 3B$

b) CB

c) Si existe C^{-1} calcúlala.

d) AC

e) ¿$AC - CA$?

f) ¿$A(B + D) = AB + AD$?

2. Reducir las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & -5 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ -4 & -5 & -6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

a la forma escalón (usando transformaciones elementales).

3. Investigar si es compatible el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x - 2y - z &= 5 \\ 2x - 5y + 3z &= -4 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

en caso de ser compatible resolverlo, usando el método de Gauss.

4. Resolver el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} 2x - y - z - 2u &= 3 \\ -3x + y - 2z - 2u &= -1 \\ x - 4y - 2z + 2u &= 0 \end{aligned}$$

usando el método de Gauss.

5. Demuestre el teorema 1, página 33.

6. Demuestre el teorema 2, secciones (c), (d) y (m), página 43.

7. Pruebe los teoremas 8, 9 y 10, pág. 54, 55 con sus propias palabras.

8. Defina: qué es una matriz escalonada y qué una matriz escalonada reducida, qué es una matriz elemental y cuál su relación con las operaciones elementales.

9. Demuestre el Corolario de la página 66.

UNIDAD III

ESPACIOS VECTORIALES

Introducción:

En algunas aplicaciones físicas, es insuficiente el concepto de par o terna ordenada de Reales, ya que se involucran "espacios" de dimensiones mayores que tres, por lo que hay que generalizar dicho concepto al caso de "eneadas" de reales e inclusive considerar otros sistemas algebraicos que esencialmente se comportan como vectores.

Objetivos:

1. Definir el espacio vectorial R^n mediante sus operaciones fundamentales (adición, multiplicación por un escalar y producto interno y sus propiedades).

2. Identificar el concepto de espacio vectorial abstracto (espacio de polinomios, de funciones, matrices, etc.).

3. Distinguir los subespacios de un espacio vectorial.

4. Utilizar el concepto de combinación y dependencia lineal de vectores.

5. Seleccionar los generadores de un subespacio.

Procedimiento:

1. Estudiar del libro de texto, capítulo IV, secciones 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4 (páginas 137 a 160).

2. Hacer los siguientes ejercicios del texto:

   Sección 4.1: 1, 2, 4, 5,6, 8, 9, 11 y 16.
   Sección 4.2: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 14, 20 y 21.
   Sección 4.3: 1, 2, 3, 4, 7, 10, 11, 12, 13 y 16.
   Sección 4.4: 1, 3, 5, 9, 10, 11, 15, 17, 18, 19, 20 y 21.

3. Leer del capítulo IV del libro de referencia de la página 63 hasta la página 69.

4. Hacer los ejercicios del libro de referencia: 4.40, 4.41, 4.47, 4.50, 4.51, 4.54, 4.58, 4.64, 4.72, 4.74.

Autoevaluación:

1. Investigar si el conjunto de números racionales forman un espacio vectorial respecto a las operaciones usuales de adición de racionales y multiplicación de reales por racionales.

2. Investigar cuáles de los siguientes subconjuntos de R^3 son subespacios de R^3:

   a) el conjunto de todos los vectores cuya primera coordenada es cero.

   b) El conjunto de todos los vectores tales que la suma de sus 3 coordenadas es uno.

   c) El conjunto de todos los vectores tales que la primera coordenada es un racional.

3. Sea $V = L\{(1,2,0)\ (0,-1,1)\ (3,7,-1)\ (-2,-2,-2)\}$. Encontrar un conjunto de generadores linealmente independientes.

4. Investigar si el siguiente conjunto es linealmente independiente.

   $$u = (-3,-2,0,1),\quad v = (-1,4,1,0),\quad w = (0,-2,1,0)$$

5. Sean vectores $u = (1,3,-2,0)$ $v = (1,1,1,0)$ $w = (4,-3,-2,-1)$

   Calcular:

   a) $3u - 2v + w$

   b) $\dfrac{2}{3u\cdot v}$

   c) Coseno del ángulo entre $(u - v)$, $(w - u)$.

6. Demuestre el teorema 5, página 152 con sus propias palabras.

7. Demuestre el teorema 6, página 159.

8. Defina independencia lineal de un conjunto finito de vectores; el hecho que un conjunto de vectores genere un espacio; un subespacio vectorial.

UNIDAD IV

BASES Y DIMENSIÓN

Introducción:

Es importante resaltar el hecho de que en ciertos espacios vectoriales (dimensión finita) existen subconjuntos finitos de elementos linealmente independientes con la propiedad de que cualquier elemento del Espacio puede expresarse como una combinación lineal de dichos elementos (tal subconjunto se le llama una Base del Espacio); así como la característica que tienen todas las bases, de tener el mismo número de elementos; el cual se denomina dimensión del espacio.

La obtención de tales bases es un aspecto esencial en el estudio de los espacios vectoriales; por otra parte, la introducción de operaciones entre subespacios permitirá mostrar las ideas geométricas en espacios vectoriales.

Objetivos:

Cuando termines esta unidad podrás:

1. Obtener bases de subespacios vectoriales.
2. Obtener la dimensión de un espacio vectorial.
3. Encontrar las coordenadas de un vector de un espacio vectorial respecto a cualquier base.
4. Determinar los subespacios intersección y suma directa e interpretarlos geométricamente.

Procedimiento:

Para cubrir los objetivos propuestos tendrás que:

1. Estudiar del libro de texto la sección 4.5 y 4.6 (páginas 161 a 176).
2. Hacer del libro de texto los ejercicios:

   Sección 4.5 (páginas 168 y 169): 2, 4, 5, 9, 10, 16, 17, 19 y 20.
   Sección 4.6 (página 177): 3, 4, 6, 7, 8, 9 y 10.

3. Leer del capítulo V del libro de referencia los incisos siguientes: bases, dimensión y subespacios (páginas 88, 89 y 90).

4. Del libro de referencia hacer los ejercicios 5.64, 5.65, 5.66, 5.68, 5.77, 5.80, 5.81, 5.83.

Autoevaluación:

1. Obtener una base del subespacio V = L {(1,1,-1), (2,-3,0), (2,-8,2)} y decir cuál es su dimensión.

2. Demostrar que los conjuntos (1,1,1), (1,1,0), (1,0,0) y (1,2,1), (-1,-2,3), (2,1,1) son bases en R^3 y obtener las coordenadas del vector (3,5,-1) respecto a esas bases.

3. Hallar la intersección y la suma de los subespacios de R^3.

   a) S = L {(1,1,-1), (0,1,2), (2,-1,-8)}

      S = L {(2,-3,1), (-1,0,-1), (3,-9,6)}

4. Sea S = L {(2,0,4), (-2,2,0)} obtener un subespacio T de R^3 tal que R^3 sea la suma directa de S y T, e interpretarlo geométricamente.

5. Cuáles son los elementos de $L(u_1, u_2, u_3)$. Defina el rango del espacio de renglones y columnas de una matriz. Defina el rango de una matriz aumentada.

6. Demuestre el teorema 7 y 8, página 165.

7. Demuestre también, cuidadosamente, el teorema 9, página 167.

8. Demuestre el teorema 11, página 171.

9. Defina la suma directa de dos subespacios. Cuál es la diferencia con el concepto de suma de subespacios. Qué ventajas tiene la suma directa sobre la suma. Qué es un sistema compatible o consistente de ecuaciones lineales.

10. Demuestre que un sistema es compatible si y sólo si el rango de una matriz y el rango de su matriz aumentada coinciden.

NOTA: $U+V = \{u+v \mid u \in U \text{ y } v \in V\}$ es la suma de U y V

$U \oplus V = \{u+v \mid u \in U \text{ y } v \in V\}$ y $U \cap V = \vec{0}$ (el conjunto vacío)

Ejemplo 1: U = plano xy V = plano yz $U+V = \mathbb{R}^3$; no es suma Directa porque $U \cap V$ = eje y

Ejemplo 2: U = plano xy V = eje z $U+V = U \oplus V = \mathbb{R}^3$

Toda suma directa de espacios es suma de espacios. Una suma es directa sólo si su intersección es el vector 0.

UNIDAD V

ESPACIOS EUCLIDEANOS R^n

Introducción:

En esta unidad se introducirá en los espacios vectoriales el concepto de producto interior, obteniendo con ello la posibilidad de considerar ángulo entre vectores, ortogonalidad, etc.: y en general la construcción de una geometría similar a la ordinaria en espacios abstractos.

Objetivos:

Al concluir esta unidad podrás:

1. Definir productos interiores en espacios vectoriales.
2. Calcular longitud y ángulo entre vectores. Generalizar el teorema de Pitágoras.
3. Determinar bases ortonormales en espacios vectoriales, usando el proceso de Gram Schmidt.
4. Determinar el complemento ortogonal de un subespacio e interpretarlo geométricamente.

Procedimiento:

1. Estudiar de tu libro de texto el capítulo IV, secciones 4.7, 4.8, 4.9 (páginas 178-199) haciendo los ejercicios siguientes:

   Sección 4.7: 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 15 y 16.
   Sección 4.8: 3, 4, 5, 6, 9, 10, 13, 19, 20 y 21.
   Sección 4.9: 1, 2, 3, 4, 8, 9, 12, 17, 19 y 20.

2. Estudia del libro de referencia, del capítulo 13 páginas 281 y 282, el concepto de complemento ortogonal y el teorema 13.2 viendo el ejemplo 13.9.
3. Leer del libro de referencia los ejercicios resueltos siguientes:

   13.2, 13.3, 13.4, 13.5, 13.8 y 13.9.

Autoevaluación:

1. Calcular el producto interno de los vectores que se indican.

   a) $u = (2,-2)$; $v = (-1,3)$ con el producto escalar usual en R^2.

   b) $u = (-1,-3,2)$, $v = (0,2,-2)$ con el producto escalar usual en R^3.

   c) $P(t) = -1 + 2t + t^2$, $q(t) = 3 - 2t - t^2$ con el producto interno $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)\, q(t)\, dt$.

2. En R^2 investigar cuáles de las funciones siguientes definen productos interiores; donde $u = (X, Y)$ y $v = (X_2, Y_2)$.

   a) $f(u, v) = X_1Y_2 - 2X_2Y_1 - 2X_2Y_2 + 5X_1Y_1$

   b) $f(u, v) = X_2Y_1 + X_1Y_2$

   c) $f(u, v) = X_2X_1$

   (Nota: ninguna de las tres funciones es un producto interior).

3. Obtener el coseno del ángulo a) entre los vectores u y v si con

   a) $u = (4,1,8)$ y $v = (0,1,-3)$

   b) Entre los polinomios dados en 1c.

   c) Entre las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

con el producto interno siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}\, b_{21} + a_{22}b_{22}$$

4. Ortonormalizar la base de R^3 dada por (1,1,1), (1,1,0), (1,2,1)

5. En la demostración del teorema 13, página 182, ¿por qué se puede concluir que el polinomio de 2° grado $at^2 + bt + c$ no tiene raíces reales o que tiene una raíz real múltiple (sugerencia: dibuje una parábola).

6. Demuestre el teorema 17, página 192 y el teorema 18, página 193

PRIMERA UNIDAD DE REVISIÓN

Introducción:

En las cinco unidades precedentes se han introducido conceptos matemáticos útiles para enfrentar problemas geométricos y algebraicos tradicionales como el cálculo de distancias y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Se ha enfatizado el -- uso de estos conceptos en problemas concretos y en ocasiones laboriosos numéricamente. Muchos de estos cálculos se vuelven inmanejables cuando crecen los sistemas a resolver (lo que ocurre en muchas aplicaciones). Por ejemplo, no es nada extraño calcular inversas de matrices de 100 x 100). La computadora los resuelve con métodos que se estudiarán en cursos posteriores.

En esta unidad, el énfasis es revisar cuidadosamente los conceptos usados y cómo se convierten en algoritmos. El poder rehacer desarrollos teóricos y resolver problemas no numéricos, abstractos, es tal vez una experiencia nueva para muchos, pero es clave para comprender bien el tema y ampliar las posibilidades de aplicación. Es un requerimiento necesario para cualquiera que desee mantenerse al día y aportar al progreso técnico.

Objetivos:

1. Ordenar y diferenciar los conceptos de los espacios R^2 y R^3, de espacios vectoriales y sus bases y de las diferentes operaciones en ellos. También los conceptos ligados a sistemas de ecuaciones lineales.

2. Entender la justificación de los diversos algoritmos utilizados, por ejemplo el de la obtención de A^{-1} del texto, de resolver ecuaciones, etc.

3. Revisar la diversidad de cálculos hechos y los modos más rápidos de efectuarlos.

4. Resolver problemas teóricos y demostrar los teoremas más importantes, sin tener que memorizar todos sus pasos.

5. Expresar oralmente en forma ordenada, precisa y clara la solución de problemas de álgebra lineal.

Procedimiento

1. Rehacer, sin observar casi el libro, el desarrollo teórico

de cada unidad, repitiendo las definiciones, los enunciados y las demostraciones de los teoremas.

2. Resolver problemas teóricos del libro de texto, del libro de referencia o de cualquier libro de álgebra lineal.

3. Revisar problemas de aplicación en la Colección de Problemas de la UAM-Azcapotzalco.

AUTOEVALUACIÓN:

1.- Definir los conceptos más importantes: Espacio vectorial, subespacio vectorial, Proyección de un vector en otro, Espacio vectorial generado por un conjunto de vectores, Independencia lineal de un conjunto de vectores, Producto interior en un espacio vectorial, Base ortonormal de un espacio vectorial, Proceso de ortonormalización de una base, Distancia de un punto a un plano, distancia de un punto a una recta.

2.- Dar la interpretación gráfica de la definición de una recta en el espacio: que pase por el origen y que no pase por el origen. ¿Cuál sería la definición paramétrica de un plano que: pase por el origen y que no pase por el origen?

3.- Describir los algoritmos siguientes: a) Método de Gauss Jordan, b) Cálculo de la inversa de una matriz, c) Proceso de Gram - Schmidt.
¿Es necesario normalizar cada vector que se obtiene en el proceso de Gram-Schmidt para que el conjunto obtenido sea realmente ortonormal? ¿Qué significa geométricamente el Método de Gauss-Jordan?

4.- ¿Cuántas bases tiene $\mathbb{R}^2$? ¿$\mathbb{R}^3$?

5.- ¿Cuáles son los subespacios de $\mathbb{R}^1$?, ¿de $\mathbb{R}^2$?, ¿de $\mathbb{R}^3$?, ¿de $\mathbb{R}^n$? Demuéstrelo.
¿Cuántos subespacios tiene cada uno de los espacios anteriores?

6.- ¿Cómo se calcula la distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^2$? (Dos métodos: intersección y por vectores)
¿Cómo se calcula la distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^3$? (Un método: por vectores)
¿Cómo se calcula la distancia de un punto a un plano en $\mathbb{R}^3$? (Dos métodos: intersección y por vectores)

UNIDAD VI

TRANSFORMACIONES LINEALES

Introducción:

En la unidad anterior se hizo notar la importancia que tienen las matrices en las aplicaciones a las ciencias físicas y sociales. En esta ocasión se estudiará la parte correspondiente a las transformaciones lineales las cuales por su alto contenido geométrico permiten determinar las propiedades básicas de los espacios vectoriales. Además, por su íntima conexión con las matrices, se tendrá la oportunidad de dar una justificación a las operaciones entre las mismas, empleando las operaciones correspondientes entre transformaciones lineales.

Objetivos:

Cuando termines esta unidad podrás:

1. Distinguir las transformaciones lineales de las no lineales de un espacio vectorial en otro.

2. Dar interpretación geométrica a ciertas transformaciones lineales (rotaciones, las matrices elementales).

3. Caracterizar las transformaciones lineales por las imágenes de los vectores de una base.

4. Definir el espacio nulo y la imagen de una transformación lineal de un espacio vectorial en otro, así como la relación entre sus dimensiones.

5. Operar con transformaciones lineales (como composición de func

6. Distinguir y obtener las transformaciones no singulares.

Procedimiento:

1. Estudiar del capítulo V, sección 1, 2 (páginas 201 a 224).

2. Hacer los ejercicios siguientes del capítulo V.

   Sección 1 (págs. 208, 209) 2, 5, 8, 12, 15, 20, 23, 24, 27, 28, 30 y 31.

Sección 2 (págs. 214, 215) 2, 5, 7, 11, 12 y 15.
Sección 3 (págs. 224, 225) 3, 5, 7, 8a, 11, 14, 15, 16 y 17.

3. Leer del libro de referencia el capítulo IV, página 121 a 131 revisando cuidadosamente los ejercicios: 6.1, 6.2, 6.7, 6.11, 6.12, 6.15, 6.18, 6.19, 6.20, 6.27, 6.31, 6.35, 6.36, 6.37.

Autoevaluación:

1. Dada la transformación T: $R^3 \to R^2$ por: $T(x,y,z)=(x+y, 2y-3z)$ hallar el núcleo y el espacio imagen de T; así como la nulidad y el rango de T.

2. Investigar cuáles de las siguientes transformaciones son lineales:

   a) T: $R^2 \to R^3$ dada por: $T(x,y) = (x + y, 3x, y)$

   b) T: $R^2 \to R^3$ dada por: $T(x,y) = (x, x + y, x + 2)$

   c) T: $R^3 \to R^2$ dada por: $T(x,y,z) = (x + y + z, x + y)$

3. Dadas T_1, T_2: $R^2 \to R^2$ por: $T_1(1,0)=(1,1)$, $T_1(0,1) = (-1,-4)$, $T_2(x,y) = (-3x+4y, x-3y)$

   Calcular: a) $2t_1 + 3T_2$; b) $T_1 - 4t_2$; c) dada $v = (3, 1)$ obtener sus imágenes bajo T_1 y T_2, e investigar si T_1 y T_2 son no-singulares (o sea, si son inversibles).

4. Dada T: $R^3 \to R^3$ por $T(x,y,z) = (x,y - z, 2y + z)$, obtener la imagen del vector $v = (1,0,2)$ respecto a la base natural y a la base $(1,1,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,0)$.

5. Dada T_1, T_2: $R^3 - R^3$ por

   $T_1\ (x,y,z) = (y,z,x)$

   $T_2\ (x,y,z) = (x, x+y, x+y+z)$

   Obtener: $T_1 \cdot T_2$, $T_2 \cdot T_1$

6. Defina el rango (o imagen) y el kernel (o nulidad) de una transformación lineal.

7. Demuestre el teorema 4 y el teorema 5, páginas 217 - 218.

8. Demuestre el teorema acumulativo 7, página 221.

UNIDAD VII

MATRICES Y TRANSFORMACIONES LINEALES

Introducción:

En esta unidad se establece la completa identificación entre transformaciones lineales de un espacio vectorial en otro y su representación matricial respecto a bases dadas en dichos espacios; obteniendo con esto la facilidad para utilizar indistintamente cualquiera de los dos conceptos en las diversas aplicaciones físicas. Por otra parte, para enfatizar la dependencia de las matrices respecto a diferentes bases, se encuentra la relación que deben satisfacer tales matrices en función del cambio de coordenadas.

Objetivos:

Una vez que hayas concluido esta unidad podrás:

1. Determinar la matriz de una transformación lineal de un espacio vectorial en otro, respecto a bases elegidas en los espacios dados.

2. Calcular la matriz de una transformación lineal cuando se cambian las bases en los espacios.

3. Determinar matrices similares.

Procedimiento:

Para lograr los objetivos anteriores tendrás que:

1. Estudiar del Capítulo V, las secciones 5.4, 5.5, 5.6 (págs. 225 a 252).

2. Hacer los siguientes ejercicios del capítulo V:

   Sección 5.4 (págs. 234 a 236) 1, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 13, 14, 15 y 16.
   Sección 5.5 (págs. 246 a 248) 1, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 19, 10, 21 y 22.
   Sección 5.6 (págs. 252 a 253) 1, 4, 5, 9 y 11.

3. Estudiar del libro de referencia, el capítulo VII (páginas 150 a 157) y los problemas resueltos: 7.1, 7.2, 7.5, 7.6, 7.12, 7.13, 7.14, 7.15, 7.17, 7.18, 7.20 y 7.22.

Autoevaluación:

1. Dada T: $R^2 \to R^2$ por $T(x,y) = (3x - y,\ 2x + y)$

   a) Obtener su matriz respecto a la base natural de R^2.

   b) Obtener su matriz respecto a la base $(1,1)$ $(-1,1)$.

2. Dadas las transformaciones T_1, T_2: $R^3 - R^3$, por las matrices siguientes: (respectivamente)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   respecto a la base natural.

   a) Obtener las transformaciones T_1 y T_2.

   b) La imagen de $(1,2,3)$ bajo T_1 y T_2, $T_1 + T_2$ y T_1T_2.

   c) La matriz de $T_1 + T_2$, comprobando que la representación matricial de la suma de transformaciones es la suma de las matrices A y B.

   d) La matriz de T_1T_2, comprobando que su matriz es igual al producto de las matrices A y B.

3. Dada la transformación lineal de T: $R^3 \to R^3$. $T(x,y,z) =$ $= (x-y-z,\ y+z,\ 2x-2y+3z)$.

   a) Investigar si es no singular, en cuyo caso obtener su transformación inversa.

   b) Obtener la matriz de T, respecto a la base natural; y la matriz de T^{-1} respecto a la base natural, comprobando que esta última es la inversa de la anterior.

4. Dadas las bases $B_1 = \{(1,1),\ (1,0)\}$, $B_2 = \{(1,2),\ (2,3)\}$ en R^2:

   a) Obtener la matriz P de transición de la base B_1 a la base B_2 y la matriz Q de transición de B_2 a B_1.

   b) Verificar que $PQ = I$

5. Dado el operador T: $R^2 \to R^2$ por $T(1,0) = 3(1,0) - 2(0,1)$ y $T(0,1) = (1,0) + 4(0,1)$ obtener la matriz A de T respecto a la base natural y la matriz B respecto a la base (1,2), (2,3) así como la matriz Q de transición de la base natural a la nueva base; comprobando que A y B son similares.

6. Demuestre el teorema 9, página 240.

7. Demuestre el teorema 10, página 241.

8. Demuestre la observación, página 242.

9. Demuestre el teorema 11, página 249.

10. Defina la matriz de transición.

UNIDAD VIII

DETERMINANTES

Introducción:

Dado el conjunto de matrices cuadradas nxn una función conocida como la función determinante asocia a cada matriz un número real, llamado su determinante.

El estudio de los determinantes es importante, tanto desde el punto de vista teórico (funciones multilineales, tensores, etc.) como en sus aspectos prácticos (para la solución de sistemas de ecuaciones lineales).

Objetivos:

Cuando termines esta unidad podrás:

1. Definir el concepto de permutación de n objetos y clasificar las de orden par o las de orden impar.

2. Definir determinantes de 2° orden, 3er. orden, etc. usando permutaciones.

3. Utilizar menores y cofactores para definir el determinante de una matriz.

4. Calcular determinantes utilizando las propiedades de ellos.

5. Aplicar los determinantes a la solución de sistemas lineales.

Procedimiento:

Para lograr tus objetivos tendrás que:

1. Estudiar del libro de texto el capítulo II (págs. 69-97) resolviendo los siguientes ejercicios:

   Sección 2.1 (pág. 75) 1, 2, 6, 10, 11, 13, 15 y 16.
   Sección 2.2 (pág. 80-81) 1, 4, 6, 8, 11 y 15.
   Sección 2.3 (pág. 87-88) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12 y 13.
   Sección 2.4 (pág. 97-99) 1, 3, 7, 9, 11, 13, 16 y 18.

2. Estudiar del libro de referencia: el capítulo VIII (página 171-177) y de los problemas resueltos los 8.3, 8.4, 8.6, 8.7, 8.10,

8.12, 8.14, 8.15, 8.17, 8.18, 8.30, 8.31 y 8.38, resolviendo el 8.47, 8.50 y 8.62.

3. Del libro de referencia estudiar: del capítulo V (págs. 90 a 92) la definición de rango y aplicaciones a ecuaciones lineales; viendo con cuidado los ejercicios resueltos: 5.25, 5.26, 5.40 y 5.42.

Autoevaluación:

1. Definir el concepto de permutación y encontrar todas las permutaciones de (1 2 3 4).

2. Decir si las permutaciones son pares o impares.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 3 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Usando permutaciones encontrar el determinante de orden 3x3.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

4. Dada

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Encontrar su determinante utilizando menores y cofactores.

5. Demuestre los teoremas 2 y 3, página 77.

6. Demuestre el teorema 4, página 82.

7. Dado el sistema siguiente:

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$$

obtener la solución utilizando la regla de Cramer.

8. Calcular el determinante de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

usando las propiedades.

9. Demuestre el teorema 9, página 96.

UNIDAD IX

VALORES Y VECTORES CARACTERÍSTICOS

Introducción:

Dado que se ha visto en las unidades anteriores que la representación matricial de un operador lineal depende de las bases elegidas en el espacio, se presenta el problema de seleccionar aquella base respecto a la cual, la matriz correspondiente tenga una forma diagonal con la cual pueden deducirse más fácilmente las propiedades intrínsecas de dicha transformación; este problema puede analizarse introduciendo el concepto de valores y vectores característicos. Por otra parte desde el punto de vista geométrico, la determianción de valores y vectores característicos indican las direcciones invariantes de algún fenómeno descrito por una transformación lineal.

Objetivos:

Al concluir esta unidad podrás:

1. Definir el concepto del valor y vector característico para matrices y operadores lineales ilustrándolo con algunos ejemplos.
2. Obtener el subespacio asociado a un valor característico dado.
3. Calcular el polinomio característico de una matriz.
4. Diagonalizar matrices de orden 2x2 y 3x3.

Procedimiento:

Para lograr tus objetivos tendrás que:

1. Estudiar de tu libro de texto del capítulo VI, las páginas 255 a 274.
2. Hacer del mismo libro (texto) los siguientes ejercicios:

   Sección 6.1 (págs. 261 - 262) 1, 2, 5, 8, 12, 13 y 16.
   Sección 6.2 (págs. 288 - 289) 2, 3, 5, 7, 9, 11, 12 y 15.
   Sección 6.3 (págs. 274 - 275) 1:a,b y c, 2, 3, 5, 10, 11 y 13.

3. Estudiar de tu libro de referencia del capítulo IX las páginas 197 a 202 viendo con cuidado los problemas resueltos 9.1, 9.2, 9.7, 9.8, 9.10 y 9.16.

Autoevaluación:

1. Dada T: $R^2 - R^2$ $T(x,y)$ - $(x+y),\ 2x)$ obtener: sus valores y vectores característicos.

2. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Obtener su polinomio, vectores y valores característicos.

3. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtener una matriz diagonal semejante a dicha matriz.

4. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt[3]{3} \\ \sqrt[3]{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Obtener una matriz P que ortogonalice a la matriz A y calcular $P^{-1}AP$.

SEGUNDA UNIDAD DE REVISIÓN

En las cuatro unidades precedentes se presentó la idea de una tansformación lineal, los algoritmos para calcularla en términos de dos bases dadas. La relación fundamental que existe con el concepto de matriz. Se generan subespacios naturales del dominio (el núcleo) y del contradominio (la imagen) de una transformación lineal. La imagen de subespacios del dominio son subespacios del contradominio. En particular en $\mathbb{R}^3$, los subespacios son el vector 0, rectas que pasan por el origen, planos que incluyen el origen y todo $\mathbb{R}^3$. Por tanto, sus imágenes, serán, a lo más, estos subespacios. Es interesante interpretar geométricamente el efecto de matrices conocidas en cuadrados ($\mathbb{R}^2$), cubos ($\mathbb{R}^3$) e hipercubos ($\mathbb{R}^n$).

El cálculo de determinantes es de mucha utilidad para resolver sistemas de ecuaciones "cuadrados" y necesario para obtener vectores propios de una transformación, que son aquellos vectores que conservan su dirección pudiendo contraerse o expanderse, aumentar o disminuir su magnitud. Estos vectores, cuando generan una base,permiten expresar en forma muy sencilla (diagonal) la transformación lineal correspondiente. Vectores, valores y funciones propias son conceptos muy utilizados en las aplicaciones.

OBJETIVOS

1.- Revisar: los conceptos de transformación lineal y la matriz asociada dado un par de bases; definiciones y algoritmos, constatando que una misma transformación lineal puede tener diferentes "presentaciones" y practicando los algoritmos para obtenerlas.

2.- Definir algebraicamente el determinante y demostrar sus principales propiedades, incluyendo las que resultan de aplicar las operaciones elementales.

3.- Definir los conceptos de vector y valor propio e interpretarlos geométricamente. Definir el polinomio característico y utilizarlo para diagonalizar una matriz. Utilizar la diagonalización para simplificar algunos cálculos.

4.- Interpretar geométricamente en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ todos los conceptos y resultados obtenidos del curso.

PROCEDIMIENTO

1.- Revisar los conceptos más importantes del curso (vector, espacio vectorial, subespacio vectorial, operaciones entre vectores, conjunto de vectores linealmente independientes, conjunto de vectores generadores de un subespacio vectorial, matriz, espacio de columnas de una matriz, espacio de renglones de una matriz, rango de una matriz, sistema de ecuaciones lineales, sistema de ecuaciones lineales homogéneas, sistema de ecuaciones lineales no homogéneas, solución o soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, producto interior de un espacio vectorial).

Encontrar la transformación y la matriz correspondiente a T definida por T: $M^{2x2} \to M^{2x2}$ $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

¿Cuáles son sus valores y vectores característicos?

2.- T: $R^n \to R^m$ dibuje, en notación de conjuntos la imagen y el núcleo de t.
Si S: $R^m \to R^p$, lo mismo.
Sea SoT la composición, dibuje, tres conjuntos R^n, R^m, R^p y los núcleos y las imágenes de S, T, y SoT.
¿Qué concluye? ¿Puede demostrarlo?

Si: n=m=p, ¿qué se puede afirmar de los valores propios de SoT, si tienen los mismos vectores propios?

Sean U,V con $U \cap V = \{0\}$ dos espacios vectoriales en $\mathbb{R}^n$, cómo son sus imágenes T(U) y T(V)?

3.- ¿Cuáles son los subespacios de $\mathbb{R}^3$? Demuéstrelo.
Demuestre que la imagen de un subespacio de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio de R^m T: $R^n \to T^m$.

4.- Qué significa geométricmanete cualquier método de resolver sistemas de ecuaciones?

5.- ¿Si una matriz cuadrada A tiene vectores propios $V_1,\ldots V_n$ con valores propios diferentes $d_1,\ldots d_n$, cuáles son los vectores propios de A^{-1} y cuáles sus valores propios (A matriz n x n).
¿Cuál es la interpretación gráfica, en este caso?
En general qué efecto geométrico tiene sobre los vectores de una base de $\mathbb{R}^n$ la transformación A^{-1} D operador derivada.

6.- ¿Cuáles son los vectores propios de DP_n, P_n = polinomio de grado n. Los valores propios de D?

APÉNDICE INFORMAL

En el presente curso de álgebra lineal se cubren los temas más fundamentales para resolver sistemas de ecuaciones lineales y hacerlo del modo más fácil posible. El álgebra lineal, sin embargo, trasciende en importancia teórica a lo que sugiera el materal cubierto. Sus interrelaciones con disciplinas como el Análisis Funcional, Solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales (que se estudia en un curso de Física Matemática) Series de Fourier Generalizadas, Grupos Topológicos son muy amplias. Muchos de sus conceptos se generalizan a un número infinito de dimensiones generando la herramienta necesaria (Espacios de Hilbert, espacios de Banach) para resolver muchos problemas de Física Cuántica, de Telecomunicaciones, de Procesos Estocásticos. Algunos teoremas de álgebra lineal como el Espectral, que con un poco más de estudio se puede entender (sin necesidad de especializarse en matemáticas o haber terminado la licenciatura) se convierten en teoremas básicos para los espacios de un número infinito de dimensiones, descomponiendo un operador en operadores más sencillos.

Como se observó en uno de los problemas, los números complejos son isomorfos (es decir equivalentes en cardinalidad y en su comportamiento frente a operaciones algebráicas) con un subespacio de las matrices de 2 por 2. Así, propiedades que se demuestran para este espacio pueden trasladarse al otro. En forma parecida otros conceptos como el de grupos (ligados a gráficas por ejemplo) pueden ser modelados mediante matrices usando los resultados bien conocidos para éstos, surgiendo la teoría de representación de grupos que desde la segunda década de este siglo hasta nuestros mismos días ha impactado a la física matemática y por medio de ésta, por ejemplo, a la comprensión de los fenómenos y de la estructura del núcleo del átomo, por no mencionar su aportación a la comprensión de fenómenos económicos.

La resolución práctica de problemas de ingeniería requiere en muchos casos usar una aproximación lineal y en los métodos de Cálculo Numérico surgen frecuentemente conceptos provenientes del Álgebra de Transformaciones Lineales.

Introducción al álgebra lineal
Se terminó de imprimir en el mes de mayo del año 2004 en los talleres de la Sección de Impresión y Reproducción de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco

La edición estuvo a cargo de la Sección de Producción y Distribución Editoriales
Se imprimieron 100 ejemplares más sobrantes para reposición.

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

COSEI
COORDINACIÓN DE SERVICIOS DE INFORMACIÓN

Formato de Papeleta de Vencimiento

El usuario se obliga a devolver este libro en la fecha señalada en el sello mas reciente

Código de barras. 2894038

FECHA DE DEVOLUCION

- Ordenar las fechas de vencimiento de manera vertical.
- Cancelar con el sello de "DEVUELTO" la fecha de vencimiento a la entrega del libro

2894038

30 AÑOS

...transformando el diálogo por la razón

INT. AL ALGEBRA LINEAL

ALVAREZ /GRABINSKY * SECCION DE IMPRESION

04451 $ 8.00

ISBN: 970-654-505-0

978-97065-45053

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Division de Ciencias Básicas e Ingeniería
Coordinación S.A.I.

Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales