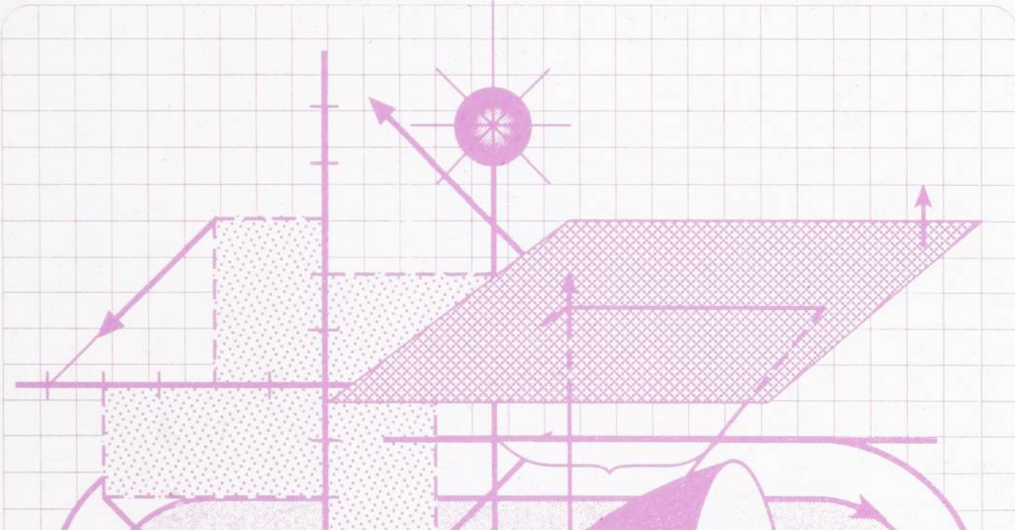
Problemario de vectores, rectas, planos, sistemas de ecuaciones lineales, cónicas y esferas

Con anexo

José V. Becerril • Jaime Grabinsky • José Guzmán



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Problemario de vectores, rectas, planos, sistemas de ecuaciones lineales, cónicas y esferas

Con anexo

José V. Becerril • Jaime Grabinsky • José Guzmán

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas

ISBN: 970- 654-764-9

Diseño de Portada:
Modesto Serrano Ramírez

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas
Deleg. Azcapotzalco, C.P. 02200
México, D.F.

Sección de producción
y distribución editoriales
tel. 5318-9222/9223. Fax 5318-9222

2a. edición, 2001

Impreso en México.

CONTENIDO

ANEXO

PRESENTACIÓN

Este libro de problemas pretende reforzar y agilizar la práctica para la resolución de problemas en los temas de: vectores, rectas, planos, sistemas de ecuaciones lineales, cónicas y esfera.

Hay problemas resueltos y propuestos, algunos ilustran usos variados, interesantes y útiles.

En los cursos de estos temas usualmente faltan clases de ejercicios que auxilien a los alumnos, se espera que este trabajo supla en parte esa deficiencia.

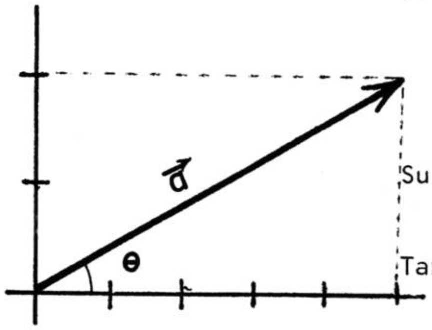
No hay mejor modo de aprender que haciendo, por eso se sugiere tratar de resolver problemas por sí mismo antes de ver las soluciones, que estas sólo verifiquen o corrijan lo hecho.

Agradecemos a los profesores Felipe Monroy, José de Jesus Belmonte los ejercicios sugeridos y, al profesor José Luis Huerta los ejercicios aportados. Agradecemos a la Sra. Carolina Rangel el trabajo gráfico y de mecanografía y al Sr. Gabriel Brizuela por los dibujos realizados.

Los Autores.

VECTORES EN R^2

1.- Dibuja los siguientes vectores $\vec{a}=(5,2)$; $\vec{b}=(-2,3)$; $\vec{c}=(-3,-4)$; $\vec{d}=(2,-5)$. Calcula su norma y dirección.

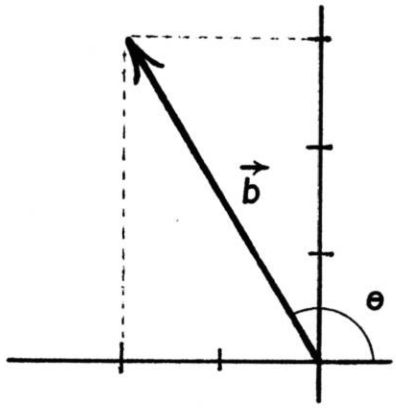


$$\| \vec{a} \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4}$$

$$\| \vec{a} \| = \sqrt{29}$$

Su dirección θ será:

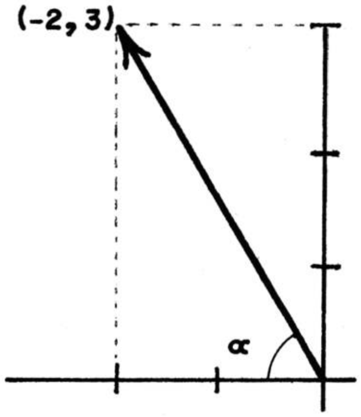
$\tan \theta = \frac{2}{5} = 0.4 \qquad \therefore \quad \theta = 21.8°$



$$\| \vec{b} \| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$\| \vec{b} \| = \sqrt{13}$$

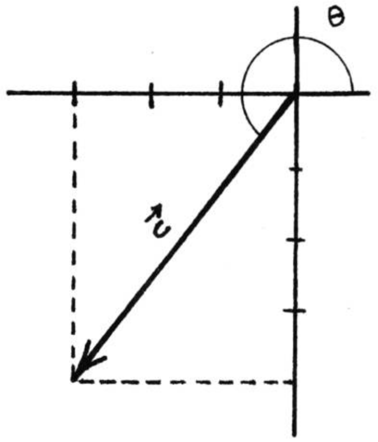
Para determinar la dirección nos auxiliaremos de un ángulo α. Ver figura



$\tan \alpha = \frac{3}{2} = 1.5 \qquad \alpha = 56.30°$

Así $\theta = 180° - \alpha = 180° - 56.30°$

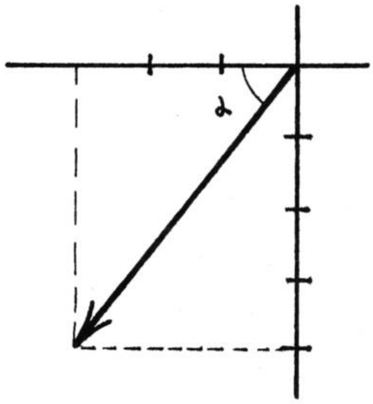
$\therefore \quad \theta = 123.30°$



$|| \vec{c} || = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$

$|| \vec{c} || = 5$

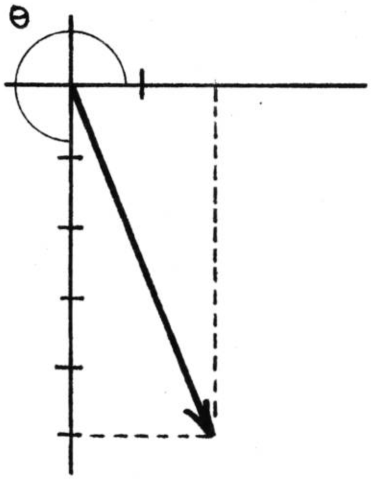
Para la dirección de c nos ayudaremos también de un á gulo agudo. Ver figura.



$\text{Tan } \alpha = \frac{4}{3} = 1.333$ $\qquad\qquad \alpha = 53.12°$

Luego la dirección θ de $\vec{c}$ es: $180° + \alpha$

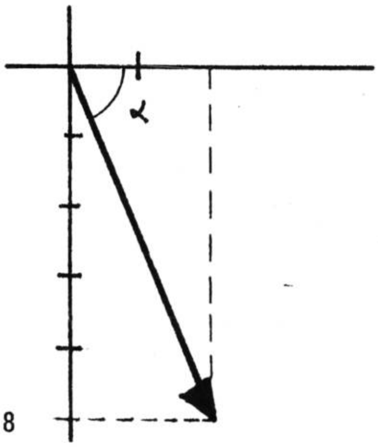
$\therefore \theta = 233.12°$



$|| \vec{d} || = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

$|| \vec{d} || = \sqrt{29}$

Una vez más para determinar la dirección se hará con ayuda de otro ángulo α.



$\text{Tan } \alpha = \frac{5}{2} = 2.5$ $\qquad\qquad \alpha = 68.19°$

De donde la dirección θ de $\vec{d}$ será

$\theta = 360° - \alpha$

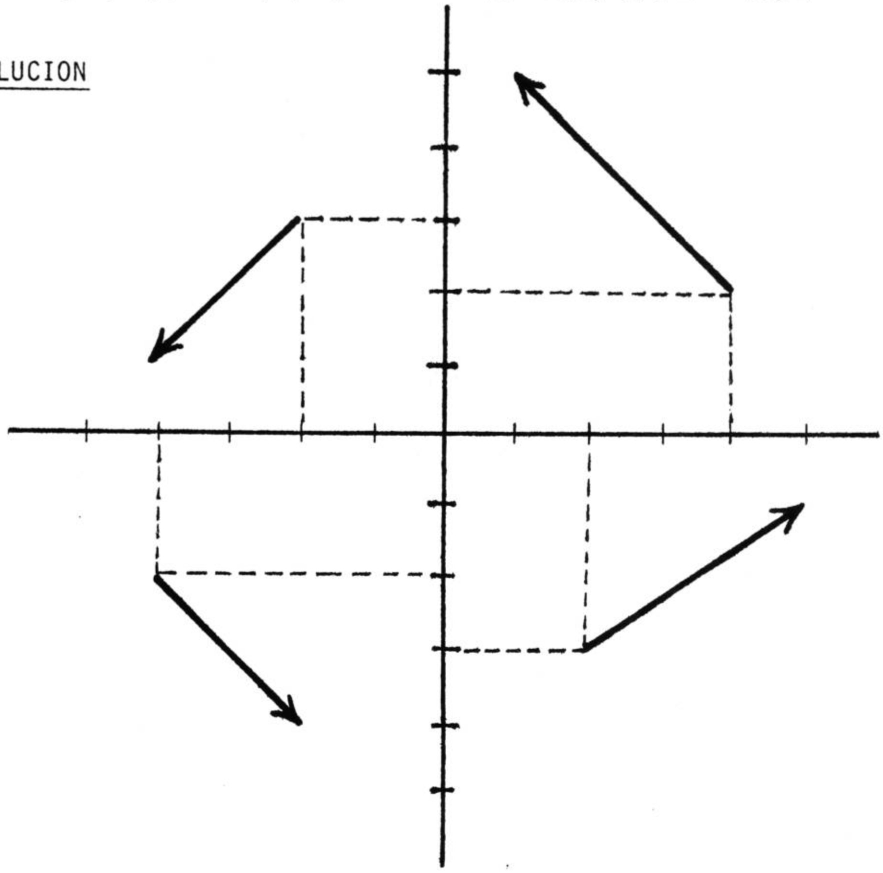
$\therefore \theta = 291.81°$

2.- Localiza en el punto A indicado los vectores dados.

a).- $A(4,2)$; $\vec{u} = (-3,3)$ b).- $A(-2,3)$; $\vec{v} = (-2,-2)$

c).- $A(-4,-2)$; $\vec{w} = (2,-2)$ d).- $A(2,-3)$; $\vec{x} = (3,2)$

SOLUCION



3.- Se dan $\vec{a} = (-3,3)$; $\vec{b} = (-4,-3)$; $\vec{c} = (1,5)$; $\vec{d} = (-3,1)$

i).- Calcula $\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{c} - \vec{d}$; $\vec{d} - \vec{b}$; analítica y geométricamente.

ii).- Calcula $\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|$; compara con $\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| + \|\vec{c}\|$
$\vec{d}\cdot(\vec{a} + \vec{b})$; $(\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{c} - \vec{d})$; $\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|(\vec{c} \cdot \vec{d})$.

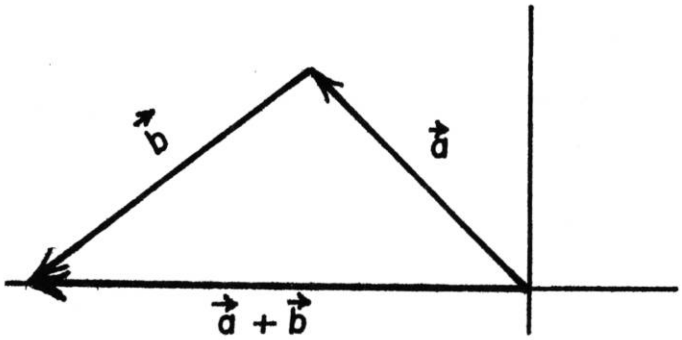
SOLUCIÓN

Analíticamente tenemos

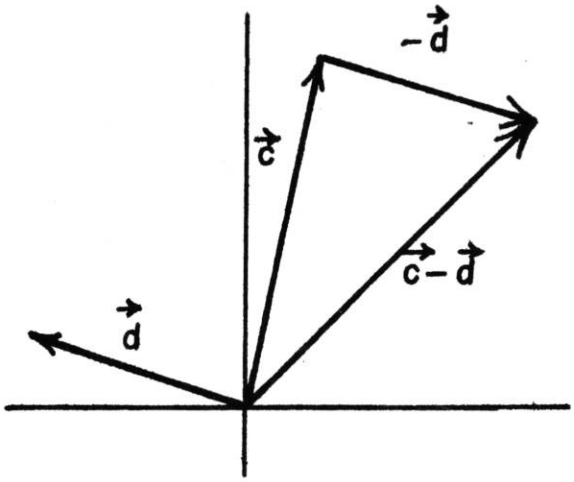
$$\vec{a} + \vec{b} = (-3,3) + (-4,-3) = (-3+(-4),3+(-3)) = (-3-4,3-3) = (-7,0)$$

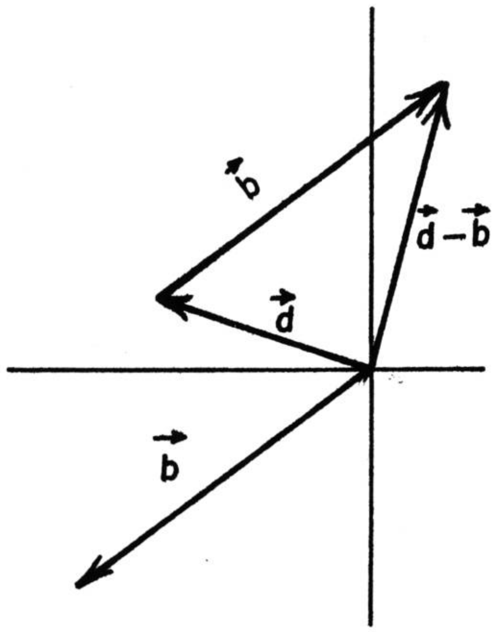
$$\vec{a} + \vec{b} = (-7,0)$$

Geométricamente: Colocamos el vector $\vec{a}$ con su inicio en el orígen donde termina el vector $\vec{a}$ tomando como punto de referencia colocamos el vector $\vec{b}$, el vector suma $\vec{a} + \vec{b}$ será el vector que inicia donde inicia $\vec{a}$ y termina donde termina $\vec{b}$.



$\vec{a} + \vec{b} = (-7,\ 0)$





$$\begin{aligned}\vec{c} - \vec{d} &= (1,5) - (-3,1)\\ &= (1-(-3),\ 5-1)\\ &= (1+3,4)\\ &= (5,4)\end{aligned}$$

$\therefore\ \vec{c} - \vec{d} = (5,4)$

$$\begin{aligned}\vec{d} - \vec{b} &= (-3,1)-(-4,-3)\\ &= (-3-(-4),1-(-3))\\ &= (-3+4,(1+3)) = (1,4)\end{aligned}$$

$\therefore\ \vec{d} - \vec{b} = (1,4)$

$$\| \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \| = \| (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \| = \| (-7,0) + (1,5) \| = \| (-6,5) \|$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + 5^2} = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61}$$

$\| \vec{a} \| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ $\qquad$ $\| \vec{b} \| = 5$ $\qquad$ $\| \vec{c} \| = \sqrt{26}$

$$\| \vec{a} \| + \| \vec{b} \| + \| \vec{c} \| = 3\sqrt{2} + 5 + \sqrt{26} \neq \sqrt{61} = \| \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \|$$

$$\therefore \| \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \| \neq \| \vec{a} \| + \| \vec{b} \| + \| \vec{c} \|$$

$$\vec{d} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (-3,1) \cdot (-7,0) = (-3)(-7) + 1(0) = 21 + 0 = 21$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{d}) = (-7,0) \cdot (4,4) = -7(4) + 0(4) = -28 + 0 = -28$$

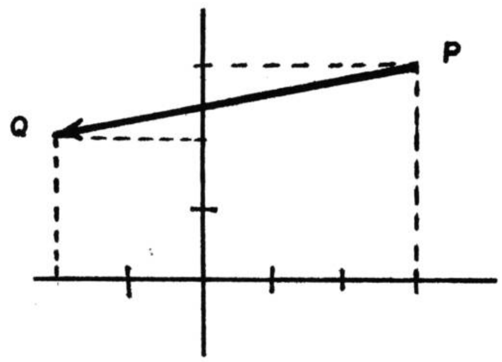
$$\| \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \| (\vec{c} \cdot \vec{d}) = \sqrt{61}\ [(1.5) \cdot (-3,1)] = \sqrt{61}\ [1(-3) + 5(1)]$$

$$= \sqrt{61}\ [-3 + 5] = 2\sqrt{61}$$

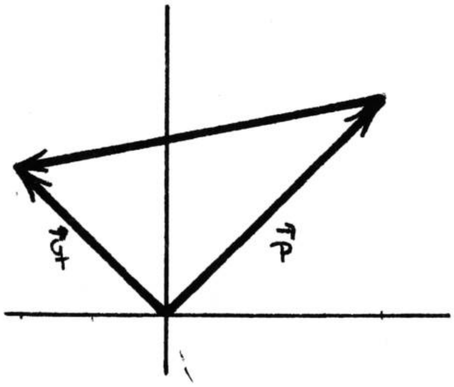
4.- Determina analítica y geométricamente el vector que inicia en el punto P(3,3) y termina en el punto Q(-2,2), da el vector de igual magnitud y sentido contrario al vector anterior.

SOLUCIÓN

Geométricamente es la flecha que va del punto P al punto Q. (Ver figura)



De esta misma figura podemos derivar la solución analítica. Introduzcamos los vectores $\vec{p}$, $\vec{q}$.



De aquí deduciremos:

$\vec{p} + \overrightarrow{PQ} = \vec{q}$; $\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$

Así $\overrightarrow{PQ} = (-2,2) - (3,3) = (-5,-1)$

$\overrightarrow{PQ} = (-5,-1)$

Observa como si tomas de referencia el punto P, el vector $\overrightarrow{PQ}$ efectivamente tiene coordenadas $(-5,-1)$.

Un vector de igual magnitud y sentido contrario a $\overrightarrow{PQ}$ será $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{QP}=-\overrightarrow{PQ}$
$\therefore$ $\overrightarrow{QP} = -(-5,-1) = (5,1)$.

5.- Sea $\vec{a} = (8,5)$ y $\vec{b} = (3,-1)$. Encontrar un vector unitario que tenga la misma dirección que $\vec{a} + \vec{b}$.

SOLUCIÓN

Encontraremos primero analíticamente al vector $\vec{a} + \vec{b}$

$\vec{a} + \vec{b} = (8,5) + (3,-1) = (11,4)$

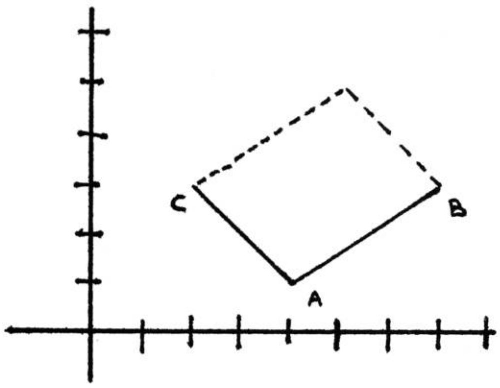
Luego el vector unitario será

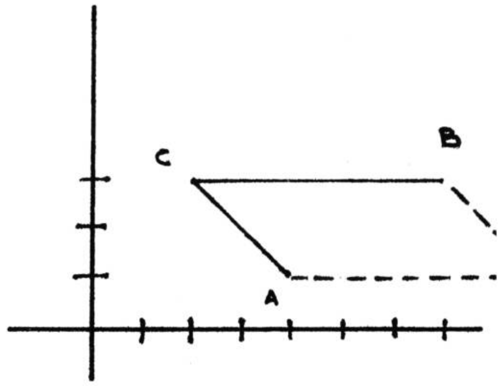
$$\frac{1}{\|\vec{a} + \vec{b}\|}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{11^2 + 4^2}}(11,4) = \frac{1}{\sqrt{137}}(11,4) = \left(\frac{11}{\sqrt{137}} , \frac{4}{\sqrt{137}}\right)$$

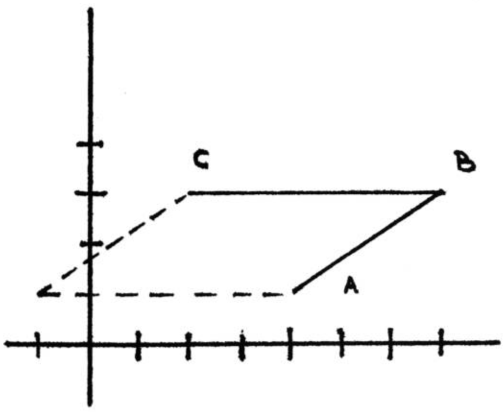
6.- Se dan los puntos A(4,1); B(7,3); C(2,3). Hallar un cuarto punto D de manera tal que el cuadrilátero que formen ABCD sea un paralelogramo.

SOLUCIÓN

Un primer paso hacia la solución es dibujar el paralelogramo.

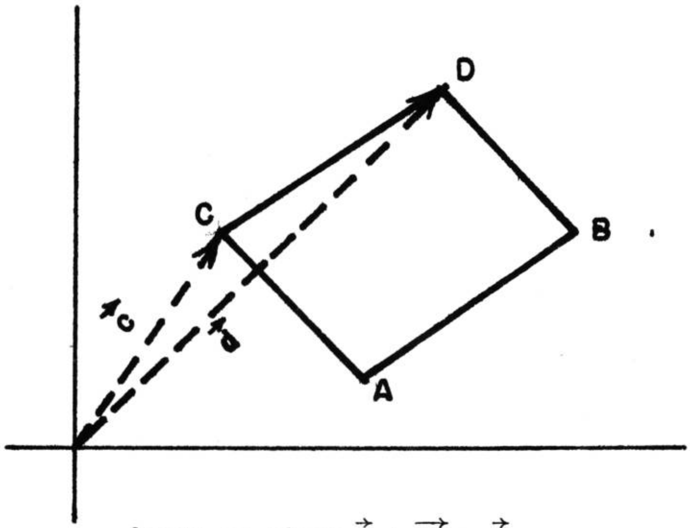






Así vemos que existen tres posibles puntos D para formar el paralelogramo.

Veamos el primer caso: ¿Qué vectores podemos introducir?



luego se tiene $\vec{c} + \overrightarrow{CD} = \vec{d}$

Por lo tanto si determinamos $\overrightarrow{CD}$ podemos conocer $\vec{d}$.

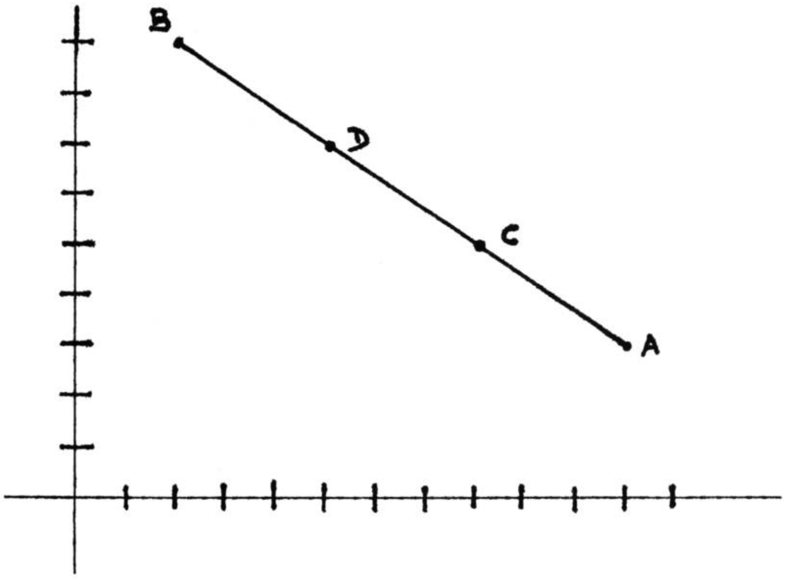
Pero $\overrightarrow{CD}$ es igual a $\overrightarrow{AB}$ $\therefore$ $\vec{d} = \vec{c} + \overrightarrow{AB}$

Así $\vec{d} = (2,3) + (3,2) = (5,5)$ $\therefore$ $D(5,5)$

7.- Se tiene el segmento de extremos (2,9); (11,3). Hallar las coordenadas de los puntos que dividen al segmento dado en tres partes iguales.

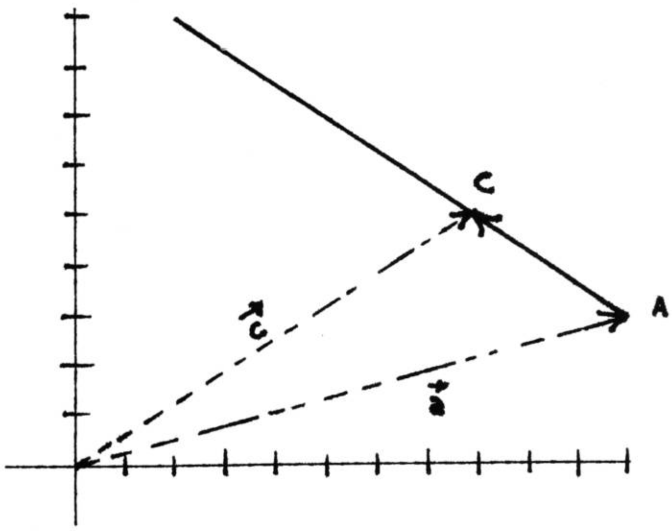
SOLUCIÓN

Hagamos una figura e introduzcamos notación.



Denotemos por A y B los extremos del segmento, por C y D los puntos que se andan buscando

Encontremos C. ¿Podemos introducir vectores? ¿Qué vectores podemos introducir?. Hagámoslo en la figura.



Luego tenemos $\vec{c} = \vec{a} + \overrightarrow{AC}$ ¿ A qué es igual $\overrightarrow{AC}$?.

De la hipótesis $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}[(2,9) - (11,6)] = \frac{1}{3}(-9,6) = (-3,2)$

Así $\vec{c} = \vec{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (11,3) + (-3,2) = (8,5)$

C (8,5)

8.- Dados $\vec{a} = (-2,1)$, $\vec{b} = (3,-2)$, y $\vec{c} = (5,-4)$. Encontrar los escalares h,k tales que:

$$\vec{c} = \overrightarrow{ha} + \overrightarrow{kb}$$

SOLUCIÓN

Sustituyendo los valores de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ en la expresión que se nos pide demostrar, tendremos

$$(5,-4) = h(-2,1) + k(3,-2)$$

$$(5,-4) = (-2h,h) + (3k,-2k)$$

$$(5,-4) = (-2h + 3k,\ h - 2k) \quad \text{entonces}$$

$$-2h + 3k = 5$$

$$h - 2k = -4$$

Al resolver este sistema de ecuaciones, tenemos que

$$h = 2 \quad y \quad k = 3$$

9.- Dados $\vec{a} = (1,-2)$, $\vec{b} = (-2,4)$ y $\vec{c} = (7,-5)$. Demostrar que $\vec{c}$ no se puede escribir en la forma

$$h\vec{a} + k\vec{b}$$

donde h y k son escalares.

SOLUCIÓN

Demostraremos que no existen escalares h,k tales que

$$h\vec{a} + k\vec{b} = \vec{c} \qquad \text{es decir}$$

$$(7,-5) = h(1,-2) + k(-2,4)$$

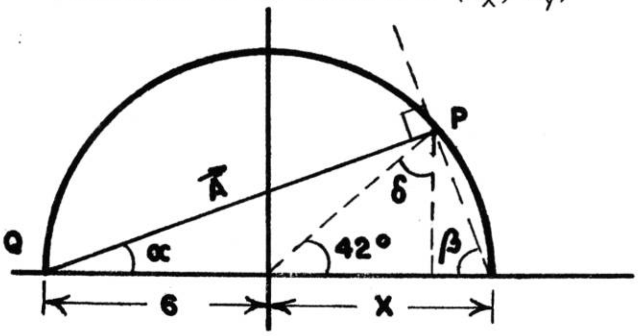
$$(7,-5) = (h,-2h) + (-2k,4k), \text{ entonces}$$

$$+h - 2k = 7$$

$$-2h + 4k = -5$$

Pero este sistema no tiene solución, es decir no es posible encontrar los -- escalares h y k.

10.- Obtener las componentes del vector $\vec{A}$ en las siguientes figuras expresando el resultado en la forma $\overline{A} = (A_x, A_y)$



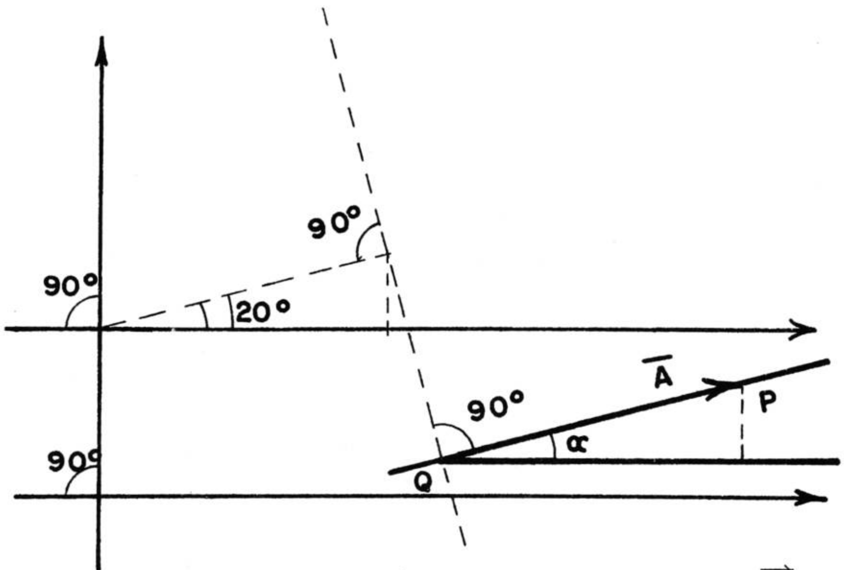
De la figura $\alpha = 42°$ $x = 6$ y por tanto $\beta = 180° - 90° - 42° = 180° - 132° = 48°$ y $\delta = 48°$ y $a = 6$. Por tanto el punto

$$P = (6 \text{ sen } 42°, 6 \cos 42°)$$

El vector A es la diferencia de los vectores P y Q

$$\vec{A} = \vec{P} - \vec{Q} = \overrightarrow{QP} = (6 \text{ sen } 42°, 6 \cos 42°) - (-6,0)$$

$$= (6 + 6 \text{ sen } 42°, 6 \cos 42°)$$



A = 1

$\alpha = 20°$ por paralelismo $\overrightarrow{QP} = (\text{sen } 20°, \cos 20°) = \vec{A}$

NOTA: Los dos siguientes problemas hacen uso de notación muy usual en la física.

11.- Hallar el vector unitario

(a) en la dirección del vector $\vec{\Omega} = (8,-10)$

(b) en la dirección del punto A(2,-5) al punto B(4,3)

<u>SOLUCIÓN</u>

(a) $\vec{\Omega}$ unitario $= \hat{\Omega} = \dfrac{\vec{\Omega}}{||\vec{\Omega}||} = \dfrac{(8,-10)}{\sqrt{64+100}} = \dfrac{(8,-10)}{\sqrt{164}}$

$$= \frac{1}{12.806}(8,-10) = (.625,-.781) = \hat{\Omega}$$

(b) O sea en la dirección $\vec{AB}$. Pero $\vec{AB} = \vec{B}-\vec{A} = (4,3)-(2,-5)$

$$\vec{AB} = (2,8)$$

Entonces

$$\vec{AB} \text{ unitario} = \hat{AB} = \frac{(2,8)}{\sqrt{4+64}} = \frac{(2,8)}{\sqrt{68}}$$

$$= \frac{(2,8)}{8.25} = (.242,\ .970) = \hat{AB}$$

12.- Si $\vec{r} = (x,y)$, $\vec{r}_o = (x_o,y_o)$ $\quad \vec{v}_o = (v_{ox},v_{oy})$ y $\vec{a} = (a_x,a_y)$

escribir las siguientes dos ecuaciones como una sola ecuación vectorial.

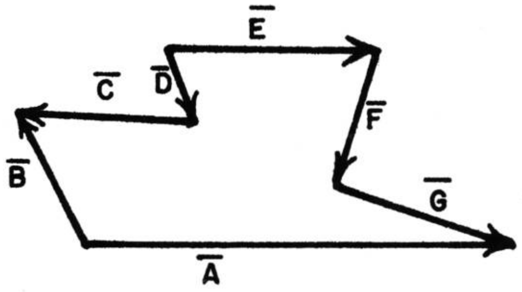
$$x = x_o + v_{ox}t + \frac{1}{2}a_xt^2 \qquad\qquad y = y_o + v_{oy}t + \frac{1}{2}a_yt^2$$

<u>SOLUCIÓN</u>

$$\vec{r} = (x_o,y_o) + (v_{ox},v_{oy})t + \frac{1}{2}(a_x,a_y)t^2 = \vec{r}_o + \vec{v}_ot + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$$

13.- Llene los signos faltantes en el miembro derecho de las ecuaciones

$\vec{A} = \overline{B} - \overline{C} - \overline{D} + \overline{E} + \overline{F} + \overline{G}$



$\overline{E} = \overline{D} + \overline{C} - \overline{B} + \overline{A} - \overline{G} - \overline{F}$

14.- La velocidad de un cuerpo tiene inicialmente el valor $V_1 = (5,-3)\frac{m}{s}$, al instante $t_1 = 25$. Después de transcurridos 4 segundos, la velocidad ha cambiado al valor $V_2 = (-4,8)\frac{m}{s}$. ¿ Cuánto vale el cambio de velocidad, $\Delta\overline{V}$? ¿ Cuál es la variación de la velocidad por unidad de tiempo ?.

<u>SOLUCIÓN</u>

$\overrightarrow{\Delta V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = (-4,8) - (5,-3) = (-9,11)\frac{m}{s}$

La variación de la velocidad por unidad de tiempo es $\overrightarrow{\Delta V}$ entre el tiempo total transcurrido 2s.

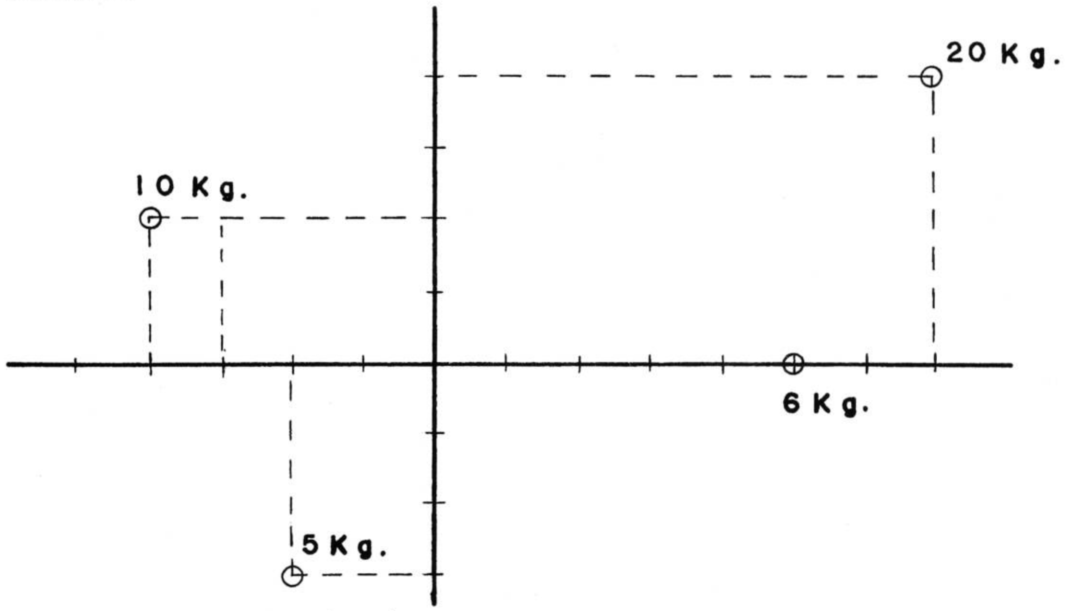
$$\frac{\Delta V}{2s} = (-\frac{2}{9}, 11)\,\frac{\frac{m}{s}}{s}$$

15.- El centro de masa de un sistema de N partículas de masa $m_1, m_2, \ldots m_N$ cuyos vectores de posición son $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_N$, respectivamente es el punto cuyo vector de posición se define por:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}$$

Hallar el vector de posición del centro de masa del sistema de cuatro partículas mostrado en la figura y señalarlo en la misma.

SOLUCIÓN



¿Quién será $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$, $\vec{r}_4$?

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$= \frac{6(5,0) + 20(7,4) + 10(-4,2) + 4(-2,-3)}{6 + 20 + 10 + 4} =$$

$$= \frac{(30,0) + (140,80) + (-40,20) + (-8,-12)}{40}$$

$$= \frac{(122,88)}{40} = \left(\frac{122}{40}, \frac{88}{40}\right) = \left(\frac{61}{20}, \frac{44}{20}\right)$$

El vector de posición del centro de masa es:

$$\vec{R} = \left(\frac{61}{20} , \frac{11}{5} \right)$$

16.- Despejar el vector $\vec{T}$ de la ecuación

$$\frac{\lambda\vec{N} - \mu\vec{C}}{X} = - \frac{a(2y\vec{V} + z\vec{T})}{3b}$$

¿ Porqué no es posible despejar X ? z,a,y,x y b ≠ o

SOLUCIÓN

$$3b(\lambda\vec{N} - \mu\vec{C}) = ax(2y\vec{V} + z\vec{T})$$

$$3b\lambda\vec{N} - 3b\mu\vec{C} + 2axy\vec{V} = - zax\vec{T}$$

$$\vec{T} = \frac{3b\lambda\vec{N} - 3b\mu\vec{C} + 2ayx\vec{V}}{-zax}$$

$$= \frac{3b\mu}{zax}\vec{C} - \frac{3b\lambda}{zax}\vec{N} - \frac{2ayx}{zax}\vec{V}$$

$$= \frac{3b\mu}{zax}\vec{C} - \frac{3b\lambda}{zax}\vec{N} - \frac{2y}{z}\vec{V}$$

X no se puede despejar, porque la necesitaríamos dividir por $\vec{T}$, pero la operación de división no está definida para vectores.

17.- Un concepto físico de gran importancia es el de trabajo, que expresado matemáticamente es:

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d}$$

Si una fuerza de 5 Newtons se aplica en la dirección de $\frac{\pi}{4}$. ¿ Cuál es el trabajo realizado al mover un objeto del punto (2,3) al punto (5,7).

SOLUCIÓN

Un vector unitario en la dirección de $\frac{\pi}{4}$ es

$$\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

$$\vec{F} = 5\vec{u} = \frac{5}{2}\sqrt{2}\vec{i} + \frac{5}{2}\sqrt{2}\vec{j}$$

El desplazamiento $\vec{d}$ es :

$$\vec{d} = (5,7) - (2,3) = (3,4)$$

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\cdot(3,4) = \frac{5\sqrt{2}}{2}\ 3 + \frac{5\sqrt{2}}{2}\ 4 = \frac{15}{2}\sqrt{2} + \frac{20}{2}\sqrt{2}$$

$$W = \frac{35}{2}\sqrt{2} \qquad \text{Newtons-Metro.}$$

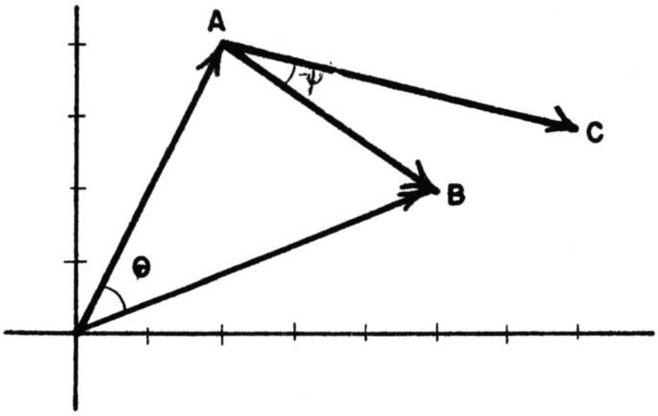
18.- Se dan los puntos A(2,4); B(5,2); C(7,3) calcular:

i).- El ángulo formado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$

ii).- El ángulo C A B.

SOLUCIÓN

Para solucionar el problema podemos hacer una figura que nos ayude.



Introduzcamos una notación adecuada

Llamemos: θ el ángulo formado por $\vec{a} = (2,4)$ y $\vec{b} = (5,2)$

ψ al ángulo CAB. Luego

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||\ ||\vec{b}||} = \frac{(2,4)\cdot(5,2)}{\sqrt{2^2+4^2}\ \sqrt{5^2+2^2}} = \frac{10+8}{\sqrt{20}\ \sqrt{29}} = \frac{18}{2\sqrt{5}\ \sqrt{29}} = \frac{9}{\sqrt{5}\ \sqrt{29}}$$

$\theta = \text{arc Cos } 0.7474$ $\therefore$ $\theta = 41.63°$

$$\cos\psi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AB}||\ ||\overrightarrow{AC}||} = \frac{(3,-2)\cdot(5,-1)}{\sqrt{3^2+(-2)^2}\ \sqrt{5^2+(-1)^2}} = \frac{15+2}{\sqrt{13}\ \sqrt{26}} = \frac{17}{\sqrt{338}} = 0.9246$$

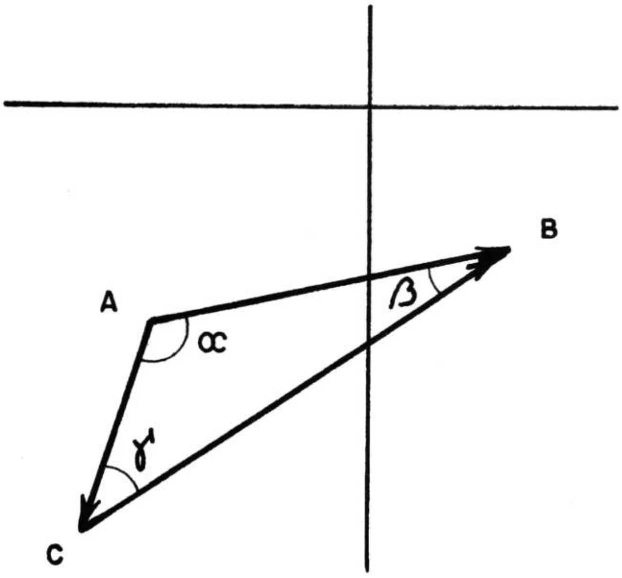
$\psi = 22.38°$

19.- Calcula los ángulos interiores del Δ ABC con :

A(-3,-3); B(2,-2); C(-4,-6).

SOLUCIÓN

De los ejercicios anteriores ya tenemos una manera de proceder, que es hacer una figura y ver el triángulo formado por vectores e indicar los ángulos, que se quieran determinar.



$\overrightarrow{AB} = (5,1)$

$\overrightarrow{AC} = (-1,-3)$

$\overrightarrow{CB} = (6,4)$

Luego tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AB}||\ ||\overrightarrow{AC}||} = \frac{(5,1) \cdot (-1,-3)}{\sqrt{26}\quad \sqrt{10}} = \frac{-5\ -3}{\sqrt{260}} = \frac{-8}{\sqrt{260}} = \frac{-8}{\sqrt{16.12}} = -0.4961$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{||\overrightarrow{BA}||\ ||\overrightarrow{BC}||} = \frac{(-5,-1)\cdot(-6,-4)}{\sqrt{26}\ \sqrt{52}} = \frac{30+4}{26\sqrt{2}} = \frac{34}{26\sqrt{2}} = \frac{34}{36.76} = 0.9246$$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{||\overrightarrow{CA}||\ ||\overrightarrow{CB}||} = \frac{(1,3)\cdot(6,4)}{\sqrt{10}\ \sqrt{52}} = \frac{6+12}{\sqrt{520}} = \frac{18}{\sqrt{520}} = \frac{18}{22.80} = 0.7893$$

α = arc cos - 0.4961 = 119.74° $\qquad$ α = 119.74°

β = arc cos 0.9246 = 22.39° $\qquad$ β = 22.39°

γ = arc cos 0.7893 = 37.87° $\qquad$ γ = 37.87°

20.- Dados $\vec{a} = (5,12)$ y $\vec{b} = (1,k)$, donde k es un escalar, encuentre k tal que la medida en radiantes del ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sea $\frac{\pi}{3}$.

SOLUCIÓN

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores, entonces el ángulo θ que hay entre ellos está dado por la expresión

$$\text{Cos } \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}|| \ ||\vec{b}||} \quad \text{entonces}$$

$$\text{Cos } \frac{\pi}{3} = \frac{(5,12)(1,k)}{\sqrt{169}\ \sqrt{1+k^2}}$$

$$= \frac{5 + 12k}{13\sqrt{1+k^2}} \qquad \text{y como Cos } \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ , entonces}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5 + 12K}{13\sqrt{1+k^2}} \quad \text{es decir}$$

$$13\sqrt{1+k^2} = 10 + 24\ k.$$

$$169(1+k^2) = 100 + 480\ k + 576\ k^2$$

$$169\ k^2 - 576\ k^2 - 480\ k + 169 - 100 = 0$$

$$- 407\ k^2 - 480\ k + 69 = 0$$

$$407\ k^2 + 480\ k - 69 = 0$$

$$k = \frac{-480 \pm \sqrt{230400 + 112332}}{814} = \frac{-480 \pm 585.4}{814}$$

$$k_1 \cong 0.13 \qquad k_2 = -1.3$$

$k_2 = -1.3$ no es raíz de la ecuación original y $k_1 = 0.13$ sí lo es, entonces el valor de k que nos interesa es $k = 0.13$.

21.- Se dan los vectores $\vec{u} = (1,2)$; $\vec{v} = (4,-2)$

i).- Prueba que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales

ii).- Prueba que $k\vec{u}$ es ortogonal a $\vec{v}$ para todo k número real

iii).- Da Tres vectores ortogonales a $\vec{v}$ distintos de $\vec{u}$

SOLUCIÓN

i) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ serán ortogonales si $\vec{u}\cdot\vec{v} = o$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (1,2)\cdot(4,-2) = 4-4 = o$ $\therefore$ Son ortogonales

ii) $k\vec{u}\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v}) = k\cdot o = o$ $\therefore$ $k\vec{u}$ es ortogonal a $\vec{v}$ para todo valor de k.

iii) De ii hay una infinidad de vectores ortogonales $\vec{v}$ que son de la forma $k\vec{u}$. Así dando valor particular a k tenemos:

Si $k = -1$; $k = 2$; $k = 3$ dan los vectores

$(-1,-2)$; $(2,4)$; $(12,-6)$ vectores ortogonales a $\vec{v}$

22.- Encuentra el valor de x para que los vectores $u = (1,1,4)$; $v = (x^2,x,-3)$ sean ortogonales.

SOLUCIÓN

Para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales debe de cumplirse $\vec{u}\cdot\vec{v} = o$

$o = \vec{u}\cdot\vec{v} = (1,1,4)\cdot(x^2,x,-3) = x^2 + x - 12$

Así $x^2 + x - 12 = o = (x-3)(x+4)$

luego el producto punto será cero si: $x = 3$ ó $x = -4$

$\vec{v} = (9,3,-3)$ ó $\vec{v} = (16,-4,-3)$

23.- Sean $\vec{u}$, $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2 \varepsilon R^3$. $\vec{u}$ es ortogonal a $\vec{w}_1$, $\vec{u}$ es ortogonal a $\vec{w}_2$

Probar que $\vec{u}$ es ortogonal a cualquier vector $a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2$ con a, bε R.

DEMOSTRACIÓN

¿ Qué tenemos que probar ? Debemos probar que $\vec{u}$ y $a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2$ son ortogona_ les o sea que $\vec{u}\cdot(a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2) = o$ para cualquier a,bε R. Veamos

$\vec{u}\cdot(a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2) = \vec{u}\cdot(a\vec{w}_1) + \vec{u}\cdot(b\vec{w}_2) = a(\vec{u}\cdot\vec{w}_1) + b(\vec{u}\cdot\vec{w}_2) = *$

Ahora cuanto vale $\vec{u}\cdot\vec{w}_1$ y $\vec{u}\cdot\vec{w}_2$. ¿ Hemos usado las hipótesis del problema ?

De las hipótesis tenemos:

$\vec{u}$ ortogonal a $\vec{w}_1$ implica $\vec{u}\cdot\vec{w}_1 = o$

$\vec{u}$ ortogonal a $\vec{w}_2$ implica $\vec{u}\cdot\vec{w}_2 = o$

$* = a\cdot o + b\cdot o = o + o = o$

24.- Dados $\vec{a} = (5,-k)$ y $\vec{b} = (k,6)$, donde k es un escalar, encontrar

a) k tal que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales

b) k tal que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean paralelos

SOLUCIÓN

a) Dos vectores son ortogonales si $\vec{a}\cdot\vec{b} = o$, entonces

$$(5,-k)\cdot(k,6) = o$$
$$5k + 6(-k) = o$$
$$5k - 6k = o$$
$$-k = o$$

Por lo tanto $k = o$

b) Dos vectores son paralelos si existe un escalar $\lambda \varepsilon \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}$$

entonces

$$(5,-k) = \lambda(k,6)$$

$$(5,-k) = (\lambda k, 6\lambda)$$

$$5 = \lambda k \qquad y$$

$$-k = 6\lambda \qquad (2)$$

De (2) tenemos que $k = -6\lambda$, sustituyendo este valor en (1) tenemos

$$5 = \lambda(-6\lambda)$$

$$5 = -6\lambda^2 \; ; \quad \lambda^2 = -\frac{6}{5} \qquad -(3)$$

de (3) se concluye que no existe $\lambda \varepsilon \mathbb{R}$.

25.- Sean $\vec{u} = (-2,-4)$; $\vec{v} = (4,3)$ determinar:

i).- La proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

ii).- La componente de $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v}$

Hacer un dibujo que ilustre la situación.

SOLUCIÓN

Sea $\vec{u}_1$ la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ entonces

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\,\vec{v} = \frac{(-2,-4)\cdot(4,3)}{4^2 + 3^2}\,(4,3) = \frac{-8-12}{25}\,(4,3)$$

$$= \frac{-20}{25}\,(4,3) = \frac{-4}{5}\,(4,3) = \left(\frac{-16}{5}\,,\ \frac{-12}{5}\right)$$

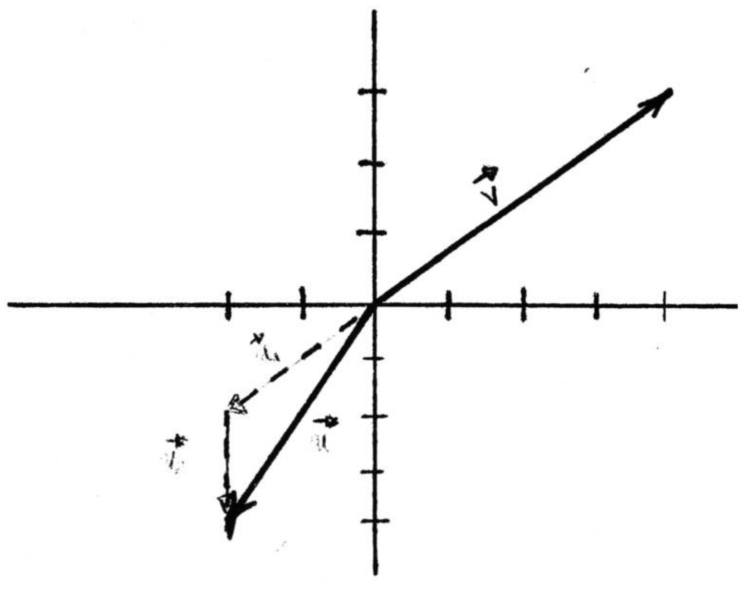
$$\vec{u}_1 = \left(\frac{-16}{5}\,,\ \frac{-12}{5}\right)$$

Ahora sí $\vec{u}_2$ es la componente de $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v}$ tenemos:

$$\vec{u}_2 = \vec{u}_1 - \vec{u} = \left(\frac{-16}{5}\,,\ \frac{-12}{5}\right) - (-2,-4) = \left(\frac{-16}{5} + 2,\ \frac{-12}{5} + 4\right) = \left(\frac{-6}{5}\,,\ \frac{8}{5}\right)$$

$$\vec{u}_2 = \left(\frac{-6}{5}\,,\ \frac{8}{5}\right)$$

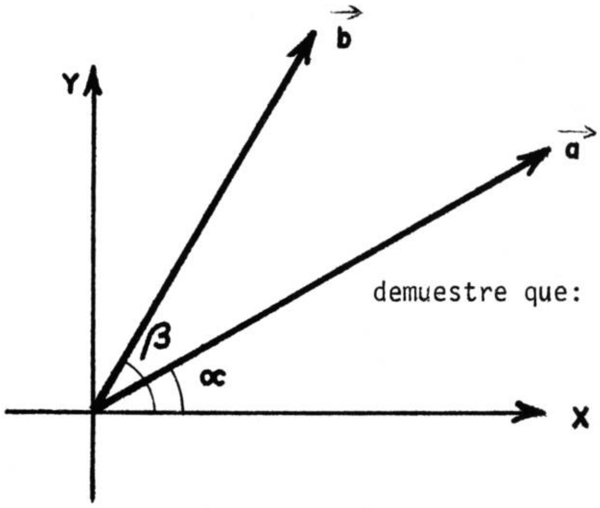
Gráficamente tenemos:



26.- Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores unitarios en el plano xy; α y β los ángulos que formar con el eje x. Es claro que

$\vec{a} = \cos\alpha\ \vec{i} + \text{sen}\ \alpha\ \vec{j}$

$\vec{b} = \cos\beta\ \vec{i} + \text{sen}\ \beta\ \vec{j}$



demuestre que: $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}$

SOLUCIÓN:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = ||\vec{a}||\ ||\vec{b}||\ \cos(\beta-\alpha)$

pero también $\vec{a}\cdot\vec{b} = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta$

Como $||\vec{a}|| = ||\vec{b}|| = 1$

$\cos(\beta-\alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta$ q.e.d.

27.- Si $k = ||\vec{u}||$ y $\ell = ||\vec{v}||$ demuestre que el vector

$\vec{w} = \frac{1}{k+\ell}(k\vec{v} + \ell\vec{u})$ biseca el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$\vec{w}$ biseca el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si el ángulo entre $\vec{w}$ y $\vec{u}$ es el mismo que el ángulo entre $\vec{w}$ y $\vec{v}$. O sea si

$$\frac{\vec{w}\cdot\vec{u}}{||\vec{w}||\ ||\vec{u}||} = \frac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{||\vec{w}||\ ||\vec{v}||}$$

$$\frac{1}{k+\ell}\ \frac{(k\vec{v} + \ell\vec{u}) \cdot \vec{u}}{||\vec{w}||\ ||\vec{u}||} = \frac{1}{(k+\ell)}\ \frac{k\vec{v} + \ell\vec{u} \cdot \vec{v}}{(||\vec{w}||\ ||\vec{v}||)}$$

Pero

$$\frac{k\vec{v}\cdot\vec{u} + \ell\vec{u}\cdot\vec{u}}{(k+\ell)\ (||w||\ ||u||)} = \frac{k\vec{v}\cdot\vec{u} + \ell\ ||\vec{u}||^2}{(k+\ell)\ (||\vec{w}||\ ||\vec{u}||)} = \frac{k\ (\vec{v}\cdot\vec{u} + \ell k)}{(k+\ell)\ ||\vec{w}||\ k}$$

y $$\frac{k\vec{v} + \ell\vec{u} \cdot \vec{v}}{(k+\ell)\ (|\vec{w}|\ |\vec{v}|)} = \frac{k\vec{v}\cdot\vec{u} + \ell\vec{u}\cdot\vec{v}}{(k+\ell)\ ||\vec{w}||\ ||\vec{v}||} = \frac{\ell\ (k\ell + \vec{u}\cdot\vec{v})}{(k+\ell)\ ||\vec{w}||\ \ell}$$

que son la misma expresión.

ECUACIÓN DE LA RECTA EN R^2

1.- Encuentre la recta que pasa por $P_1(1,3)$ y $P_2(0,-3)$

Lo vamos a realizar de seis maneras que se verá que son equivalentes.

1) En la forma $y = mx+b$ con $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ la pendiente de la recta queda

$$m = \frac{-3\ -3}{0-1} = \frac{-6}{-1} = 6 \qquad y \quad y = 6x - 3 \qquad \text{ya que}$$

$-3 = b =$ la ordenada al origen

2) Como $P_1P_2 = P_2 - P_1 = (0,-3) - (1,3) = (-1, -6)$ es la dirección de la recta la podemos utilizar en la forma paramétrica de la recta

$$P = P_o + t\vec{v} \ , \ P = P_o + t\ \overrightarrow{P_1P_2}$$

Como P_o es un punto cualquiera tomamos $P_o = P_1 = (1,3)$

y la recta $P = (1,3) + t(-1,-6) = (1-t, 3-6t)$

o sea $x = 1-t$ y $y = 3-6t$ y $6x = 6-6t = 3-6t + 3$

$$6x = y + 3$$

$$y = 6x-3$$

3) La recta intersecta al eje y en $(0,-3)$ y al eje x en el punto en que la -- $y = 0$ o sea $0 = 6x-3 \quad x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

La recta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ intersecta a los ejes en $(a,0)$ y en $(0,b)$

por tanto $\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{-3} = 2x + \frac{y}{-3} = 1$ es la forma que toma que es equivalente a la que obtuvimos ya que $-6x + y = -3$

$$y = 6x-3$$

4) En la forma general $Ax + By + C = o$, la podemos obtener resolviendo un - sistema de ecuaciones

$$A \cdot 1 + B\,3 + C = o$$

y $$A \cdot o + B(-3) + C = o$$

dividiendo entre A

$$1 + \frac{B}{A}\,3 + \frac{C}{A} = o \qquad \text{---------} \; I$$

y $$o - \frac{3B}{A} + \frac{C}{A} = o$$

Haciendo $\frac{B}{A} = m$ y $\frac{C}{A} = n$

$$-\frac{3B}{A} + \frac{C}{A} = -\,3m + n = o$$

$$n = 3m$$

y sustituyendo en I

$$1 + 3m + n = 1 + 3m + 3m = o$$

$$6m = -1$$

$$m = \frac{-1}{6}$$

$$n = 3(\frac{-1}{6}) = -\frac{1}{2}$$

$$x + \frac{-1}{6}y + \frac{-1}{2} = o$$

$$6x - y - 3 = o$$

$$y = 6x - 3$$

5) La otra forma es $y-y_1 = m(x-x_1)$ con $m = 6$ y $(1,3) = (x_1,y_1)$

que $y-3 = 6(x-1)$ $y-6x = -6 + 3 = -3$

$$y = 6x - 3$$

6) La otra forma es desarrollar el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 6x-y-3$$

Es una recta de la forma $Ax + By + C = o$ que pasa

Por $(0,-3)$
y por $(1,3)$ $\Big\}$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$, o sea

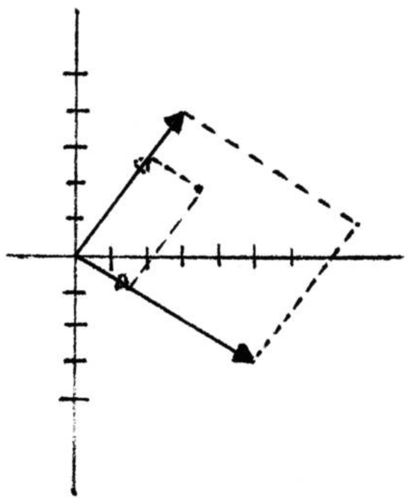
estos puntos satisfacen la ecuación o sea el determinante inicial.

2.- Determine si el punto (a,b) está en el paralelogramo determinado por (5,-3) -3)

SOLUCIÓN

(a,b) esta en el paralelogramo determinado por (3,4) y (5,-3)

si $(a,b) = s(3,4) + t(5,-3)$ con $0 \leqq s,t \leqq 1$



Es decir, si el sistema

$a = 3s + st$ y

$b = 4s - 3t$ tiene solución

y; $0 \leq s,\ t \leqq 1$

3.- Para las diversas formas de la ecuación de la recta en R^2 determinar las condiciones de perpendicularidad y paralelismo.

$Ax + By + C = o$

$A^1x + B^1y + C^1 = o$

paralelas si $-\frac{A}{B} = -\frac{A^1}{B^1}$ perpendiculales si $-\frac{A}{B} \cdot -\frac{A^1}{B'} = -1$

$y = m_1x + b_1$

$y = m_2x + b_2$

paralelas si $m_1 = m_2$ perpendiculares si $m_1 \cdot m_2 = -1$

$\underline{P} = P_o + t\underline{v}$

$Q = Q_o + s\underline{u}$

paralelas si $\underline{u} = k\underline{v}$ perpendiculares si $\underline{u} \cdot \underline{v} = o$

k constante $\neq$ o

$n \cdot \overline{P_o P} = o$

$m \cdot Q_o Q = o$

paralelas si $\underline{n} = k\underline{m}$ perpendiculares si $\underline{n} \cdot \underline{m} = o$

k constante $\neq$ o

$$y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} (x - x_1)$$

$$y - y_3 = \frac{(y_4 - y_3)}{(x_4 - x_3)} (x - x_3)$$

paralelas si $(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = k(x_4 - x_3, y_4 - y_3)$

perpendiculares si $(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \cdot (x_4 - x_3, y_4 - y_3) = o$

o sea $(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3) = o$

o sea $\dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{-(y_4 - y_3)}{x_4 - x_3}$

o sea $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \dfrac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = -1 = m_1 \cdot m_2$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{a^1} + \frac{y}{b^1} = 1$$

paralelas si $a = ka^1$ y $b = kb^1$ para la misma constante k

perpendiculares como

$m_I = \dfrac{b}{a}$

son perpendiculares

$m_{II} = \dfrac{-b^1}{a^1}$

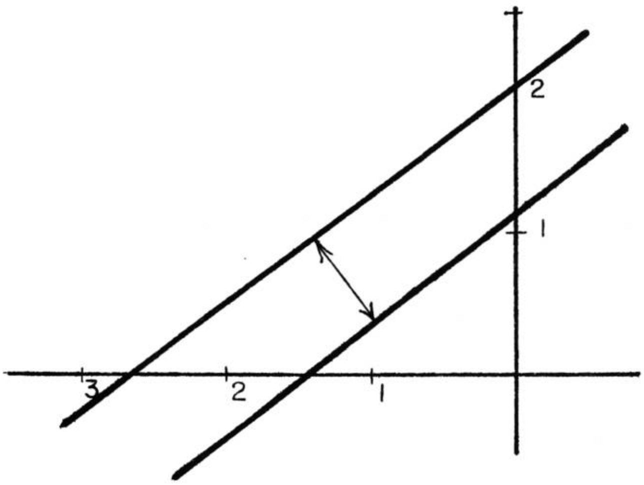
si $m_I m_{II} = \dfrac{bb^1}{aa^1} = -1$ o si $(a,b) \cdot (a^1, b^1) = o$

4.- Hallar la distancia comprendida entre las rectas paralelas

$$3x - 4y + 8 = o \qquad \text{I}$$

$$6x - 8y + 9 = o \qquad \text{II}$$

$$3x - 4y + 8 = o \implies 3x - 4y = -8 \implies \frac{x}{\frac{-8}{3}} - \frac{y}{\frac{-8}{4}} = \frac{x}{-2\,{}^{2}/_{3}} + \frac{y}{2} = 1$$



$$\text{y} \quad 6x - 8y = -9 \implies \frac{x}{\frac{-9}{6}} + \frac{y}{\frac{-9}{-8}} = 1$$

$$\frac{x}{\frac{-3}{2}} + \frac{y}{\frac{9}{8}} = 1$$

Tomando un punto cualquiera (x_o, y_o) de una recta, la distancia entre las rectas es justamente la distancia del punto a la recta o sea

$$d = \frac{Ax_o + By_o + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

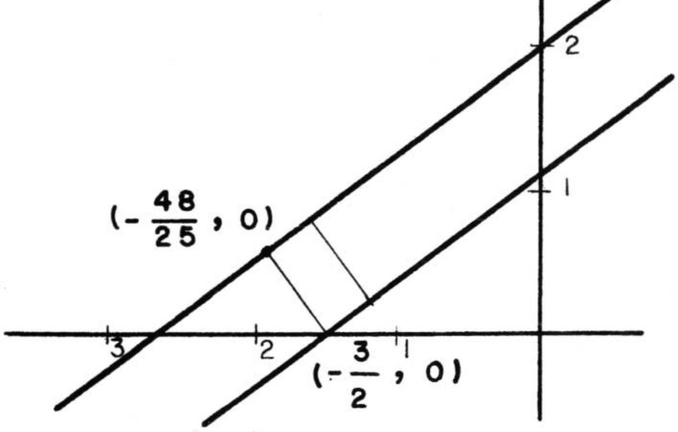
La primera recta contiene a (0,2)

$$\text{y} \quad d = \frac{6(0) + (-8)(2) + 9}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{-16 + 9}{-\sqrt{100}} = \frac{-7}{-10} = \frac{7}{10}$$

Con otro punto y la otra recta $\quad d = \dfrac{3\left(\frac{-3}{2}\right) - 4(0) + 8}{\sqrt{9 + 16}} = \dfrac{-\frac{9}{2} + 8}{5} =$

$$\frac{\frac{7}{2}}{5} = \frac{7}{10}$$

Otra forma de solución



Una recta perpendicular a la recta II tiene pendiente $m^1 = \frac{-1}{m}$

Pero $m = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ $\qquad m^1 = \frac{-4}{3}$

Si pasa por $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ $\qquad y = 0 = m\,x + \frac{3}{2}$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{3}{2} = -\frac{4}{3}x - 2$$

Sustituyendo en la recta I

$$3x - 4(-\frac{4}{3}x - 2) + 8 = 0$$

$$3x + \frac{16}{3}x + 8 + 8 = 0$$

$$\frac{25}{3}x = -16$$

$$x = \frac{-48}{25} \qquad y = -\frac{4}{3}\left(\frac{-48}{25}\right) - 2$$

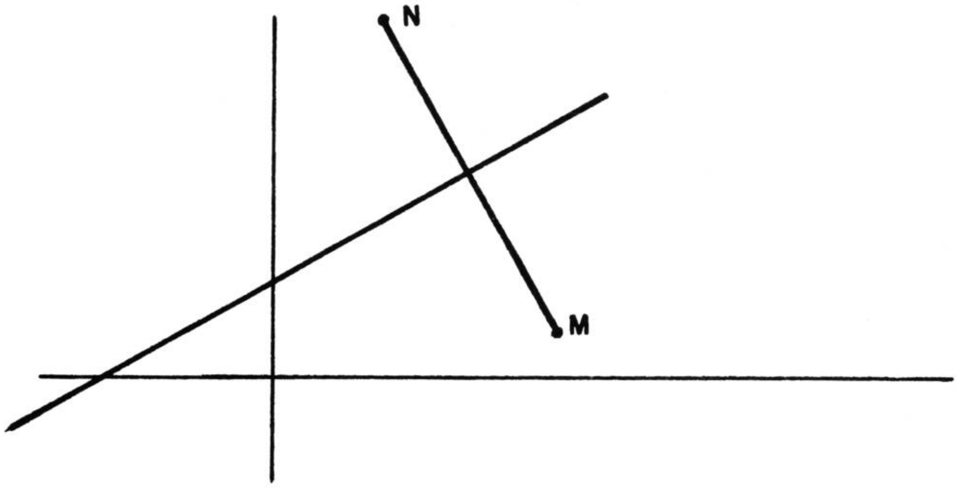
$$y = \frac{192}{75} - 2 = \frac{192 - 150}{75} = \frac{42}{75}$$

$$d = \sqrt{\left(-\frac{3}{2} + \frac{48}{25}\right)^2 + \frac{42}{25}^2} = \sqrt{\left(-\frac{75}{50} + \frac{96}{50}\right)^2 + \frac{42}{75}^2} =$$

$$\sqrt{\frac{21}{50}^2 + \frac{42}{75}^2} = \sqrt{.1764 + .3136} = \sqrt{.49} = .7 = \frac{7}{10}$$

5.- Dado el punto $M = (x_1, y_1)$ y una recta $Ax + By + C = o$, determinar las coordenadas del punto $N = (x, y)$ simétrico de M con respecto a la recta $Ax + By + C = o$.

SOLUCIÓN



Supongamos que el número $B \neq o$. El caso $B = o$ no da mayores problemas. La pendiente de la recta $Ax + By + C = o$ será

$$m_1 = -\frac{A}{B} \quad ;$$

la pendiente de la recta que pasa por M y N tiene por pendiente a

$$m_2 = \frac{y - Y_1}{x - x_1} \quad ;$$

la distancia de M a $Ax + By + C = o$ y la distancia de N a la misma recta son respectivamente,

$$d_1 = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d_2 = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Escribamos ahora las condiciones de simetría,

$$d_1 = d_2 \qquad y$$

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \qquad ó,$$

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$-\frac{A}{B} = \frac{x - x_1}{y - y_1} \quad ,$$

y como M y N están en partes ajenas del plano (la recta Ax + By + C divide al plano en dos partes ajenas) tenemos

$$Ax_1 + By_1 + C = - Ax - By - C$$

$$-\frac{A}{B} = -\frac{x - x_1}{y - y_1} \quad ; \quad \frac{A}{B} = \frac{x - x_1}{y - y_1}$$

$$Ax_1 + By_1 + C = - Ax - By - C$$

$$\frac{A}{B}y = \frac{A}{B}y_1 + (x - x_1)$$

$$Ax_1 + By_1 + C = - Ax - By - C \qquad (1)$$

$$y = \frac{Ay_1 + B(x - x_1}{A} \qquad (2)$$

sustituyendo (2) en (1) se tiene,

$$Ax_1 + By_1 + C = - Ax - B \; \frac{Ay_1 + B(x - x_1)}{A} - C$$

$$= - Ax - By_1 - \frac{B^2}{A}x + \frac{B^2}{A}x_1 - C$$

$$-A - \frac{B^2}{A} \; x = Ax_1 + By_1 + C + By_1 - \frac{B^2}{A} x_1 + C$$

$$-A - \frac{B^2}{A} \; x = Ax_1 + 2By_1 + 2C - \frac{B^2}{A} x_1$$

$$x = \frac{Ax_1 + 2By_1 + 2C - \frac{B^2}{A} x_1}{-A - \frac{B^2}{A}}$$

$$x = \frac{A^2x_1 + 2ABy_1 + 2AC - B^2x_1}{- A^2 - B^2}$$

$$x = \frac{(A^2 - B^2)x_1 + 2ABy_1 + 2AC}{- A^2 - B^2}$$

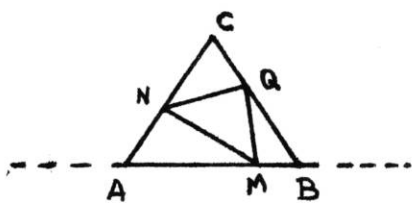
$$x = - \frac{(A^2 - B^2)x_1 + 2ABy_1 + 2AC}{A^2 + B^2}$$

De forma análoga obtenemos,

$$y = - \frac{(B^2 - A^2)y_1 + 2ABx_1 + 2BC}{A^2 + B^2}$$

6.- Dado el triángulo de vértices $A = (-2, o)$ $B = (2, o)$ $C = (o, 3)$ y un punto $M = (1, o)$ del lado $\overline{AB}$, determinar dos puntos $N = (x, y)$ ------ y $Q = (z, w)$ puntos de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente de tal manera que el perímetro del triángulo ΔMNQ tenga perímetro mínimo.

<u>SOLUCIÓN</u>



La ecuación de la recta que pasa por A y C es $3x - 2y + 6 = o$, y la ecuación de la recta que pasa por B y C es $-3x - 2y + 6 = o$.

Los puntos M* y M** simétricos de M con respecto a las rectas $3x - 2y + 6 = o$ y $-3x - 2y + 6 = o$ son respectivamente, (según las fórmulas obtenidas anteriormente)

$$M^* = \left(-\frac{41}{13}, \frac{36}{13}\right)$$

$$M^{**} = \left(\frac{31}{13}, \frac{12}{13}\right)$$

Ahora bien el perímetro P del ΔMNQ es,

$$P = \overline{MN} + \overline{NQ} + \overline{QM}$$

$$= \overline{NM^*} + \overline{NQ} + \overline{QM^{**}}$$

y este perímetro será mínimo si M*, N, Q y M** son colineales es decir están en una recta, ó en términos de pendientes

$$m_{M^*M^{**}} = m_{M^*N} \qquad (1)$$

$$m_{M^*M^{**}} = m_{QM^{**}} \qquad (2)$$

calculando y simplificando se obtiene,

$$13x + 39y - 67 = o \qquad (1)$$

$$13z + 39w - 67 = o \qquad (2)$$

pero el punto $N = (x,y)$ esta en la recta $3x - 2y + 6 = o$ y el punto ---- $Q = (z, w)$ esta en la recta $-3x - 2y + 6 = o$, es decir

$$3x - 2y + 6 = o \qquad (3)$$

y

$$-3z - 2w + 6 = o \qquad (4)$$

Despejando en (3) a x y en (4) a z y sustituyendo estos valores en (1) y (2) obtenemos

$$13 \frac{-6 + 2y}{3} + 39y - 67 = o \qquad (1)$$

$$13 \frac{-6 + 2w}{-3} + 39w - 67 = o \qquad (2)$$

$$- 78 + 26y + 117y - 201 = o \qquad (1)$$

$$- 78 + 26w - 117y + 201 = o \qquad (2)$$

de donde,

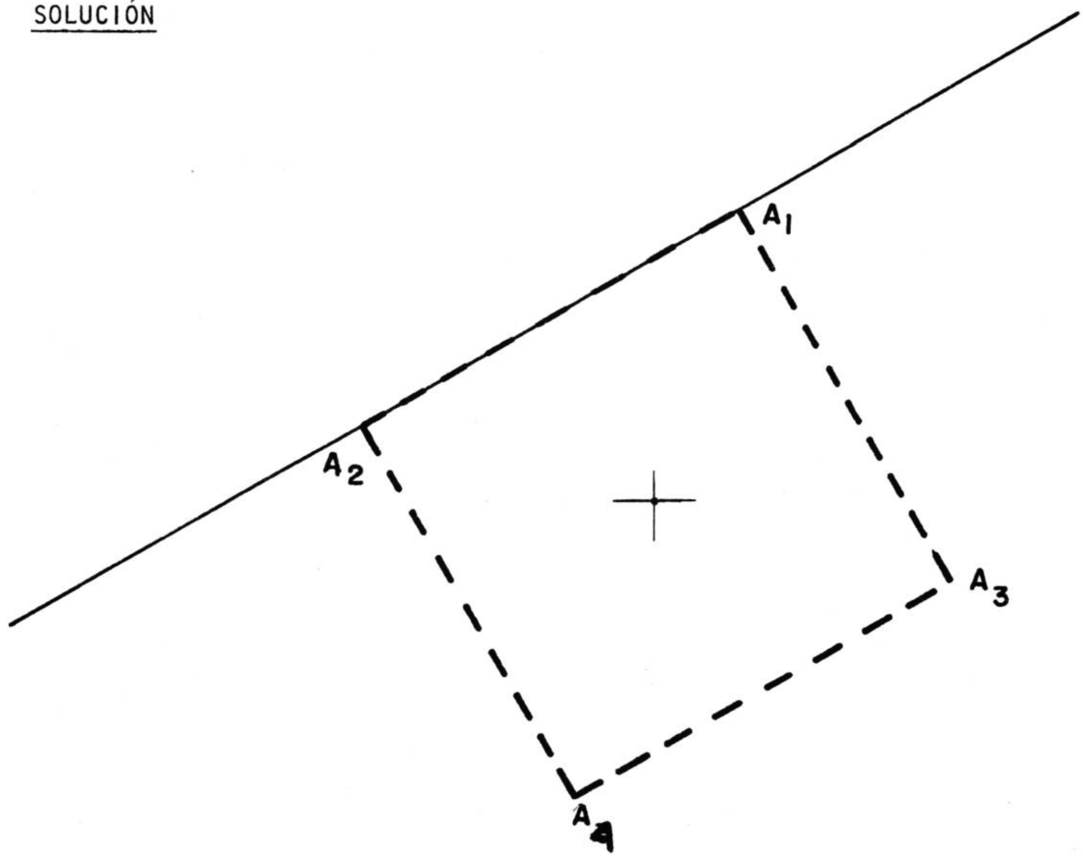
$$y = \frac{279}{143} \quad ; \quad w = \frac{123}{91}$$

y de (3) y (4)

$$x = - \frac{100}{143} \quad ; \quad z = \frac{100}{91}$$

7.- El punto A = (1, -1) es el centro de un cuadrado uno de cuyos lados esta en la recta x - 2y + 12 = o. Determine las ecuaciones de las rectas donde están los otros 3 lados. Determine también los vértices del cuadrado.

SOLUCIÓN



Las rectas ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 tienen por ecuaciones

$$y = 2x + b_1$$

$$y = 2x + b_2$$

$$y = \frac{1}{2}x + b_3 \quad ;$$

podemos calcular d distancia de A a $x - 2y + 12 = o$,

$$d = \frac{|1 - 2(-1) + 12|}{\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}}$$

Si ahora d_1 , d_2 y d_3 son las distancias de A a ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 respectivamente,

$$d_1 = \frac{|2(1) + (-1) - b_1|}{\sqrt{5}} = \frac{|1 - b_1|}{\sqrt{5}} = \frac{b_1 - 1}{\sqrt{5}}$$

$$d_2 = \frac{|2(1) + (-1) - b_2|}{\sqrt{5}} = \frac{|1 - b_2|}{\sqrt{5}} = \frac{1 - b_2}{\sqrt{5}}$$

$$d_3 = \frac{|-\frac{1}{2}(1) + (-1) - b_3|}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{|-\frac{3}{2} - b|}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{-\frac{3}{2} - b_3}{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Ahora bien, las condiciones del problema exigen,

$d = d_1$

$d = d_2$

$d = d_3$

de donde,

$b_1 = 16$

$b_2 = 14$

$b_3 = -9$

Los vértices se calculan resolviendo los sistemas

$$\begin{cases} x - 2y + 12 = o \\ y = -2x + 16 \end{cases} \qquad (I)$$

$$\begin{cases} x - 2y + 12 = o \\ y = -2x - 14 \end{cases} \qquad (II)$$

$$\begin{cases} y = -2x + 16 \\ y = \frac{1}{2} x - 9 \end{cases} \qquad (III)$$

$$\begin{cases} y = -2x - 14 \\ y = \frac{1}{2} x - 9 \end{cases} \qquad (IV)$$

El primer sistema tiene solución $A_1 = (4, 8)$, el segundo $A_2 = (-8, 2)$, el tercero $A_3 = (10, -4)$ y el cuarto $A_4 = (-2, -10)$.

8.- Un terremoto emite una onda primaria y una onda secundaria. Cerca de la superficie de la tierra la onda primaria viaja aproximadamente a 5 millas por segundo y la onda secundaria a más o menos 3 millas por segundo. Del tiempo que hay entre la llegada de las ondas a una estación sísmica, es posible estimar la distancia al temblor. (El epicentro se puede calcular al obtener la distancia a tres o más estaciones). Suponiendo que una estación mide una diferencia de tiempo de 12 segundos entre la llegada de las ondas ¿ qué tan lejos está el terremoto de la estación ?.

SOLUCIÓN

Las dos ondas recorren la misma distancia $\overline{d}$. La primera tiene una velocidad

$$V = \frac{5 \text{ millas}}{\text{segundo}} \qquad t = \frac{d}{V} = \frac{d}{5}$$

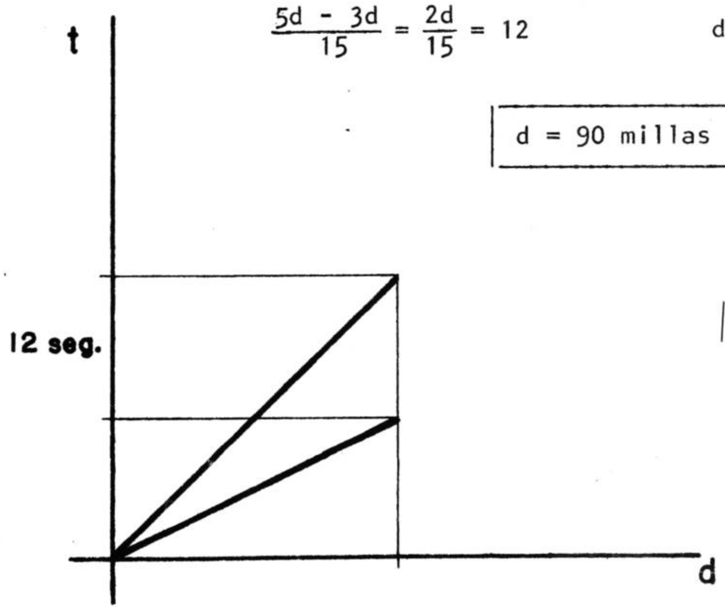
la segunda tiene una velocidad

$$V^1 = \frac{3 \text{ millas}}{\text{segundo}} \quad \text{y} \quad t^1 = \frac{d}{V^1} = \frac{d}{3}$$

$$t^1 - t = 12 \text{ seg} = \frac{d}{3} - \frac{d}{5}$$

$$\frac{5d - 3d}{15} = \frac{2d}{15} = 12 \qquad d = \frac{12.15}{2} = 6.15 = 90$$

$$\boxed{d = 90 \text{ millas}}$$



9.- Encuentre un valor aproximado que satisfaga la ecuación

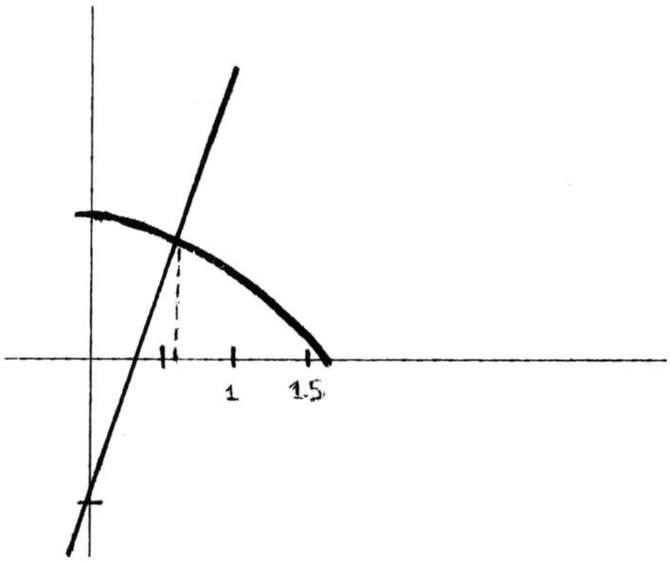
$$3x - \cos x - 1 = 0$$

SOLUCIÓN

Como la ecuación es una diferencia de dos funciones podemos escribirla

$$3x - 1 = \cos x$$

Si la dibujamos en forma separada $y = 3x - 1$ y $y = \cos x$ en radianes y encontramos el punto de intersección resulta una x aproximada de 0.6



Si lo sustituimos para verificar obtenemos

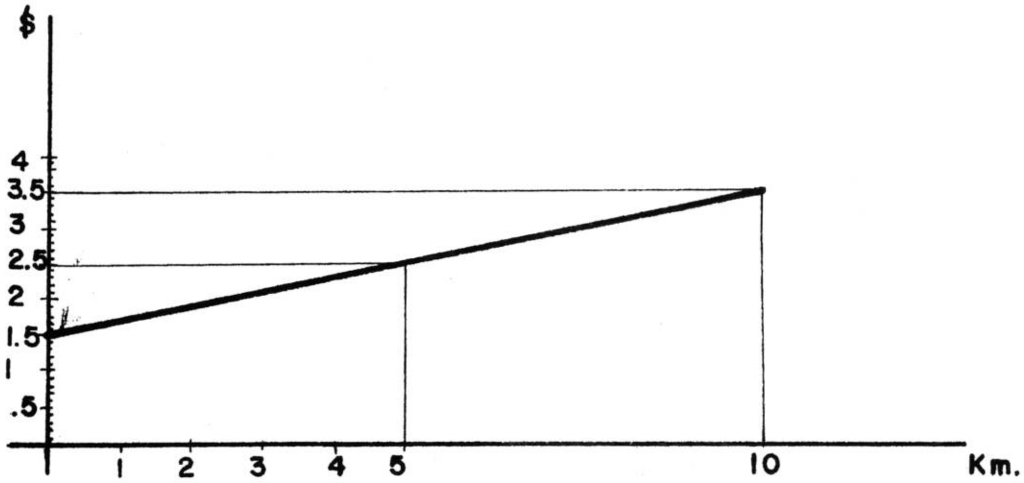
$3(0.6) - .82 - 1$

$= 1.8 - 1.82 \approx .02$ cercano a 0.

10.- Durante mucho tiempo en México un coche taxista cobraba \$ 1.00 al inicio de una dejada y cinco centavos por cada 250 metros recorridos. Además se agregaban 50 centavos adicionales al terminar la dejada. Grafique la recta de ingresos del taxista en función de la distancia .

SOLUCIÓN

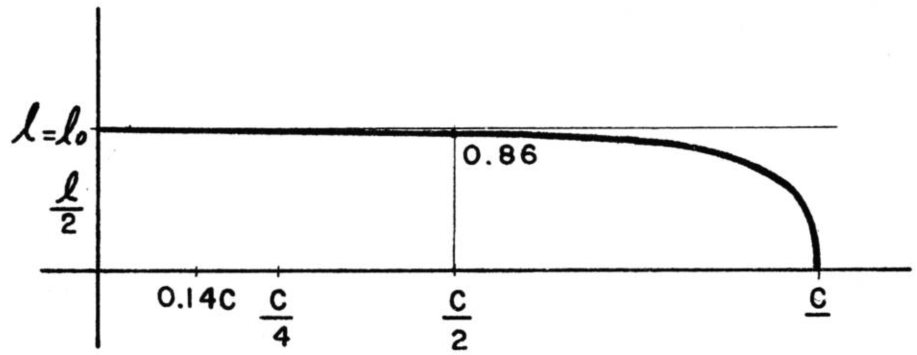
Cualquier dejada agrega 1.50 como costo adicional a lo recorrido. La pendiente $m = \frac{5 \text{ ctvos}}{250 \text{ m}} = \frac{20 \text{ ctvos}}{1 \text{ Km}}$. La recta sólo tiene sentido para distancias positivas.



11.- Se denomina la longitud propia a la dimensión lineal o de un cuerpo en el sistema de coordenadas en que está en reposo. La longitud ℓ del mismo cuerpo medida en un sistema de referencia que se mueve con respecto al cuerpo está dada por

$$\ell = \ell o \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}$$ ¿ Qué tan buena aproximación es $\ell = \ell o$

o sea, e.g. hasta qué valor son 99% iguales ℓ y ℓo ?



En $V = C \quad \ell = o$

En $V = \frac{C}{2} \quad \ell = \ell o \sqrt{1 - \frac{\frac{C^2}{4}}{C^2}}$

$C = 300{,}000 \frac{Km}{seg}$

C = velocidad de la luz en el vacío)

$$= \ell o \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \ell o \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$= .86$$

$$\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}} = .9900 \Longrightarrow \frac{V^2}{C^2} = 1 - .9801 = 0.0199$$

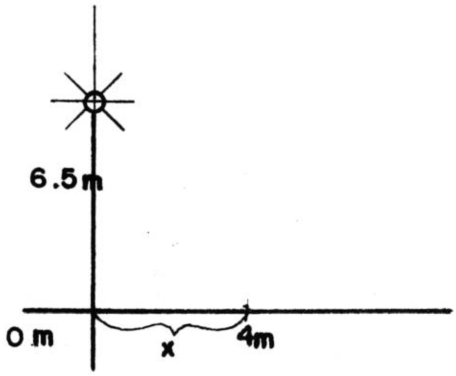
o sea $V = \sqrt{.0199}\, C = .141\, C \approx 42{,}320 \frac{km}{seg}$

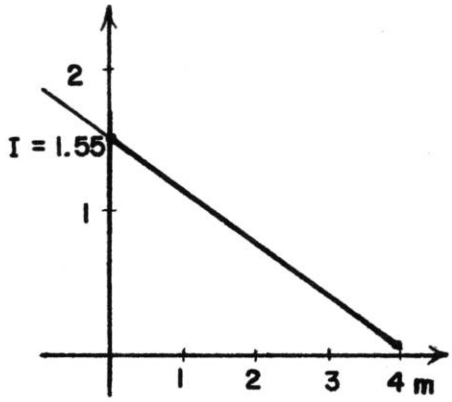
$\ell \approx .99 \quad \ell o$

12.- La intensidad de iluminación I de un foco luminoso situado a 6.5 m sobre el pavimento y la distancia x del pie del foco viene dada por la ecuación $I = 1.55 - 0.38x$

Midiendo I en bujías / m^2 y x en metros, dibujar la gráfica que represen_ ta la iluminación comprendida entre 0 y 4 m.

SOLUCIÓN





13.- Una persona hace un viaje y maneja por 8 horas una distancia de 400 km. Su velocidad promedio es de 60 km/h en carretera y 30 km/h cuando pasa por poblaciones. ¿ Cuánto tiempo pasó en las ciudades ?

SOLUCIÓN

Ecuación lineal para tiempo T ciudad + T carretara = 8 hrs.

Ecuación lineal para distancias

D ciudad + D carretara = 400 Km

o sea V ciudad T ciudad + V carretera T carrerera = 400 km.

V ciudad T ciudad + V carretera (8-T ciudad) = 400 km

Incógnitas

T ciudad $30\,Tc. + 60\,(8-Tc) = 400$

$-\,30\,Tc + 480 = 400$

$$T \text{ ciudad} = \frac{.80}{30} = 2\frac{20}{30} \text{ horas} = 2h\ 40'$$

$$T \text{ carretera} = 5h\ 20'$$

14.- Un químico tiene 3 Kg (3,000 grs) de ácido clorhídrico al 20%. El desea aumentar su concentración al 25% sacando una parte para reemplazarla por una solución al 80% de ácido clorhídrico. ¿ Cuántos gramos debe extraer y reemplazar con la solución al 80% ?

SOLUCIÓN

Se tienen 3 kg con 600 grs de ácido clorhídrico.

Finalmente se tiene 3 Kg + x Kg, con x la cantidad que se extraiga de la solución al 80%.

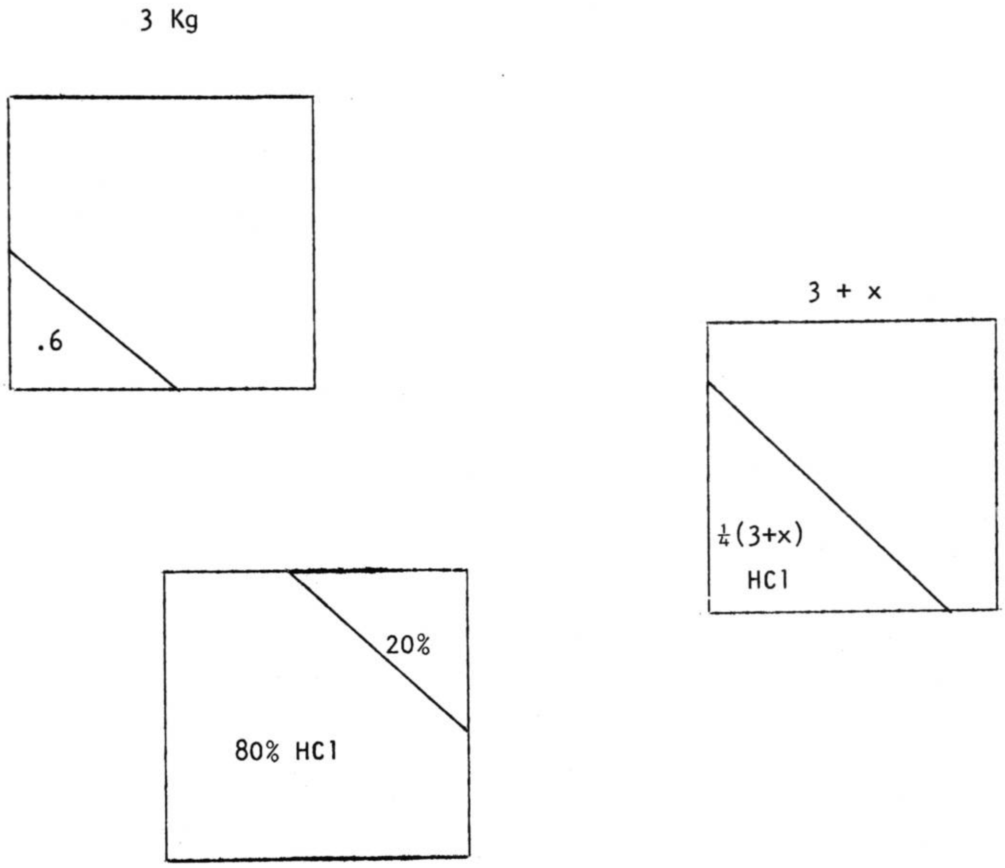
La cantidad de ácido clorhídrico será 600 grs + .8 x X Kg y se desea que $\dfrac{.600 + .8x}{3 + x} = .25 = \dfrac{1}{4}$

$$2.400 + 3.2x = 3 + x$$

o sea $3.2x - x = 2.2x = 3 - 2.400 = .600$

$$2.2x = .600$$

$$x = \frac{.6}{2.2} = .272$$



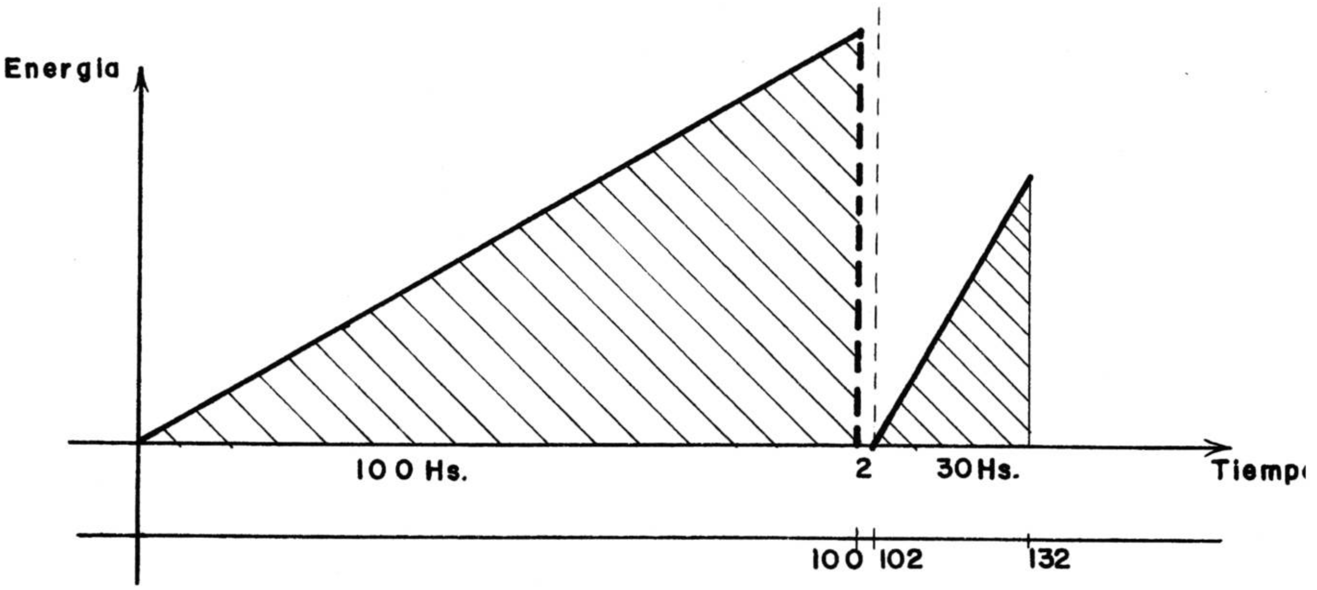
Comprobación $$\frac{.600 + (.8)(272)}{3.272} = .24987 \ldots \approx .25$$

15.- Se estaba produciendo potencia a una velocidad de 50 Kw/seg. Así se trabajó durante 100 horas en que hubo una interrupción de 2 hrs. Posteriormente se produce con la maquinaria reparada a un ritmo de 60 kw/seg durante 30 horas. ¿ Cuál es la cantidad total de potencia producida ?.

SOLUCIÓN

$v_1 = 50 \frac{Kw}{seg}$ $\qquad$ $t_1 = 100$ horas

$v_2 = 60$ Kw/seg $\qquad$ $t_2 = 30$ horas



1 hora = 60 minutos = 60 (60 seg) = 3600 seg $\qquad \frac{1 Kw}{hora} = \frac{1 Kw}{seg} \times \frac{3600 \text{ seg}}{1 \text{ hora}}$

$v_1 = 50 \times 3,600 \frac{Kw}{seg} = 180,000 \frac{Kw}{hora} = 180$ Megawatts

$v_2 = 60 \times 3,600 \frac{Kw}{seg} = 216,000 \frac{Kw}{hora} = 216$ Megawatts

Cantidad total producida $\quad v_1 \,.\, 100 = v_2 \,.\, 30 = 180 \times 100 + 216 \times 30$

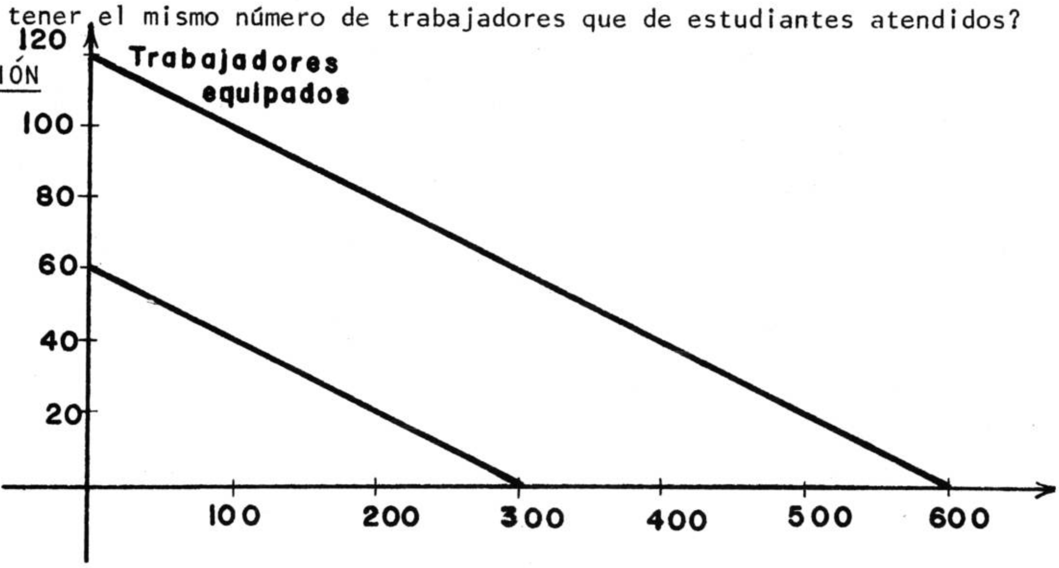
$$= 18{,}000 + 6480$$

$$= 24{,}480 \text{ Megawatts.}$$

Esto corresponde al area total bajo las dos rectas.

16.- Si todo el dinero disponible (60 millones de pesos) a un municipio se dedica a maquinaria para equipar trabajadores se puede dar trabajo a 120 de ellos. Si se dedica a equipar estudiantes alcanza a 600. Trazar una recta que dé las posibilidades intermedias. Si se contara solo con 30 millones, cuál sería la recta correspondiente? ¿Qué indica la pendiente? ¿Se puede tener el mismo número de trabajadores que de estudiantes atendidos?

SOLUCIÓN



Si usamos la forma de la recta $\quad ax + by = c$

con x = # de trabajadores equipados y

y = # de estudiantes equipados

a = costo de equipamiento por individuo en la fábrica

b = costo de equipamiento por individuo en la escuela.

Queda $a = \frac{60}{120} = .5 \frac{\text{millones}}{\text{individuo}}$ $b = \frac{60}{600} = .1 \frac{\text{millones}}{\text{estudiante}}$

Entonces $.5x + .1y = 60$ o $\frac{x}{120} + \frac{y}{600} = 1$ ———— (a

Si se contara con 30 millones a y b en I no cambian pero c si

$$.5x + .1y = 30 \quad \text{o} \quad \frac{x}{60} + \frac{y}{300} = 1$$

La pendiente, igual en ambos casos, es $m = \frac{120}{600} = \frac{60}{300} = \frac{1}{5}$

denota que por cada trabajador equipado se equipan 5 estudiantes

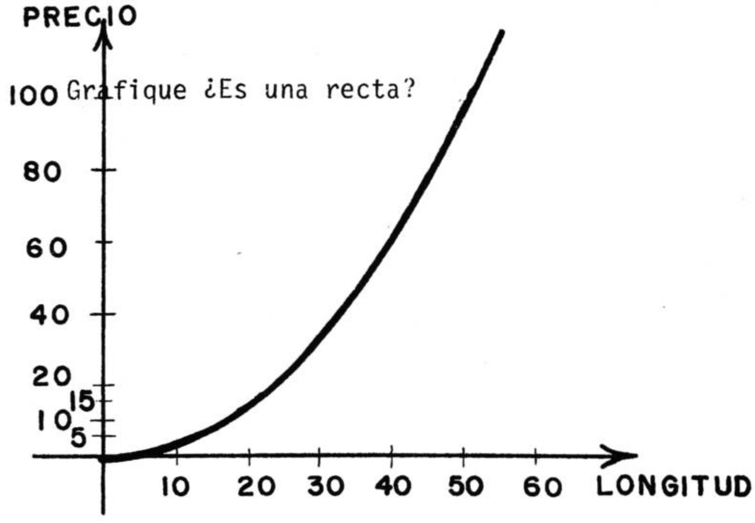
Si $x = y$ se tendría $ax + bx = (.5 + .1)x = 60$

Y entonces $x = \frac{60}{.6} = 100 = y$ (o 50 en la segunda recta)

17.- Un comprador obtiene la siguiente lista de precios de cuadros de acrílico donde a es la longitud de lado y p es el precio correspondiente

	a(cm)	precio
A	10	4
B	20	16
C	30	36
D	40	64
E	50	100

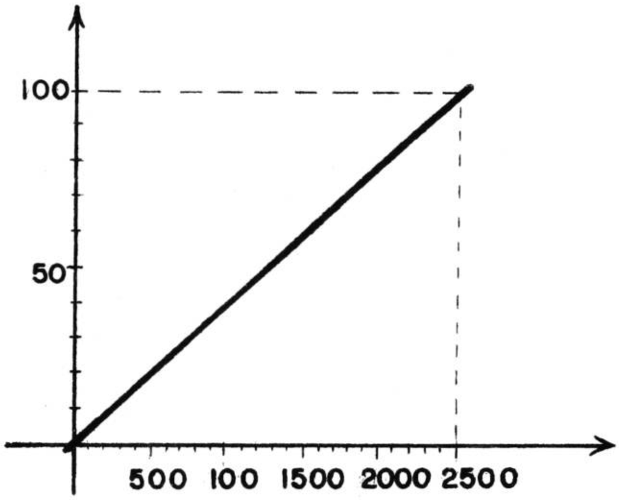
Gráfique ¿Es una recta?



No es una recta. (Es una parábola)

Ahora grafique la siguiente función con a (el lado) subtituido $p = \frac{1}{25} a^2$ por el Area A.

	$A(cm^2)$	p(pesos)
A	100	4
B	400	16
C	900	36
D	1,600	64
E	2,500	100



Cuál es la función?. Es una recta que relaciona al área con el precio correspondiente.

$$y - 4 = m(x-100) = \frac{16-4}{400-100}(x-100) = \frac{12}{300}(x-100) = \frac{4}{100}(x-100) = \frac{1}{25} =(x\cdot$$

$$y = \frac{x}{25} - \frac{100}{25} + 4 = \boxed{\frac{x}{25} = y}$$

Cuál es la pendiente? $m = \frac{1}{25} = .04$ y representa el precio por cm^2 de acrílico.

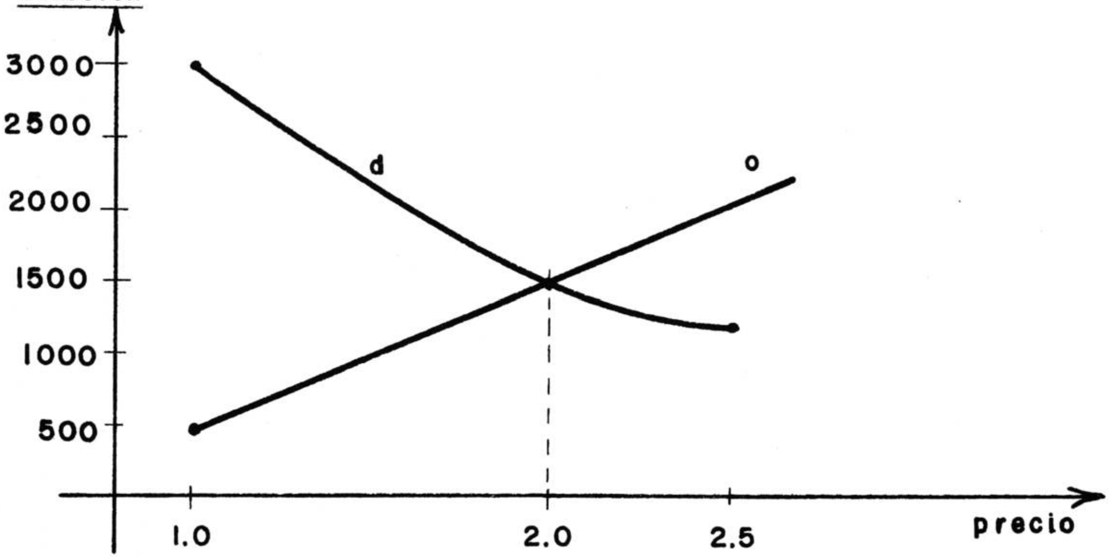
18.- La cantidad de discos populares que se venden depende del precio de venta (demanda. d).

La cantidad de discos populares que se producen para vender depende también del precio de venta (oferta. o).

Si $d = \frac{3,000}{p}$ y $o = 1,000\ p - 500$, grafique las dos curvas.

¿ En qué punto se cortan ?. Interprételo

SOLUCIÓN



A un precio de 2 la oferta iguala a la demanda. No hay sobreproducción, no hay discos sin vender ni gente que quería comprar y que se quedó sin disco.

19.- Grafique la recta correspondiente al "interés simple".

Si P = principal

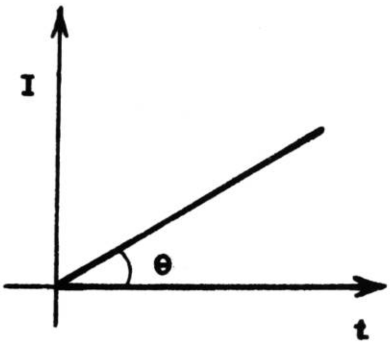
r = tasa de interés anual

t = tiempo en años

Grafique la recta correspondiente al valor futuro VF

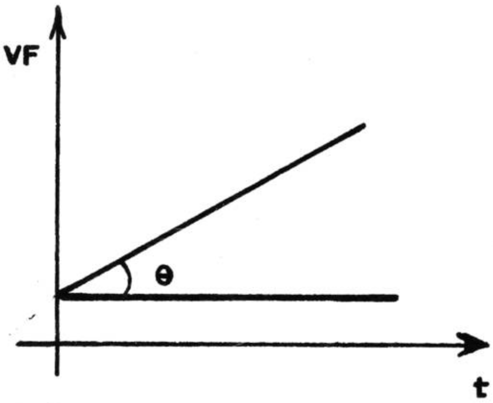
SOLUCIÓN

Se sabe que el interés a pagar por un préstamo P a una tasa de interés r en un tiempo t es $I = Prt$, donde t es expresado en términos de años y la tasa del interés en %



Por eso $VF = P + Prt$ = Valor futuro

$= P\ (1 + rt)$



Si al término de un mes, se consideran que se tiene un nuevo principal y se aplica la misma tasa, Cuál es la nueva recta de VF ?.

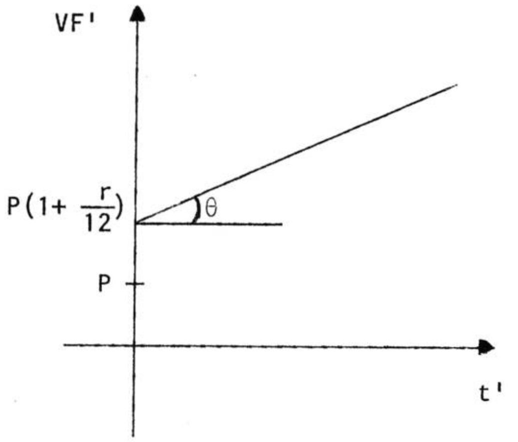
Al término de un mes el $VF = P(1 + r\cdot\frac{1}{12})$

La nueva recta debe partir de este nuevo principal

$$(VF)' = VF \text{ después del primer mes}$$

$$= P(1 + \frac{r}{12} \quad (1 + t')$$

$t' = t - \frac{1}{12}$; el tiempo transcurrido después del primer mes.



Al término de n meses ?

$$VF_n = P(1 + \frac{r}{12})^n \quad (1 + rt_n)$$

$t_n = t - n \cdot \frac{1}{12}$; con la misma pendiente.

20.- Cuando se desciende en el océano, la presión crece linealmente

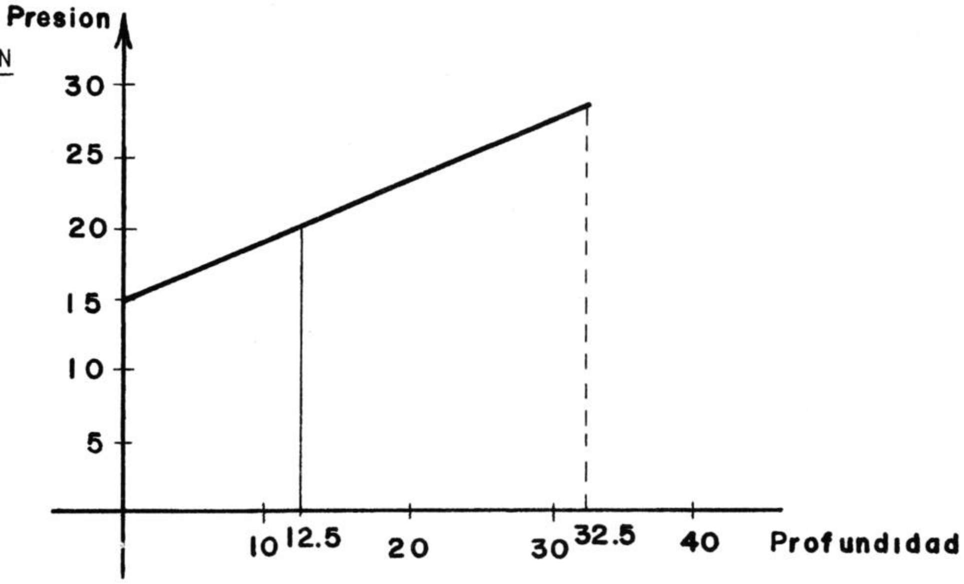
La presión es de 15 libras por pulgada cuadrada en la superficie y 30 libras por pulgada cuadrada 33 pies bajo de la superficie.

(A) Si P es la presión en libras y d es la profundidad bajo la superficie en pies, escriba la ecuación que expresa a P en términos de d

(B) Cuál es la presión en 12.540 pies (la profundidad promedio del oceano)

(C) Grafique la ecuación para $o \leq d \leq 12.540$

SOLUCIÓN



Si llamamos P_o la presión en la superficie y P_{33} a la presión a 33 pies la ecuación de la recta queda

$$P - P_o = \frac{P_{33} - P_o}{33 - o}(d - o)$$

$$P - 15 = \frac{30 - 15}{33 - o}(d) = \frac{15}{33}d \qquad\qquad P = 15 + \frac{15}{33}d$$

$$P_{media} = P(12.540 \text{ pies}) = 15 + \frac{15}{33} \cdot 12.540 = 15 + 5.7$$

$$= 20.7 \, \frac{\text{libras}}{\text{pulgada}^2}$$

Escalas de temperatura

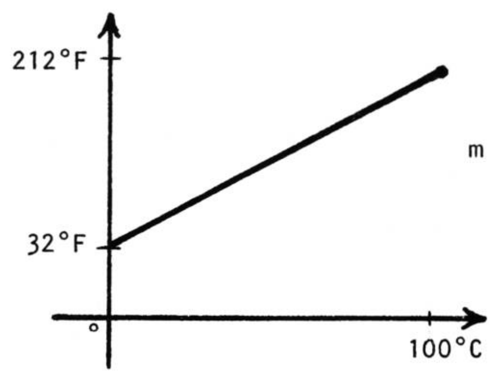
21.- Determine las gráficas de las tres siguientes escalas de temperatura

Celsius	0°C	100°C
Fahrenheit	32°F	212°F
Absoluta o Kelvin	273°F	373°K

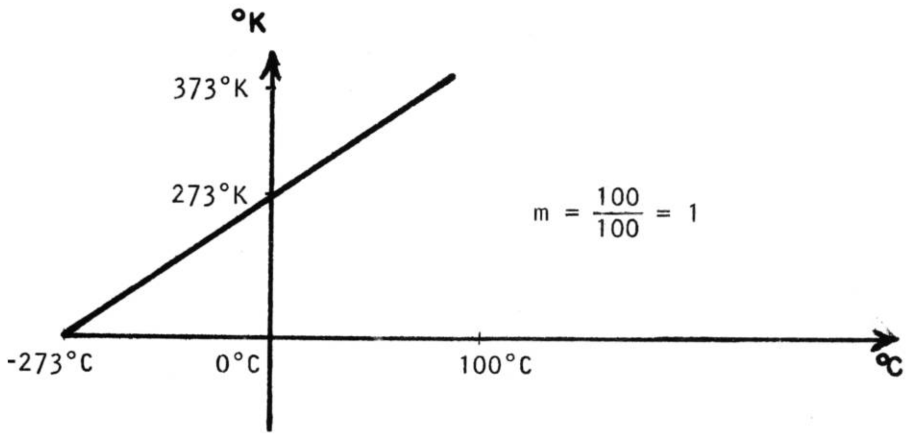
Determine las intersecciones con los ejes. Determine las rectas que relacionan las escalas Celsius vs. Fahrenheit y de Celsius vs. Kelvin.

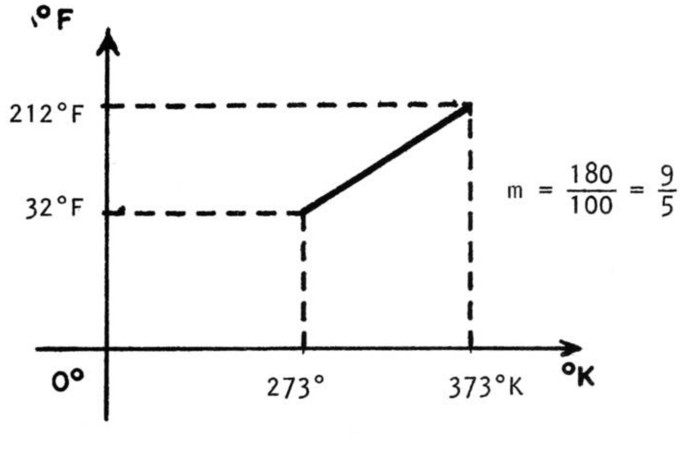
Un grado Kelvin a cuantos grados Celsius y a cuantos grados Fahrenheit corresponde ?.

RESPUESTA



$$m = \frac{180°F}{100°C} = \frac{9}{5}$$


°K
373°K
273°K
-273°C
0°C
100°C
°C
m = 100/100 = 1


°F
212°F
32°F
m = 180/100 = 9/5
0°
273°
373°K
°K

22.- Se sabe que "a temperatura constante, el peso de un gas disuelto por unidad de volúmen de un líquido es proporcional a la presión", (la ley de Henry), válida para algunas substancias. Grafique esta ley sabiendo que el ángulo de inclinación de la recta es $\alpha = 26° \ 33'$

SOLUCIÓN

Sólo sabemos la pendiente de la recta ya que
$\tan 26.55° = \tan 26° \ 33'$

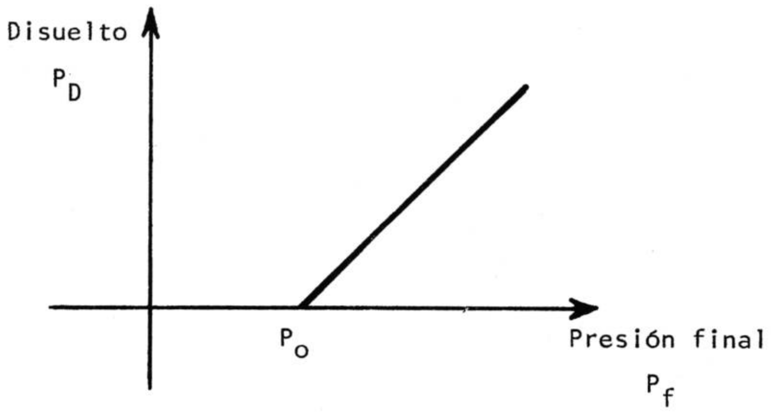
$m = \tan \alpha = \tan 26.55° = .4996$

Dependerá del gas y la temperatura el saber a partir de que presión P_o empieza a disolverse a razón de .4996 unidades de peso por cada unidad de presión aumentada.

Si P_f = Presión final a la que se sujeta el gas,

P_D = Peso disuelto por unidad de volúmen = $.4996 \ (P_f - P_o)$ si $P_f > P_o$

= ? si $P_f < P_o$



23.- El cloruro de potasio tiene solubilidad s dependiente de la temperatura, de acuerdo con la tabla

t =	0°	20°	40°	60°	80°	100°
s =	28.5	39.7	49.8	59.2	69.5	79.5

Grafique la función correspondiente ¿ Cuál es la pendiente ? ¿ Cuál su ordenada al orígen ? ¿ Cuál la ecuación de la recta ?

SOLUCIÓN

A éstos datos se le pueden 'ajustar' diversas rectas ya que la razón de cambio de la solubilidad con la temperatura, no es la misma para los diferentes incrementos de temperatura, aunque son cercanos a 10 gramos por cada 20° centígrados.

Una recta aproximada es $S - S_o = m\ (t - t_o) = m\ (t - o)$

tomando a $m = \dfrac{S_{100} - S_o}{100} = \dfrac{79.5 - 28.5}{100} = \dfrac{51}{100} = .51$

$$S = 28.5 + .51\ t$$

VECTORES EN R^3

1.- Determinar si el triángulo de vértices $A(1, -2, 3)$; $B(-1, 1, 1)$; $C(1, 4, -1$ es isósceles. ¿ Es equilátero ?

SOLUCIÓN

Debemos ver que tiene dos lados de la misma magnitud.

Los lados del triángulo son: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (-1, 1, 1) - (1, -2, 3) = (-2, 3, -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (1, 4, -1) - (1, -2, 3) = (0, 6, -4)$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = (1, 4, -1) - (-1, 1, 1) = (2, 3, -2)$$

Las magnitudes son:

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}$$

$$||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{0^2 + 6^2 + (-4)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

$$||\overrightarrow{BC}|| \quad \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}$$

Es isósceles pero no equilátero.

2.- Si las coordenadas de un nuevo origen en el sistema antiguo son (2,-4,6) y las coordenadas de P en el nuevo sistema son (-1,2,-4)'. ¿ Cuáles son las coordenadas de P en el sistema antiguo ?

SOLUCIÓN

$(h, k, 1) = (2, -4, -6) = (0, 0, 0)'$

Se sabe que $(-1, 2, -4)' = (x_0, y_0, z_0) - (h, k, 1)$

$$(x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, -4) + (h, k, 1) = (-1, 2, -4) + (2, -4, -6)$$

$$(x_0, y_0, z_0) = (1, -2, -10)$$

3.- Para el triángulo cuyos vértices están en A(2,-5,3), B(-1, 7, 0) y C(-4, 9, 7) calcular

a) La longitud de cada lado

b) El punto medio de cada lado.

SOLUCIÓN

a) Sea $\vec{a} = (2, -5, 3) - (-1, 7, 0) = (3, -12, 3)$ y

$\vec{b} = (-4, 9, 7) - (-1, 7, 0) = (-3, 2, 7)$

Si L_1, L_2 y L_3 son las longitudes que nos piden calcular, entonces

$$L_1 = \|\vec{a}\| = \sqrt{9 + 144 + 9} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$$

$$L_2 = \|\vec{b}\| = \sqrt{9 + 4 + 49} = \sqrt{62}$$

$$L_3 = \|\vec{a} - \vec{b}\| = \sqrt{36 + 196 + 16} = \sqrt{248} = 2\sqrt{62}$$

b) Sea $x(x_1, x_2, x_3)$ el punto medio de A y B, entonces

$\vec{Bx} = B - x = \vec{xA} = x - A$, es decir

$$(-1, 7, 0) - (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) - (2, -5, 3)$$

$$(-1 - x_1, 7 - x_2, - x_3) = (x_1 - 2, x_2 + 5, x_3 - 3) \text{ de donde}$$

$$\left.\begin{aligned} -1 - x_1 &= x_1 - 2 \\ 7 - x_2 &= x_2 + 5 \\ - x_3 &= x_3 - 3 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$x(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$$

En forma similar se calculan los otros puntos medios, encontrándose que

i) El punto medio de AC es $(-1, 2, 5)$ y

ii) El punto medio de BC es $\left(-\frac{5}{2}, 8, \frac{7}{2}\right)$.

4.- Demostrar que los tres puntos (1, -1, 3), (2, 1, 7) y (4, 2, 6) son los vértices de un triángulo rectángulo y calcular su área.

SOLUCIÓN

Sea $\vec{a} = (2, 1, 7) - (1, -1, 3) = (1, 2, 4)$

$\vec{b} = (4, 2, 6) - (2, 1, 7) = (2, 1, -1)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 4) \cdot (2, 1, -1) = 2 + 2 - 4 = 0$

como $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, entonces los vértices dados sí son los de un triángulo rectángulo. Su área será

$$A = \frac{||\vec{a}|| \; ||\vec{b}||}{2} = \frac{\sqrt{1 + 4 + 16} \; \sqrt{4 + 1 + 1}}{2} = \frac{\sqrt{126}}{2} \, u^2.$$

5.- Expresar al siguiente vector en términos de su magnitud y de sus cosenos directores $\vec{a} = -6\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

SOLUCIÓN

Un vector $\vec{a}$ se expresa en términos de su magnitud y de sus cosenos directores en la siguiente forma

$$\vec{a} = ||\vec{a}|| \; (\cos \alpha \; \hat{i} \; + \cos \beta \; \hat{j} \; + \; \cos \gamma \; \hat{k})$$

donde $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$ y $\hat{k}(0, 0, 1)$

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{||\vec{a}||} \, , \quad \cos \beta = \frac{a_2}{||\vec{a}||} \quad y \quad \cos \gamma = \frac{a_3}{||\vec{a}||}$$

así que

$||\vec{a}|| = 7$, $\cos\alpha = \frac{-6}{7}$ $\cos\beta = \frac{2}{7}$ y $\cos\gamma = \frac{3}{7}$. Entonces

$\vec{a} = 7(-\frac{6}{7}\hat{i} + \frac{2}{7}\hat{j} + \frac{3}{7}\hat{k})$

6.- Calcular el área del triángulo que tiene sus vértices en A(-2, 3, 1), - B(1,2,3) y C(3, -1, 2).

SOLUCIÓN

Sea $\vec{a} = (-2, 3, 1) - (1, 2, 3) = (-3, 1, -2)$ y

$\vec{b} = (3, -1, 2) - (1, 2, 3) = (2, -3, -1)$.

El área del triángulo está dada por

$$A = \frac{1}{2}||\vec{a} \times \vec{b}|| = \frac{1}{2}||(-7, -7, 7)|| = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

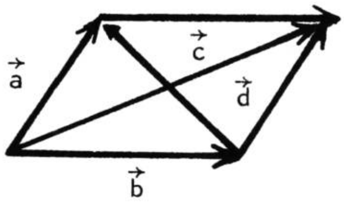
7.- Hallar el área del paralelogramo cuyas diagonales son

$\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$ $\vec{d} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

SOLUCIÓN

El área del paralelogramo es $||\vec{a} \times \vec{b}||$ con $\vec{a}$, $\vec{b}$ los lados del paralelo_ gramo. No conocemos los lados del paralelogramo pero conocemos sus dia_ gonales a partir de ellas se pueden obtener los lados del paralelogramo.

Hagamos una figura:



De aquí:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

$$\vec{b} + \vec{d} = \vec{a}$$

$$\begin{array}{r} \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \\ \underline{- \vec{a} + \vec{b} = - \vec{d}} \\ 2\vec{b} = \vec{c} - \vec{d} \end{array}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{2} (\vec{c} - \vec{d})$$

Sustituyendo en $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ se tiene

$$\vec{a} = \vec{c} - \vec{b} = \vec{c} - \frac{1}{2} (\vec{c} - \vec{d}) = \frac{1}{2} \vec{c} + \frac{1}{2} \vec{d} = \frac{1}{2} (\vec{c} + \vec{d})$$

luego $\vec{b} = \frac{1}{2} (\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}) - (- \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) = \frac{1}{2} (2^{\rightarrow} + 2\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j}$

$$\vec{a} = \frac{1}{2} (\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k} + (- \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k})) = \frac{1}{2} (4\vec{j} - 6\vec{k}) = 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-3) - \vec{j}(-3) + \vec{k}(2) = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

Así Area del paralelogramo $= ||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||-3\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}||$

$$= \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 9 + 4} = \sqrt{22}$$

8.- ¿ Para que valor de "a" los vectores (2, -1, 1) (1, 2, -3) (3, a, 5) están en un mismo plano ?

SOLUCIÓN

¿ Hay alguna relación entre el volumen del paralelepípedo que forman tres vectores y el hecho de querer que estén en un mismo plano ?

Sí están en un mismo plano el volumen que forman es igual a cero.

Por lo tanto $|\vec{a}\cdot\vec{b} \times \vec{c}| = 0$ que es el volumen del paralelepípedo que forman tres vectores.

Así $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & a & 5 \end{vmatrix} = 0$$ ¿ Porqué ?

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ a & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 0$$

$0 = -5 -a -2(10 - 3) -3(2a + 3) = -5 -a -14 -6a -9$

$0 = -7a -28$; $7a = -28$

$\underline{a = -4}$.

9.- Demuestre que si $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ e interprete este resultado geométricamente

Demostración

$\vec{b} = - \vec{a} - \vec{c}$

$\vec{a} = - \vec{b} - \vec{c}$

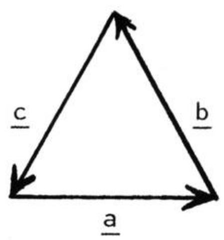
$\vec{c} = - \vec{a} - \vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b} = (- \vec{b} - \vec{c}) \times \vec{b} = - \vec{b} \times \vec{b} - \vec{c} \times \vec{b} = - \vec{c} \times \vec{b}$ ya que $\vec{b} \times \vec{b} = 0$

$\vec{b} \times \vec{c} = - \vec{c} \times \vec{b}$

$\vec{c} \times \vec{a} = (- \vec{a} - \vec{b}) \times \vec{a} = - \vec{a} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{a} = 1 = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$$



Sabemos que $\frac{1}{2}\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ es el área del triángulo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Pero como el triángulo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es el mismo que el determinado por $\vec{a}$ y $\vec{c}$, la norma de sus productos cruz debe ser la misma.

10.- Si A, B y C en R^3 son vectores no paralelos a un mismo plano, todo otro vector D en R^3 puede ponerse en la forma

$$D = \alpha A + \beta B + \gamma C \quad \text{en}$$

con $\alpha = \frac{(D\times B)\cdot C}{(A\times B)\cdot C}$ $\beta = \frac{(D\times C)\cdot A}{(A\times B)\cdot C}$ y $\gamma = \frac{(D\times A)\cdot B}{(A\times B)\cdot C}$

Si $D = \alpha A + \beta B + \gamma C$ entonces

$$(D\times B)\cdot C = (\alpha A\times B + \beta B\times B + \gamma C\times B)\cdot C$$

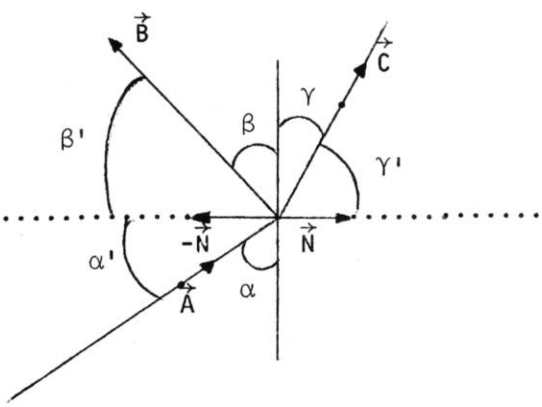
$$= \alpha(A\times B)\cdot C + \beta 0\cdot C + \gamma C\times B\cdot C$$

$$= \alpha(A\times B)\cdot C + 0 + 0 \quad \text{ya que } C\times B \text{ es perpendicular a } C$$

$$\alpha = \frac{(D\times B)\cdot C}{(A\times B)\cdot C} \quad \text{q.e.d.} \quad \text{análogamente para } \beta \text{ y para } \gamma.$$

11.- Dos medios homogéneos. Si hay refracción de luz en la interfase entre dos medios homogéneos, sean $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ los vectores unitarios a lo largo de los rayos incidentes, reflejados y refractados, respectivamente y sea $\vec{N}$ el vector unitario normal a la interfase. (a) Demuestre que la ley de reflexión es equivalente a $\vec{A}\times\vec{N} = \vec{B}\times\vec{N}$

SOLUCIÓN



La ley de reflexión dice que el ángulo entre la dirección de propagación de la onda reflejada y la normal a la superficie plana divisoria es igual en valor absoluto al ángulo correspondiente de la onda incidente, esto cuando las dimensiones de los dieléctricos son considerablemente mayores a la longitud de onda.

$$+(\vec{A}\times\vec{N}) = (-\vec{A}) \times (-\vec{N}) = |\vec{A}|\ |\vec{N}|\,\text{sen}\ \alpha' = \text{sen}\ \alpha' = \text{sen}\ \beta'$$

Como α' y β' son menores de 90° los dos $\alpha' = \beta'$ o sea la ley de la reflexión.

(b) Demuestre que la ley de refracción es equivalente a $n_1\vec{A}\times\vec{N} = n_2\vec{C}\times\vec{N}$, con n_1 y n_2 los índices de refracción

La ley de refracción dice en las mismas condiciones mencionadas en (a) que

$$\frac{\text{sen }\alpha'}{\text{sen }\gamma'} = \frac{n_2}{n_1}$$

Desarrollando $n_1\ \vec{A}\times\vec{N} = n_1\ |-\vec{A}|\ |-\vec{N}|\ \text{sen }\alpha' = n_2|-\vec{C}|\ |-\vec{N}|\ \text{sen }\gamma'$

$$\frac{\text{sen}\alpha'}{\text{sen}\gamma'} = \frac{n_2}{n_1}$$

RECTAS EN R^3 Y PLANOS

1.- Dé la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,-1,1) y es paralela a la recta que pasa por los puntos A(-2,0,1) ; B(1,2,3).

SOLUCIÓN

Para poder dar la ecuación de la recta necesitamos un punto que pertenezca a la recta y la dirección de la misma.

En este caso ya tenemos un punto que pertenece a la recta (1,-1,1), nos falta la dirección. ¿ Cómo podemos obtenerla ? ¿Dá más datos el problema? las rectas deben ser paralelas ¿Entonces cuál es la dirección?. ¿Cuándo dos rectas son paralelas?. Dos rectas son paralelas sí tienen la misma dirección. Por lo tanto la dirección de la recta buscada es la dirección de la recta que pasa por A y B.

Luego la dirección es $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a} = (1,2,3) - (-2, 0,1) = (3,2,2)$

La ecuación es $\vec{x} = (1,-1,1) + t(3,2,2) \quad t \in \mathbb{R}$

ó $(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 1) + (3t, 2t, 2t) = (1 + 3t, -1 + 2t, 1 + 2t)$

$$x_1 = 1 + 3t$$
$$x_2 = -1 + 2t$$
$$x_3 = 1 + 2t \quad ; \quad t \in R$$

Forma paramétrica de la recta

o en la forma simétrica

$$x_1 - 1 = 3t \quad ; \quad \frac{x_1 - 1}{3} = t$$

$$x_2 + 1 = 2t \quad ; \quad \frac{x_2 + 1}{2} = t$$

$$x_3 - 1 = 2t \quad ; \quad \frac{x_3 - 1}{2} = t$$

$$\frac{x_1 - 1}{3} = \frac{x_2 + 1}{2} = \frac{x_3 - 1}{2}$$

Muestra que las rectas dadas son paralelas.

$$\ell_1: \quad x - 2 = \frac{y + 5}{3} = \frac{z - 2}{-2}$$

$$\ell_2: \quad \begin{aligned} x &= -2t + 5 \\ y &= -6t + 1 \\ z &= 4t + 2 \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN

¿ Cuándo dos rectas son paralelas ? luego tenemos que ver sus direcciones

la dirección de ℓ_1 es: $\vec{v} = (1, 3, -2)$
la dirección de ℓ_2 es: $\vec{u} = (-2, -6, 4)$

Ahora como verificamos que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos.

Una forma es $\vec{u} = -2\vec{v}$

Las rectas son paralelas.

3.- Hallar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el origen y cuya dirección es ortogonal a los vectores $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{v} = -\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

SOLUCIÓN

Para dar la ecuación de la recta necesitamos un punto y la dirección.

La recta pasa por el origen es decir el punto (0, 0, 0) está en la recta. Así falta la dirección. Ahora bién la dirección de la recta es ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$

¿ Qué vector conocemos que sea ortogonal a dos vectores dados ? en ---- efecto $\vec{u} \times \vec{v}$. Luego la recta pasa por (0, 0, 0) y tiene la dirección $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-2 - (-3)) - \vec{j}(4 - (-3)) + \vec{k}(-2, - 1)$$

$$= \vec{i} - 7\vec{j} - 3\vec{k}$$

Así la ecuación de la recta es: $\vec{x} = (0, 0, 0) + t(1, -7, -3)$ $t \in R$
$(x, y, z) = (t, -7t, -3t)$

de donde obtenemos: $\begin{cases} x = t \\ y = -7t \\ z = -3t \end{cases}$ Ec paramétrica buscada

4.- Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (2, 2, -3) y es perpendicular a las rectas cuyos vectores dirección son (2, -1, 3) y - (-1, 2, 0)

SOLUCIÓN

La ecuación (paramétrica de la recta en R^3 o en R^2 es

$\vec{P} = \vec{P}_0 + t\vec{v}$. Por tanto $\vec{P} = (2, 2, -3) + t(a, b, c)$

Pero si queremos que la recta sea perpendicular a las dos dadas se deberá cumplir que $(a, b, c)\cdot(2, -1, 3) = 0$

y que $(a, b, c)\cdot(-1, 2, 0) = 0$

Para simplificar dividamos entre a que suponemos diferente de 0

entonces $(1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}) \cdot (2, -1, 3) = (1, b', c') \cdot (2, -1, 3) = 0$

$(1, b', c') \cdot (-1, 2, 0) = 0$

$2 - b' + 3c' = 0$ y $-1 + 2b' + c'.0 = 0$

$2b' = 1$ $\qquad b' = \frac{1}{2}$ $\qquad 2 - \frac{1}{2} + 3c' = \frac{3}{2} + 3c' = 0$

$c' = \frac{-1}{2}$, y el vector es $(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

y $\vec{P} = \vec{P}_0 + t\vec{v} = (2, 2, -3) + t(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

o $\vec{P} = \vec{P}_0 + t\vec{v} = (2, 2, -3) + t(2, 1, -1)$, ya que la dirección del vector no se altera si multiplicamos (o dividimos) por una constante.

5.- a) Demuestre que las dos ecuaciones

$$\vec{P} = (1,\ 0,\ 5) + t(4,\ -2,\ 6) \quad y$$

$$\vec{Q} = (3,\ -1,\ 8) + s(-2,\ 1,\ -3)$$ representan la misma línea

DEMOSTRACIÓN

Los vectores dirección son paralelos ya que $(4,\ -2,\ 6) = -2(-2,\ 1,\ -3)$

P y Q tienen la misma dirección.

Además $(1,\ 0,\ 5) = (3,\ -1,\ 8) + 1(-2,\ 1,\ -3)$ y

$$(3,\ -1,\ 8) = (1,\ 0,\ 5) + (\tfrac{1}{2})(4,\ -2,\ 6)$$

b) Qué valores del parámetro t corresponden a los puntos de Q con valores del parámetro $s = -2,\ -1,\ 0$.

Si $s = -2$; $Q(-2) = (3,\ -1,\ 8) - 2(-2,\ 1,\ -3)$

$$= (3,\ -1,\ 8) + (4,\ -2,\ 6)$$
$$= (7,\ -3,\ 14) = (1,\ 0,\ 5) + t(4,\ -2,\ 6)$$
$$= (1,\ 0,\ 5) + \tfrac{6}{4}(4,\ -2,\ 6)$$

$$s = -2 \Rightarrow t = \frac{6}{4}$$

Si $s = -1$; $Q(-1) = (3,\ -1,\ 8) - (-2,\ 1,\ -3) = (5,\ -2,\ 11)$

$$= (1,\ 0,\ 5) + t(4,\ -2,\ 6) = (1,\ 0,\ 5) + (4,\ -2,\ 6)$$

$s = -1 \Rightarrow t = 1$

Si $s = 0 \Rightarrow$

$$Q(0) = (3,\ -1,\ 8) + 0(-2,\ 1,\ -3) = (3,\ -1,\ 8) + 0$$
$$= (1,\ 0,\ 5) + t(4,\ -2,\ 6) = (1,\ 0,\ 5) + (\tfrac{1}{2})(4,-2,6)$$

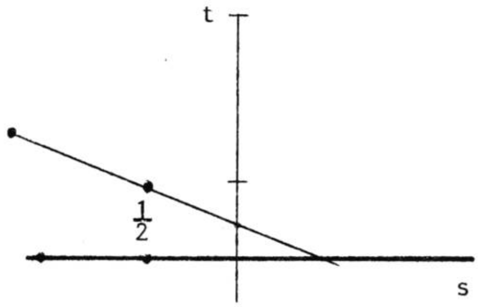
$$s = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

c) Qué relación hay entre s y t para los mismos puntos ?.

$(-2, \frac{2}{3})$, $(-1, 1)$, $(0, \frac{1}{2})$

Si $\quad s = 0 \qquad t = \frac{1}{2}$; $\qquad t = \dfrac{\frac{1}{2}}{-1}(s - \frac{1}{2})$

$$t = -\frac{1}{2}(s - 1)$$



6.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, 6, 4), corta al eje z y es paralela al plano $x - 3y + 5z - 6 = 0$

SOLUCIÓN

La ecuación de la recta es de la forma $\vec{x} = \overrightarrow{P_0} + t\vec{v} \qquad t \in R.$

Si la recta corta al eje z, entonces ese punto será de la forma ----- P(0, 0, k), entonces

$$\vec{v} = (0, 0, k) - (3, 6, 4) = (-3, -6, k - 4)$$

para hallar la k hacemos

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \qquad$ donde $\vec{n} = (1, -3, 5)$, así que

$$(-3, -6, k - 4) \cdot (1, -3, 5) = 0$$

$$-3 + 18 + 5(k - 4) = 0$$

$$5(k - 4) = - 15$$

$$k - 4 = - 3$$

$$k = 1$$

así que el vector $\vec{v} = (-3, -6, -3)$

$$\vec{x} = (3, 6, 4) + t(-3, -6, -6) \qquad t \varepsilon R.$$

7.- Demuestre que las dos líneas $x = 3z + 7$, $y = 5z + 8$; y $x = 2z + 3$ y $y = 4z + 4$ se intersectan

SOLUCIÓN

Primero transformaremos esta ecuación a la forma parámetrica de la recta

$$t = z = \frac{x - 7}{3} = \frac{y - 8}{5} \qquad y \qquad t' = z = \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 4}{4}$$

$$\vec{P} = (7, 8, 0) + t(3, 5, 1) \quad y \quad \vec{Q} = (3, 4, 0) + (2, 4, 1)t'$$

Si R es punto de intersección quiere decir que tienen las mismas coordenadas z

$$\frac{x - 7}{3} = \frac{x - 3}{2} \Rightarrow 2(x - 7) = 3(x - 3) \Rightarrow 2x - 14 = 3x - 9$$

$$\Rightarrow 3x - 2x = - 14 + 9 \Rightarrow x = - 5$$

$$\frac{y - 8}{5} = \frac{y - 4}{4} \Rightarrow 4y - 32 = 5y - 20 \Rightarrow 5y - 4y = 20 - 32$$

$$\Rightarrow y = - 12$$

$$z = \frac{-5 - 3}{2} = \frac{-8}{2} = - 4$$

$R = (-5, -12, -4)$

Si $t = -4$, $P = (7, 8, 0) - 4(3, 5, 1) = (7, 8, 0) - (12, 20, 4)$

$= (-5, -12, -4)$

y si $t' = -4$, $Q = (3, 4, 0) + (-8, -16, -4) = (-5, -12, -4)$ $\quad P = Q$.

8.- Dar la ecuación del plano que contiene a $P_0(1, 2, 3)$ y normal $(1, -1, 1)$

SOLUCIÓN

Para dar la ecuación del plano necesitamos un punto y la normal al plano ya que la ecuación es $\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n} = 0$, luego este ejercicio se reduce a sustituir P_0 y $\vec{n}$, hagámoslo

$\overrightarrow{P_0P} = (x - 1, y - 2, z - 3)$; $\vec{n} = (1, -1, 1)$

$$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n} = (x - 1, y - 2, z - 3)\cdot(1, -1, 1) = 0$$

$$1(x - 1) + (-1)(y - 2) + 1(z - 3) = 0$$

$$x - 1 - y + 2 + z - 3 = 0$$

La ecuación buscada es

$$x - y + z - 2 = 0$$

9.- Dar la ecuación del plano que contiene a los puntos $A(1, 2, 1)$; ----- $B(1, 0, 1)$; $C(0, 1, -1)$.

SOLUCIÓN

Ya se sabe, necesitamos un punto que pertenezca al plano y la normal. Un punto lo tenemos, nos falta la normal.

¿ Cómo obtenerla ? ¿ Qué caracteriza a la normal ? ó ¿ La ecuación $\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n} = 0$, que dice de la normal ?

$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}$ = nos dice que la normal es ortogonal a todos los vectores que estén en el plano, luego en este caso la normal $\vec{n}$ debe ser ortogonal a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

Así quién es la normal, qué vector conocemos ortogonal a dos vectores dados? $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

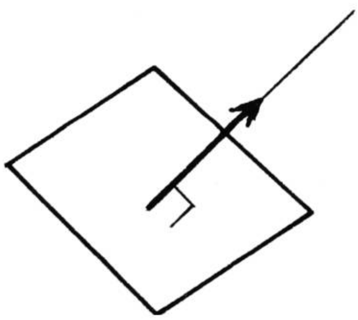
Finalmente ya tenemos un punto (A ó B ó C) y la normal $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ para la ecuación pedida, que se deja al lector debiéndose obtener

$$4x - 2z - 2 = 0$$

10.- Dar la ecuación del plano que contiene al punto $(1, 2, -1)$ y es perpendicular a la recta que resulta de la intersección de los planos -----
$x - 2y + z - 4 = 0$
$2x + y - z = o$

SOLUCIÓN

Una vez más ya tenemos un punto, falta la normal $\vec{n}$.



La recta es ortogonal al plano, de donde la dirección de la recta es la normal al plano, así necesitamos conocer la dirección de la recta.

Como la recta esta en ambos planos tenemos que su dirección $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{n}_1$ y $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{n}_2$

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

luego $\vec{n} = \vec{v}$ y tenemos un punto del plano y la normal, ya podemos dar la ecuación que se deja al lector obteniéndose $x + 3y + 5z - 2 = 0$

11.- Demostrar que el punto de intersección de la recta

$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{A}$ con el plano $\vec{B} \cdot \vec{x} - b = 0$ es

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \frac{b - \vec{B}\cdot\vec{x}_0}{B\cdot A}\vec{A}$$

DEMOSTRACIÓN

Si x es el punto de intersección, debe satisfacer ambas ecuaciones, por lo tanto

$$\vec{B}\cdot\vec{x} - b = \vec{B}\cdot(\vec{x}_0 + t\vec{A}) - b = 0$$

Pero sabemos que el producto escalar es distributivo, entonces

$$\vec{B}\cdot x_0 + \vec{B}\cdot t\vec{A} - b = 0$$

$$t(\vec{B}\cdot\vec{A}) = b - \vec{B}\cdot x_0 \qquad \text{como } \vec{B}\cdot\vec{A} \text{ es un número}$$

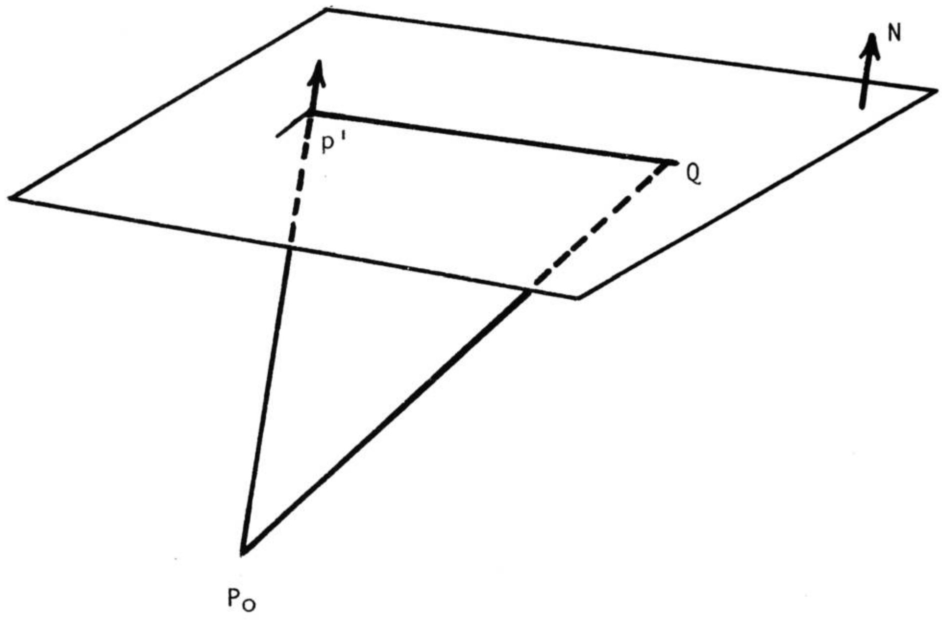
$$t = \frac{b - \vec{B}\cdot\vec{x}_0}{B\cdot A}$$

Sustituyendo

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \frac{b - \vec{B}\cdot\vec{x}_0}{B\cdot A}\vec{A} \qquad \text{q.e.d.}$$

12.- Sean P_0 y Q dos puntos, y N un vector en R^3, sea p' el punto de intersección de la línea a través de P_0 en la dirección de N, y el plano a través de Q perpendicular a N. Definimos la distancia de P_0 a aquél plano como distancia entre P_0 y p'. Encontrar esta distancia cuando $P_0 = (1, 3, 5)$ $Q = (-1, 1, 7)$ y $N = (-1, 1, -1)$

SOLUCIÓN



El plano que pasa por Q y normal N, $N \cdot (X - Q) = 0$

$(-1, 1, -1)(x + 1, y - 1, z - 7) = 0$

$= -x - 1 + y - 1 - z + 7 = 0$

$\Rightarrow x - y + x - 5 = 0$

La recta que pasa por P_0 y con dirección N es

$P = P_0 + tN$

$= (1, 3, 5) + (-t, t, t)$

$P = (1 - t, 3 + t, 5 - t)$

p' debe satisfacer la ecuación del plano, por tanto

$$1 - t' - 3 - t' + 5 - t' - 5 = 0 \Rightarrow -2-3t' = 0 \Rightarrow \boxed{t' = -\frac{2}{3}}$$

De modo que

$$p' = (1 + \frac{2}{3}, 3 - \frac{2}{3}, 5 + 2/3) = (\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 17/3)$$

$$||P_0p'|| = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

13.- Con las notaciones del ejercicio anterior muestre que la fórmula general para la distancia es dada por

$$\frac{|(Q - P_0) \cdot N|}{||N||}$$

Observando la figura es claro que $(Q - P_0) \cdot \frac{N}{||N||}$ es la proyección de $Q - P_0$ en la dirección correcta y es la distancia buscada, ya que para calcular la proyección exacta se requiere proyectar sobre un vector unitario.

Resta demostrar que efectivamente

$$\left| \frac{(Q - P_0) \cdot N}{||N||} \right| = \left| (Q - P_0) \cdot \frac{N}{||N||} \right|$$

pero es claro por la propiedad $(kv \cdot w)$, con k arbitrario real igual a $k(v \cdot w)$.

14.- Para las diversas formas de la ecuación del plano determinar las condi_ ciones de paralelismo y de perpendicular

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Como (A, B, C) y (A', B', C') son -- perpendiculares a los planos si

$$(A, B, C) = k(A', B', C') \quad k \neq 0$$

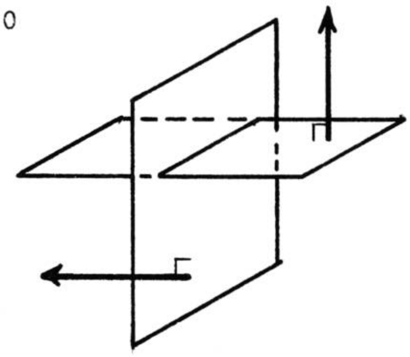
los planos son paralelos;

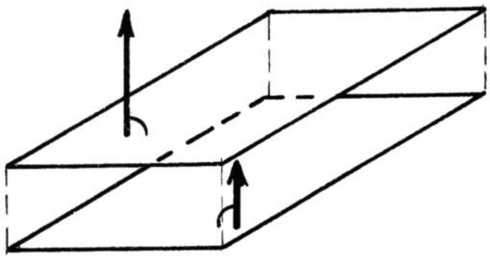
si $(A, B, C) \cdot (A', B', C') = 0$ los planos son perpendiculares.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_oP} = 0$$

$$\vec{m} \cdot \overrightarrow{Q_oQ} = 0$$

paralelos si $\vec{n} = k\vec{m}$, perpendiculares $\vec{n} \cdot \vec{m} = 0$





Si los planos no son perpendiculares a alguno de los planos xy,yz ó xz, o sea si

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1$$

son paralelos si $a = ka'$

$b = kb'$

$c = kc'$

perpendiculares si

$$\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) \cdot \left(\frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}, \frac{1}{c'}\right) = 0$$

$$\frac{1}{aa'} + \frac{1}{bb'} + \frac{1}{cc'} = 0$$

$$\frac{bb'cc' + aa'bb' + cc'aa'}{aa'bb'cc'} :$$

Si $aa'bb' + aa'cc' + bb'cc' :$

15.- Encuentre la ecuación del plano determinado por las rectas

$$\begin{aligned} x + 1 &= 4t \\ y - 3 &= t \\ z - 1 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} x + 13 &= 12S \\ y - 1 &= 6S \\ z - 2 &= 3S \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

El plano debe incluir al punto de intersección de las rectas

$$x_0 = 4t_0 - 1 = 12S_0 - 13$$

$$y_0 = t_0 + 3 = 6S_0 + 1$$

$$z_0 = 1 \qquad = 3S_0 + 2$$

$$3S_0 = 1 - 2 = -1$$

$$S_0 = -\frac{1}{3}$$

$$x_0 = 12(-\frac{1}{3}) - 13 = -4 - 13 = -17$$

$$y_0 = 6(-\frac{1}{3}) + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$z_0 = 1$$

$$P_0 = (-17, -1, 1)$$

Comprobación:

$$t_0 + 3 = -1$$

$$t_0 = -1 - 3 = -4$$

$$x_0 = 4(t_0) - 1 = -16 - 1 = -17$$

La ecuación del plano es

$P = P_0 + t\underline{u} + s\underline{v}$ con $\underline{u}$ y $\underline{v}$ los vectores que determinan las rectas o sea $\underline{u} = (4, 1, 0)$ y $\underline{v} = (12, 6, 3)$

$$P = (-17, -1, 1) + t(4, 1, 0) + S(12, 6, 3)$$

$$(x, y, z) = (-17, -1, 1) + t(4, 1, 0) + S(12, 6, 3)$$

$$(x, y, z) = (-17 + 4t + 12S, -1 + t + 6S, 1 + 3S)$$

Si hubiéramos seguido el procedimiento del libro el resultado sería $x - 4y + 4z + 9 = 0$. Chequemos que representan al mismo lugar geométrico

$$-17 + 4t + 12S - 4(-1 + t + 6S) + 4(1 + 3S) + 9 =$$

$$= -17 + 4t + 12S - 4 - 4t - 24S + 4 + 12S + 4 + 12S + 9$$

$$= -17 + 4 + 4 + 9 + 4t - 4t + 12S - 24S + 12S = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

16.- Determine los puntos de intersección de la recta P con los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$

SOLUCIÓN

$$P = (2, 1, 7) + t(0, 6, 4) = (x, y, z)$$

Cuando $x = 0$, no importa que t se tome, no dará el resultado.

Por tanto no cruza al plano yz.

Cuando $y = 0$, $t = -\frac{1}{6}$

$$P = (2, 1, 7) - \frac{1}{6}(0, 6, 4)$$

$$= (2, 1, 7) - (0, +1, \frac{4}{6})$$

$$= (2, 0, 7 - \frac{2}{3}) = (2, 0, 6\ 1/3)$$

punto de intersección con el plano xz.

Cuando $z = 0$ $\quad t = -\frac{7}{4}$, $\quad P = (2, 1, 7) + (-\frac{7}{4})(0, 6, 4)$

$$= (2, 1, 7) - (0, \frac{-42}{4}, 7)$$

$$= (2, -\frac{38}{4}, 0)$$ que es la intersección con el plano xy.

17.- Encuentre la longitud de la perpendicular del origen al plano -------- $2x - 4y + z - 8 = 0$

SOLUCIÓN

Un vector perpendicular al plano es el $(2, -4, 1)$. La recta que pasa por el origen y tiene esta dirección es $P = t(1, -4, 1)$. Corta al plano con una t tal que $2(2t) - 4(-4t) + t - 8 = 21t - 8 = 0$

Para $t = \frac{8}{21}$; $OP = \overline{P} = (\frac{16}{21}, \frac{-32}{21}, \frac{8}{21})$ y $\overline{OP} = \sqrt{\frac{256 + 1024 + 64}{441}} =$

$$= \sqrt{\frac{1344}{441}} = \sqrt{\frac{21 \times 64}{21 \times 21}} =$$

$$= 8\sqrt{\frac{1}{21}}$$

EJERCICIOS A RESOLVER

1.- Los vectores que se dan a continuación expresarlos en la forma (a_1, a_2):

i) El vector de magnitud 6 y dirección $\frac{3}{2}\Pi$ rad

ii) El vector de magnitud 8 y dirección $\frac{5}{4}\Pi$ rad

iii) El vector de magnitud 4 y dirección 330°

iv) El vector de magnitud 6 y dirección 30°

2.- De los siguientes vectores dar su norma y dirección. Dibujar los vectores en un mismo sistema de referencia.

$\vec{a} = (3, 4)$ $\vec{b} = (-3, 4)$ $\vec{c} = (-4, -6)$ $\vec{d} = (3, 5)$

3.- i) Si $\vec{u} = (-2, 1, -4)$; $\vec{v} = (3, 4, 5)$ obtenga w tal que

$$\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} - \vec{w}$$

ii) Calcula $||3\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}||$

4.- Obtenga un vector $\vec{a}$ con $||\vec{a}|| = 5$ y que tenga la misma dirección que $\vec{b} = (2, 1, -1)$

5.- Determine un vector que tenga su punto inicial en P(2, 1, 4) y que ten_ga la misma dirección que $\vec{v} = (7, 6, 3)$

6.- Determine un vector con dirección contraria a la de $\vec{v} = (2, 4, -1)$ y con punto terminal en Q(2, 0, 7)

7.- Sean A(2, 3, 2) y Q(7, 4, -1)

a) Encuentre el punto medio del segmento de recta que une a P con Q.

b) Encuentre el punto que está en el segmento de recta que une a P con Q y que está a 3/4 de la distancia de P a Q.

8.- Determine todos los escalares k tales que $||k\,\vec{v}|| = 1$, donde $\vec{v}=(1,2,3)$

9.- Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ cuatro vectores distintos y diferentes de cero en R^2 ó R^3 tales que sus puntos iniciales coincidan. Demuestre que si

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d}$$

entonces los puntos terminales son los vértices de un paralelogramo.

10.- Determine si el ángulo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es agudo, obtuso, o si los vectores son ortogonales.

i) $\vec{a} = (7, 3, 5)$ $\quad \vec{b} = (8, 4, -2)$

ii) $\vec{a} = (1, 1, -1)$ $\quad \vec{b} = (0, 1, -0)$

iii) $\vec{a} = (5, 1, 3)$ $\quad \vec{b} = (2, 0, -3)$

iv) $\vec{a} = (2, 1, 4)$ $\quad \vec{b} = (0, 2, 1)$

11.- Se dan los puntos P(1, 2, -1); Q(-1, -1, 1)

i) Determinar el vector $\overrightarrow{PQ}$

ii) Dar un vector unitario en la misma dirección de $\overrightarrow{QP}$

iii) Probar que $\overrightarrow{PQ}$ y (1, 0, 1) son ortogonales

12.- Encuentre la proyección ortogonal de $\vec{a}$ sobre $\vec{a} - \vec{b}$ si

i) $\vec{a} = (2, 1, -1)$ $\vec{b} = (-1, 0, 1)$

ii) $\vec{a} = (1, 0, 1)$ $\vec{b} = (2, 1, 4)$

13.- Un vector unitario, tiene sus tres ángulos directores iguales, y este ángulo Θ cumple con $0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}$. ¿ Cuál es el vector ?

14.- Dar un vector de magnitud 10 con dirección idéntica al vector anterior.

15.- ¿ Existe un vector unitario que tenga ángulos directores $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$?. justifica tu respuesta.

16.- Muestra que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

17.- Prueba que los puntos A(3, 2, -1); B(4, 1, 6); C(7, -2, 3) y D(8, -3, 1) son vértices de un paralelogramo.

18.- Dados A(1, 1, 0); B(-2, b_2, 1) encontrar b_2 tal que el ángulo $\sphericalangle$ AOB = 150°.

19.- Determinar el ángulo formado por la diagonal de un cubo y la diagonal de una de sus caras.

20.- Sean $\vec{u} = (3, -2, 6)$ $\vec{v} = (-2, 1, 0)$

i) Calcula la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{u} + \vec{v}$

ii) Calcula la componente de $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v}$

iii) Calcula el ángulo que hay entre $\vec{u}$ y $(\vec{u} - \vec{v})$

21.- Dados $\vec{u} = (3, -2, 1)$; $\vec{v} = (4, 3, 2)$; $\vec{w} = (1, 5, 1)$ Hallar

i) La proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $(\vec{v} + \vec{w})$

ii) La componente de $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v} \times \vec{w}$

iii) Un escalar α tal que $||\alpha(\vec{u} + \vec{v})|| = ||\vec{w}||$

iv) El volúmen del paralelepipedo formado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

22.- Dar el área del ΔPQR con: $P(0, 2, 2)$; $Q(4, 4, 1)$; $R(3, 4, 3)$
GRAFICA EL TRIANGULO.

23.- Sea $\vec{u} = (1, -2, 3)$ y $\vec{v} = (-3p, p^2, 3)$. Determinar el valor de p de tal manera que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales.

24.- Dar dos vectores ortogonales y unitarios a los vectores:

$$\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + k \quad ; \quad \vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3k$$

25.- Dados los vectores $\vec{u} = (1, -2, 3)$; $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ encontrar tres vectores ortogonales a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

26.- Muestre que el vector $\vec{a} = (a, b)$ es ortogonal a la recta ----------- $ax + by + c = 0$

27.- Sea ℓ una recta de ecuación $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$. Hallar $t_1 \varepsilon R$ tal que $\vec{x}$ sea ortogonal a $\vec{v}$.

28.- Determine la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos

$P(5, -1, 4)$ y $Q(6, 2, 5)$

29.- Determine las ecuaciones de un par de planos cuya intersección es la recta dada por:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= -2 + 3t \qquad t \varepsilon R \\ z &= 5 - t \end{aligned}$$

30.- Determine las ecuaciones del plano xy, del plano xz y del plano yz

31.- Demuestre que la recta

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= t \qquad t \varepsilon R \\ z &= t \end{aligned}$$

a) Pertenece al plano $6x + 4y - 4z = 0$

b) Es paralela al plano $5x - 3y + 3z - 1 = 0$

32.- Encuentre el punto de intersección de la recta

$$\begin{aligned} x &= 4 + 5t \\ y &= -2 + t \qquad t \varepsilon R \\ x &= 4 - t \end{aligned}$$

y el plano $3x - y + 7z + 8 = 0$

33.- Demuestre que la recta

$$x = 4 + 2t$$
$$u = -t \qquad\qquad t\varepsilon R$$
$$z = -1 - 4t$$

es paralela al plano $3x + 2y + z - 7 = 0$

34.- Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2, -4, 5)$ y es paralelo al plano $5x - 2y - z + 9 = 0$.

35.- Demuestre que los puntos $(3, -4, 2)$ y $(-5, 6, 3)$ pertenecen a la recta determinada por los planos $x + 8z = 19$, $y = 10z - 24$

36.- Si una recta hace ángulos de 60°, 45° y 60° con los ejes x, y, z y pa_ sa por el punto $(1, -3, 2)$ demostrar que la ecuación de la línea es $x - 1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\ y+3 = z-2$

37.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-1, 2, -3)$, que es perpendicular al plano $3x+2y+5z = 0$ y paralelo a la recta

$$4x - 3y + 2z = 7$$
$$5x + 2y + 3z = 6$$

38.- Sean $A(-3, 1, 7)$; $B(8, 1, 7)$. Encontrar todos los $C(C_1, C_2, C_3)$ tal que $\overline{AC} \mid \overline{AB}$

39.- Se da el plano $3x - y + 7z + 8 = 0$, encontrar la ecuación paramétrica de una recta contenida en el plano.

40.- Da la ecuación del plano que contiene al eje "x" y al punto $(2, -1, 1)$.

41.- Hallar la ecuación del plano que es ortogonal a los planos ---------- $3x - 2y + z - 1 = 0$ $2x + 3y - 5z + 4 = 0$ y que contiene al punto $(1, 1, 2)$.

42.- Muestra que los vectores dados están en un mismo plano y encuentra la ecuación del plano. Los vectores son:

$$\vec{a} = (1, -2, 1);\ \vec{b} = (3, 2, -3);\ \vec{c} = (9, -2, -3)$$

43.- Dar la ecuación del plano que contiene al punto $(1, 2, -1)$ y a la recta $\vec{x} = (1, 2, 3) + t(-1, 4, 3)$

44.- Determinar el plano que es paralelo al plano $5x - 2y + z - 9 = 0$ y que pasa por la intersección de las rectas:

$$\begin{aligned} x + 1 &= 4 - t \qquad & x + 13 &= 12t \\ y - 3 &= t & y - 1 &= 6t \\ z - 1 &= 0 & z - 2 &= 3t \end{aligned}$$

RELACIONA CORRECTAMENTE LAS COLUMNAS DADAS, ESCRIBE EN LOS PARENTESIS LA LETRA CORRESPONDIENTE.

A).-	La intersección de los planos $y = 0$; $z = 0$	( )	$z = 3$
B).-	La segunda coordenada del punto A	( )	$(-1, 4, 1)$
C).-	Un punto arbitrario del plano $y = 4$	( )	$(-1, 1, 0)$
D).-	Las coordenadas del punto Q	( )	El eje x's
E).-	El orígen	( )	$x=1$; $y=1$; $z=t$
F).-	El plano determinado por los ejes x, y	( )	a_2
G).-	La tercera coordenada de la normal al plano de ecuación $-x + 2y + 3z + 1 = 0$	( )	$z = 0$
H).-	La intersección del plano $z = 0$ y la línea $x = -1$; $y = 1$; $z = t$	( )	$x=1$; $y=-1$; $z=2+t$
I).-	La línea perpendicular a el plano $z = -2$ en el punto $(1, 1, -2)$	( )	$(0, 0, 0)$
J).-	La línea que pasa por el punto $(1, -1, 2)$ en la dirección del vector $-\vec{k}$.	( )	(q_1, q_2, q_3)

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

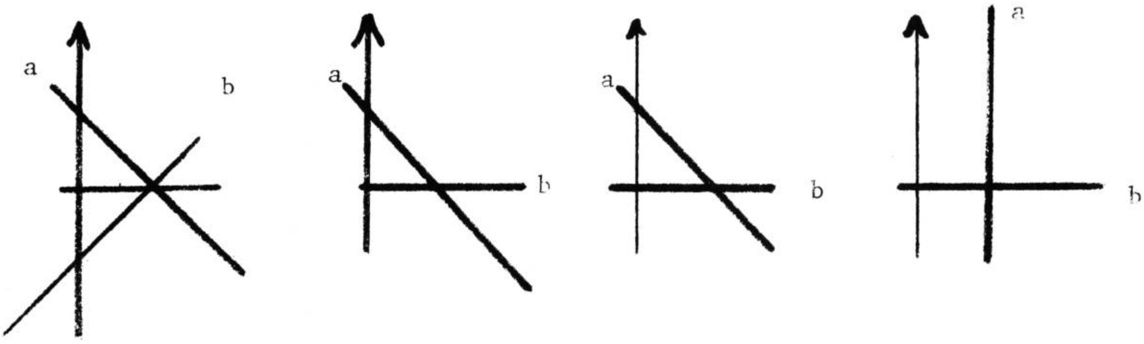
1.- Resuelva las siguientes sistemas de ecuaciones mediante el método de Gauss-Jordan e interprételo geométricamente

I

(a) $x + y = 2$

(b) $x - y = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

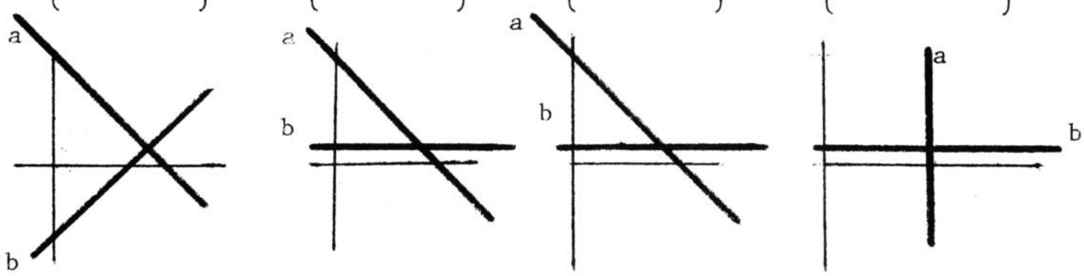


II

(a) $x + y = 3$

(b) $x - y = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & .5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2.5 \\ 0 & 1 & .5 \end{pmatrix}$$



Análogamente para sistemas de 3 ó más ecuaciones, que si tienen solu_ ción única el método busca y encuentra planos (o hiperplanos) de la for_ ma x_i = cte que se cortan en el punto solución.

2.- Dado el sistema

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

$$a_3x + b_3y = c_3$$

Si $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. ¿ Qué se puede decir acerca de él ?

SOLUCIÓN:

El sistema es consistente ya que se trata de un sistema homogéneo que tiene al menos la solución trivial, es decir $x = 0$, $y = 0$

Si el sistema tuviese infinidad de soluciones, entonces se tendría que:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{y} \quad \frac{a_2}{a_3} = \frac{b_2}{b_3} \quad \text{ó} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

Es decir, los coeficientes de las variables son proporcionales. Por lo que se trata en realidad de una sola ecuación. Supongamos que ésta es:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

Entonces, todas las soluciones del sistema están contenidas en la recta que tiene por ecuación

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x \quad .$$

3.- Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= a \\ x + \phantom{y+{}} z &= b \\ 2x + y + 3z &= c \end{aligned}$$

Demuestre que para que este sistema sea consistente, a, b, c deben satisfacer la ecuación $c = a + b$.

DEMOSTRACIÓN:

Usemos el método de Gauss para resolverlo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -1 & b-a \\ 0 & -1 & -1 & c-2a \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & -1 & -1 & c-2a \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & -a-b+c \end{array}\right]$$

Entonces, para que este sistema sea consistente se debe tener que:

$$-(a + b) + c = 0$$

Esto es:

$$c = a + b$$

4.- Sea el sistema de ecuaciones

$$ax + by = 0$$
$$cx + dy = 0$$

(a) Demuestre que si $x = x_0$, $y = y_0$ es cualquier solución y k es una constante, entonces $x = kx_0$, $y = ky_0$ también es solución.

(b) Demuestre que si $x = x_0$, $y = y_0$ y $x_1 = x$, $y = y_1$ son dos soluciones cualesquiera, entonces $x = x_0 + x_1$, $y = y_0 + y_1$ también es solución.

Solución de (a).

Si $x = x_0$, $y = y_0$ es cualquier solución del sistema, entonces lo satisface, es decir

$$ax_0 + by_0 = 0$$
$$cx_0 + dy_0 = 0$$

Ahora bien, queremos demostrar que $x = kx_0$, $y = ky_0$ también es solución, es decir, que satisface al sistema.
Veamos

$$a(kx_0) + b(ky_0) = k(ax_0 + by_0) = k(0) = 0$$
$$c(kx_0) + d(ky_0) = k(cx_0 + dy_0) = k(0) = 0$$

Por tanto $x = kx_0$, $y = ky_0$ es solución.

Solución de (b)

Como $x = x_0$, $y = y_0$ y $x = x_1$, $y = y_1$ son soluciones, se tiene que:

$$I \quad \begin{cases} ax_0 + by_0 = 0 \\ cx_0 + dy_0 = 0 \end{cases} \quad y \; II \quad \begin{cases} ax_1 + by_1 = 0 \\ cx_1 + dy_1 = 0 \end{cases}$$

Ahora, sumando las ecuaciones de los sistemas I y II, tendremos:

$$a(x_0 + x\ ) + b(y_0 + y_1) = 0$$

$$c(x_0 + x\ ) + d(y_0 + y_1) = 0$$

Entonces, $x = x_0 + x_1$, $y = y_0 + y_1$ también es solución.

5.- Si las ecuaciones de dos rectas son $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C = 0$ determine condiciones de paralelismo, perpendicularidad, coincidencia e intersección en uno y sólo un punto.

SOLUCIÓN:

Paralelismo: La pendiente debe ser la misma pero

$$Ax + By + C = 0 \Longrightarrow y = \frac{Ax - C}{B} = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

y $\qquad y = mx + B$

la pendiente $m = -\dfrac{A}{B}$

son paralelas si $-\dfrac{A}{B} = -\dfrac{A'}{B'} \Longleftrightarrow \dfrac{A}{B} = \dfrac{A'}{B'}$

Perpendicularidad: $\iff m \cdot m' = -1$

es decir $\iff (-\frac{A}{B})(-\frac{A'}{B'}) = -1$

$$\frac{A}{B} = -\frac{B'}{A'} \qquad AA' + BB' = 0$$

NOTA: Esta última fórmula es también una consecuencia inmediata de la definición del producto interior de los vectores que representan a las direcciones de las rectas.

Coincidencia:

Si $\quad y = -(\frac{A}{B})\,x - \frac{C}{B} = -\frac{A'}{B'}\,x - \frac{C'}{B'}$

$\iff \quad +\frac{A}{B} = +\frac{A'}{B'} \quad$ y $\quad \frac{C}{B} = \frac{C'}{B'}$

ó sea $\quad \frac{A}{B'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = k \qquad A = kA',\ B = kB',\ C = kC'.$

Intersección en un solo punto: Si el sistema tiene solución única

$$Ax + By + C = 0$$
$$A'x + B'y + C' = 0$$

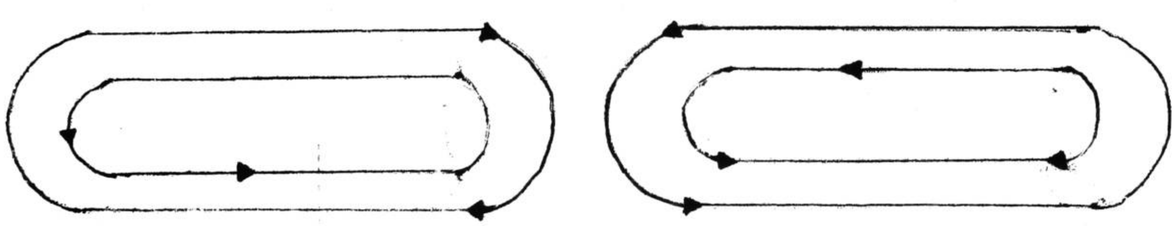
$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} AA' & BA' & CA' \\ A'A & B'A & C'A \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} AA' & BA' & CA' \\ 0 & B'A-BA' & C'A-CA' \end{bmatrix}$$

y tiene solución única si $B'A - BA' \neq 0$

NOTA: Los casos anteriores son los únicos posibles desde un punto de vista geométrico. Por otro lado la (o las) soluciones de un sistema de ecuaciones lineales son los puntos que se encuentran en ambas rectas. Si son paralelas, no hay punto de intersección es decir, no hay solución; si coinciden hay un número infinito, todos los puntos de la recta y si se cortan en un punto, sólo hay una solución.

6.- Dos ciclistas corren en el mismo circuito cerrado de 1 Km de longitud. Se cruzan cada 18 seg. cuando tienen direcciones opuestas y se cruzan cada 90 seg. cuando llevan la misma dirección.
¿ Qué velocidades (constantes) llevan cada uno de ellos ?

RESPUESTA:



En la 1ª. gráfica, los ciclistas van en sentido contrario. La distancia recorrida es $18 \cdot V_1$ y $18 \cdot V_2$. Entre los dos cilcistas han cubierto el circuito completo. Por tanto

$$18V_1 + 18V_2 = 1 \text{ Km.}$$

En la segunda gráfica los ciclistas van en el mismo sentido y la distancia recorrida por el segundo es $90.V$ y es una vuelta más que lo recorrido por el primero. Por tanto

$$90V_2 = 1\text{ Km} + 90.V_1$$

$$90V_1 - 90V_2 = -1\text{ Km}$$

$$\begin{pmatrix} 90 & -90 & -1 \\ 18 & 18 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 90 & -90 & -1 \\ -90 & -90 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 90 & -90 & -1 \\ 0 & -180 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 90 & 0 & 2 \\ 0 & 90 & 3 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \frac{3}{90} = \frac{6}{180}\frac{\text{Km}}{\text{seg}} = \frac{6,000}{180}\ \frac{\text{m}}{\text{seg}} = 33.33\ \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

$$V_1 = \frac{2}{90}\frac{\text{Km}}{\text{seg}} = \frac{2,000}{90} = 22.22\ \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

- Suponga que $\vec{u} = (1, 1, 1)$ $\vec{v} = (-1, 3, 2)$ $\vec{w} = (2, -1, 1)$.

Si $\vec{a} = (3, -4, 9)$ halle números x, y, z tales que

$\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$

$3 = x - y + 2z$

$-4 = x + 3y - z$

$9 = x + 2y - z$

Se resuelve en la forma usual

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & -7 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 12 & -9 & -21 \\ 0 & 12 & -12 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 12 & -9 & -21 \\ 0 & 0 & -3 & 45 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 12 & 0 & -156 \\ 0 & 0 & -3 & 45 \end{pmatrix}$$ Despejando $z = -15$

$$y = \frac{-156}{12} = -13$$

y $\quad x = 20 \qquad a = 20\vec{u} - 13\vec{v} - 15\vec{w}$

8.- Sean $\vec{x} = (1, 2, 3)$; $\vec{y} = (-1, 2, 3)$; $\vec{z} = (-1, 6, 9)$

Encontrar $a, b, c \in R$ tal que

$$a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = (1, 1, 0)$$

SOLUCIÓN:

De manera análoga al ejercicio anterior se puede proceder

$a(1, 2, 3) + b(-1, 2, 3) + c(-1, 6, 9) = (1, 1, 0)$

$(a, 2a, 3a) + (-b, 2b, 3b) + (-c, 6c, 9c) = (1, 1, 0)$

$(a - b - c, 2a + 2b + 6c, 3a + 3b + 9c) = (1, 1, 0)$

$a - b - c = 1$

$2a + 2b + 6c = 1$

$3a + 3b + 9c = 0$

Resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 9 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 6 & 12 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

El sistema <u>no</u> <u>tiene</u> <u>solución</u>, luego no existen $a, b, c \in R$ tales que $a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = (1, 1, 0)$

9.- Hallar a, b, $c \in \mathbb{R}$ que cumple con:

$a(1, -1, 0) + b(1, 1, 1) + c(2, 0, 1) = (3, 1, 2)$

SOLUCIÓN:

Haciendo el producto de un escalar por un vector

$(a, -a, 0) + (b, b, b) + (2c, 0, c) = (3, 1, 2)$ sumando los vectores

$(a + b + 2c, -a + b, b + c) = (3, 1, 2)$ Como dos vectores son iguales si y sólo si son iguales componente a componente se tiene el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} a + b + 2c &= 3 \\ -a + b \quad &= 1 \\ b + c &= 2 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema por el método de reducción de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a + 2c &= 1 \\ b + c &= 2 \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} a &= 1 - 2c \\ b &= 2 - c \end{aligned}$$

luego el sistema tiene una <u>infinidad de soluciones</u>

Así existen una infinidad de valores que satisfacen la igualdad dada y que son

$$\begin{aligned} a &= 1 - 2t \\ b &= 2 - t \\ c &= t \qquad \text{con } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

10.- Hallar el valor de a para que el sistema de ecuaciones que se da:

i) tenga solución

ii) no tenga solución

iii) tenga más de una solución.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 8$$
$$2x_1 + 3x_2 + (a^2 - 7)x_3 = a + 4$$

SOLUCIÓN:

Resolviendo el sistema de ecuaciones por el método de reducción de ---- Gauss se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & a-7 & a+4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & a^2-9 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & a^2-9 & a \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & a^2-9 & a-3 \end{pmatrix}$$

Puesto que en la posición 33 de la matríz aumentada se requiere tener un 1, es necesario dividir entre a^2-9. Para poder efectuar tal operación a^2-9 debe ser distinto de cero. Luego si $a^2-9 = 0$ entonces $a = 3$ ó $a = -3$

Si $a = 3$ entonces la matriz queda como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces hay una infinidad de soluciones

Si $a = -3$ la matríz queda como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$ El sistema no tendrá solución

Si $a \neq \pm 3$ entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-3}{a^2-9} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \underline{2} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+3} \end{pmatrix}$$

De donde el sistema tendrá solución única.

Resumiendo:

i) Para $a = 3$ el sistema tiene infinidad de soluciones.

ii) Para $a = -3$ el sistema no tiene solución

iii) Para $a \neq \pm 3$ el sistema tiene solución única.

11.- Prueba que la ecuación del plano que pasa por el origen y la línea de intersección de los planos:

$$\begin{matrix} 3x - y + 2z - 4 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{matrix} \qquad \text{es el plano} \quad x + 5y + 2z = 0$$

DEMOSTRACIÓN:

1er. método. Encontrar la recta intersección

$$\begin{matrix} 3x - y + 2z - 4 = 0 \\ 3x + 3y + 3z - 3 = 0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & +2 & -4 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{-15}{4} \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$3x = -\frac{9}{4} z + \frac{15}{4} = -\frac{9}{4} t + \frac{15}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4} z - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} t - \frac{1}{4}$$

Dando valores a t por ejem. $t = 0$ $\quad x = \frac{15}{3.4} = \frac{5}{4}$

$y = -1/4$

$z = 0 \quad , \quad P(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, 0)$

$t = 1 \qquad x = -\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad y = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad z = 1 \quad Q(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$

Por tanto una normal al plano que definen el origen 0, P y Q es:

$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \vec{P} \times \vec{Q} = (\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, 0) \times (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}\,(-\frac{1}{4}) - j(\frac{5}{4}) + k((\frac{5}{4})(-\frac{1}{2})-(\frac{1}{2})(-\frac{1}{4}))$$

$= -\frac{1}{4}\,\hat{i} - \frac{5}{4}\,\hat{j} - \frac{1}{2}\,\hat{k}$. De aquí un vector normal es $(1, 5, 2)$

La forma punto normal, pasando por $0(0, 0, 0)$ es $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PP_0} = \vec{n}\cdot\vec{P} = (1,5,2)\cdot$ $\cdot(x, y, z) = x + 5y + 2z = 0$.

2º Método. Un plano que se obtenga como combinación (suma y multiplicación por un número real) de los dos dados tendrá la misma recta solución como intersección con ellos, por tanto si queremos obtener un plano que pase por esta recta y por el origen basta eliminar el término constante.

Multiplicando por 4 la segunda ecuación y restándole la primera

$$\begin{array}{r} 3x - y + 2z - 4 = 0 \\ \underline{4x + 4y + 4z - 4 = 0} \\ x + 5y + 2z = 0 \end{array}$$

12.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones, usando el método de Gauss.

$$\begin{aligned} x - 2y + z - 4w &= 1 \\ x - 3y + 7z - 2w &= -1 \\ x - 12y - 11z - w &= 2 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & -2 & -1 \\ 1 & -12 & -11 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & -10 & -12 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 10 & 12 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & -\frac{3}{10} & -1/10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1/3 \end{array}\right]$$

De este último arreglo matricial se tiene que un sistema equivalente al original es:

$$\begin{aligned} x - 2y + z - 4w &= 1 \\ y + \frac{6}{5} z - \frac{3}{10} w &= -\frac{1}{10} \\ z + \frac{1}{3} w &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por lo que:

$$z = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} w$$

$$y = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} w$$

$$x = \frac{29}{15} + \frac{86}{15} w$$

Finalmente, si $w = t$, $t \in R$, entonces tendremos que la solución final queda

$$x = \frac{29}{15} + \frac{86}{15} t$$

$$y = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} t$$

$$z = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} t$$

$$w = t$$

Note que el sistema anterior tiene infinidad de soluciones.

13.- Si un sistema de ecuaciones lineales, tiene más incógnitas que ecuaciones. ¿ El sistema siempre es consistente ?

SOLUCIÓN:

La respuesta es NO. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} x + y + z - w &= 1 \\ -x + y - z + w &= 2 \\ x + 3y + z - w &= 0 \end{aligned}$$

Usando el método de Gauss

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

El sistema equivalente al inicial es

$$\begin{aligned} x + y + z - w &= 1 \\ y &= 3/2 \\ 0x + 0y + 0z + 0w &= -4 \end{aligned}$$

Pero la última ecuación es imposible, pues no existen números x,y,z,w que la satisfagan.

14.- Encontrar para que valores de <u>a</u> el sistema

$$
\begin{aligned}
x_1 + \quad a x_2 + \quad 2x_3 &= 2\\
2x_1 + (3a-1)\, x_2 + \quad 4x_3 &= 7\\
x_1 + \quad a x_2 + (a^2+1)\, x_3 &= a+1
\end{aligned}
$$

a) tiene solución única

b) no tiene solución

c) tiene infinidad de soluciones

SOLUCIÓN:

Usemos el método de Gauss para resolverlo

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 2 \\ 2 & 3a-1 & 4 & 7 \\ 1 & a & a^2+1 & a+1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 \end{array}\right]
$$

El sistema es consistente si $a^2-1 \neq 0$, es decir $a \neq \pm 1$
y será inconsistente si $a^2-1 = 0$, es decir $a = \pm 1$.

Entonces:

a) El sistema tiene solución única si $a \neq \pm 1$

b) No tiene solución si $a = \pm 1$

c) No hay ningún valor de a para el cual, el sistema tenga infinidad de soluciones.

15.- ¿ Qué condición deben satisfacer h_1, h_2, h_3 para que el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= h_1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= h_2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= h_3 \end{aligned}$$

sea consistente ?

SOLUCIÓN:

Usemos el método de Gauss para resolverlo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & h_1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & h_2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & h_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & h_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & h_2-h_1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & h_3-2h_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & h_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & h_2-h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_3+h_2-3h_1 \end{array}\right]$$

Entonces, para que el sistema sea consistente se debe tener que:

$$h_3 + h_2 - 3h_1 = 0 \qquad \text{ó}$$

$$h_1 = \frac{1}{3}(h_3 + h_2)$$

16.- Balancée la siguiente reacción química:

$$NHCl_2 + NH_3 \longrightarrow N_2 + NH_4Cl$$

SOLUCIÓN:

Balancear una reacción quiere decir encontrar números A, B, C, D tal que haya el mismo número de átomos de cada lado de la reacción para cada uno de los elementos

$$ANHCl_2 + BNH_3 \longrightarrow CN_2 + DNH_4Cl$$

Para el nitrógeno N: $1 \cdot A + 1 \cdot B = 2C + 1 \cdot D$

hidrógeno H: $1 \cdot A + 3\,B = 0 \cdot C + 4 \cdot D$

cloro Cl: $2 \cdot A + 0 \cdot B = 0 \cdot C + 1 \cdot D$

Resolviendo por Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} A + B - 2C - D &= 0 \\ A + 3B - 0 - 4D &= 0 \\ 2A + 0 + 0 - D &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 7/3 \\ 0 & 0 & 4 & -4/3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -7/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{D}{2}$$

$$B = \frac{7}{6} D$$

$$C = \frac{1}{3} D$$

Para que A, B, C resulten enteros es necesario que D sea múltiplo de 2, de 3 y de 6.

Intentemos $D = 6$ entonces $A = 3$

$B = 7$

$C = 2$

$3NHCl_2 + 7NH_3 \Longrightarrow 2N_2 + 6NH_4Cl$ y si tiene las condiciones de balanceo.

17.- En una escuela se desea llevar a cabo un torneo deportivo que abarca tres especialidades: foot-ball, volley-ball y basket-ball. Se cuenta con 155 alumnos, de los cuales 90 serán titulares y los restantes 65 serán reservas por haber obtenido malas calificaciones; además cada alumno sólo se puede dedicar a una especialidad deportiva. El objetivo es encontrar el número de equipos que se pueden formar en cada deporte. Para cada equipo de foot-ball se requieren 11 jugadores titulares y 6 reservas; para cada equipo devolley-ball se necesitan 6 titulares y 6 reservas, y para cada equipo de basket-ball son necesarios 5 titulares y 5 reservas. Encuentre la solución

SOLUCIÓN:

El número de equipos de cada deporte son las incógnitas a resolver

x = # de equipos de foot-ball

y = # de equipos de volley-ball

z = # de equipos de basket-ball

Para los titulares se formula una ecuación y para los reservas, otra

Hay 2 ecuaciones y tres incógnitas

Entonces

$$90 = 11x + 6y + 5z$$
$$65 = 6x + 6y + 5z$$

Resolviendo por Gauss-Jordan, por suma ó resta

$$25 = 5x + 0y + 0z \Longrightarrow x = 5$$

Entonces

$$90 = 11.5 + 6y + 5z = 55 + 6y + 5z$$
$$6y + 5z = 90 - 55 = 35 .$$

De la ecuación de reservas queda la misma ecuación. Tenemos una ecuación con dos incógnitas y, z.

Pero hay una condición extra: El número de equipos debe ser entero y positivo (o cero)

Despejando z, $z = \frac{35-6y}{5}$. Damos valores a y y vemos los que resultan en una z positiva y entera.

Si	$y = 0$	$z = 7$
	$y = 1$	z fraccionaria
	$y = 2$	z "
	$y = 3$	z "
	$y = 4$	z "
	$y = 5$	$z = \frac{5}{5} = 1$

Si $y = 6$ más z negativa

Soluciones posibles $\boxed{x=5 \quad y=0 \quad z=7}$

$x = 5 \qquad y = 5 \qquad z = 1$ se rechaza esta solución ya que si hay un equipo de basquet-ball, no tiene contrincantes con quien jugar.

18.- Determinar la intersección de las rectas cuyas ecuaciones son

$$\vec{u} = (1, -1, -1) + t(2, 3, -1) \qquad t \varepsilon R$$
$$\vec{v} = (-1, 0, 2) + s(-2, 1, 3) \qquad s \varepsilon R$$

<u>SOLUCIÓN:</u>

Queremos hallar los puntos que estén en ambas rectas.

Sabemos: que un punto pertenece a la recta sí y sólo sí sus coordenadas satisfacen la ecuación de la recta, luego un punto estará en ambas rectas si sus coordenadas satisfacen ambas ecuaciones.

Los puntos de las rectas son de la forma:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = (1, -1, -1) + t(2, 3, -1) = (1 + 2t, -1 + 3t, -1, -t)$$
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = (-1, 0, 2) + s(-2, 1, 3) = (-1 \ -2s, s, 2 + 3s)$$

Así, para que un punto esté en ambas rectas debe cumplir con:

$$\begin{array}{lcl} u_1 = v_1 & & 1 + 2t = -1 - 2s \\ u_2 = v_2 & \text{es decir} & -1 + 3t = s \\ u_3 = v_3 & & -1 - t = 2 + 3s \end{array}$$

luego tenemos que encontrar los valores de s y t que satisfacen las tres ecuaciones. Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 2t + 2s &= -2 \\ 3t - s &= 1 \\ -t - 3s &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -10 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$t = 0$$
$$s = -1$$

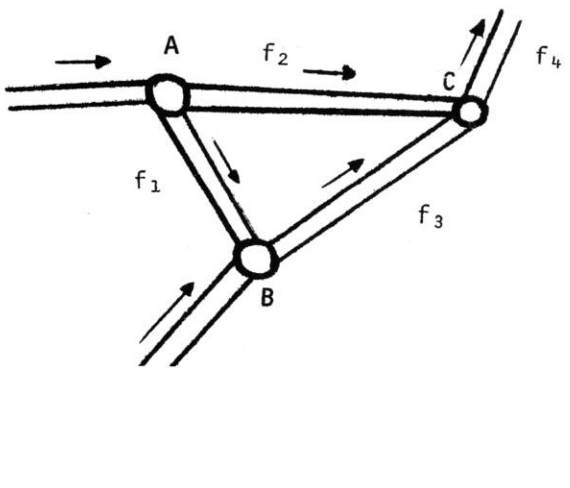
De donde los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ serán iguales cuando $t = 0$ y $s = -1$. Veamos:

$$\vec{u} = (1, -1, -1) + 0(2, 3, -1) = (1, -1, -1)$$

$$\vec{v} = (-1, 0, 2) + (-1)(-2, 1, 3) = (-1, 0, 2) + (2, -1, -3) = (1, -1, -1)$$

Las rectas se intersectan en el punto $(1, -1, -1)$

19.- Una parte de la red hidráulica se muestra en la figura.



El agua de A llega a 40 lt/min, en B a 20 lt/min.

Sean f_1, f_2, f_3, f_4 el flujo de agua a través de los tubos en las direcciones señaladas.

Para que el sistema sea viable es necesario que el agua que entra en un punto de conexión sea la misma que sale en el mismo punto.

i) Escribe la condición que debe satisfacer el flujo en cada punto de conexión.

ii) Muestra que la red hidráulica será posible si $f_4 = 60$ lt/min.

iii) Si $f_4 = 60$ lt/min el sistema tiene una infinidad de soluciones.

SOLUCIÓN:

i) Como en cada punto de conexión el líquido que entra debe ser el mismo que sale se tiene:

Para A: $40 = f_1 + f_2$

Para B: $f_1 + 20 = f_3$

Para C: $f_2 + f_3 = f_4$

ii) De i se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 \quad &= 40 \\ f_1 - f_3 \quad &= -20 \\ f_2 + f_3 - f_4 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -60 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -60 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 60 \end{pmatrix}$$

Si $f_4 = 60$ la red hidráulica es posible

iii) $f_1 = -20 + f_3$; $f_1 = -20 + t$

$f_2 = 60 - f_3$; $f_2 = 60 - t$

$f_4 = 60$; $f_3 = t$

$f_4 = 60$ $\qquad t \in R$

El sistema tiene una infinidad de soluciones .

Matemáticamente para cada número real hay solución, sin embargo físicamente no toda solución es válida. ¿ Puedes determinar que valores de t son físicamente aceptables ?.

20.- Sean $\vec{u} = (-1, 3, 2)$ y $\vec{w} = (1, 1, -1)$. Encuentre todos los vectores $\vec{x}$ que satisfacen $\vec{u} \times \vec{x} = \vec{w}$

SOLUCIÓN:

$\vec{x} = (x, y, z)$

Entonces $\vec{u} \times \vec{x} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}(3z - 2y) - \vec{j}(-z - 2x) + \vec{k}(-y - 3k)$

$= (1, 1, -1)$

$0-2y + 3z = 1$

$2x + 0 + z = 1$

$-3x - y + 0z = -1$

y como ya sabemos resolver sistemas de ecuaciones,

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & +\frac{1}{3} & 0 & +\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & +\frac{1}{3} & 0 & +\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & +\frac{1}{3} & 0 & +\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Longrightarrow z=t \qquad y = \frac{1 - 3t}{-2} = \frac{3t - 1}{2} = y$$

$$x = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{3t - 1}{2}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{3t - 1}{6}$$

$$x = \frac{-2+3t-1}{6} = \frac{t-1}{2} :$$

21.- Una persona decide dedicar 18 hrs. a la semana para su recreación. En alguna semana decide asistir al boliche, al billar y al cine. Si asistir al cine le cuesta 100 pesos la hora, al billar 60 pesos la hora, al boliche 300 pesos la hora y solamente cuenta con 3,000 pesos. ¿ De que forma puede planear su recreación ?.

SOLUCIÓN:

Sea C el número de horas que estará en el cine.
b el número de horas que estará en el billar
B el número de horas que estará en el boliche

La suma de horas debe ser 18 Por lo tanto

$$C + b + B = 18$$

El precio total debe ser 3,000 por lo tanto

$$100C + 60b + 300B = 3,000$$

resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 100 & 60 & 300 & 3000 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 5 & 3 & 15 & 150 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & -2 & 10 & 60 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & -5 & -30 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 48 \\ 0 & 1 & -5 & -30 \end{pmatrix}$$

- - -

$$C + 6B = 48 \qquad\qquad ; \qquad\qquad C = 48 - 6B$$

$$b - 5B = -30 \qquad\qquad\qquad\qquad b = -30 + 5B$$

Si $B = t$ con $t \varepsilon R$

$$C = 48 - 6t$$
$$b = -30 + 5t$$
$$B = t \qquad\qquad t \varepsilon R$$

Como sistema de ecuaciones hay una infinidad de soluciones .
¿ Para la situación que se plantea cuales son aceptables ?

$$5t - 30 \geq 0 \quad ; \quad 5t \geq 30 \quad ; \quad t \geq \frac{30}{5} \qquad\qquad t \geq 6$$

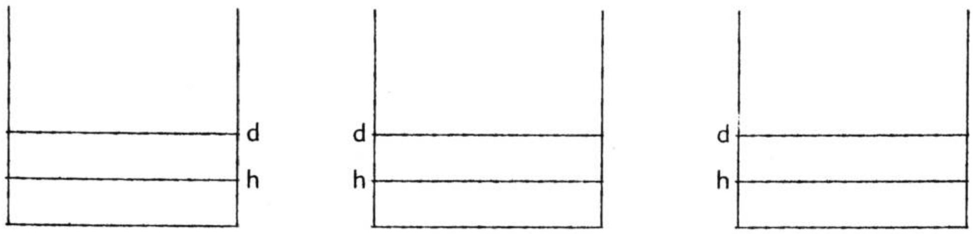
$$48 - 6t \leq 0 \quad ; \quad 48 \leq 6t \quad ; \quad t \leq \frac{48}{6} \qquad\qquad t \leq 8$$

Así t debe de cumplir $6 \leq t \leq 8$

luego podrá ir al boliche entre 6 y 8 horas, a partir de aquí determinará cuánto le queda para ir al billar y al cine.

22.- En un valle ha llovido sin interrupción y con la misma intensidad día y noche, durante 30 días. Al empezar el "norte", tres depósitos abiertos para acumular el agua de lluvia tenían la misma altura de agua en todos ellos. Se sabe que el primer depósito de $60\ m^2$ de superficie ha servido para abastecer a 20 personas durante los 30 días de lluvia, quedando luego vacío; el segundo de $15\ m^2$ ha abastecido a seis personas durante los 20 primeros días de lluvia hasta quedar vacío; ¿ a cuántas personas abastecerá el tercero de $75\ m^2$, que se ha vaciado en 25 días ?. No se debe tomar en cuenta el agua que recojan los depósitos pasado el instante en que su nivel llega a cero.

Al inicio



Supongamos que una persona consume ℓ litros o m^3 de agua diariamente al final los tres depósitos están vacios.

Como el norte tiene la misma intensidad, podemos suponer que diariamente hay un incremento d diario

Entonces del primer depósito se puede plantear la siguiente ecuación

$$60\cdot(h + 30\ d) = 20\cdot\ell\cdot 30$$

del segundo

$$15(h + 20\ d) = 6\cdot\ell\cdot 20$$

Por tanto dividiendo entre ℓ queda $h' = \frac{h}{\ell}$ y $d' = \frac{d}{\ell}$

$$60\cdot h' + 1800\ d' = 20\cdot 30$$

$$15\ h' + 300\ d' = 6\cdot 20$$

Por tanto

$$60h' + 1800\ d' = 20\cdot 30 = 600$$

$$60h' + 1200\ d' = 24\cdot 20 = 480$$

$$600\ d' = 600 - 480 = 120$$

$$d' = \frac{120}{600} = \frac{1}{5}$$

$$15h' + 25\cdot 20\ \frac{1}{5} = 120$$

$15h' = 120 - 60 = 60$

$h' = \frac{60}{15} = 4$

Para la tercera ecuación

$75(h' + 25d') = x \cdot 25$

$3.4 + \frac{75}{5} = 12 + 15 =$

$\boxed{x = 27}$

<u>NOTA</u>: Los siguientes 14 ejercicios bien podemos decir son sólo para curiosos, usualmente no se preguntan en los examenes, pero recomendamos se lean.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN SOBRE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1.- Un contratista al servicio del INFONAVIT y la CTM ha aceptado órdenes para 5 multifamiliares, 7 centros sindicales y 12 tiendas sindicales.

Escriba un vector con 3 componentes que sean el número de cada una de las edificaciones construidas. Suponga que el sabe que un multifamiliar requiere 20 unidades de madera, un centro sindical, 18 unidades de madera y una tienda sindical, 12 unidades.

Escriba un vector columna cuyas componentes den las diversas cantidades de madera necesarias para cada tipo de edificación. Encuentre la cantidad total de unidades de madera necesarias

SOLUCIÓN:

El vector de edificaciones construidas es $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} = V_E$

En el mismo orden, el vector de requerimientos de madera es $\begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix} = V_R$

La cantidad total de unidades se obtiene por producto punto

$V_E \cdot V_R = 5 \times 20 + 7 \times 18 + 12 \times 12 = 100 + 126 + 144 = 370$ unidades de madera.

2.- En la elección de diputados un partido reaccionario contrató a una compañía para promover a sus candidatos en la zona de Satélite y Tlalnepantla de tres modos:

el teléfono, visitas a la casa y por carta. El costo respectivo por contacto era

$$M = \begin{bmatrix} 30 \text{ pesos} \\ 100 \text{ pesos} \\ 20 \text{ pesos} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{teléfono} \\ \text{visita} \\ \text{carta} \end{matrix}$$

El número de contactos de cada tipo hecho en Satélite fue de:

$$\begin{array}{cccc} & \text{Teléfono} & \text{Visita} & \text{Carta} \\ N = & [\ 1{,}000 & 500 & 8{,}000\ ] \end{array}$$

y en Tlalnepantla $N' = [\ 2{,}000 \quad 800 \quad 13{,}000\ ]$

a) Determine la cantidad total gastada en Satélite utilizando el producto punto.

b) Lo mismo para Tlalnepantla.

SOLUCIÓN:

a) El producto punto $M \cdot N$ da el costo total pagado en Satélite, ya que cada entrada de M corresponde al mismo concepto en N.

Por tanto $M \cdot N = 30 \times 1{,}000 + 100 \times 500 + 20 \times 8{,}000 =$
$= 30{,}000 + 50{,}000 + 160{,}000 = 240{,}000$

b) En Tlalnepantla $M \cdot N'$ es el costo pagado

$M \cdot N' = 30 \times 2{,}000 + 100 \times 800 + 20 \times 13{,}000 = 60{,}000 + 80{,}000 +$
$+ 260{,}000 = 400{,}000$

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, exhiba la matríz elemental E tal que

$$EA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Lo que E debe hacer es intercambiar el primer y el tercer renglón. Eso se logra de la matriz identidad intercambiando el primer y el tercer renglón.

i.e. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4.- Si

$$\begin{array}{l} y_1 = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ y_2 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y = x + 3x_2 - x_3 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{l} z_1 = y_1 + \qquad + 2y_3 \\ z_2 = \qquad - y_2 + y_3 \\ z_3 = 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 \end{array}$$

Obtenga a las z's en términos de las x's.

Primer método:

$$z_1 = (2x_1 - 2x_2 + 3x_3) + \qquad\qquad + (2x_1 + 3x_2 - x_3)$$

$$= 4x_1 + 4x_3 + x_3$$

$$z_2 = -(x_1 + x_2 + x_3) \quad + (x_1 + 3x_2 - x_3)$$

$$0 + 2x_2 - 2x_3$$

$$z_3 = 2(2x_1 - 2x_2 + 3x_3)+(x_1 + x_2 + x_3) \quad + 4(x_1 + 3x_2 - x_3)$$

$$11x_1 + 11x_2 + 5x_3$$

Segundo método:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 11 & 11 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 + 4x_2 + x_3 \\ 2x_2 - 2x_3 \\ 11x_1 + 11x_2 + 5x_3 \end{bmatrix}$$

5.- PEMEX opera cuatro refinerías que producen, cada una, tres productos derivados del petróleo. La matríz A enseña el número de unidades de cada producto programado para su producción en cada planta para el si_ guiente mes. Cada producto requiere determinada cantidad de tres tipos de materiales.

La matriz B exhibe las especificaciones para cada producto.

a) Como PEMEX practica una política de compras centralizadas en el D.F., la oficina de compras debe saber la cantidad total de unidades de cada tipo requerido para el próximo mes, así como los requisitos de las refinerías específicas. Use la multiplicación de matrices para resolver el problema de la oficina de compras.

b) Si la matriz exhibe el costo de cada unidad de materia prima requerida, use multiplicación matricial para exhibir el costo total de las materias primas en cada planta.

	Refinería				Producción Programada del Productor
	1	2	3	4	
	1	2	4	0	1
A =	2	3	0	0	m
	4	2	1	5	n

	Materia Prima			Producto
	1	2	3	
	1	1	1	1
B =	1	0	2	m
	1	4	3	n

	Costo Unitario	Materia Prima
	2	1
D =	3	2
	5	3

SOLUCIÓN:

a) Se desea saber la cantidad total de unidades de cada tipo requerido para el próximo mes.

Necesitamos saber cuánto va a producir cada refinería de cada producto y multiplicarlo por lo que requiere la producción de cada unidad y sumar las contribuciones de las diversas refinerías.

$$A'xB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2+4 & 1+0+16 & 1+4+12 \\ 2+3+2 & 2+0+8 & 2+6+6 \\ 4+0+4 & 4+0+4 & 4+0+3 \\ 0+0+5 & 0+0+20 & 0+0+15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 17 & 17 \\ 7 & 10 & 14 \\ 5 & 8 & 7 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}$$

A' exhibe la producción por refinerías de los 3 productos, B exhibe la necesidad de materia prima por producto definido. Analicemos (124).

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1+2+4.$$ El primer 1 indica que se va a producir una unidad del producto 1 en la primera refinería. El segundo 1 indica que para producir una unidad del producto 1 se requiere una unidad de materia prima 1 y se requiere 1 unidad para alcanzar la producción deseada en 1. El 2 significa que se van a producir 2 unidades del producto 2 y el 1 por el que se multiplica indica que se requiere una unidad de la materia prima 1 para producir m, y así con el 4.

Si sumamos da la cantidad del producto 1 que se requiere en la refinería 1 para la manufactura de los tres productos. Y así el resto de la tabla.

La oficina de compras necesita saber que se requieren (24, 55, 53) unidades de las materias primas 1, 2 y 3 respectivamente.

La oficina de distribución de PEMEX necesita toda la matríz.

b) El costo se obtiene al multiplicar la matríz obtenida, cuyos renglones son las diversas materias primas de una sola refinería por la matriz de costos.

$$\begin{bmatrix} 7 & 17 & 7 \\ 7 & 10 & 14 \\ 5 & 8 & 7 \\ 5 & 20 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14+51+35 \\ 14+30+70 \\ 10+24+35 \\ 10+60+75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 114 \\ 69 \\ 145 \end{bmatrix}$$

Esto es lo que tienen que saber los cajeros de la calle Marina Nacional.

6.- ¿Cómo cambia el producto de dos matrices A y B si

a) Los renglones i y j de A se intercambian?

SOLUCIÓN:

Podríamos proceder con un ejemplo A de 2x2 intercambiar sus renglones y luego multiplicar por B .

Multiplicar A y B directamente y ver si se parecen. Luego si todavía tenemos fuerzas seguirle con otros ejemplos 2x3, 3x3, etc. para ver si es cierto lo que hayamos concluído en el ejemplo de 2x2.

Luego, tratar de hacer inducción para n y m.

Hay otro camino más fácil y más general. Sea E_{ij} la matriz elemental que intercambia los renglones, entonces $E_{ij}A$ es la matriz A con sus renglones i y j intercambiados. Pero $(E_{ij}A)B = E_{ij}(AB)$ que es la matríz AB con renglones i y j intercambiados.

b) El renglón j de A es multiplicado por un número c y se le agrega el renglón i.

Análogamente sea $E_{i,i+cj}$ la matríz elemental que al renglón j de I se le multiplica por c y se le suma el renglón i.

Entonces $(E_{i,i+cj}A)B = E_{i,i+cj}(AB)$ o sea que <u>es lo mismo</u> hacer las operaciones en A y luego multiplicar por B, que multiplicar AB y luego efectuar estas operaciones elemental en AB.

7.- Un problema típico que surge en el análisis dimensional es el siguiente. Un fluído en movimiento está descrito por las siguientes variables

V = velocidad

ρ = densidad

D = diámetro

g = gravedad

μ = viscosidad

En términos de la masa, la longitud y el tiempo, las dimensiones de estas cantidades son

V	ρ	D	g	μ
LT^{-1}	ML^{-3}	L	LT^{-2}	$ML^{-1}T^{-1}$

Se desea saber si hay algún modo de formar productos no dimensionales $\underline{V^a \quad \rho^b \quad D^c \quad g^d \quad \mu^e}$, y si es posible, encontrar tantos productos independientes como sea posible.

Es decir sustituyendo dimensiones

Si $(LT^{-1})^a\ (ML^{-3})^b\ L^{\,c}(LT^{-2})^d\ (ML^{-1}T^{-1})^e = M^0L^0T^0$

Deben satisfacer las siguientes tres ecuaciones

de $M : b + e = 0$

de $L : a - 3b + c + d - e = 0$

de $T : - a - 2d - e = 0$

Estas son tres ecuaciones en 5 incógnitas.

Su matriz de coeficiente es:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Hay tres renglones diferentes de cero. Podemos escoger arbitrariamente 2 incógnitas y expresar las tres restantes en término de estas dos. Sin embargo, de examinar esta matriz es claro que no podemos elegir a b y a e arbitrariamente (ya que la matriz obtenida omitiendo la segunda y quinta columnas es una matriz sin inverso ya que tiene un renglón de 0's), pero podemos escoger a d y a c arbitrariamente.

Si ponemos $d = 0$, $e = 1$, y $d = 1$ y $e = 0$ como dos elecciones diferentes, esto resulta en las dos siguientes combinaciones

$$\frac{V\rho D}{\mu} \quad \text{y} \quad \frac{Dg}{V^2}$$

El primero el bien conocido número de Reynolds y el segundo es el inverso del número de Froude.

8.- Calcule a y b sabiendo que

$$a^{2/3}\ b^{-1/4} = 2.122 \qquad \text{I}$$

$$a^{-1/3}\ b^{2/5} = 3.421 \qquad \text{II}$$

SOLUCIÓN:

$$2/3 \log a - (\tfrac{1}{4}) \log b = \log 2.122 = .3267$$

$$-\frac{1}{3} \log a + \frac{2}{5} \log b = \log 3.421 = .5341$$

$$\log\ a = \frac{\begin{vmatrix} .3267 & -.25 \\ .5341 & .40 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} .666 & -.250 \\ -.333 & .400 \end{vmatrix}} = \frac{.13068 + .1335}{.2664 - .083} = \frac{.2641}{.1834} = 1.440$$

$$\log\ b = \frac{\begin{vmatrix} .666 & .3267 \\ -.333 & .5341 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} .666 & -.250 \\ -.333 & .450 \end{vmatrix}} = \frac{0.3557 + 0.1078}{.1834} = \frac{.4635}{.1834} = 2.53$$

$\log\ a = 1.440$ $\qquad$ $\log\ b = 2.53$

$a = 27.542$ $\qquad$ $b = 338.844$

$(27.542)^{2/3} = 9.099$

$(338.844)^{-1/4} = (4.290)^{-1} = .233$

$(9.099)(.233) = 2.120 \simeq 2.122$

La segunda ecuación $(.3314)(10.280) = 3.406 \simeq 3.421$

Este es un ejemplo de linearización de un problema para resolverlo.

9.- Una matriz incidente, es una matriz cuadrada en donde todos sus elementos son cero o uno. Y por conveniencia todos los elementos de la diagonal son cero.

Si existe una relación entre n-objetos entonces se define la matriz de incidencia asociada A como $A_{ij} = 1$ si i está relacionada con j, y $A_{ij} = 0$ en caso contrario.

Se supone que hay cuatro personas y que cada una de ellas se puede comunicar con otra mediante alguna manera entonces la matriz de incidencia será formada mediante

$A_{ij} = 1$ Sí i se puede relacionar con j

$A_{ij} = 0$ Sí i no se puede relacionar con j

Considera la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{12} = 1$ Significa que la persona 1 se puede comunicar con la persona 2.

$a_{32} = 0$ Significa que la persona 3 no se puede comunicar con la persona 2.

Calcula A^2. ¿ Qué significado tienen los elementos de A^2 ?.

SOLUCIÓN:

Recuerda para poder multiplicar dos matrices el número de columnas de la primer matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz del producto. Para obtener el elemento C_{ij} de la matriz producto se "multiplica" la fila i de la primer matriz, por la columna j de la segunda matriz. Esta multiplicación es: El primer elemento de la fila i por el primer elemento de la columna j, más el segundo elemento de la fila i por el segundo elemento de la columna j, etc, etc, etc.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Analicemos un elemento de A^2. Sea A^2_{21}

$$A^2_{21} = A_{21}A_{11} + A_{22}A_{21} + A_{23}A_{31} + A_{24}A_{41}$$

Un producto $A_{2k}A_{k1}$ será igual a 1 si sólo sí la persona 2 puede transmitir a la persona k y la persona k puede transmitir a 1.

Así A^2_{21} da el número de maneras en la que la persona 2 puede transmitir a la persona 1 en dos etapas o en un relevo.

10.- Una relación entre un grupo de personas se llama relación de dominancia sí la matriz de incidencia asociada A, tiene la propiedad de que: $A_{ij} = 1$ sí y sólo sí $A_{ji} = 0$ para toda i y para toda j. Esto es dadas dos personas cualesquiera una de ellas se puede "comunicar" con la otra (la domina)

$$\text{Sea} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de incidencia entre cuatro personas.

Prueba que la persona dos domina (se puede comunicar) con todas las demás en a lo más dos etapas y que a su vez es dominada por todas las demás personas en las mismas dos etapas.

SOLUCIÓN:

Por lo visto en el ejercicio anterior A^2 nos dará el número de formas en las que una persona se comunica con la otra en un relevo por lo tanto hay que calcular A^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El número total de formas de comunicarse en a lo más dos etapas es $A + A^2$.

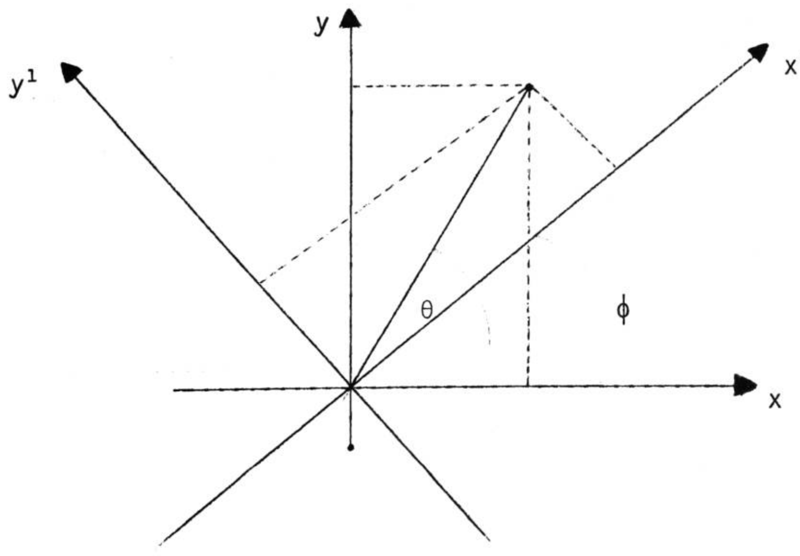
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La persona 2 se puede comunicar con todas las demás en a lo más dos etapas. Ya que la fila dos es 1 0 1 1. También todas las personas se pueden comunicar con la persona 2 en a lo más dos etapas ver columna 2.

11.- Una manera de simplificar ecuaciones cuadráticas es mediante el uso de rotación de ejes. Aquí se va a ver como escribir matricialmente una rotación de ejes. Se considera que todos los puntos del plano están fijos y que los ejes de coordenadas se rotan alrededor del orígen, entonces todos los puntos salvo el orígen tendrán nuevas coordenadas, hallar las nuevas coordenadas de cada punto.

SOLUCIÓN:

Supóngase que ϕ es el ángulo en que se rotan los ejes. Ver figura.



$$x^1 = \Upsilon \cos(\theta - \phi) = \Upsilon(\cos\theta \cos\phi + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi) = \gamma \cos\theta \cos\phi + \Upsilon \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$$

$$y^1 = \Upsilon \operatorname{sen}(\theta - \phi) = \Upsilon(\operatorname{sen}\theta \cos\phi - \cos\theta \operatorname{sen}\phi) = \gamma \operatorname{sen}\theta \cos\phi - \Upsilon \cos\theta \operatorname{sen}\phi$$

Como $x = \Upsilon \cos\theta$; $y = \Upsilon \operatorname{sen}\theta$

$$x^1 = x \cos\phi + y \operatorname{sen}\phi$$

$$y^2 = x \operatorname{sen}\phi + y \cos\phi$$

Que matricialmente se expresa como:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

12.- El concepto de matriz también facilita los cálculos de sistemas de ecuaciones cuando éstos se complican.

Por ejemplo en uno de los circuitos eléctricos, del tipo de los estudiados en los cursos anteriores de física, sabemos que debemos usar dos leyes:

a. Ley de Ohm.-

Voltaje = intensidad · Resistencia

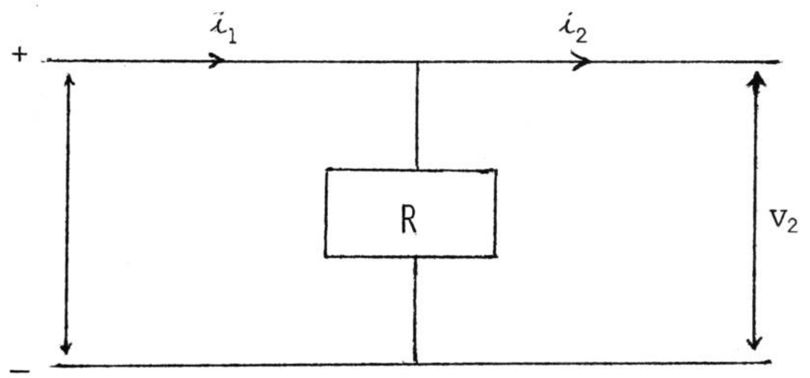
V = I · R

Volts = amperes · ohms

b. Ley de Kirchkoff.-

La suma de las corrientes en un nodo es 0; Σ Ij=0

Por ejemplo



$$i = \frac{V_1}{R} = \frac{V_2}{R} \quad \text{ya que} \quad v_1 = v_2$$

con

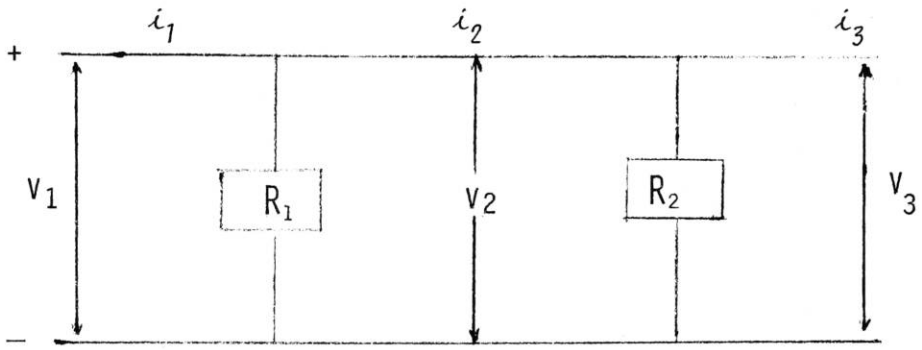
$$i_1 = i_2 + i \quad \therefore \quad i_2 = i_1 - i = i_1 - \frac{V_1}{R}, \quad \text{por tanto}$$

si queremos obtener V_2 e i_2 dados V_1 e i_1

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

Ahora, dadas dos resistencias en paralelo

Compruebe que
$$\begin{bmatrix} V_3 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$



SOLUCIÓN:

Si utilizamos la ley de Kirchkoff
$$i_3 = i_2 - i''$$
$$\text{y} \quad i_2 = i_1 - i'$$
$$\therefore \quad i_3 = i_1 - i' - i''$$

Por la ley de Ohm
$$i'' = \frac{V_2}{R_2}, \qquad i' = \frac{V_1}{R_1} \qquad \therefore \qquad i_3 = i_1 - \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_2}$$

Como se están aplicando una diferencia de potencial a las dos resistencias
$$V_1 = V_2 = V_3$$

En resúmen $\quad V_3 = V_1 \quad$ y $\quad i_3 = i_1 - V_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$

o sea
$$\begin{bmatrix} V_3 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

El resultado que se propone es

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$ sea el sistema de R_2 transformando

la entrada

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ i_2 \end{bmatrix}, \text{ pero } \begin{bmatrix} V_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) V_1 + i_1 \end{bmatrix}$$

o sea

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 - V_1 (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) \end{bmatrix}$$ que es lo que obtuvimos aplicando

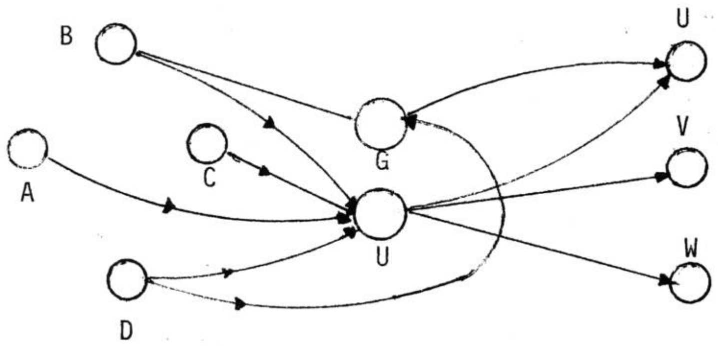
las leyes para este sistema de dos resistencias en paralelo.

13.- México contaba en 1935 con solo 4 pistas aéreas nacionales: Guadalajara (A), Monterrey (B), Mérida (C) y León (D), dos internacionales Acapulco (G) y el Distrito Federal (H), servicios regulares existían o no entre estos, denotado por 1 ó 0 respectivamente en la siguiente matriz M. Vuelos de Acapulco y México a Los Angeles (U), Nueva York (V) y Panamá (W) están dados por la matriz N.

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & H \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad N = \begin{array}{c} \\ G \\ H \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} U & V & W \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Forme el producto MN e interprételo

SOLUCIÓN:

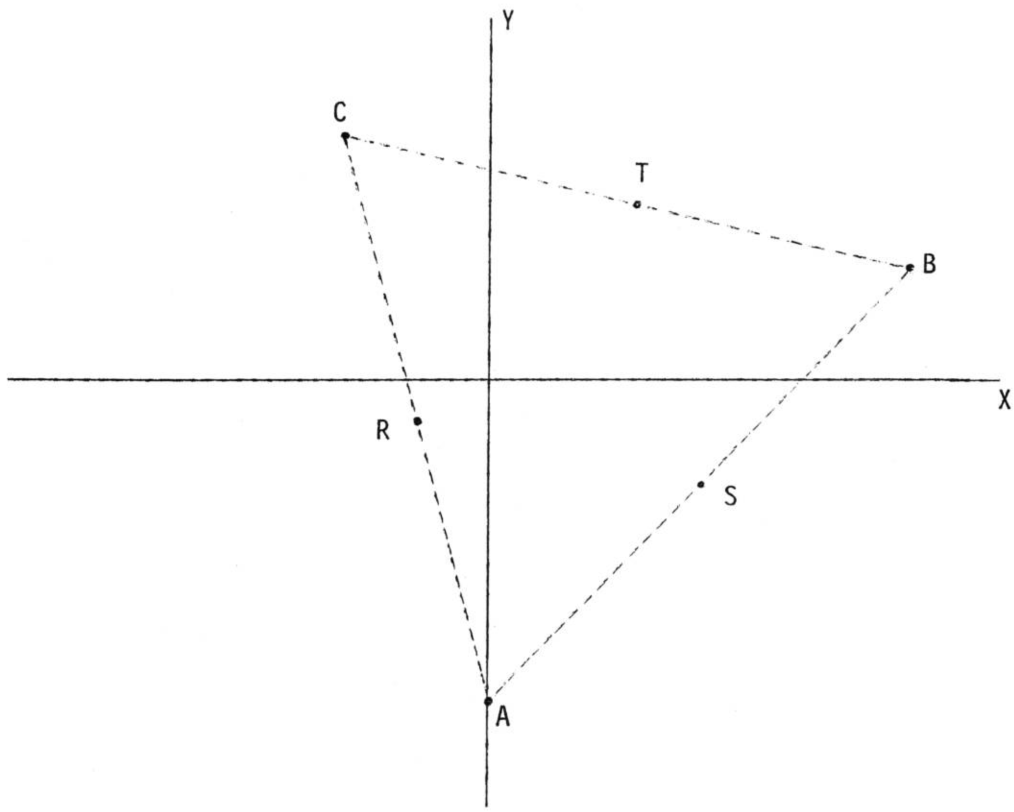


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} U & V & W \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$ El número de caminos

de B a U son dos BGU y BHU.

El número de caminos de D a V es 1, DHV, etc.

14.- Los puntos medios de los lados de un triángulo son: R = (-2, -1) ---- S = (6, -3) y T = (4, 5). Encontrar los vértices de este triángulo.



SOLUCIÓN:

En la figura de arriba están dibujados los vértices A, B y C del triángulo. Para obtener A, B y C procedemos como sigue: Supongamos primero que $A = (u, v)$, $B = (x, y)$ y $C = (z, w)$. El problema es evidentemente determinar u, v, x, y, z y w. El enunciado del problema nos dice que S es punto medio del lado $\overline{AB}$ del triángulo ΔABC, luego las fórmulas para el punto medio aplicadas a los puntos A, B y S establecen las identidades:

$$\frac{x + z}{2} = 4 \ , \quad \frac{y + z}{2} = 5 \qquad (B = (x, y), \quad C = (z, w) \text{ y } T = (4, 5)).$$

$$\frac{u + z}{2} = -2 \ , \quad \frac{y + w}{2} = -1 \qquad (A = (u, v), \quad C = (z, w) \text{ y } R = (-2, -1).$$

Las anteriores igualdades se pueden arreglar en una lista como sigue:

$$\begin{array}{cccccccl}
u+ & & x & & & & = 12 & (1) \\
& v+ & & y & & & = -6 & (2) \\
& & x+ & & z & & = 8 & (3) \\
& & & y+ & & w & = 10 & (4) \\
u+ & & & & z & & = -4 & (5) \\
& v+ & & & & w & = -2 & (6)
\end{array}$$

Este es un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas. Para resolverlo multiplicamos la ecuación (1) por -1 y la ecuación resultante la sumamos a la ecuación (5). Lo mismo hacemos con las ecuaciones (2) y (6) es decir multiplicamos por -1 la ecuación (2) y lo que resulte lo sumamos a la ecuación (6). Este proceso dará el siguiente sistema:

$$\begin{array}{cccccccl}
u+ & & x & & & & = 12 & (1') \\
& v+ & & y & & & = -6 & (2') \\
& & x+ & & z & & = 8 & (3') \\
& & & y+ & & w & = 10 & (4') \\
& & -x+ & & z & & = -16 & (5') \\
& & & -y+ & & w & = 4 & (6')
\end{array}$$

Ahora sumamos (3') a (5') y (4') a (6') para obtener:

$$
\begin{array}{llllllll}
u+ & & x & & & & = 12 & (1'') \\
 & v+ & & y & & & = -6 & (2'') \\
 & & x+ & & z & & = \ \ 8 & (3'') \\
 & & & y+ & & w & = 10 & (4'') \\
 & & & & 2z & & = -8 & (5'') \\
 & & & & & 2w & = 14 & (6'')
\end{array}
$$

De la ecuación (6") $\quad 2w = 14 \quad , \quad w = 7$

De la ecuación (5") $\quad 2z = -8 \quad , \quad z = -4$

De la ecuación (4") $\quad y+w = 10 \quad , \quad y = 10-w = 10-7 = 3$

De la ecuación (3") $\quad x+z = 8 \quad , \quad x = 8-z = 8-(-4) = 12$

De la ecuación (2") $\quad v+y = -6 \quad , \quad v = -6-y = -6-3 = -9$

De la ecuación (1") $\quad u+x = 12 \quad , \quad u = 12-x = 12-12 = 0$

O sea que los vértices A, B, C del triángulo $\triangle ABC$ son:

$A = (u, v) = (\ 0, -9)$

$B = (x, y) = (12, \ \ 3)$ y

$C = (z, w) = (-4, \ \ 7)$

PROBLEMAS PROPUESTOS

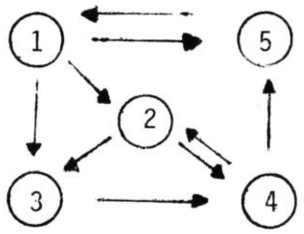
Hallar $a, b, c \in R$ que satisfagan:

$(1, a, 4) \times (2, b, 3) = (10, 5, c)$.

Muestra que el siguiente sistema de ecuaciones tiene solución no trivial si $a = b + c$ ó $c = b + a$.

$$
\begin{array}{lllll}
x & + \ y \cos c & + \ z \cos b & = 0 \\
x \cos c \ + & y & + \ z \cos a & = 0 \\
x \cos b \ + & y \cos a \ + & z & = 0
\end{array}
$$

Cinco legisladores se influencian constantemente entre ellos como se muestra en el siguiente sociograma



la flecha indica qué legislador influye sobre el otro de manera directa,

por ejemplo: La flecha que va del 1 al 5 indica que el legislador 1 puede influir directamente sobre el legislador 5.

a) Sea $$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Sí existe influencia directa del legislador } i \text{ sobre el legislador } j \\ 0 & \text{Si no hay influencia directa.} \end{cases}$$

Escribir la matriz que nos represente la situación que exhibe el sociograma.

b) Calcular la matriz que muestre el número de formas en que un legislador puede influir sobre otro legislador usando a lo más un intermediario.

c) ¿ Qué legislador se puede decir que es el más influyente ?.

Hallar x_1, x_2, x_3, x_4 que satisfagan

$$-x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1$$

$$\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

Hallar el valor de μ para que el sistema tenga:

i) Solución única

ii) Infinidad de soluciones

iii) No tenga solución

$$x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 + (\mu^2 - 5)x_3 =$$

¿Qué relación deben satisfacer a, b, c para que el sistema tenga solución? :

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = a$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = b$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = c$$

Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vectores que satisfagan:

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{i}$$
$$-\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = -\vec{j}$$
$$2\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w} = \vec{k}$$

Determinar $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Hallar a, b, c, d que satisfagan la igualdad de matrices:

$$\begin{bmatrix} a - b & b + c \\ 2d + c & 2a - 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Sean:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz "C" tal que $2CA - B = 0$

Hallar el valor de "a" para que el sistema tenga solución:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \\
x_1 + ax_2 + x_3 &= a \\
ax_1 + x_2 + x_3 &= a^2
\end{aligned}
$$

Dé por lo menos 3 maneras con las cuales se anulen los siguientes de_ terminantes:

$$
\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ \shortmid & \shortmid & \shortmid \\ 5 & 8 & -7 \end{vmatrix}
\qquad\qquad
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & \shortmid & \shortmid \end{vmatrix}
$$

1.- Determinar si la matriz dada tiene inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:

A tendrá inversa sí y sólo sí $|A| \neq 0$. Luego hay que calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

como este determinante tiene dos filas idénticas es cero.

$|A| = 0$ Luego A no tiene inversa

2.- Demuestre que $p\cdot(qxr) = q\cdot(rxp) = r\cdot(pxq)$ (y por eso los tres productos se pueden denotar [pqr]) e interprete el resultado geométricamente.

SOLUCIÓN:

$$p\cdot(qxr) = \begin{vmatrix} p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z \\ q_x & q_y & q_z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} q_x & q_y & q_z \\ p_x & p_y & p_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} = r\cdot(pxq)$$

$$= - \begin{vmatrix} q_x & q_y & q_z \\ p_x & p_y & p_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} q_x & q_y & q_z \\ r_x & r_y & r_z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = q\cdot(rxp)$$

Como el volumen del paralelepípedo determinado por $\underline{p}$, $\underline{q}$, $\underline{r}$ está dado por el valor absoluto de cualquiera de los tres productos, la magnitud de ellos debe ser la misma.

3.- Demostrar que la ecuación de la recta que pasa por los puntos (x_1, x_1); (x_2, x_2) se puede expresar como:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

DEMOSTRACIÓN:

Desarrollando el determinante se tiene:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$0 = x(y_1-y_2) - y(x_1-x_2) + x_1y_2 - x_2y_1$$

que es la ecuación de una recta pues es una expresión de la forma:

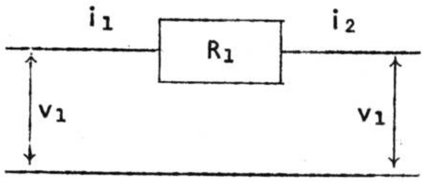
$ax + by + c = 0$

Como:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$ Por tener dos filas iguales.

Se tiene que los dos puntos satisfacen la ecuación de la recta y por lo tanto pertenecen a ella.

4.- Si se tiene un circuito eléctrico en serie, usando las leyes de Ohm y Kirkhoff



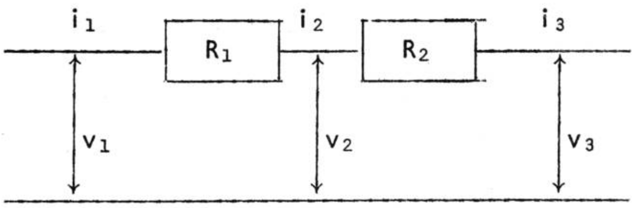
$i_1 = i_2$ y $v_2 = v_1 - i_1R_1$

o sea

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

a) Dado el siguiente circuito de dos resistencias en serie demuestre que

$$\begin{bmatrix} v_3 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$



DEMOSTRACIÓN:

Por la ley de Ohm $v_3 = v_2 - i_2R_2$

Pero

$v_2 = v_1 - i_1R_1$

$v_3 = v_1 - i_1R_1 - i_2R_2$

como toda la corriente circula por las resistencias $i_1 = i_2 = i_3$

$$\begin{bmatrix} v_3 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - i_1R_1 - i_2R_2 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

Pero

$$\begin{bmatrix} v_3 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -R_1-R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - i_1(R_1+R_2) \\ i_1 \end{bmatrix} \quad \text{q.e.d}$$

b) Sabiendo que deseamos una salida $v_3 = 15$ v $i_3 = 5$ Amperes con $R_1 = 10$ Ohms y $R_2 = 5$ Ohms, ¿ qué valores debe tomar v_1, i_1 el vector entrada ?.

De lo demostrado en a se concluye que

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ 1_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \; -R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_3 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -10 \; -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \end{bmatrix}$$

pero

$$\begin{bmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \text{ es } \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -15 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -15+15 & 1 & 0+15 \\ 0 & 1 & & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 + 75 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \text{ volts} \\ 5 \text{ amperes} \end{bmatrix}$$

Se da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar $\lambda \varepsilon$ R, $\lambda \neq 0$ tal que $AX = \lambda X$ con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ x_1, x_2, x_3 no todos cero simultáneamente

SOLUCIÓN:

$AX = \lambda X$; $0 = AX - \lambda X = AX - \lambda IX = (A - \lambda I)X$

Con I la matriz identidad 3x3.

Como $(A - \lambda I)X = 0$ se puede ver como un sistema homogéneo de 3 ecuaciones con tres incógnitas, siempre tiene al menos la solución trivial. Pero se busca que x_1, x_2, x_3 no sean cero simultáneamente luego habrá solución distinta de la trivial si $\det(A - \lambda I) = 0$

Veamos cuando $\det(A - \lambda I) = 0$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

luego

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= (2-\lambda)(\ (1-\lambda)^2-2\ ) + 2(1-\lambda) + 2 \\ &= (2-\lambda)(1-2\lambda + \lambda^2 - 2) + 2(1-\lambda + 1) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2- 2\lambda -1) + 2(2-\lambda) = (2-\lambda)\ (\lambda^2- 2\lambda - 1 + 2) \\ &= (2-\lambda)(\lambda - 2 \ + 1) = (2-\lambda)(\lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 1$

De donde $AX = 2X$ o $AX = X$

Ya tenemos λ ahora falta X. Solucionemos $AX = 2X$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} 2x_1 - x_2 = 2x_1 & ; & x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2x_2 & ; & 2x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2x_3 & ; & -2x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 & ; & x_2 = 0 \\ 2x_1 = -x_3 & ; & x_1 = -\frac{1}{2} x_3 \end{array}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} t$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = t \qquad t \varepsilon R$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$ con $t \varepsilon R$. Hay una infinidad

de $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ que satisfacen $AX = 2X$

Se deja de ejercicio, verificar que efectivamente existe X tal que $AX = X$.

6.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones si a, b, c no son cero y $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$.

$$ax + by + cz = 1$$

$$a^2x + b^2y + c^2z = 1$$

$$a^3x + b^3y + c^3z = 1$$

SOLUCIÓN:

¿ En este caso que método de solución será el más adecuado usar ?
Veamos el determinante del sistema, sí no es cero podemos usar la regla de Cramer.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

¿ Qué propiedad de los determinantes se usó ?

$$\Delta = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

Multiplicando la fila 2 por (b+a) y restando a la fila 3, sustituyendo en esta última se tiene

$$\Delta = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c^2-a^2) - (c-a)(b+a) \end{vmatrix}$$

$$\Delta = abc(1)(b-a)\,[(c^2-a^2) - (c-a)(b+a)]$$

$$= abc(b-a)\,[(c-a)(c+a) - (c-a)(b+a)]$$

$$= abc(b-a)\ [(c-a)[(c+a) - (b+a)]]$$

$$= abc(b-a)\ [(c-a)(c-b)] = abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

luego el determinante no es cero por lo tanto se puede usar la regla de Cramer.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b^2 & c^2 \\ 1 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = bc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \\ 1 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-1 & c-1 \\ 0 & b^2-1 & c^2-1 \end{vmatrix}$$

$$= bc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-1 & c-1 \\ 0 & 0 & (c^2-1)-(c-1)(b+1) \end{vmatrix} = bc(b-1)[(c^2-1)-(c-1)(b+1)]$$

$$\Delta x = bc(b-1)[(c-1)((c+1) - (b+1))] = bc(b-1)((c-1)(c-b))$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{bc(b-1)(c-1)(c-b)}{abc(b-a)(c-a)(c-b)} = \frac{(b-1)(c-1)}{a(b-a)(c-a)}$$

Análogamente se puede calcular y & z. Se deja al alumno hacerlo, debiendo obtener:

$$y = \frac{(c-1)(1-a)}{b(b-a)\ (c-b)} \qquad z = \frac{(a-1)(b-1)}{c(c-a)(c-b)}$$

7.- ¿ Cuántas maneras se pueden completar los siguientes determinantes de modo que se anulen ?

a)

$$\begin{vmatrix} \bullet & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \bullet \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \bullet\,(4+10) - (3+4) + 3(15-8) = \bullet 14 - 7 + 21$$

$$= \bullet 14 + 14 = 0$$ sí y sólo sí

$\bullet$ es -1

b)

$$\begin{vmatrix} \bullet & 0 & 2 \\ 8 & \bullet & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \bullet \begin{vmatrix} \bullet & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \quad +2 \begin{vmatrix} 8 & \bullet \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \bullet(\bullet 1-2) + 2(8-4\bullet)$$

$$= \bullet\bullet 1 - \bullet 2 + 16 - 8\bullet = \bullet\bullet 1 - 10\bullet + 16$$

Se reduce a una ecuación $x^2 - 10x + 16 = 0$

$(x-8)(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 8 \quad o \; x = 2$

Hay, pues, dos maneras, con ocho o con 2.

8.- Resuelva el siguiente sistema homogéneo

$$\lambda x + y + z = 0$$
$$x + \lambda y + z = 0$$
$$x + y + \lambda x = 0 \, .$$ Siempre tiene solución ya que

siempre tiene la solución trivial $x = y = z = 0$, para cualquier λ.

Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda^2-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & +\lambda+2 \end{pmatrix}$$

$(\lambda + 2)z = 0$ Si hay solución no trivial, $z \neq 0$

$\lambda z = -2z$

Entonces $\boxed{\lambda = -2}$ $z = y$ y $x = z$

Es decir $t(1, 1, 1)$ es solución del sistema

$$\begin{aligned} -2x + y + z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Si $\boxed{\lambda = 1}$ queda $x + y + z = 0$, y este plano es el conjunto solución.

Determinantes

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - \lambda - \lambda + 1 + 1 - \lambda$$
$$= \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda+2)(\lambda^2 - 2\lambda + 1)$$
$$= (\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

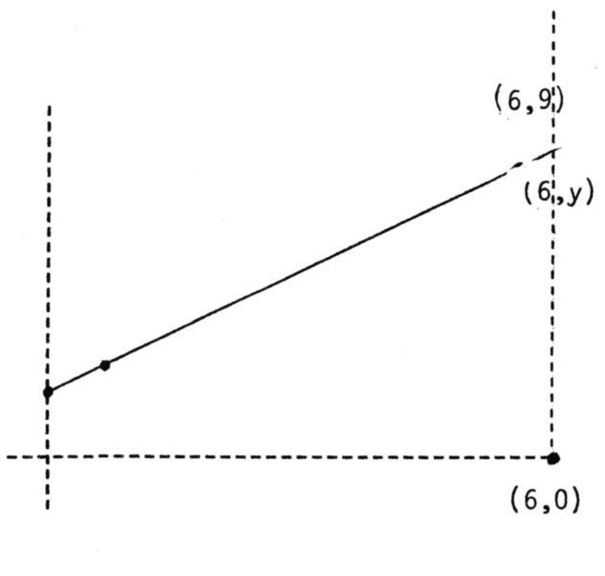
El sistema tiene solución no trivial si $\lambda = -2$ y si $\lambda = 1$.

9.- La trayectoria de aterrizaje de un avión, se puede considerar formada por segmentos de recta. Para que una construcción no interfiera con la trayectoria del avión deberá caer bajo el segmento de la trayectoria. Las construcciones cercanas al aeropuerto se les asigna dos coordenadas, una será la distancia al aeropuerto y la otra su altura.

Se supone que la línea recta de ecuación

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

representa la trayectoria del avión cerca del aeropuerto. ¿ Se puede construir un edificio a 6 unidades del aeropuerto con 9 unidades de alto ?



Sea (6, y) el punto de la recta que "claro" tiene abscisa 6.

Si el punto (6,y) esta en la recta satisface la ecuación.

Necesitamos encontrar y para compararla con 9, si es mayor que nueve el edificio caerá bajo la trayectoria del avión y se podrá construir, si es menor que 9 interferirá la trayectoria del avión y no se podrá construir.

$$0 = \begin{vmatrix} 6 & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$0 = 6(3-6) - y(2 - 5) + (12 - 15)$$

$$0 = 6(-3) - y(-3) + (-3)$$

$$0 = -18 + 3y - 3$$

$$0 = -21 + 3y$$

$$3y = 21 \qquad ; \qquad y = 7$$

No se puede construir el edificio.

10.- Sea **D** la matriz

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

donde $d_{11}\, d_{22} \,\ldots\, d_{nn} \neq 0$. Demuestre que D es invertible y encuentre su inversa.

Una matriz D es invertible si $\det(D) \neq 0$ y como

$$\det(D) = \begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & \\ 0 & d_{22} \cdots 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 \cdot\cdot\cdot & d_{nn} \end{vmatrix} = d_{11}\, d_{22} \cdots\cdots d_{nn} \neq 0$$

Entonces D es invertible

Calculemos ahora su inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} d_{11} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d_{nn} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d_{nn}} \end{array}\right)$$

Por tanto

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} & \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_{nn}} \end{pmatrix}$$

11.- Demuestre que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)\ (c - a)\ (c - b)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

$$= bc^2 - b^2c - (ac^2 - a^2c) + ab^2 - a^2b$$

$$= bc^2 - ac^2 + a^2c - b^2c + ab^2 - a^2b$$

$$= bc^2 - abc - ac^2 + a^2c - b^2c + ab^2 + abc - a^2b$$

$$= (bc - ab - ac + a^2)c - b(bc - ab - ac + a^2)$$

$$= (bc - ab - ac + a^2)\ (c - b)$$

$$= [b(c - a) - a(c - a)]\ (c - b)$$

$$= (c - a)\ (b - a)\ (c - b)$$

12.- Verifique que det(AB) = det(a) det(B) cuando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(AB) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = -3$$

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -3 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -3(1) = -3$$

$$\Longrightarrow \det(AB) = \det(A)\ \det(B) = (1)(-3) = -3 \ .$$

13.- Encontrar todos los valores de λ para los cuales $\det(A) = 0$
Con:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda-6 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & \lambda-4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda-6 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-6) \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-6)\lambda(\lambda-4) + (\lambda-6)(4) = 0$$

$$= (\lambda-6)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0$$

$\lambda_1 = 6$ $\qquad$ $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$

14.- Si $\lambda = 2$, encontrar $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq 0$ tal que $Ax = \lambda x$. Con A igual que en el ejercicio anterior.

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -4x \qquad &= 2x \\ 2y - z &= 2y \qquad \text{ó} \\ 4y - 2z &= 2z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -6x \qquad\qquad &= 0 \\ -\ z &= 0 \\ 4y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este último sistema tenemos:

$x = 0 \qquad\qquad y = t \qquad\qquad x = t$

entonces:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad t\varepsilon R$$

15.- a) Demostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 \\ 0 & x_3-x_1 & x_3^2-x_1^2 \end{vmatrix} = (x_2-x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x \ + x \\ 0 & x_3-x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} =$$

$$(x_2-x_1)(x_3-x_1) \begin{vmatrix} 1 & x & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_1+x_2 \\ 0 & 1 & x_1+x_3 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$

b) Demostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 \cdots\cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 \cdots\cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_n \cdots\cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1<j} (x_j - x_i)$$

Solución por inducción:

I. Para n = 2 $\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)$ se cumple

II. Supongamos que se cumple para n-1, es decir,

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{(n-1)-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{(n-1)-1} \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{(n-1)-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{1<i<j\leq n-1} (x_j - x_i)$$

con $x_1, \ldots x_{n-1}$ números cualesquiera
entonces por demostrar

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & & x_2^{n-1} \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1<i<j\leq n} (x_j - x_i)$$

Expandiendo el determinante con respecto a los elementos del primer renglón, cambiando x_1 por x vemos que el determinante es un polinomio de grado n-1, que tiene como soluciones $x_2, x_3, \ldots x_n$ el determinante $D_n = A_n(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n-1})$ con A_n el coeficiente de x^{n-1} que es justamente D_{n-1} i.e.

$$D_n = \left(\prod_{1 \le i < j \le n-1} (x_j - x_i)\right)(x_n - x_2)(x_n - x_3)\,(x_n - x_{n-1})$$

$$= \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \text{ q.e.d.}$$

NOTA: Se usó para la demostración el hecho que cualquier polinomio de grado n, $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \quad + a_1 x + a_0 = \prod^{n} (x - x_j)$, x_j las raíces del polinomio; este hecho se ha usado inconcientemente cuando, por ejemplo, factorizamos

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

16.- Resuelva el siguiente sistema por regla de Cramer

$2x - 3y = -5$

$4x + 7y = 1$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-35 + 3}{14 + 12} = \frac{-32}{26} = \frac{-16}{13}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{2+20}{14+12} = \frac{22}{26} = \frac{11}{13}$$

17.- Hallar el área del triángulo rectángulo formado por los ejes coordenados y la recta cuya ecuación es $5x+4y-20=0$

SOLUCIÓN:

Si $x=0$, $4y=20$ $\qquad y=5$

Si $y=0$ $\quad 5x=20$ $\qquad x=4$

el triángulo está formado por (0,5)(4,0) y (0,0)

el área es 10.

18.- Una recta pasa por los puntos A(-1,3) y B(5,4). Escríbase su ecuación en forma de determinante. Verifique el resultado desarrollando el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(3-4)x - (-1-5)y + (-4-15) = 0$$

$$-x + 6y - 19 = 0 \qquad \text{-------------------} \ \mathrm{I}'$$

Satisfice $-(-1) + 6(3) - 19 = 1 + 18 - 19 = 0$

$-(5) + 6(4) - 19 = -5 + 24 - 19 = 0$

ie. (-1,3) y (5,4) están en la recta I. NOTA IMPORTANTE, si en el determinante I sustituímos (x,y) por A(-1,3) (o por B(5,4)), quedan dos renglones iguales por lo tanto se hace 0 al igual que I'.

19.- Por medio de determinantes obténgase la condición necesaria y suficiente para que las dos rectas $Ax + By + C = 0$ y $A^1 + B^1y + C^1 = 0$ se corten en uno y sólamente en un punto.

Es lo mismo que pedir que el sistema

$$Ax + By = -C$$
$$A^1x + B^1y = -C^1$$

tenga una sola solución

Esto ocurre si $\begin{vmatrix} A & B \\ A^1 & B^1 \end{vmatrix}$ es diferente de 0, por la regla de Cramer.

20.- Tres rectas son concurrentes si y sólo si

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

con $A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$A_2x + B_2y + C_2 = 0$

$A_3x + B_3y + C_3 = 0$

SOLUCIÓN:

$$\text{Si} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + B_1(A_2C_3 - A_3C_2) + C_1(A_2B_3 - A_3B_2) =$$

$$= A_2(B_3C_1 - B_1C_3) + B_2(A_1C_3 - A_3C_1) + C_2(A_3B_1 - A_1B_3) =$$

$$= A_3(B_1C_3 - B_3C_1) + B_3(A_2C_1 - A_1C_2) + C_3(A_1B_2 - A_2B_1)$$

Reescribiendo la primera ecuación

$$A_1 \frac{(B_2C_3 - B_3C_2)}{(A_2B_3 \quad A_3B_1} + B_1 \frac{(A_2C_3 - A_3C_2)}{(A_2B_3 \quad A_3B_2)} + C_1 = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\text{vemos que} \quad \frac{B_2C_3 - B_3C_2}{A_2B_3 - A_3B_2} = \frac{\begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_2 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -C_2 & B_2 \\ -C_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} = x_0 \quad \text{la}$$

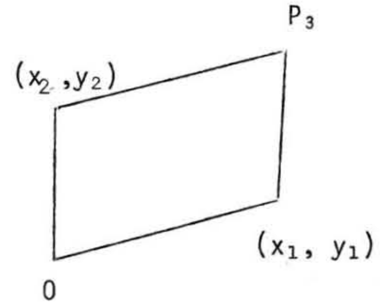
solución del sistema $\begin{matrix} A_2x + B_2y + C_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3 = 0 \end{matrix}$. Lo mismo el factor que multiplica a B_1. Es decir la ecuación (a) afirma que (x_0, y_0), punto de intersección de las dos rectas II y III, es un punto que satisface la ecuación de la recta I. Lo mismo se puede deducir de los restantes desarrollados del determinante la condición de igualar el determinante a 0 implica que las rectas son concurrentes q.e.d. El sentido contrario es inmediato.

21.- Demuestre que si $x_1^2 + y_1^2 = 1, \quad x_2^2 + y_2^2 = 1$ entonces si

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \Longrightarrow |A| < 1$$

Prueba:

Dibujemos



$|A|$ es el área de $OP_1P_2P_3$ (¡Demuéstrelo!)

Es claro que el área máxima se obtiene cuando el paralelogramo es un rectángulo (¿verdad?). El rectángulo sujeto a las condiciones del problema, tiene área máxima cuando es un cuadrado de lado 1.

Por tanto $|A| \leq 1$.

22.- Sea $Ax = B$ un sistema consistente y sea x_1 una solución particular. Demuestre que toda solución del sistema se puede escribir como ----- $x = x_1 + x_0$, donde x_0 es una solución de $Ax = 0$.

SOLUCIÓN:

Como $x = x_1$ es una solución particular del sistema no homogéneo, tendremos que:

$$Ax_1 = B \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Por otro lado $x = x_0$ es solución del sistema homogéneo, entonces:

$$Ax_0 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Por tanto, sumando miembro a miembro (1) y (2) obtenemos:

$$Ax_1 + Ax_0 = A(x \quad + x_0) = B$$

Por lo que $x = x_1 + x_0$ es solución del sistema no homogéneo.

23.- Una matriz de probabilidad es una matriz cuadrada que satisface dos propiedades

i) Cada componente de la matriz es no negativa

ii) La suma de los elementos de cada renglón es 1.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Probar que A B es una matriz de probabilidad.

DEMOSTRACIÓN:

Primero naturalmente hay que efectuar el producto

$$AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{2}{12} & \frac{1}{4} + \frac{1}{24} & \frac{1}{24} + \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} + \frac{2}{9} & \frac{1}{6} + \frac{1}{18} & \frac{1}{18} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{7}{24} & \frac{7}{24} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{18} & \frac{2}{9} & \frac{7}{18} \end{pmatrix}$$

Luego

i) las componentes del producto son positivas.

ii) la suma de los elementos de la matriz producto es uno.

Así AB es también una matriz de probabilidad.

24.- Los hábitos de estudio de un alumno son como sigue. Si estudia una noche, el estudiará de seguro, un 30% de las noches siguientes (un 70% de las noches siguientes no estudiará). Por otro lado si no estu_dia una noche, el estudiará de seguro 40% de las noches siguientes.

a) Exprese esto en forma matricial

$$\begin{array}{c} \\ \text{estudia hoy} \\ \text{no estudia hoy} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{estudia mañana} & \text{no estudia mañana.} \end{array} \\ \begin{pmatrix} .30 & .70 \\ .40 & .60 \end{pmatrix} \end{array} = A$$

b) Busque el vector $\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$ tal que $A \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$. Demuestre que

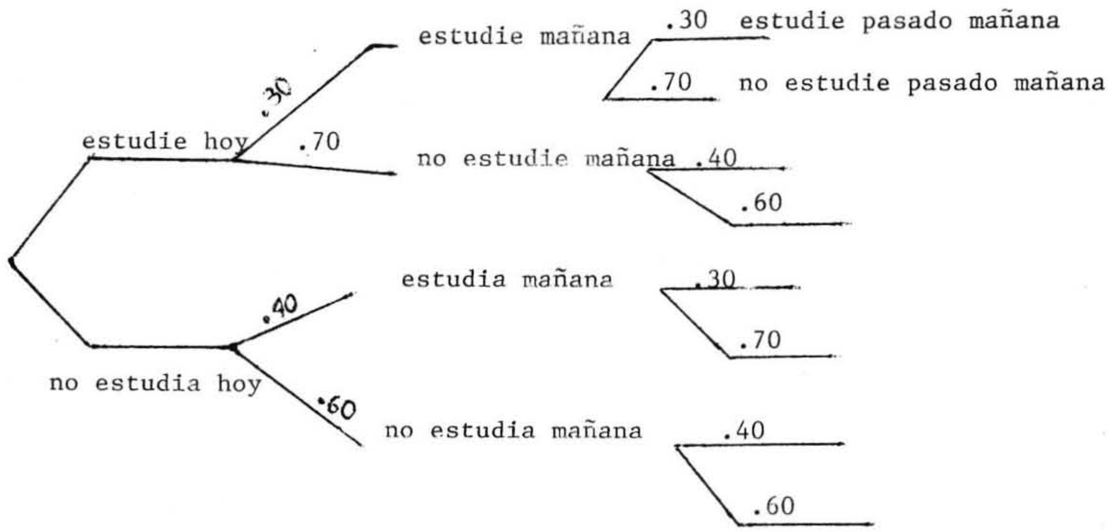
es el único que cumple ésta ecuación.

SOLUCIÓN:

$$\begin{pmatrix} .30 & .70 \\ .40 & .60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} .30P_1 \\ .60P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .70P_1 \\ .40P_2 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = P_2 \quad y \quad P_1 + P_2 = 1 \qquad\qquad P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$$

c) Cuál es la matriz que expresa la probabilidad que estudie ó no estudie dentro de 2 días, dado que estudió hoy ó no



(.30) (.30) + (.70) (.40) es la probabilidad de que estudie hoy, estudie pasado mañana y así. Pero éstos términos son justamente los que aparecen en la matriz

$$\begin{pmatrix} .30 & .70 \\ .40 & .60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} .30 & .70 \\ .40 & .60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .37 & .63 \\ .36 & .64 \end{pmatrix}$$

25.- En una industria del vestido se producen tres estilos de blusas. Cada estilo requiere de los servicios de tres departamentos, como se listan en la tabla. Los departamentos de cortado, cosido y empaquetamiento tienen disponibles un máximo de 1,160, 1,560, y 480 horas de trabajo por semana, respectivamente. Plantée estas condiciones como tres ecuaciones con variables x, y, z el número de blusas de tipo A, B y C, respectivamente

	ESTILO A	ESTILO B	ESTILO C
Departamento de cortado	0.2	0.4	0.3
Departamento de cosido	0.3	0.5	0.4
Departamento de empaquetamiento	0.1	0.2	0.1

El departamento de cortado dedica $0.2x$ horas para el número x de blusas A
$0.4y$ horas para el número y de blusas B
$0.3z$ horas para el número z de blusas C

$$0.2x + 0.4y + 0.3z \leq 1{,}160$$

Análogamente $0.3x + 0.5y + 0.4z \leq 1{,}560$ para el depto. de cosido.

y $0.1x + 0.2y + 0.1z \leq 480$ para el depto. de empaquetamiento.

26.- La plata pierde en agua 0.095 su peso y el cobre 0.112. Si un cuerpo de 12 Kg de peso compuesto de plata y cobre mezclados, pierde en agua 1.174 kg. ¿ Cuántos kilogramos contiene de cada metal ?.

SOLUCIÓN:

Sean x los kilogramos de plata
y los kilogramos de cobre

Como sólo está constituído de plata y cobre

$$x + y = 12 \text{ kg}$$

Las pérdidas son de $.095x$ y de $.112y$. Suman 1.174 kg

o sea

$$x + y = 12$$

$$.095x + 112y = 1.174$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ .095 & .112 & 1.174 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 1 & 1.18 & 12.36 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 0 & .18 & .36 \end{pmatrix} -$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} x = 10 \\ y = 2 \end{array}$$

27.- Un repartidor de la CONASUPO toma los pedidos de 4 tiendas sindicales

La primera solicita 3 toneladas de azúcar, 4,000 litros de leche y 5 cajas de huevo.

La segunda solicita 5 toneladas de azúcar, 12,000 litros de leche y 3 cajas de huevo.

La tercera solicita 9 toneladas de azúcar, 5,000 litros de leche y 6 cajas de huevo.

La cuarta solicita 7 toneladas de azúcar, 7,000 litros de leche y 6 cajas de huevo.

¿ Cuánto espera recibir si los costos son 150 pesos por paquete de kilo de azúcar, 200 pesos por litro de leche y 115 por docena de huevo.

SOLUCIÓN:

Las solicitudes de cada tienda se pueden expresar matricialmente

$$\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\12\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\5\\6\end{pmatrix} .,. \begin{pmatrix}7\\7\\6\end{pmatrix}$$ Las solicitudes totales son la suma de

estas matrices $\begin{pmatrix}3+&5+9+7\\4+&12+5+7\\5&3+6+6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24\\28\\20\end{pmatrix}$ expresadas en

$$\begin{pmatrix}\text{toneladas de azúcar}\\\text{miles de litros de leche}\\\text{cajas de mil docenas}\end{pmatrix}$$

La matriz de precios unitarios en miles de pesos es (150 100 115) por tanto el precio total será

$$(150 \quad 100 \quad 115)\begin{pmatrix}24\\28\\20\end{pmatrix} = 24\cdot150 + 28\cdot100 + 20\cdot115$$

$$= 3600 + 2800 + 2300 = 8{,}700 \text{ miles de pesos}$$

$$= 8 \text{ millones } 700{,}000 \text{ pesos.}$$

28.- Si A es una matriz nxn tal que A^2-A+1 es la matriz 0, pruebe que A es no singular y que $A^{-1} = 1-A$.

$A^2 - A + 1 = 0$

$A(A-1) = -1$

$A(1-A) = 1$

$1 - A$ es el inverso derecho de A

Pero como $A(1-A) = A - A^2 = (1-A)A$, $1 - A$ también es su inverso ----- izquierdo A tiene inverso y este es $1-A$ $\therefore$ A es singular.

29.- ¿ Es necesariamente inversible la suma de dos matrices inversibles ?.
NO . . . . .

30.- Demuestre que para cualquier valor de θ

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -d \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{+\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta}\begin{bmatrix} +\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \qquad \text{q.e.d.}$$

NOTA: La primera matriz representa, una rotación $\theta°$ de los ejes coordenados en la dirección opuesta a las manecillas del reloj. La segunda, insorpresivamente, una rotación de $\theta°$ en la dirección de las manecillas del reloj.

31.- ¿ Para que valor (es) de k no es invertible A ?

(a) $A = \begin{pmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Solución de (a)

Una matriz cuadrada A no es invertible si $\det(A) = 0$, entonces

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{pmatrix}$$

$$= (k-3)(k-2)-4 = 0$$

$$= k^2-5k + 6-4 = 0$$

$$k^2-5k + 2 = 0$$

$$k = \frac{5 \pm \sqrt{25-8}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad k_1 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \quad y \quad k_2 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$$

Por tanto, si k_1 y k_2 son distintos de los valores anteriores, entonces la matriz A será invertible.

Solución de (b)

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} -2 \det \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ k & 2 \end{pmatrix} + 4 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ k & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -16 - 2(6-6k) + 4(9-k)$$

$$= 8 + 8k = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{k = -1}$$

Entonces, si $k \neq -1$ la matriz A será invertible.

32.- Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular A^{-1}

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right)$$

Entonces:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

33.- Encuentre la matriz inversa de A si existe.

$$\left|\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right| \text{(sumar-1}^{\text{er}}\text{ renglón al 3}^{\text{er}}\text{)}$$

$$\text{(sumar-2}^{\text{do}}\text{ renglón al 3}^{\text{er}}\text{)} \rightarrow \left|\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right| \xrightarrow{\text{(dividir entre 2 el 3}^{\text{er}}\text{ renglón)}} \left|\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \end{array}\right|$$

$$\rightarrow \left|\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right|$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = I \text{ correcto}$$

34.- Resuelva el sistema lineal siguiente

$$\begin{aligned} x+0+z &= 3 \\ 0+y+z &= 1 \\ x+y+0 &= 2 \end{aligned} \qquad \text{i.e.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

usando la matriz inversa obtenida en el ejercicio anterior.

$$+\tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & +2 \\ -3 & +1 & +2 \\ 3 & +1 & -2 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2 + C + 1 &= 3 \\ 0 + 0 + 1 &= 1 \\ 2 + 0 + 0 &= 2 \end{aligned}$$

35.- Los gastos de una excursión de 43 personas fueron \$ 229.00 (cerca 1900); si los hombres pagaron 10 pesos cada uno, las damas 5 pesos y los niños 2 pesos ¿ Cuántos fueron de cada clase ?.

SOLUCIÓN:

$$x + y + z = 43$$
$$10x + 5y + 2z = 229$$

Eliminando a z, $8x + 3y = 143$.

Dividiendo entre 3 obtenemos

$$2x + \frac{2}{3}x + y = 47 + \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}(x-1) = 47 - y - 2x = \text{un número entero } p$$

$$\frac{2}{3}(x-1) = p$$

$$\frac{1}{3}(x-1) = p^1 \text{ entero}$$

$$x-1 = 3p^1$$

$$x = 3p^1 + 1$$

$$3y = 143 - 8(3p^1 + 1)$$

$$= 135 - 24p^1$$

$$y = 45-8p^1$$

$$z = 5p^1 - 3$$

p no puede pasar de 5 porque entonces y sería negativo; tam_ poco puede ser negativo.

Las diversas posibilidades son

$p =$	1	2	3	4	5
$x =$	4	7	10	13	16
$y =$	37	29	21	13	5
$z =$	2	7	12	17	22

36.- Los obreros A y B trabajando juntos pueden realizar una tarea en 4 días; B y C juntos pueden hacerlo en 3 días y A y C en 2.4 días. Hallar el tiempo que tardaría cada obrero en realizar dicha tarea actuando independientemente.

Sean a, b, c = los días que precisan A, B y C para efectuar solos el trabajo, tendremos $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ = fracción del trabajo completo que cada uno realiza en un día,

luego $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{24}$$

Resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones se obtiene
$a = 6$, $b = 12$ y $c = 4$ días.

Se supone que cuando trabajan juntos lo hacen a la misma rapidéz que si lo hacen solos. Eso en general no es cierto pero es una aproximación.

37.- Códigos. Un uso frecuente del álgebra matricial es la codificación. Si asignamos

a	b	c	ch	d	e	f	g	h	i	j	k	l	ll	m
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	-
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	0

(- espacio entre palabras) la palabra <u>antes</u> se puede escribir ----- <u>1</u> <u>16</u> <u>23</u> <u>6</u> <u>22</u> <u>0</u>. Para facilitar dividámosla en vectores de 3 números

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 16 \\ 23 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 6 \\ 22 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Estos dos vectores, en el orden en que están escritos representan la misma palabra. Para hacerle más difícil la labor al que quiera descifrar lo que queremos decir, escribamos cada vector miltiplicado por la matriz inversa de

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

¿ Cómo escribiría Miguel ?

Primero calculemos la inversa

$$\left[\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \rightarrow \left[\begin{matrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 7 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \rightarrow \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -\frac{4}{3} & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{7}{9} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Miguel es 15 10 8 24 6 13

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{7}{9} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{3} + \frac{70}{9} - \frac{8}{3} \\ 15 \\ -\frac{15}{3} - \frac{40}{9} + \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{91}{9} \\ 15 \\ -\frac{61}{9} \end{pmatrix}$$

y

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 24 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{75}{9} \\ 24 \\ -\frac{57}{9} \end{pmatrix}$$

Se envían estos dos vectores y se codifican multiplicándolos primero por A^{-1} y luego interpretándolos en la tabla de letras y números.

38.- En un experimento sobre nutrición en animales, se diseña una dieta que consta de 20 gramos de proteína y 6 gramos de grasa. El técnico de laboratorio puede comprar dos mezclas alimenticias A, B con las siguientes composiciones:

	Proteína(%)	Grasa(%)
A	10	6
B	20	2

Plantée las ecuaciones de los gramos de cada mezcla que deben obtenerse para generar la dieta adecuada.

SOLUCIÓN:

Sean X_A y X_B las cantidades de las mezclas A y B.

Planteemos una ecuación para la cantidad de proteína y otra para la cantidad de grasa. De la mezcla A se extraen $(.10)X_A$ gramos de proteína y de la mezcla B serán $(.20)X_B$. Por tanto, $(.10)X_A + (.20)X_B = 20$

Análogamente $(.60)X_A + (.02)X_B = 6$ gramos de grasa

La inversa de $\begin{pmatrix} .10 & .20 \\ .60 & .02 \end{pmatrix}$ es $\frac{1}{-.10}\begin{pmatrix} .02 & -.20 \\ -.06 & .10 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 20 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_A \\ X_B \end{pmatrix}$$ Es el vector solución-

39.- Una compañía produce tres tipos de esculturas de bronce. El departa_ mento de modelo tiene disponibles un máximo de 350 horas de trabajo por semana y el departamento de acabado tiene disponibles un máximo de 150 horas hábiles.

La Escultura A requiere de 30 horas de modelo y 10 horas de acabado
La Escultura B requiere de 10 horas de modelo y 10 horas de acabado
La Escultura C requiere de 10 horas de modelo y 30 horas de acabado

Se desea que la planta opere a máxima capacidad. Qué ecuaciones des_ criben la distribución del tiempo disponible total en ambos departa_ mentos en términos de las esculturas producidas de cada tipo ?.

SOLUCIÓN:

Escribamos una ecuación para el tiempo requerido del departamento de moldeo para el total de esculturas X_A, X_B y X_C a moldeos y otra para el tiempo del departamento de acabado.

$$30X_A + 10X_B + 10X_B \leq 350$$

$$10X_A + 10X_B + 30X_C \leq 150$$

ANEXO

PROBLEMAS PROPUESTOS

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método de eli_ minación de Gauss.

1.- a)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

2.- Sea el sistema de ecuaciones

$$Ax = 0$$

a) Demuestre que si $x = x_0$, es solución, entonces $x = kx_0$ también es solución, donde k es una constante.

b) Demuestre que si $x = x_0$, $y = y_1$ son dos soluciones cualesquiera, entonces $x = x_0 + y_1$ también es solución.

3.- Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $P(x) = 2x^2 - x + I$, hallar P(A)

4.- Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, hallar una matriz x que cumpla con la siguiente igualdad

$$Ax - 3B = Cx + 2I$$

5.- Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Resolver la ecuación $Ax = 2x$

6.- Encontrar condiciones para a y b de tal forma que el sistema de ecuaciones siguiente

$$ax + by = c$$
$$ax - by = c$$

tenga solución única.

7.- Encontrar condiciones para a, b y c de tal forma que el sistema de ecuaciones siguiente

$$ax + by = c$$
$$bx + ay = c$$

tenga una infinidad de soluciones.

8.- Encontrar condiciones para a, b, c y d de tal forma que el sistema de ecuaciones siguiente

$$ax - by = c$$
$$bx + ay = d$$

no tenga solución.

9.- Determinar si las siguientes matrices son invertibles, en caso de serlo, hallar su inversa.

(a) $$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$ para todo valor de θ

(b) $$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ para todo valor de θ

(c) $$C = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 \end{pmatrix}$$ donde $a_1, a_2, a_3 \neq 0$

10.- Para que valor(es) de α la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & \alpha^2-14 \end{pmatrix}$$

es invertible.

11.- Resuelva en términos de a, b y c el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= a \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= b \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= c \end{aligned}$$

12.- ¿ Qué condiciones deben de satisfacer a, b y c de forma tal que el sistema

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= b \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= c \end{aligned}$$

sea consistente ?

13.- Resolver el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$$

14.- ¿ Para que valor(es) de α no es invertible A ?

(a) $A = \begin{pmatrix} \alpha-3 & -2 \\ -2 & \alpha-2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ \alpha & 3 & 2 \end{pmatrix}$

15.- Si A es invertible, entonces kA también lo es $\quad k \neq 0$, $k \in R$

Si la inversa de 3A es

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

hallar la matriz A.

16.- Una compañía de Paracho, Michoacán con dos plantas diferentes fabrica guitarras y violines, su costo de producción por cada instrumento

Planta en el Zócalo.

$$\begin{array}{l} \\ \text{Materiales} \\ \text{Trabajo} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Guitarra} & \text{Violín} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3{,}000 & 2{,}500 \\ 6{,}000 & 8{,}000 \end{bmatrix} \end{array} = A$$

Planta en las afueras

$$\begin{array}{l} \text{Materiales} \\ \text{Trabajo} \end{array} \begin{bmatrix} 3{,}600 & 2{,}700 \\ 5{,}400 & 7{,}400 \end{bmatrix} = A$$

17.- Solución a un problema de dos compañías por medio de la matriz de insumo-producto

Dada la matriz tecnológica $\quad M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

La matriz de salida $\quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

La matriz de demanda final $D = \begin{bmatrix} d_1 \\ \\ d_2 \end{bmatrix}$

La solución a la ecuación matricial de insumo-producto

$$X = MX + D \qquad \text{o sea}$$

Salida total = Demanda Interna + Demanda final

es $X = (I - M)^{-1} D$

Resolver el siguiente problema: cada peso de energía eléctrica producido por CFE requiere de \$ 0.10 de su propio producto (electricidad) y \$ 0.30 de "producto" de la Secretaría de Recursos Hidráulicos.
Cada peso de producto (agua) de Recursos Hidráulicos requiere \$ 0.40 de la salida de la CFE y 0.20 de su propia salida

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} E & A \end{array} \\ \begin{array}{c} E \\ A \end{array} & \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array} = M$$

Suponga que la demanda final (la demanda del sector externo) es

d_I = 12 millas para electricidad

d_2 = 6 millones para agua

¿ Qué salidas en pesos x_1 de la CFE y x_2 de Recursos Hidráulicos se requieren para hacer frente a estas demandas finales ?

SOLUCIÓN: (20, 15)

18.- Distribución de recursos: Una compañía minera tiene dos minas cuyos minerales tienen las composiciones indicadas en la tabla. Cuántas toneladas de cada mineral se deberían usar para obtener 4.5 toneladas de níquel y 10 toneladas de cobre ?

Mineral	Níquel(%)	Cobre(%)
A	1	2
B	2	5

SOLUCIÓN:

x_1 = 250 toneladas de mineral A

x_2 = 100 toneladas de mineral B

19.- Suponga que una economía se basa en 3 sectores industriales : Agricultura (A) Construcción (C) y Energía (E). La matriz tecnológica M y la matriz de demanda final son en miles de millones de pesos

$$\begin{array}{c} \\ A \\ C \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & C & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.422 & 0.100 & 0.266 \\ 0.089 & 0.350 & 0.134 \\ 0.134 & 0.100 & 0.334 \end{bmatrix} \end{array} = M$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}$$

a) Cuántos insumos de A, C y E son requeridos para producir un peso de producto de C ?.

b) Cuánto de cada uno de los productos de C son requeridos como insumo para cada uno de los tres sectores ?.

c) Demuestre que I-M es:

$$I - M \begin{bmatrix} 0.578 & -0.100 & -0.266 \\ -0.089 & 0.650 & -0.134 \\ -0.134 & -0.100 & 0.666 \end{bmatrix}$$

d) Dado

$$(I - M)^{-1} = \begin{bmatrix} 2.006 & 0.446 & 0.891 \\ 0.368 & 1.670 & 0.482 \\ 0.458 & 0.340 & 1.752 \end{bmatrix}$$

pruebe que $(I - M)^{-1}\ (I - M) \quad I$ (aproximado)

e) Use $(I - M)^{-1}$ del inciso anterior para encontrar el producto necesario de cada sector, necesario para satisfacer la demanda D_1
Lo mismo pero para la demanda D_2

SOLUCIÓN:

a) 10 ¢ de A, 35 ¢ de C y 10 ¢ de E

e) $$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.14 \\ 7.45 \\ 6.36 \end{pmatrix}$$

CIRCUNFERENCIA:

1.- Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$$

en el punto (-1, 6)

SOLUCIÓN

i) Primer método.

La ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto (-1, 6) es

$$y - 6 = m(x + 1)$$

en donde el parámetro m es la pendiente de la tangente buscada. De esta ecuación $y = mx + m + 6$, valor que al sustituir en la ecuación nos da

$$x^2+(mx + m + 6)^2 - 2x - 6(mx + m + 6) - 3 = 0$$

al realizar las operaciones indicadas, se reduce a

$$(m^2 + 1)x^2 + (2m^2 + 6m - 2)x + (m^2 + 6m - 3) = 0$$

que es una ecuación de segundo grado en x. La condición para la tangencia nos dice que el discriminante de esta ecuación cuadrática debe ser igual a cero, esto es:

$$(2m^2 + 6m - 2)^2 - 4(m^2 + 1)(m^2 + 6m - 3) = 0$$

resolviendo esta ecuación se ecuentra que su solución es

$$m = \frac{2}{3}$$

por tanto la ecuación de la tangente buscada es:

$$y - 6 = \frac{2}{3}(x + 1)$$

o bien

$$2x - 3y + 20 = 0$$

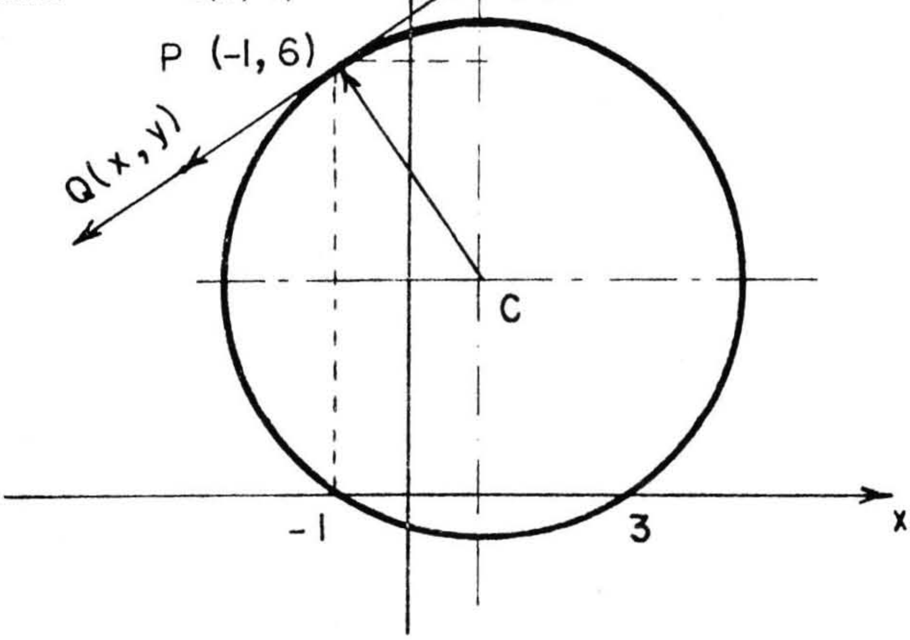
ii) Segundo método

Hallemos el centro y el radio de la circunferencia dada

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 13$$

Por tanto $C(1, 3)$ $r = \sqrt{13}$



la condición de tangencia establece que:

$$\vec{PC}\cdot\vec{QP} = 0$$

esto es

$$(-2,\ 3)\cdot(x + 1,\ y - 6) = 0$$

$$-2(x + 1) + 3(y - 6) = 0$$

ó bien

$$2x - 3y + 20 = 0$$

Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro sobre la recta $2x + y - 14 = 0$ y que pasa por las intersecciones de las circunferencias

C_1: $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ y C_2: $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$

SOLUCIÓN

La circunferencia buscada C_3 es un elemento de la familia

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 + k(x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8) = 0$$

en donde el parámetro k se determina por la condición de que el centro de C_3 está sobre la recta $2x + y - 14 = 0$.

Hallemos el centro de cualquier circunferencia de la familia dada, este es:

$$C\left(\frac{4+2k}{1+k} , \frac{2-2k}{1+k}\right)^{(*)}$$

como estas coordenadas deben satisfacer la ecuación de la recta tenemos:

$$2\left(\frac{4+2k}{1+k} , \frac{2-2k}{1+k}\right) - 14 = 0$$

de donde $\quad k = -\frac{1}{3}$

Sustituyendo este valor de k en la ecuación (que representa a la familia de las circunferencias) y simplificando obtenemos para C_3 la ecuación:

$$C_3: \ 2x^2 + 2y^2 - 20x - 16y + 41 = 0$$

en un mismo eje coordenado trace las gráficas de C_1, C_2, C_3 para verificar que C_3 es efectivamente la circunferencia buscada.

(*) Estas coordenadas se encuentran desarrollando y agrupando adecuadamente los términos de la familia de las circunferencias (¡hágalo!)

Hallar la ecuación de la esfera que pasa por los puntos P(1, 0, 1), Q(-1, 2, 3) y R(-3, 1, 1), y cuyo centro está sobre el plano xy.

SOLUCIÓN

Como el centro de la esfera está en el plano xy, sus coordenadas son de la forma:

$$C(a,\ b,\ 0)$$

por lo que

$$|\overline{CP}| = \sqrt{(a-1)^2 + (b-0)^2 + (0-1)^2}$$

$$|\overline{CQ}| = \sqrt{(a+1)^2 + (b-2)^2 + (0-3)^2}$$

$$|\overline{CR}| = \sqrt{(a+3)^2 + (b-1)^2 + (0-1)^2}$$

Ahora, como $\overline{CP} = \overline{CQ} = \overline{CR} = r$ (r = radio de la esfera), tendremos:

$$\sqrt{(a-1)^2 + (b-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (b-2)^2 + (0-3)^2}$$

elevando a ambos miembros de la igualdad al cuadrado, y realizando las operaciones indicadas se llega a la ecuación.

$$a - b = -3$$

pero, también tenemos la igualdad

$$\sqrt{(a+1)^2 + (b-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(a+3)^2 + (b-1)^2 + (0-1)^2}$$

que al hacer las operaciones indicadas, nos da la ecuación

$$4a + 2b = 3$$

resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2a - 2b = -6 \\ 4a + 2b = 3 \end{cases}$$

encontramos que $a = -1/2$ y $b = \frac{5}{2}$, luego el centro de la esfera tiene coordenadas $C(-1/2, 5/2, 0)$ y $r = \frac{\sqrt{38}}{2}$ por tanto, la ecuación de la esfera es:

$$(x + 1/2)^2 + (y - 5/2)^2 + z^2 = \frac{38}{4}$$

4.- Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 5 = 0$$

en el punto $P(1, 2, -2)$.

SOLUCIÓN

La ecuación de la esfera, también puede escribirse como

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 1$$

por lo que su centro tiene coordenadas

$$C(1, 2, -1)$$

entonces el vector normal al plano será

$$\vec{n} = \overrightarrow{PC} = (0, 0, -1)$$

y como la ecuación del plano está dada por la ecuación

$$ax + by + cz + k = 0, \text{ donde } \vec{n} = (a, b, c)$$

entonces la ecuación del plano buscado será

$$-z + k = 0$$

como P(1, 2, -2) también pertenece al plano, tenemos

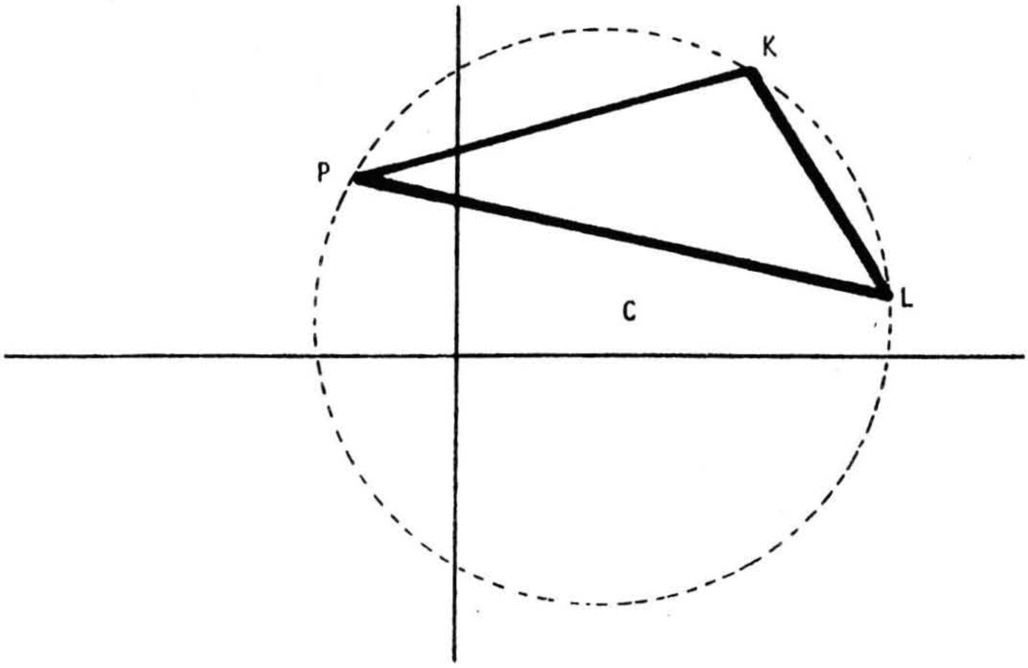
$$-(-2) + k = 0 \quad ; \quad k = -2$$

por tanto, la ecuación del plano buscado es:

$$z + 2 = 0$$

Haga una interpretación geométrica de este resultado.

5.- Las vértices de un triángulo con L = (12, 2), P(-3, 5) y K = (8,8). Calcular las coordenadas del centro de la circunferencia circunscrita y la longitud del radio.



Si $C = (x, y)$ es el centro de la circunferencia circunscrita, se deben cumplir las siguientes identidades:

$$d(C,L) = d(C,L) \qquad (1)$$

y

$$d(C,K) = d(C,P) \qquad (2)$$

Calculemos estas distancias

$$d(C,L) = \sqrt{(x-12)^2 + (y-2)^2} \qquad (\ C = (x,y),\quad L = (12,2)\ )$$

$$d(C,K) = \sqrt{(x-8)^2 + (y-8)^2} \qquad (\ C = (x,y),\quad K = (\ 8,8)\ )$$

$$d(C,P) = \sqrt{(x-(-3))^2 + (y-5)^2} \qquad (\ C = (x,y),\quad P = (-3,5)\ )$$

Así (1) y (2) vienen a ser

$$\sqrt{(x-12)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + (y-8)^2} \qquad (1)$$

$$\sqrt{(x-\ 8)^2 + (y-8)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-5)^2} \qquad (2)$$

y elevando al cuadrado obtenemos

$$(x-12)^2 + (y-2)^2 = (x-8)^2 + (y-8)^2 \qquad (1)$$

$$(x-\ 8)^2 + (y-8)^2 = (x+3)^2 + (y-5)^2 \qquad (2)$$

$$x^2-24x+144+y^2-4y+4 = x^2-16x+64+y^2-16y+64 \qquad (1)$$

$$x^2-16x+\ 64+y^2-16y+64 = x^2+6x+9+y^2-10y+25 \qquad (2)$$

$$-24x - 4y + 148 = -16x - 16y + 128 \qquad (1)$$

$$-16x - 16y + 128 = \ 6x - 10y + \ 34 \qquad (2)$$

$$- 8x + 12y = -16 \qquad (1)$$

$$-22x - 6y = -94 \qquad (2)$$

Multiplicamos la ecuación (2) por 2 para obtener

$$- 8x + 12y = - 16 \qquad (1)$$

$$-44x - 12y = -188 \qquad (2)$$

Ahora sumémosle a la ecuación (2) la ecuación (1),

$$- 8x + 12y = - 16 \qquad (1)$$

$$-52x = -204 \qquad (2)$$

De la ecuación (2) $-52x = -204$, $\qquad x = \frac{-204}{-52} = \frac{51}{13}$

De la ecuación (1) $-8x + 12y = -16 \qquad 12y = -16 + 8x$

$$y = \frac{-16 + 8\left(\frac{51}{13}\right)}{12} = \frac{-16 + \frac{408}{13}}{12}$$

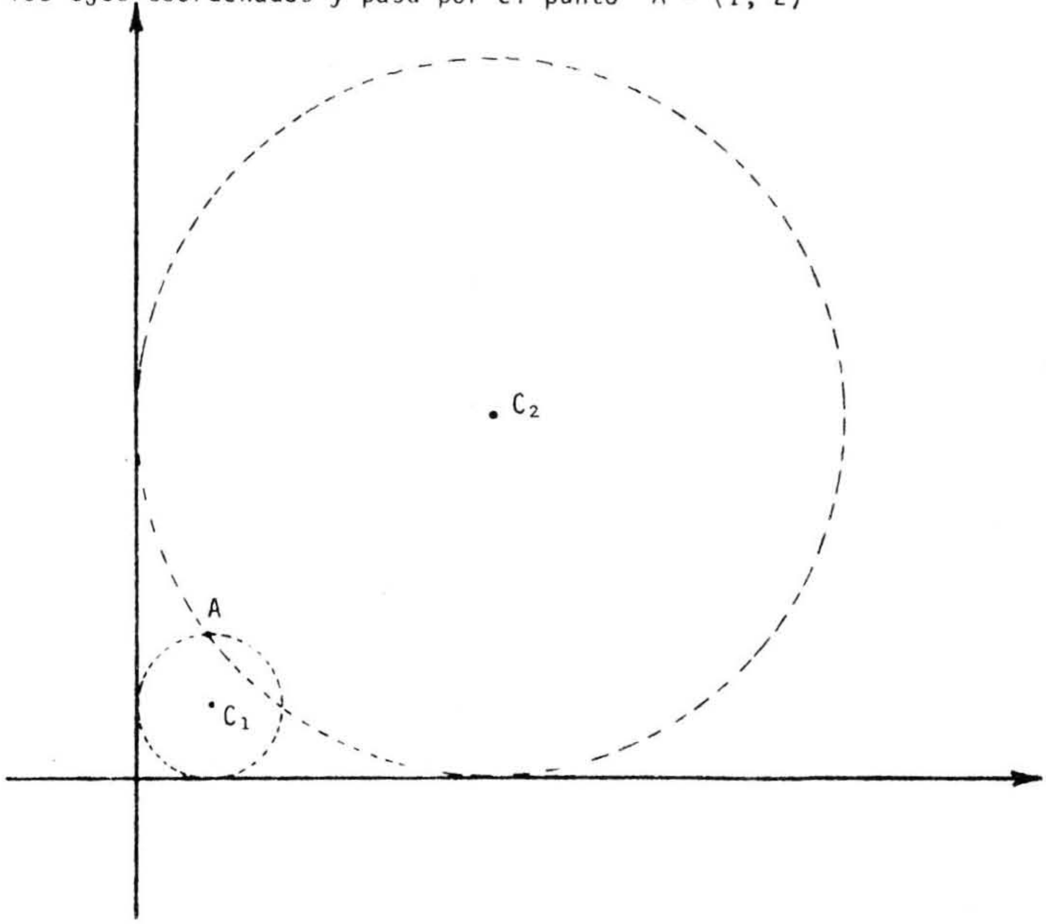
$$y = \frac{\frac{-208 + 408}{13}}{12} = \frac{200}{12.13} = \frac{50}{3.13}$$

$$y = \frac{50}{39}$$

Así pues el centro $C = (x, y)$ de la circunferencia circunscrita es:

$$C = \left(\frac{51}{13} , \frac{50}{39} \right)$$

6.- Encontrar el centro $C = (x, y)$ de la circunferencia que es tangente a los ejes coordenados y pasa por el punto $A = (1, 2)$



Hay dos soluciones C_1 y C_2 como puede verse en la figura de arriba. Plantearemos el problema: Si $C = (x, y)$ es el centro de la circunferencia pedida, C debe equidistar del eje Y y del punto $A = (1, 2)$, es decir,

$$d(C, A) = \text{distancia de } C \text{ al eje "Y"}$$

$$d(C, A) = \text{distancia de } C \text{ al eje "X"}$$

pero,

distancia de C al eje "Y" = X,

distancia de C al eje "X" = Y y

$$d(C, A) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

por tanto,

$$Y = x \qquad y$$

$$Y = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

ó

$$Y = x \qquad y$$

$$Y^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

$$Y = x$$

$$Y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4$$

$$Y = x$$

$$0 = x^2 - 2x + 1 - 4x + 4$$

$$Y = x \qquad (1)$$

$$0 = x^2 - 6x + 5 \qquad (2)$$

y las soluciones a la segunda ecuación son:

$$x_1 = 1 \qquad y \qquad x_2 = 5$$

y de la primera ecuación

$$Y_1 = 1 \qquad y \qquad Y_2 = 5$$

de donde las dos soluciones

$C_1 = (1, 1)$ y

$C_2 = (5, 5)$

7.- Una cuerda de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ está sobre la recta cuya ecuación es $x - 7y + 25 = 0$. Hállese la longitud de la cuerda.

SOLUCIÓN

Sean (x_1, y_1) un punto de intersección, entonces $x_1 - 7y_1 + 25 = 0$

Sustituyendo $x_1 = 7y_1 - 25$ en la ecuación de la circunferencia queda

$(7y_1 - 25)^2 + y_1^2 = 25$

$49y_1^2 - 350y_1 + 625 + y_1^2 = 25$

$50y_1^2 - 350y = -600$

$y_1^2 - 7y + 12 = 0$

$$y_1 = \frac{+7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{+7 \pm 1}{2}$$

$y_1 = \frac{+6}{2} = +3$ $\qquad$ $x_1 = +21 - 25 = -4$

$y_2 = +4$ $\qquad$ $x_2 = +28 - 25 = 3$

$$|\overline{P_1P_2}| = \text{longitud de la cuerda} = \sqrt{(3 + 4)^2 + (4 - 3)^2}$$

$$= \sqrt{50} = 7.07$$

8.- Una circunferencia pasa por los puntos $A(-3, 3)$ y $B(1, 4)$ y su centro está sobre la recta $3x - 2y - 23 = 0$. Hállese su ecuación.

SOLUCIÓN:

Si el centro es (h, k) entonces $3h - 2k - 23 = 0$ y de la ecuación general de la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, resulta que

$(-3 -h)^2 + (3 - k)^2 = r^2$ I

$(1 - h)^2 + (4 - k)^2 = r^2$ II

desarrollando obtenemos

$+9+6h+h^2+9-6k+k^2 = 18+6h-6k+h^2+k^2 = r^2$

$1-2h+h^2+16-8k+k^2 = 17-2h-8k+h^2+k^2 = r^2$

de aquí que $18+6h-6k+h^2+k^2 = 17-2h-8k+h^2+k^2$

$8h+2k+ 1 = 0$ y

$3h-2k-23 = 0$

Resolviendo resulta $h = 2$ y $k = -\frac{27}{2}$

sustituyendo en I resulta $r^2 = \frac{629}{4}$

y por tanto la ecuación deseada es $(x - 2)^2 + (y + \frac{27}{2})^2 = \frac{629}{4}$

9.- La ecuación de una circunferencia es $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia que pasa por el punto $P = (3, 3)$.

SOLUCIÓN

El centro es $C = (-2, 3)$.

Sabemos que la tangente en P_0 y el radio vector CP_0 son perpendiculares entonces

$$P\,P_0 \cdot CP_0 = 0$$

$$(x_0-3,\ y_0-3)\cdot(x_0+2,\ y_0-3) = 0$$

$$(x_0-3)\ (x_0+2) + (y_0-3)\ (y_0-3) = 0$$

$$= x_0^2 - x_0 - 6 + y_0^2 - 6y_0 + 9 = 0$$

$$= x_0^2 + y_0^2 - x_0 - 6y_0 + 3 = 0$$

$$- (x_0^2 + 4x_0 + 4) + (y_0^2 - 6y_0+9) - 5x_0 - 10 = 0$$

$$= (x_0+2)^2 + (y_0-3)^2 -5x_0-10 = 0$$

$$= 5-5x_0-10 = -5x_0-5$$

$$x_0 = -1$$

$$1 + (y-3)^2 = 5$$

$$y^2 - 6y + 10 = 5$$

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$(y-5)(y-1) = 0$$

$$y = 5$$

$$y = 1$$

$$P_0(-1,\ 5),\quad P_0^1(-1,\ 1)$$

Las rectas tangentes son $(3,3) + t(-4,\ 2)$ y $(3,\ 3) + S(-4,\ -2)$.

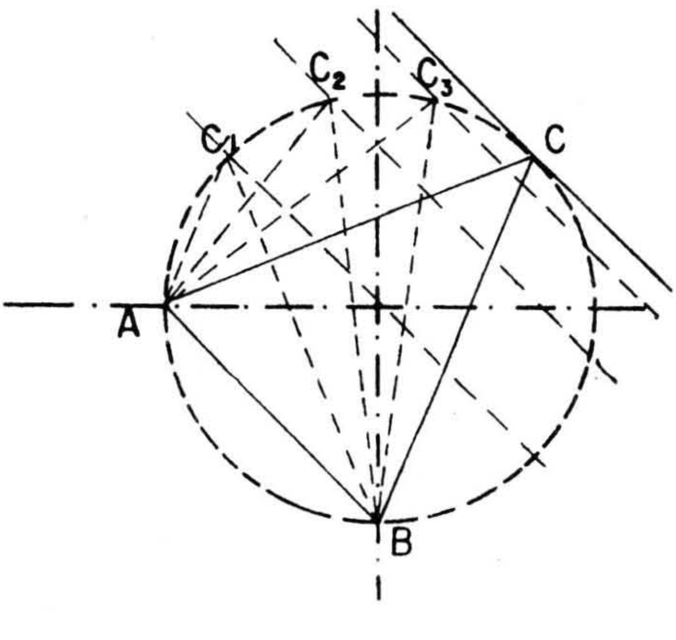
10.- Una recta es tangente a un círculo de centro en el orígen y radio 3. Si el punto de tangencia es $(2, -\sqrt{5})$ hállese la ecuación de la tangente.

SOLUCIÓN

La recta tangente pasa por $(2, -\sqrt{5})$ y es perpendicular al vector $(2, -\sqrt{5})$. Es decir la tangente es $y + \sqrt{5} = m_1(x-2)$ con la condición que $m_1 m_2 = -1$, siendo $m_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, la pendiente de la recta que pasa por $(0, 0)$ y $(2, -\sqrt{5})$. Entonces $m_1 = +\frac{2}{\sqrt{5}}$

$$y + \sqrt{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}(x-2)$$

11.- Consideremos los puntos $A + (-1, 0)$ y $B = (0, -1)$. A y B son puntos del círculo $x^2 + y^2 = 1$. Si consideramos un tercer punto $C = (x, y)$ también en éste círculo, estos determinan un triángulo inscrito en éste círculo. La pregunta es: entre todos los triángulos ΔABC inscritos en éste círculo, cuál será el que tiene área máxima ?.



SOLUCIÓN

Sabemos por Geometría Elemental que el área de un triángulo es "base por altura sobre dos", siendo la base $\overline{AB}$ del ΔABC; fija, el triángulo del área máxima será aquel que tenga altura máxima, y la altura está dada por la distancia entre las paralelas, es decir por ejemplo para el triángulo ΔABC_1 la altura está dada por la distancia entre las rectas, una que pasa por A y B y la otra, paralela a la primera y que pasa por C_1; para el triángulo ΔABC_2 la altura es la distancia entre las paralelas, una que pasa por A y B y la otra, la paralela que pasa por C_2, etc. La figura anterior sugiere que la altura máxima se obtiene cuando la paralela a $\overline{AB}$ es tangente al círculo (punto C en la figura). Planteemos el problema analíticamente.

$$m_{AB} = \frac{-1-0}{0-(-1)} = -1,$$

luego la ecuación de las rectas paralelas al segmento $\overline{AB}$ es,

$$y = -x + b;$$

por otra parte, la ecuación del círculo es

$$x^2 + y^2 = 1$$

y lo que se quiere es encontrar un punto $C = (x, y)$ único de coordenadas positivas que satisfaga las ecuaciones

$$y = -x + b \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (2) \ ;$$

sustituyendo (1) en (2) nos queda la ecuación

$$(-x + b)^2 + x^2 = 1 \qquad (2')$$

$$x^2 - 2bx + b^2 + x^2 = 1 \qquad (2')$$

$$2x^2 - 2bx + b^2 - 1 = 0 \qquad (2')$$

Por tanto para que la ecuación $2x^2 - 2bx + b^2 - 1 = 0$ tenga una única raíz es necesario que su discriminante Δ sea cero, es decir

$$\Delta = (-2b)^2 - 4(2)(b^2-1) = 4b^2 - 8(b^2-1)$$

$$= 4b^2 - 8b^2 + 9 = -4b^2 + 8,$$

tiene que ser cero, lo cual se tiene solo si $b = -\sqrt{2}$ ó $b = \sqrt{2}$
Sustituyendo $b = \sqrt{2}$ en (2') tenemos

$$2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0,$$

cuya solución positiva es

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{y como} \quad y = -x + \sqrt{2} \quad \text{(ecuación (1))},$$

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \frac{-\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

por tanto

$$C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

(¿ Qué significado tiene $b = -\sqrt{2}$?).

12.- Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos, cuyo cuadrado de su distancia al punto (1, 2) es siempre igual al doble de su distancia de la recta $3x + 4y - 1 = 0$

SOLUCIÓN

Sean $P(x,y)$ un punto arbitrario del lugar geométrico.

$F(1,2)$ el punto fijo, ℓ la recta dada, entonces P cumple con:
$d^2(P,F = 2d(P,\ell)$

$$\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}\right)^2 = 2\,\frac{3x + 4y - 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{2}{5}(3x+4y-1)$$

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4 = \frac{6x+8y-2}{5}$$

$$5x^2-10x+5y^2-20y+25 = 6x+8y-2$$

$$5x^2-16x+5y^2-28y = -27$$

$$5(x^2 - \frac{16}{5}x) + 5(y^2 - \frac{28}{5}y) = -27 \qquad \text{completando cuadrados}$$

$$5(x^2 - \frac{16}{5}x + (\frac{8}{5})^2) + 5(y^2 - \frac{28}{5}y + (\frac{14}{5})^2) = -27 + \frac{64}{5} + \frac{196}{5}$$

$$5(x - \frac{8}{5})^2 + 5(y - \frac{14}{5})^2 = \frac{135}{5} + \frac{64}{5} + \frac{196}{5} = \frac{125}{5} = 25$$

$$(x - \frac{8}{5})^2 + (y - \frac{14}{5})^2 = 5$$

Se trata de una circunferencia de centro en $C(\frac{8}{5}, \frac{14}{5})$ & radio $r = \sqrt{5}$

13.- Graficar y hallar la intersección de las circunferencias

$$x^2 + y^2 + 4y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y + 16 = 0$$

SOLUCIÓN

Un punto estará en la intersección de las circunferencias si está en ambas circunferencias y un punto estará en ambas circunferencias si satisface ambas ecuaciones, luego para hallar los puntos de intersección hay que resolver el sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + 4y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{I}$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 8y + 16 = 0 \quad \ldots\ldots \quad \mathrm{II}$$

Multiplicando por (-1) la ecuación I y sumando con II

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x + 8y + 16 = 0 \\ \underline{-x^2 - y^2 \qquad\quad - 4y \qquad\quad = 0} \\ - 4x + 4y + 16 = 0 \end{array}$$

$-x + y + 4 = 0$; $y + 4 = x$ sustituyendo en I

$(y + 4)^2 + y^2 + 4y = 0$

$y^2 + 8y + 16 + y^2 + 4y - 0$; $2y^2 + 12y + 16 = 0$

$y + 6y + 8 = 0$; $(y + 4)(y + 2) = 0$

$y_1 = -4$

$y_2 = -2$

Como $x = y + 4$ sustituyendo y_1, y_2 obtenemos x_1, x_2

$x_1 = y_1 + 4 = -4 + 4 = 0$ $\qquad\qquad$ $x_1 = 0$

$x_2 = y_2 + 4 = -2 + 4 = 2$ $\qquad\qquad$ $x_2 = 2$

Así las circunferencias se intersectan en dos puntos

$(0, -4) \quad ; \quad (2, -2)$

La gráfica la podemos obtener determinando el centro y radio de cada circunferencia.

$x^2 + y^2 + 4y = 0$ $\qquad\qquad$ $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 16 = 0$

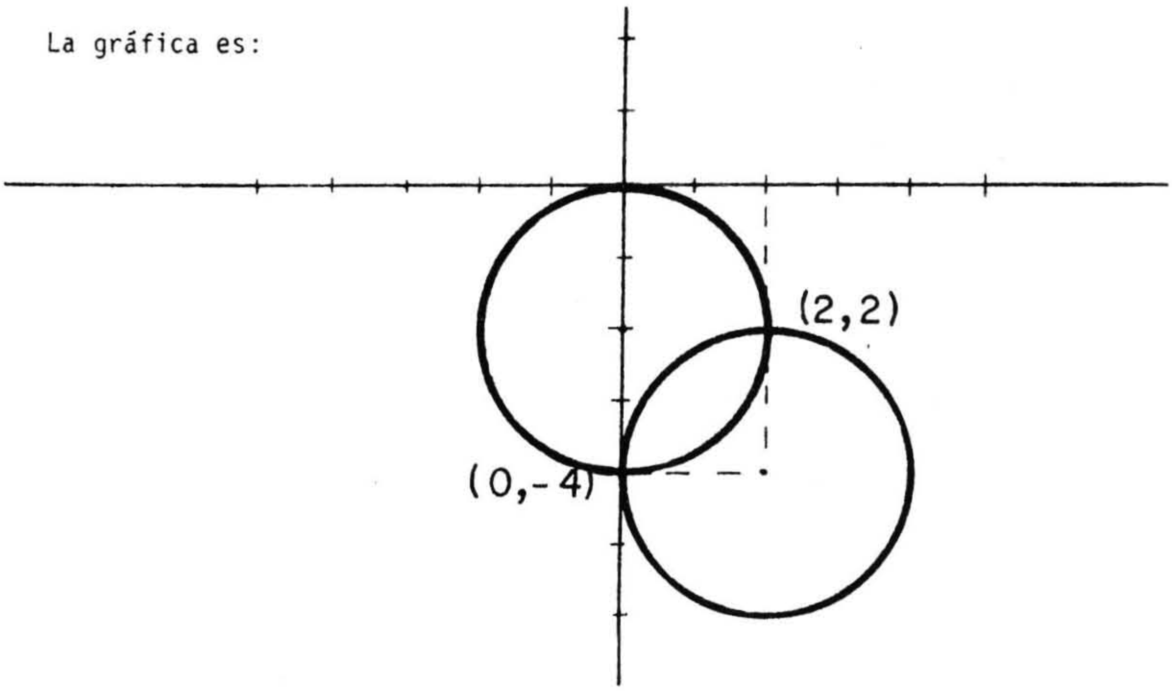
$x^2 + y^2 + 4y + 2^2 = 2^2$ $\qquad\qquad$ $x^2 - 4x + y^2 + 8y = -16$

$x^2 + (y + 2)^2 = 2^2$ $\qquad\qquad$ $x^2 - 4x + 2^2 + y^2 + 8y + 4^2 = -16+4+16$

$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 4$

$C(0, -2) \quad r = 2$ $\qquad\qquad$ $C(2, -4) \;; \; r = 2$

La gráfica es:



1. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes trazadas del punto (1,4) a la parábola $y^2 + 3x - 6y + 9 = 0$

SOLUCIÓN

La ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto (1,4) es

$$y - 4 = m(x-1) \qquad ó \qquad y = mx - m + 4$$

donde el parámetro m es la pendiente de la tangente buscada.

Al sustituir el valor de y en la ecuación de la parábola nos queda

$$(mx - m + 4)^2 + 3x - 6(mx - m + 4) + 9 = 0$$

esta ecuación se reduce a la siguiente

$$m^2x^2 + (-2m^2 + 2m + 3)x + (m^2 - 2m + 1) = 0$$

que es una ecuación de segundo grado en x, para que haya tangencia se debe tener

$$(-2m^2 + 2m + 3)^2 - 4(m^2)(m^2 - 2m + 1) = 0$$

Resolviendo esta ecuación se tiene que

$$m_1 = \frac{3}{2} \qquad y \qquad m_2 = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, las ecuaciones de las rectas tangentes buscadas son

$$y - 4 = \frac{3}{2}(x-1), \quad y \quad y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 1) \qquad ó \text{ también}$$

$$3x - 2y + 5 = 0 \qquad y \qquad x + 2y - 9 = 0$$

Haga una interpretación geométrica de este resultado.

2. La ecuación de una familia de parábolas es $y = ax^2 + bx$. Hallar la ecuación del elemento de la familia que pasa por los puntos $p(2,8)$ y $Q(-1,5)$.

SOLUCIÓN

Si la parábola pasa por $p(2,8)$, se tiene la ecuación

$$8 = 4a + 2b$$

de la misma forma, al pasar por $Q(-1,5)$ se tendrá

$$5 = a - b$$

por lo que al resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4a + 2b &= 8 \\ 2a - 2b &= 10 \end{aligned}$$

se tiene que $a = 3$, $b = -2$

por tanto, la ecuación buscada es

$$y = 3x^2 - 2x$$

3. Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje focal es paralelo al eje x & que pasa por los puntos (0, 0); (8, -4); (3, 1)

SOLUCIÓN

Por ser el eje focal paralelo al eje x la ecuación será de la forma:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Como los tres puntos están en la parábola sus coordenadas deben de satisfacer la ecuación, por lo tanto

Para $(0,\ 0)$ se tiene $\quad 0^2 + D(0) + E(0) + F = 0$

Para $(8,-4)$ se tiene $(-4)^2 + D(8) + E(-4) + F = 0$

Para $(3,\ 1)$ se tiene $(\ 1)^2 + D(3) + E(1\ ) + F = 0$

luego $F = 0$ & $\quad \begin{aligned} 8D - 4E &= -16 \\ 3D + E &= -1 \end{aligned}$

Solucionando el sistema:

$$\begin{array}{rcl} 8D - 4E & = & -16 \\ \underline{12D + 4E} & \underline{=} & \underline{-\ 4} \\ 20D & = & -20 \end{array} \qquad D = -1 \quad ; \quad E = 2$$

Así la ecuación buscada es

$$y^2 - x + 2y = 0$$

Que en su forma ordinaria se expresa como:

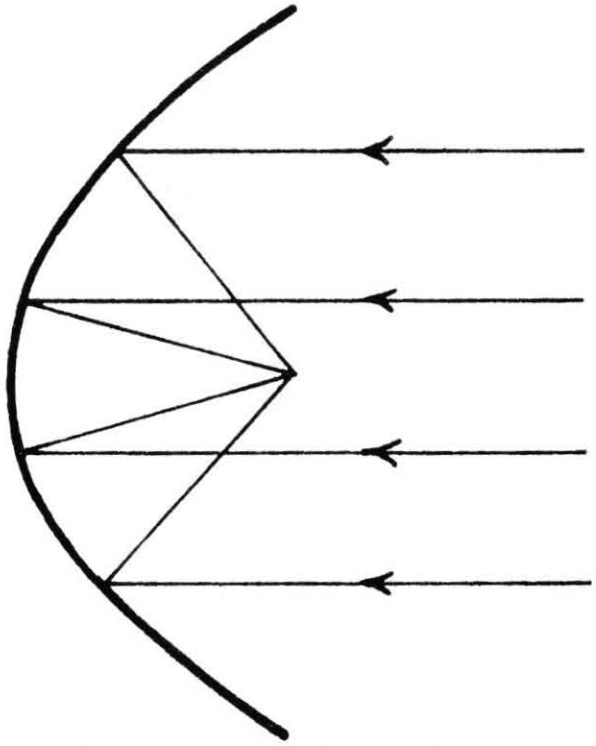
$$y^2 + 2y = x$$

$$y^2 + 2y + 1 = x + 1$$

$$(y + 1)^2 = x + 1$$

4. Los gigantescos telescopios de Australia (Parkes), Inglaterra -------- (Jodrell Bank) entre otros son telescopios reflectores que trabajan mediante concentración de ondas de radio paralelas y débiles en un punto focal.

La figura ilustra la situación



Veamos el por qué de una parábola (y por lo tanto un paraboloide).

Recuerda el principio de reflexión de la luz.

1.- Considérese la parábola $y^2 = 4Px \qquad P > 0.$

2.- Sea ℓ_1 la recta paralela al eje focal (eje x's) que intersecta a la parábola en el punto $A(x_1, y_1)$.

3.- Traza la recta tangente ℓ_2 a la parábola en A.

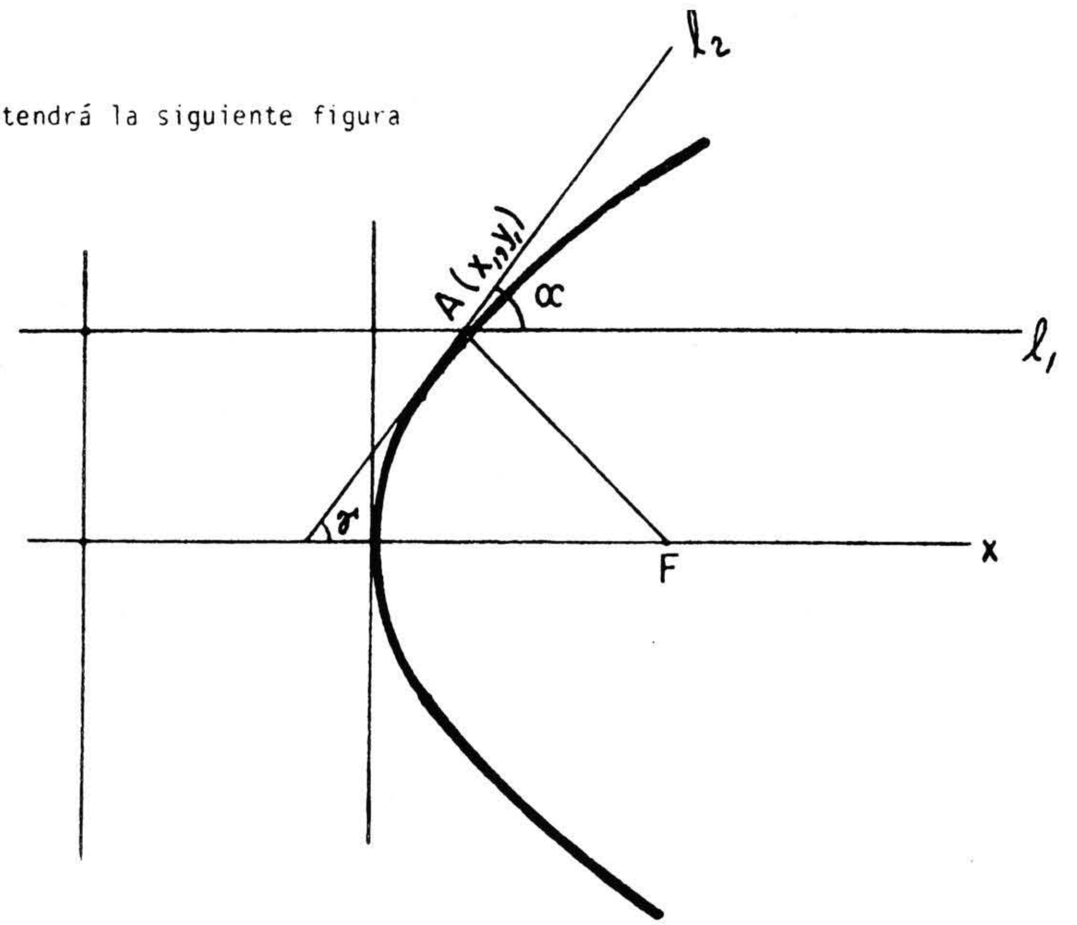
4.- Sean α el ángulo entre ℓ_1 & ℓ_2

β el ángulo entre ℓ_2 & $\overline{AF}$ con F el foco de la parábola

γ el ángulo entre ℓ_2 & el eje focal.

$\gamma = \alpha$ Ya que ℓ_1 es paralela al eje (x's).

Se tendrá la siguiente figura



5.- Sea B el punto de intersección de la tangente & el eje x's.

$B(-x_1, 0)$ Demostrarlo.

6.- Sea C el punto de intersección de ℓ_1 y la directríz de la parábola

$C(-P, y_1)$

Coloca los puntos B & C en la figura.

luego $d(A,C) = x_1 + P$

$d(B,F) \quad x_1 + P$

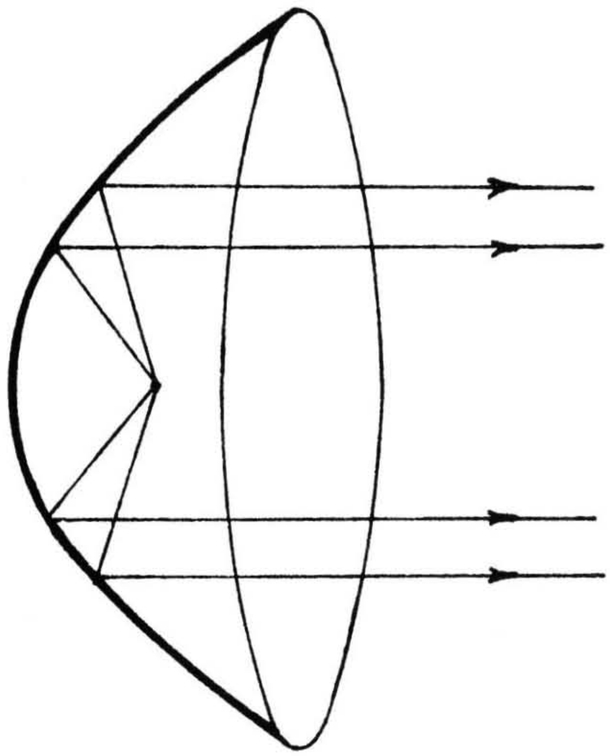
Como $d(A,F) = d(A,C)$ ya que se trata de una parábola

$d(A,F) = d(B,I)$ $\quad \Delta ABF$ es isósceles

de donde $B = \imath$ llegando $\alpha = \beta$.

Así todas las ondas que son paralelas al eje y que incidan en la parábo_ la se reflenarán pasando por el foco.

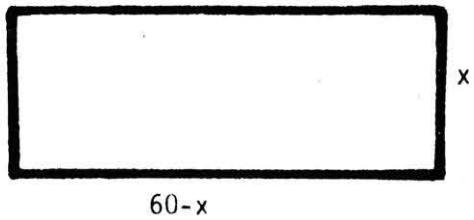
Esta propiedad de reflexión de las parábolas se usa inversamente en los faros de los automóviles colocando un pequeño foco eléctrico en el "foco" eléctrico de un paraboloide reflejando un haz de rayos (casi) paralelos.



5. Se tiene malla para cercar un terreno rectangular por 120 m. Si y es el área & x es uno de los lados del rectángulo se tiene: $y = 60x - x^2$. Trazar la gráfica de esta ecuación. ¿ Qué valores de x son aceptables para la realidad ? ¿ Para que valor de x se tiene el área máxima ?

SOLUCIÓN:

Si y es el área & x un lado entonces:



$y \quad x(60-x)$

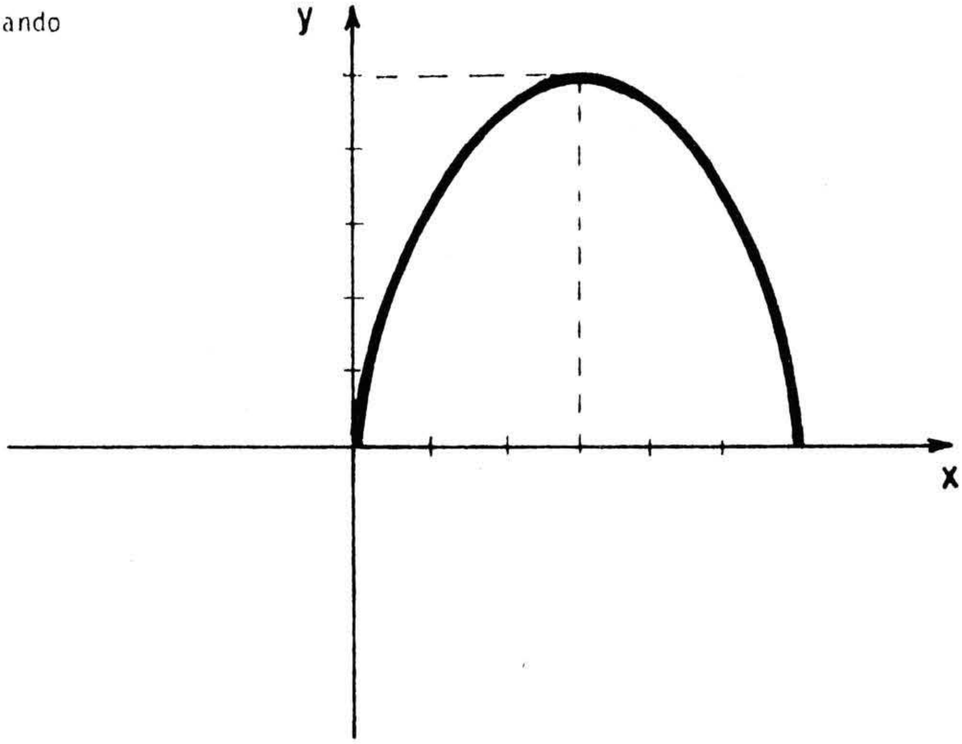
$y = 60x - x^2$

$y = 60x - x^2 = -(x^2 - 60x)$

$y - 30^2 = -(x^2 - 60x + 30^2) = -(x-30)^2$

$y - 900 = -(x-30)^2$ se trata de una parábola de vértice $v(30,900)$.

Graficando



Los valores aceptables para x son $0 \cdot x \cdot 60$

El área máxima es 900, que corresponde a un cuadrado de lado 30.

¿Esto se deduce de la gráfica?.

6. Una parábola cuyo vértice está en el orígen y cuyo eje coincide con el eje x pasa por el punto (-2,4). Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, la ecuación de la directríz y la longitud de su lado recto.

SOLUCIÓN

$y^2 = 4px$ es la forma de la parábola que deseamos

$16 = 4p(-2)$ $\quad p = -2$ $\quad$ El foco es (-2,0); la ecuación de la directríz es $x = 2$. La longitud del lado recto es 8.

7. Una cuerda de la parábola $y^2 - 4x = 0$ es un segmento de la recta $x - 2y + 3 = 0$. Hallar su longitud.

SOLUCIÓN

Una cuerda es el segmento de recta que une dos puntos de la parábola.

Como $x = 2y - 3$,

$y^2 = 4x = 4(2y - 3) = 8y - 12$

$y^2 - 8y + 12 = 0$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}$$

$$y = 6 \qquad\qquad y = +2$$

$x_1 = 12 - 3 = 9$ $\quad$ y $\quad$ $x_2 = +4 - 3 = 1$

(9,6) y (1,+2). La distancia entre ambos es la longitud deseada

$\ell = \sqrt{(9-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = \sqrt{16x5} = 4\sqrt{5}$

9. Dados los puntos A(-2,0) B(0,3) C(1,0) escriba una ecuación para la parábola vertical a través de ellos

SOLUCIÓN

Es vertical, $(x-h)^2 = 4p(y-k)$. Formamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, h, k, + p

$(-2-h)^2 = 4p(-k) \quad h^2 = 4p(3-k) \quad (+1-h)^2 = 4p(-k)$

$4+4h+h^2 = 1 - 2h+h^2 6h = -3, \quad h = -\frac{1}{2}$

$-4pk = \frac{9}{4} = \quad pk = -\frac{9}{16} \qquad p = \frac{1}{48} - \frac{3}{16} = \frac{1}{48} - \frac{9}{48} = -\frac{1}{6}$

$k = \frac{54}{16} = \frac{27}{8} \qquad (x + \frac{1}{2})^2 = 4(-\frac{1}{6})(y - \frac{27}{8}).$

COMPROBACIÓN

$\frac{1}{4} = 4(-\frac{1}{6})(-\frac{3}{8}) = \frac{12}{48}$

1.- Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al eje y es siempre igual al doble de su distancia del punto (3,2).

SOLUCIÓN

Sean: P(x,y) un punto cualesquiera del lugar geométrico

d(P,Y) distancia de P al eje Y

El enunciado dado matemáticamente se expresa como:

$$d(P,Y) = 2d(P,F)$$

$$|x| = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$$ Elevando al cuadrado

$$x^2 = 4[(x-3)^2 + (y-2)^2]$$

$$x^2 = 4\ (x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4)$$

$$x^2 = 4x^2 - 24x + 4y^2 - 16y + 52$$

$$0 = 3x^2 - 24x + 4y^2 - 16y + 52$$

$$3(x^2 - 8x) + 4(y^2 - 4y) = -52$$ Completando cuadrados

$$3(x^2 - 8x + 4\ ) + 4(y^2 - 4y + 2^2) = -52 + 48 + 16$$

$$3(x-4)^2 + 4(y-2)^2 = 12$$

$$\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$$

Luego se trata de una elipse de centro en (4, 2) y ejes paralelos a los ejes coordenados.

2.- Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los puntos (-6, 4) (-8, 1); (2, -4); (8, -3).

SOLUCIÓN

La ecuación será de la forma:

$$x^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Como los puntos dados deben de satisfacer la ecuación se tiene:

$(-6, 4)$; $36 + 16B - 6D + 4E + F = 0$

$(-8, 1)$; $64 + B - 8D + E + F = 0$

$(2, -4)$; $4 + 16B + 2D - 4E + F = 0$

$(8, -3)$; $64 + 9B + 8D - 3E + F = 0$

Luego hay que resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 16 & -6 & 4 & 1 & -36 \\ 1 & -8 & 1 & 1 & -64 \\ 16 & 2 & -4 & 1 & -4 \\ 9 & 8 & -3 & 1 & -64 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 1 & 1 & -64 \\ 0 & 8 & -8 & 0 & 32 \\ 0 & 130 & -20 & -15 & 1020 \\ 0 & 80 & -12 & -8 & 512 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 & -32 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 26 & -4 & -3 & 204 \\ 0 & 0 & 68 & -8 & 192 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 & -32 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 22 & -3 & 100 \\ 0 & 0 & 17 & -2 & 48 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 & -32 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 374 & -51 & 1700 \\ 0 & 0 & -374 & 44 & -1056 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 & -32 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 22 & -3 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 644 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 & -32 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 22 & -3 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -92 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 22 & 0 & -176 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -92 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -92 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -92 \end{pmatrix}$$

$$B = 4 \quad ; \quad D = -4 \quad ; \quad E = -8 \quad ; \quad F = -92$$

Así la ecuación buscada es:

$$x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 92 = 0$$

que en su forma ordinaria queda como:

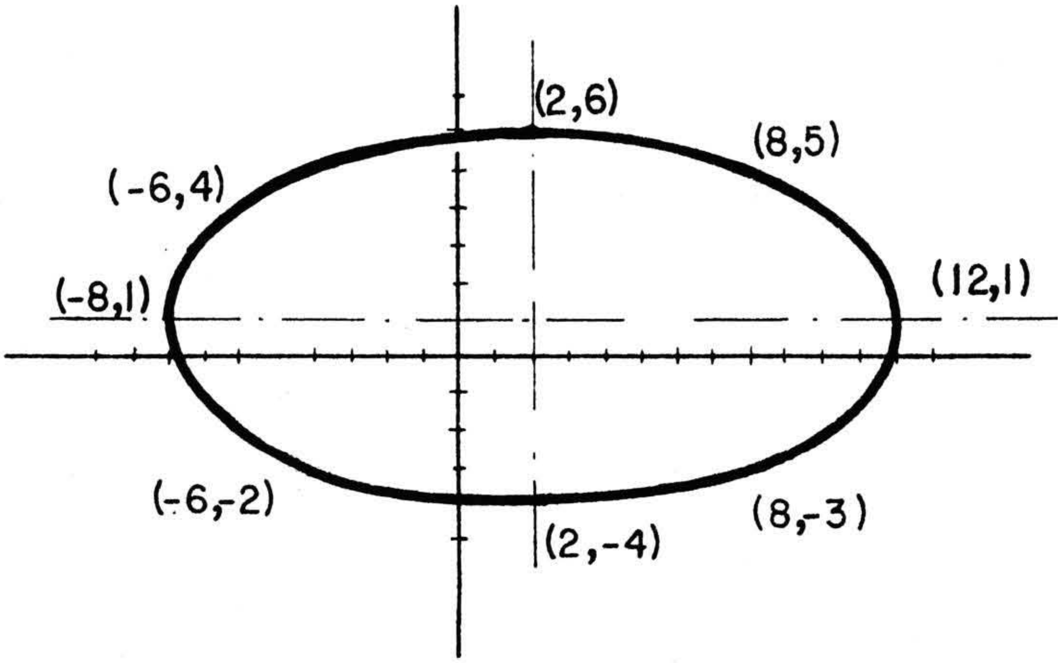
$$x^2 - 4x + 4y^2 - 8y = 92$$

$$x^2 - 4x + 2^2 + 4(y^2 - 2y + 1) = 92 + 4 + 4$$

$$(x-2)^2 + 4(y-1)^2 = 100$$

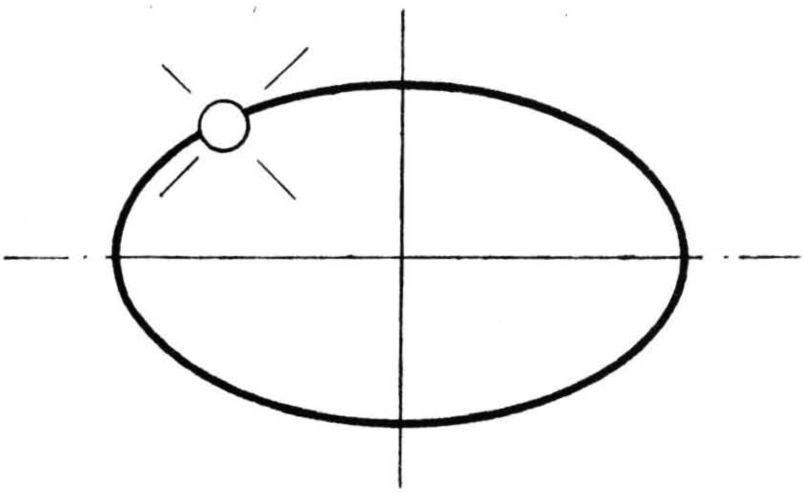
$$\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

La gráfica es:

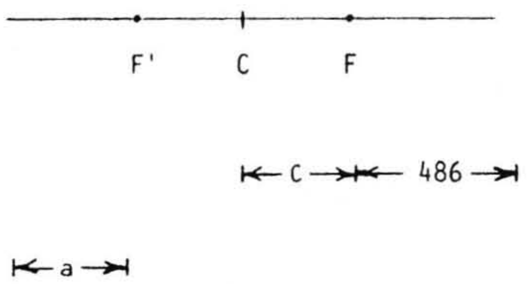


3.- Se ha colocado en órbita elíptica alrededor de la tierra un satélite, la tierra está en uno de los focos y la excentricidad de la elipse es $\frac{1}{3}$ - Si la misma distancia entre el satélite y la tierra es 486 Km encontrar la distancia máxima a la que se aleja el satélite de la tierra.

SOLUCIÓN



La distancia mínima y máxima serán cuando el satélite esté en los vértices de la elipse



Así necesitamos conocer a & C.

$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$; $a = 3C$

Además $a = C + 486$ $3C = C + 486$; $2C = 486$

$C = 243$

Así $a = 243 + 486 = 729$

luego distancia máxima será $d(\text{máx}) = a + C = 972$ Km

$d(\text{máx}) = 972$ Km.

4.- Hallar la ecuación de la elipse que tiene su centro en el orígen, uno de sus vértices en el punto (0, 7) y pasa por el punto ($\sqrt{5}$, 14/3)

SOLUCIÓN

La ecuación buscada es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{49}$$

Sustituyendo el punto ($\sqrt{5}$, 14/3)

$$\frac{5}{b^2} + \frac{\left(\frac{14}{3}\right)^2}{49} = \frac{5}{b^2} + \frac{\frac{7^2 x 2^2}{3^2}}{49} = \frac{5}{b^2} + \frac{2^2}{3^2} = 1$$

$$9x5 + 4b^2 = 9b^2$$

$45 = 5b^2$; $b^2 = 9$; $b = 3$ la ecuación es

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$$

5.- Elipsoide terrestre. Si uno considera al globo terrestre como un elipsoide de revolución en torno de la línea de los polos, uno tiene necesidad, en los cálculos geodésicos, de expresar ciertas líneas del elipsoide en función del radio ecuatorial a, de la excentricidad e y de la latitud l del punto que uno considera en la superficie. Sea ABA'B' la elipse meridiana,

OA = a su semieje mayor

OB = b su semieje menor

Sea M el punto que se considera, MT la tangente en ese punto, y MN la normal; ésta última intersecta al mayor en un punto n; y al eje menor en N; la longitud M_n es denominada la pequeña normal. La longitud MN la gran normal; las designaremos por n y N.

El ángulo MnX que hace la normal con el eje mayor es la latitud l del punto M.

La excentricidad e tiene el valor $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = e$

despejando $b = a\sqrt{1 - e^2}$

Si se baja la perpendicular MP sobre OA, y MQ sobre OB, la línea MQ, la línea OP, son los rayos de paralelismo sobre los cuales se sitúa el punto M.

La abscisa de este punto es x. Entonces

$\tan l = \frac{a^2 y}{b^2 x^2}$ Sustituyendo y por su valor $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

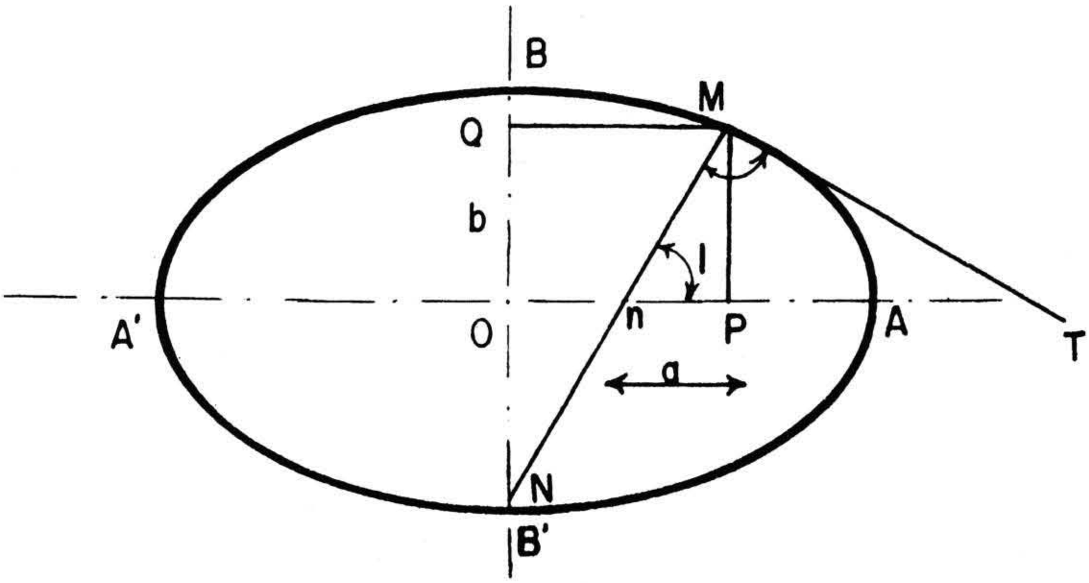
y resolviendo para x, se obtiene al reemplazarlo por su valor,

$$x = \frac{a \cos l}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 l}}$$

La gran normal se obtiene notando que en el triángulo MQN

$$MN = \frac{MQ}{\cos l} = \frac{x}{\cos l} \qquad N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sen}^2 l}}$$

Del valor de x, $\quad y = \dfrac{a(1-e^2)\operatorname{sen} l}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2 l}}$



6.- La ecuación de una familia de elipses es $kx^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$. Hallar las ecuaciones de aquellos elementos de la familia que tienen una excentricidad igual a 1/2.

SOLUCIÓN

La ecuación $kx^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$ también puede escribirse como

$$\frac{(x + \frac{3}{k})^2}{\frac{9(k + 1)}{k^2}} + \frac{(y - 1)^2}{\frac{9(k + 1)}{4k}} = 1 \qquad , \qquad k \neq 0.$$

entonces:

i) $a^2 = \dfrac{9(k + 1)}{k^2}$ y $b^2 = \dfrac{9(k + 1)}{4k}$ ó

ii) $a^2 = \dfrac{9(k + 1)}{4k}$ y $b^2 = \dfrac{9(k + 1)}{k^2}$

Si sucede (i), tenemos que:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{\frac{9(k+1)(4-k)}{4k^2}}}{\sqrt{\frac{9(k+1)}{k^2}}} = \frac{\sqrt{4-k}}{2}$$

y como $e = \frac{1}{2}$, entonces $k = 3$, por lo que la ecuación buscada es

$$3x^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$$

si sucede (ii), se tiene que

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{\frac{9(k-4)(k+1)}{4k^2}}}{\sqrt{\frac{9(k+1)}{4k}}} = \sqrt{\frac{k - 4}{k}} = \frac{1}{2}$$

de donde al hacer las operaciones indicadas, se encuentra que

$$k = \frac{16}{3}$$

por lo tanto, la otra ecuación de la familia es:

$$16x^2 + 12y^2 + 18x - 24y - 15 = 0$$

7.- Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los puntos $P(1, 1)$, $Q(2, 0)$, $R(-1, -1)$ y $S(0, -3)$ y tiene sus ejes paralelos a los coordenados.

SOLUCIÓN

La ecuación buscada es de la forma

y

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

como los cuatro puntos están sobre la elipse, sus coordenadas deben de satisfacer la ecuación antes dada. Por lo tanto, expresando esto, obtenemos las cuatro ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} (1, 1), & A + B + C + D + E = 0 \\ (2, 0), & 4A + 2C + E = 0 \\ (-1, -1), & A + B - C - D + E = 0 \\ (0, -3), & 9B - 3D + E = 0 \end{cases}$$

La solución de este sistema de ecuaciones nos da

$$A = 19,\ B = 11,\ C = -23,\ D = 23 \ \text{ y } \ E = -30$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación general de la elipse, obtenemos

$$19x^2 + 11y^2 - 23x + 23y - 30 = 0.$$

1.- Dar la ecuación de la hipérbola de centro en el orígen, un vértice en (4,0) si tiene una asíntota de ecuación $3x-4y = 0$

SOLUCIÓN

La ecuación será de la forma: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Así se necesita conocer a & b.

Como un vértice tiene coordenadas (4,0); a=4 ya que $3x-4y = 0$ es una asíntota

$3x = 4y$; $y = \frac{3}{4}x$ $\therefore$ $b = 3$

Así, la ecuación es: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

2.- Identificar y dar la ecuación del lugar geométrico de los puntos, cuya distancia al punto (0,5) sea igual a 4 veces su distancia a la recta $4y - 5 = 0$

SOLUCIÓN

Si P(x,y) es un punto cualquiera del lugar geométrico entonces se cumple que

$$d(P,F) = 4\, d(P,\ell) \qquad \text{con:}$$

$d(P,F)$ = la distancia de P al punto fijo F(0,5)

$d(P,\ell)$ = la distancia de P a la recta (fija) dada

$$x^2 + (y-5)^2 = 4\,\frac{|4y-5|}{4}$$

$$\sqrt{x^2 + (y-5)^2} = |4y-5| \qquad \text{elevando al cuadrado}$$

$$x^2 + (y-5)^2 = |4y-5|^2 \qquad \text{desarrollando}$$

$$x^2 + y^2 - 10y + 25 = 16y^2 - 40y + 25$$

$$x^2 - 15y^2 + 30y = 0$$

$$x^2 - 15(y^2 - 2y) = 0$$

$$x^2 - 15(y^2 - 2y + 1) = -15$$

$$x^2 - 15(y-1)^2 = -15$$

$$(y-1)^2 - \frac{x^2}{15} = 1$$

luego se trata de una hipérbola

3.- Identifica el lugar geométrico de los puntos cuya ecuación es:
$25x^2 - 4y^2 + 50x - 8y + 21 = 0$

SOLUCIÓN

$$25(x^2 + 2x) - 4(y^2 + 2y) = -21$$

$$25(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 + 2y + 1) = -21 + 25 - 4$$

$$25(x+1)^2 - 4(y+1)^2 = 0$$

$$25(x+1)^2 = 4(y+1)^2$$

$$5(x+1) = \pm 2(y+1)$$

$$y+1 = \pm \frac{5}{2}(x+1)$$

Así la ecuación representa dos rectas

4.- Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos (3,-2) y (7,6) tiene su centro en el orígen y el eje transverso coincide con el eje x.

SOLUCIÓN:

Recordando que eje transverso es el que une a los vértices; la ecuación tiene que ser de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \Longrightarrow 9b^2 - 4a^2 = a^2b^2$$

$$\frac{49}{a^2} - \frac{36}{b^2} = 1 \Longrightarrow 49b^2 - 36a^2 = a^2b^2$$

$$40b^2 - 32a^2 = 0$$

$$40b^2 = 32a^2$$

$$b^2 = \frac{8}{10}a^2 = \frac{4}{5}a^2$$

$$9(\frac{4}{5}a^2) - 4a^2 = a^2(\frac{4}{5}a^2)$$

$$9a^2 - 5a^2 = a^4$$

$$a^4 = 4a^2$$

$$a^2 = 0 \quad \text{ó} \quad a^2 = 4$$

$$b^2 = \frac{16}{5}$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{5y^2}{16} = 1$$

5.- Si k es un número cualquiera diferente de cero, demostrar que la ecuación $3x^2 - 3y^2 = k$ representa una familia de hiperbolas de excentricidad igual a $\sqrt{2}$

SOLUCIÓN:

Dividiendo entre k obtenemos $\frac{3x^2}{k} - \frac{3y^2}{k} = 1$. Por tanto representa una hipérbola con $a = b = \sqrt{\frac{k}{3}}$. Al variar k se obtienen diferentes hipérbolas, i.e. la ecuación representa una familia de hipérbolas. Su excentricidad

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2\frac{K}{3}}}{\frac{k}{3}} = \sqrt{2} > 1$$

6.- Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (4,6), tiene el eje focal paralelo al eje x, y sus asíntotas son las rectas
$2x + y - 3 = 0$ y $2x - y - 1 = 0$

SOLUCIÓN:

La ecuación de la hipérbola buscada, se encuentra haciendo el producto

$$(2x + y - 3)(2x - y - 1) = k$$

o sea

$$4x^2 - y^2 - 8x + 2y + 2 = k$$

como la hipérbola buscada debe pasar por los puntos (4,6), las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación de la hipérbola. Por tanto $k = 11$

De donde obtenemos finalmente la ecuación

$$4x^2 - y^2 - 8x + 2y - 3 = 0$$

Hallar los valores de m para los cuales las rectas de la familia $y = mx - 1$ son tangentes a la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 36$

SOLUCIÓN:

Al sustituir la ecuación $y = mx - 1$ en $4x^2 - 9y^2 = 36$, obtenemos

$$4x^2 - 9(mx - 1)^2 = 36 \quad \text{ó}$$

$$(4 - 9m^2)x^2 + 18mx - 45 = 0$$

La condición de tangencia establece que

$$(18m)^2 - 4(-45)(4-9m^2) = 0$$

de donde al resolver esta ecuación se obtiene que $m = \frac{\pm\sqrt{5}}{3}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos fijos $A(-2, 2)$; $B(1, -4)$ sea 28.

2.- Hallar el lugar geométrico de los puntos tales que el vector que va de cualquiera de estos puntos al punto $(-2, 4)$, es ortogonal al vector que va del mismo punto al punto $(2, -4)$.

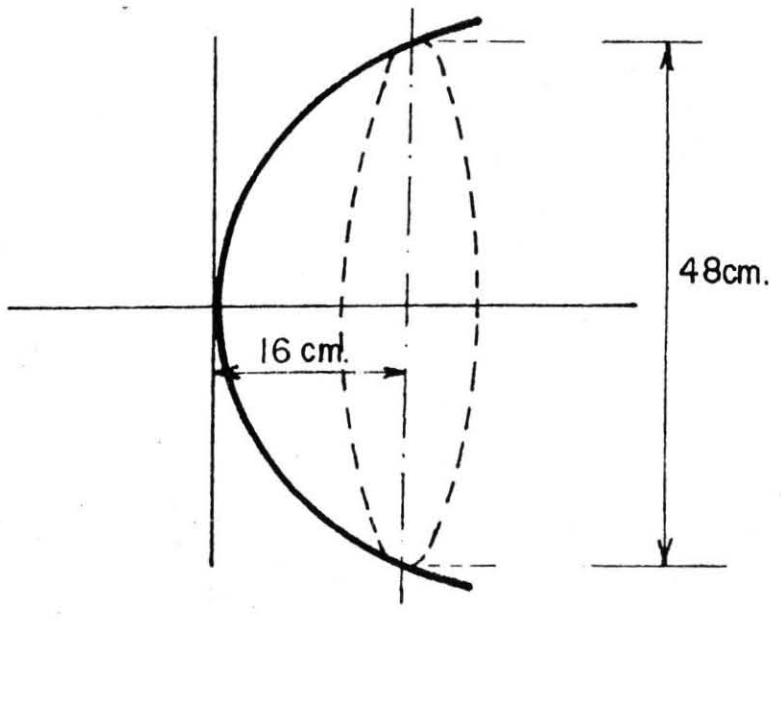
3.- Una parábola tiene por directríz a la recta $y = x$, foco de coordenadas $(-2, 2)$, determinar

i) La ecuación del eje focal de la parábola.

ii) Dar las coordenadas del eje de la parábola.

iii) Dar la magnitud del lado recto.

4.- Un paraboloide se puede obtener girando un arco de parábola que inicie en el vértice alrededor del eje de la parábola. Se quiere construir un reflector parabólico que debe tener una profundidad de 16 cm & una abertura de 48 cm. ¿ A qué distancia está el foco del vértice para colocar ese punto a una fuente lumínica ?.



5.- Dar la ecuación del conjunto de puntos cuyo producto de pendientes de las rectas que unen a cualquier punto del mencionado conjunto con los puntos fijos $(-2, 1)$ & $(6, 5)$ es constante e igual a -4.

6.- Se tiene una escalera de 10 m de longitud apoyada sobre una pared, está una marca en un peldaño a 6 m de la base de la escalera. Si la base de la escalera se desliza sobre el piso & la parte superior de la escalera no pierde contacto con la pared, probar que la marca del peldaño describe una trayectoria elíptica.

7.- Graficar y hallar los puntos de intersección de :

$$4y^2 - 2x^2 - 2x - 16y + 16 = 0$$

$$-6x^2 + 8y^2 - 6x - 32y + 36 = 0$$

8.- Dar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(4, 6)$, que tiene eje focal paralelo al eje x & sus asíntotas son las rectas

$$2x + y - 3 = 0 \ ; \ 2x + y - 1 = 0$$

9.- Determinar el lugar geométrico que define cada una de las ecuaciones que se dan, dando las coordenadas de los vértices, foco y extremos del lado recto. Escribir las ecuaciones de los ejes, directríz y asíntotas. Graficar con todos sus elementos.

i) $x^2 - y^2 - 2x + y - 1 = 0$

ii) $x^2 - 2x + y - 1 = 0$

iii) $x^2 + y^2 + 2x - y + 1 = 0$

iv) $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$

v) $4x^2 - y^2 - 4x + 6y - 152 = 0$

vi) $4x^2 + y^2 + 24x - 6y + 29 = 0$

10.- Hallar la ecuación del plano tangente a $x^2 + y^2 + z^2 = 26z$ en el punto $(3, 4, ?)$.

11.- Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto (-2, 7) a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$

<u>SOLUCIÓN</u> : i) $2x - y + 11 = 0$

ii) $x + 2y - 12 = 0$

12.- Hallar el ángulo agudo que forman las circunferencias $x^2 + y^2 - 17 = 0$ y $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 11 = 0$ en su intersección

<u>SOLUCIÓN</u> : 82° 14'

13.- Un punto p se mueve de tal manera que el cuadrado de su distancia de la base de un triángulo isósceles es siempre igual al producto de sus distancias de los otros dos lados. Demostrar que el lugar geométrico de p es una circunferencia.

14.- Los extremos del lado recto de una parábola cualquiera se unen con el punto de intersección del eje con la directríz. Demostrar que estas rectas son perpendiculares entre sí.

15.- La directríz de una parábola es la recta $y - 1 = 0$, y su foco es el punto (4, -3). Hallar la ecuación de la parábola por dos métodos diferentes.

<u>SOLUCIÓN</u> : $(x-4)^2 = -8(y+1)$

16.- Con referencia a la parábola $y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $x + 2y + k = 0$

a) cortan a la parábola en dos puntos diferentes.

b) son tangentes a la parábola

c) no cortan a la parábola

SOLUCIÓN: a) $k < 8$

b) $k = 8$

c) $k < 8$

17.- La ecuación de una familia de elipses es $4x^2 + 9y^2 + ax + by - 11 = 0$ Hallar la ecuación del elemento de la familia que pasa por los puntos (2, 3) y (5, 1).

SOLUCIÓN: $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18b - 11 = 0$

18.- Hallar las ecuaciones de las tangentes a la elipse $3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ que son perpendiculares a la recta $x + y - 5 = 0$

SOLUCIÓN: i) $x - y - 1 = 0$

ii) $3x - 3y + 13 = 0$

19.- Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (2, 3), tiene su centro en el orígen, su eje transverso está sobre el eje Y, y una de sus asíntotas es la recta $2y - \sqrt{7}\,x = 0$

SOLUCIÓN: $4y^2 - 7x^2 = 8$

20.- Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto (2, -1) es siempre igual al doble de su distancia de la recta $x + 2 = 0$.

SOLUCIÓN: $3x^2 - y^2 + 20x - 2y + 11 = 0$

21.- Las ecuaciones de dos circunferencias son:

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

Hallar las condiciones que deben satisfacer los coeficientes para que sean concéntricas.

22.- Hallar la ecuación de la esfera que pasa por los puntos (1, -3, 4), (1, -5, 2) y (1, -3, 0) y tiene su centro en el plano $x + y + z = 0$.

23.- Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto de intersección de las circunferencias

$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 = 0$

$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$ y cuyo centro esté en la recta $y = x$.

24.- Demuestre que los siguientes puntos son concíclicos (-1, -1), (2, 8), (5, 7), (7, 3).

25.- Hallar la ecuación de la esfera siguiente: centro (0, 0, 0) y tangente al plano $9x - 2y + 6z + -1 = 0$.

26.- Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (-2, 2) y por los de intersección de las circunferencias $x^2 + y^2 + 3x - 2y - 4 = 0$ y $x^2 + y^2 - 2x - y - 6 = 0$

27.- Hallar la ecuación de la esfera que pasa por (1, 0, 1), (2, 1, 1), (2, 0, -1), $(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

28.- Usando vectores, determine la tangente a la circunferencia en un punto cualesquiera $p(x, y)$.

29.- Hallar la ecuación de la esfera que pasa $(0, 0, 5)$ y el centro en la intersección de

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 3x + 2y - z &= 13 \\ 2x - y + 3z &= -10 \end{aligned}$$

30.- Cambiar las siguientes ecuaciones a la forma ordinaria

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2x - 10y - 4z = -8$$

31.- Demostrar que $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 13^2$ y

$$(x - 9)^2 + (y - 9)^2 = 3^2$$

son tangentes internamente.

32.- Un punto se mueve de manera que su distancia mas corta a un círculo dado es igual a su distancia a un diámetro también dado de ese círculo. Hallar su lugar geométrico.

SOLUCIÓN. Dos parábolas

33.- Demostrar que el lugar geométrico de un punto que se mueve de manera que la suma de sus distancias a dos rectas fijas sea constante es una recta.

34.- Un punto se mueve de manera que sus distancias a dos puntos fijos están en una razón constante k. Demostrar que el lugar geométrico es una circunferencia excepto cuando k=1.

35.- Un punto se mueve de manera que el producto de las pendientes de las rectas que lo unen a A(-a,0) y B(a,0) es constante. Demostrar que el lugar geométrico es una elipse o una hipérbola.

36.- La altura de un segmento parabólico es 8cm y la longitud de su base es 14cm. Una recta que atraviesa el segmento perpendicular a su eje mide 7cm. ¿A qué distancia está esta recta del vértice del segmento?

SOLUCIÓN. 2 cm.

37.- Un arco de parábola de eje vertical mide 14 m de luz y el punto más alto está a 4 m sobre la horizontal. ¿Cuál es la longitud de una viga colocada horizontalmente atravesando el arco a un metro de la parte superior?

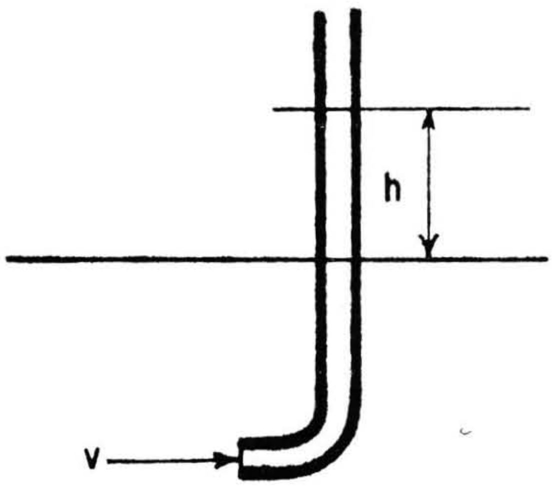
SOLUCIÓN. 7 m (la luz es de 14 m).

38.- El cable de un puente colgante tiene la forma de un arco de parábola. La plataforma suspendida que es horizontal y mide 100 m de largo, está sostenida por varillas verticales sujetas al cable, midiendo 30m la varilla más larga y 7 m la más corta. Hallar la longitud de una de las varillas de soporte situada a 16m de la parte media.

SOLUCIÓN. 9 m.

39.- El teorema de Torriccelli establece que la velocidad de flujo a cualquier profundidad h es equivalente a la velocidad que se adquiere por la caída libre desde la misma altura. De aquí se sugiere un método para medir la velocidad de corriente de agua. Si esta estuviera en reposo a la altura h por el brazo vertical,

La relación es $h = \frac{v^2}{2g}$ $\quad g = 9.81 \frac{\frac{m}{seg}}{seg}$



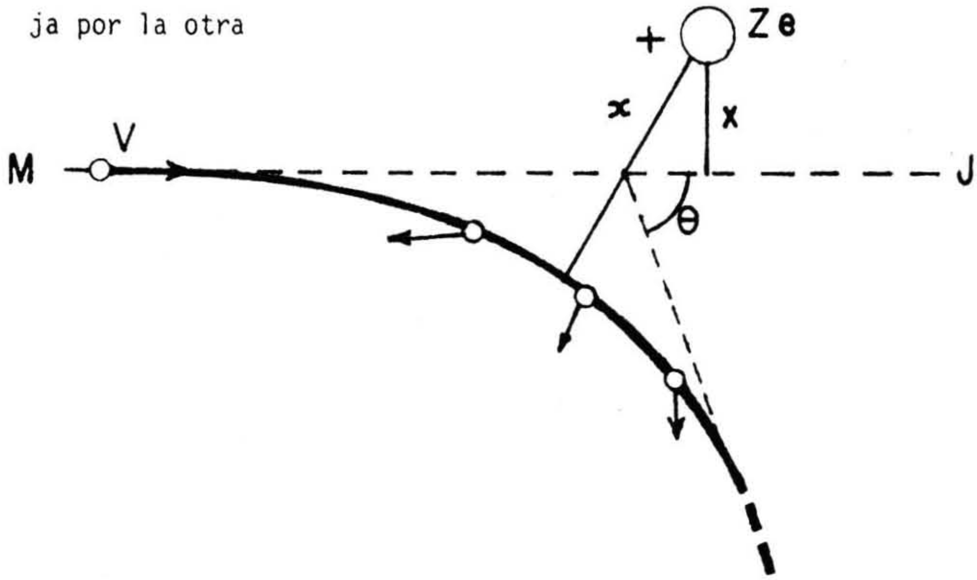
Grafique h contra v

40.- Las ondas electromagnéticas satisfacen la relación básica

$C = \nu\,\lambda$ donde: ν es la frecuencia
λ es la longitud de onda
C es igual a la velocidad de la luz en el vacío
$C = 3 \times 10^8$ m/seg

transforme las siguiente tabla en λ a una tabla en ν .
Sugerencia. Haga una gráfica de la hipérbola equilátera ν vs λ

41.- La partícula α de masa M, carga E que se mueve a la velocidad V, a lo largo de la trayectoria MJ, pasaría en ausencia de la ley de Coulomb, a una distancia X de un núcleo relativamente pesado de carga Ze. Debido a la repulsión mutua de las dos cargas positivas la fuerza F, dada por $F = k \frac{Ze \cdot E}{r^2}$, que sobre la partícula α en todos los puntos origina una trayectoria hiperbólica, se aproxima por una asíntota y se aleja por la otra



Grafique la energía potencial de una carga E de la partícula α al pasar cerca del núcleo de carga Ze, donde Z es el número atómico y e la carga del electrón en términos de r,

$$E\ Pot = k \frac{E \cdot Ze}{r},$$

donde:

k es una constante

r es la distancia entre la partícula α y el núcleo cargado

42.- La capacidad calorífica molar a temperatura constante es, para el vapor de agua a diversas temperaturas, como sigue:

Temperatura	10	100	500	700	1000
Capacidad	8.8	8.6	8.4	8.6	9.1

Determinar la ley en la forma $C = a+bt + ct^2$

Tomando la ley de Boyle pv = C, determinar c gráficamente a partir de los siguientes pares de valores observados:

P	39.92	42.27	45.80	48.52	51.89	60.47	65,97
v	40.37	38.32	35.32	33.29	31.22	26.86	24.53

43.- Si el elemento calentador de un tostador eléctrico de pan tiene una resistencia de 22 ohms y está conectado en la casa al voltaje usual de 110 volts. ¿Cuánto calor generará en un minuto? ¿ y en 3?.
Resolverlo gráficamente sabiendo que $H = 0.24 \ I^2 Rt$, es la energía total consumida.

Problemario de vectores, rectas, planos, sistemas de ecuaciones lineales, cónicas y esferas
Con anexo

Se terminó de imprimir en el mes de abril del año 2001 en los talleres de la Sección de Impresión y Reproducción de la Universidad Autónoma Metropolitana, *Unidad Azcapotzalco*

La edición estuvo a cargo de la Sección de Producción y Distribución Editoriales

Se imprimieron 250 ejemplares más sobrantes para reposición.

0092101 04327

29.00 - $ 29.00

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Division de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas

Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales