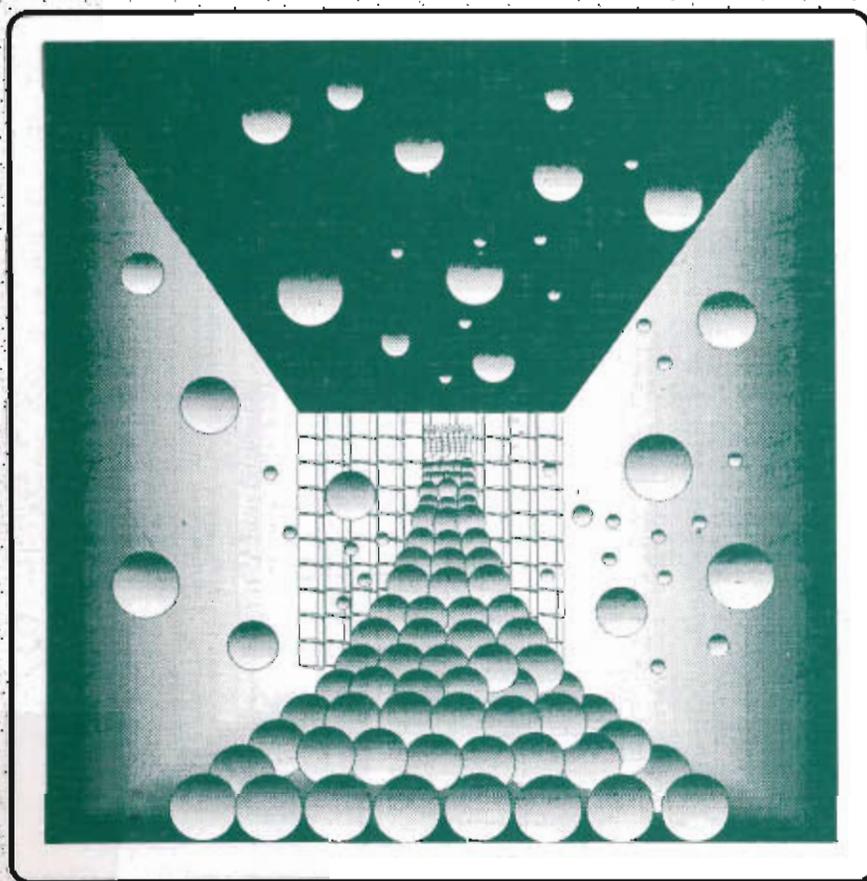


APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Ermilo J. Marroquín



UAM
QA308
M3.75
2001

APLICACIONES
DE
LA INTEGRAL

APLICACIONES
DE
LA INTEGRAL

Este material fue dictaminado y aprobado por
el Consejo Editorial de la División de Ciencias
Básicas e Ingeniería, el 12 de septiembre de 1995.

217452

C.B. 2892928

APLICACIONES
DE
LA INTEGRAL

Ermilo J. Marroquín



AZCAPOTZALCO

COSEI BIBLIOTECA

2892928

UAM-AZCAPOTZALCO

RECTORA

Mtra. Mónica de la Garza Malo

SECRETARIO

Lic. Guillermo Ejea Mendoza

COORDINADOR DE EXTENSIÓN UNIVERSITARIA

Lic. Enrique López Aguilar

JEFA DE LA SECCIÓN DE PRODUCCIÓN Y DISTRIBUCIÓN EDITORIALES

Lic. Silvia Lona Perales

ISBN: en trámite

© UAM-Azcapotzalco
Ermilo J. Marroquín

Ilustración de Portada:
Consuelo Quiroz Reyes
Diseño de Portada:
Modesto Serrano Ramírez

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas
Deleg. Azcapotzalco, C.P. 02200
México, D.F.

Sección de producción
y distribución editoriales
tel. 5318-9222/9223. Fax 5318-9222

1a. edición, 1996
2a. edición, 2001

Impreso en México.

PROLOGO

Este fascículo es el segundo de la serie sobre Cálculo Integral que prepara el autor. El primero se intituló *El Concepto de Integral*, 1a. ed. México, UAM-A, 1987, 73 pp.; las referencias a este último se anteceden por I, significando implícitamente que el de las Aplicaciones de la Integral es el número II de la serie mencionada. Si el lector no dispone de la primera obra, las referencias son esencialmente para fundamentar alguna parte necesaria de las demostraciones; por lo demás, es posible seguir en detalle el desarrollo de las aplicaciones de la integral. Conviene precisar que el curso de Cálculo Integral se imparte en el segundo trimestre a quienes cursan las carreras de ingeniería en la Unidad Azcapotzalco de la propia Universidad Autónoma Metropolitana.

En virtud de que el propósito de este trabajo es el de permitir al lector un estudio independiente, los problemas se han resuelto paso por paso, de manera que sea relativamente fácil detectar las dificultades que se encuentren en el camino hacia su solución; se hace énfasis, particularmente, en aplicaciones relacionadas con la ingeniería. Se sugiere al lector hacer un primer intento para resolver los ejemplos sin consultar el procedimiento; estas etapas de las primeras reflexiones, quizá desesperantes cuando no se tiene la práctica apropiada, son trascendentales en el proceso de aprendizaje. Algunos problemas son el antecedente de otros que se abordan en secciones posteriores, con la finalidad de aprovechar resultados y evitar una repetición exagerada de conocimientos ya aplicados.

El contenido que se desarrolla en la obra incluye los temas siguientes: cálculo de áreas de figuras planas; cálculo de volúmenes de revolución por el método de los discos circulares y por el de las cáscaras cilíndricas; cálculo de volúmenes de sección transversal conocida; cálculo de longitudes de arco de curvas planas; cálculo del trabajo necesario para mover un cuerpo en línea recta y en dirección de la fuerza;

presión de líquidos, momentos y centros de masa y, finalmente, momentos de inercia. El programa vigente de la materia comprende los tópicos mencionados, con excepción de los últimos dos métodos del cálculo de volúmenes y los momentos de masa e inercia, así como los centros de masa. No obstante, se tratan aquí por considerarlos importantes en las aplicaciones que habrán de estudiarse en otros cursos de ingeniería, en los que seguramente no habrá oportunidad de describirlos con amplitud.

El autor desea expresar al Dr. Juan Quintanilla su agradecimiento por el estímulo para llevar a cabo la idea y por sus lecturas y entusiastas comentarios de las primeras versiones manuscritas del presente fascículo. También, mi reconocimiento al M. en C. José Angel Rocha y al Prof. Carlos Ulín, Jefe del Departamento de Ciencias Básicas y Jefe del Area de Matemáticas Educativas, respectivamente, quienes fungían en esos cargos al concluir el trabajo, por su decidido apoyo para concretar la versión final del mismo.

Por otra parte, coincide la publicación de la obra con la disponibilidad de tecnología muy avanzada en edición mediante computadoras personales. Soy muy afortunado de que mi hijo Alejandro Daniel haya dedicado el tiempo necesario para preparar esta versión utilizando dichas técnicas; justo es reconocer que le significó una ardua tarea, particularmente los dibujos, que también fueron diseñados aplicando las técnicas citadas. Por todo ello mi especial agradecimiento a Alejandro Daniel.

México, D. F., diciembre de 1994.

Ermilo J. Marroquin

Departamento de Ciencias Básicas
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Universidad Autónoma Metropolitana
Azcapotzalco

CONTENIDO

Introducción	1
Cálculo de áreas de figuras planas	3
Cálculo de volúmenes de revolución por el método de los discos circulares	15
Cálculo de volúmenes de revolución por el método de las cáscaras cilíndricas	23
Cálculo de volúmenes de sección transversal conocida	29
Cálculo de longitudes de arco de curvas planas	36
Cálculo del trabajo necesario para mover un cuerpo en línea recta y en dirección de la fuerza	41
Presión de líquidos	50
Momentos y centros de masa	56
Momentos de inercia	66
Bibliografía	72

APLICACIONES DE LA INTEGRAL

1. **INTRODUCCION.** En la enseñanza de la matemática a quienes no la estudian por profesión, es de trascendencia el aspecto explicativo de la teoría para el estudio y solución de problemas relacionados con la ciencia o disciplina que sea del interés del estudiante. Sin embargo, en la práctica, y con tal propósito, es difícil armonizar la diversidad de objetivos de la matemática con los de la ciencia en estudio, bien se trate de la física, de la química, de la biología, de la ingeniería, de las ciencias sociales u otras, más aún si se toman en cuenta los diferentes conceptos, las técnicas, la metodología y la terminología implícitas en cada una de las aplicaciones que se propongan y las cuales no necesariamente llaman la atención de los interesados en otras áreas.

De ahí que para enseñar los aspectos relativos a las aplicaciones de la matemática, las instituciones recurran con más frecuencia a las siguientes opciones: i) ofrecer cursos específicos por áreas del conocimiento e ii) incluir cursos con tendencia abstracta y, por tanto, generales. Aparte de otras consideraciones, en el primer caso, la continua recurrencia a las aplicaciones tiene por consecuencia, en la mayoría de las ocasiones, un incremento en el número total de temas dedicados al curso (suponiendo un programa idéntico en los casos i e ii por lo que se refiere a la teoría). En la segunda opción es común discriminar la presentación de aplicaciones, dejando muchas veces en el estudiante una impresión de incertidumbre sobre la utilidad que le representarán los conocimientos logrados en los estudios que desea realizar.

En otro ángulo de la enseñanza de la matemática, destaca una de las dificultades más comunes del estudiante que se encuentra en la primera fase de los cursos de la materia en el nivel universitario: el procedimiento que, a grandes rasgos, principia con la definición de un problema relativo en su campo profesional, prosigue con la abstracción (implícita o

explícita) del mismo, continúa con la aplicación de los conocimientos específicos en su campo, así como los que se requieran de la matemática, y concluye con la solución del problema en abstracto y luego la solución del problema original, o bien directamente con esto último.

En el presente tema se adopta un punto de vista que enfoca la aplicación del cálculo integral a algunos otros campos del conocimiento en dos sentidos fundamentales: se parte algunas veces de lo abstracto para llegar a las aplicaciones y otras de éstas últimas para resolver el problema en abstracto, combinando ambos sentidos cuando se estima apropiado.

2. **CONTENIDO.** En el tema se desarrolla intuitivamente la teoría en la que se basa cada una de las aplicaciones presentadas.

Se estudia el cálculo de áreas de figuras planas sencillas, de volúmenes de revolución, de volúmenes con sección transversal conocida, de longitudes de arco de curvas planas simples, de trabajo, de presión de líquidos, de momentos y centros de masa y finalmente de momentos de inercia. Conviene advertir que una de las limitaciones al abordar las aplicaciones inmediatamente después de estudiar el concepto de integral consiste en plantear cuidadosamente los problemas con la finalidad de que las integrales resultantes puedan resolverse mediante los métodos y técnicas estudiados previamente. Por esta razón, cuando el lector trate de resolver problemas de aplicación propuestos en libros de la materia, es conveniente observar los antecedentes conceptuales, los de técnicas y los de metodología que le precedan. Naturalmente que el tipo de aplicaciones que se estudian en este trabajo puede ampliarse al enriquecer los conocimientos inherentes a los aspectos indicados.

Por otra parte, se sugiere estudiar la teoría correspondiente a cada tipo de aplicación hasta tener la certeza de haberla comprendido y luego intentar, en forma independiente, la solución de los ejemplos propuestos. En la selección de estos últimos se procura simultáneamente estimular la observación sobre lo que nos rodea; muchos de los ejemplos, quizá, motiven al estudiante a plantearse preguntas adicionales que generen a su vez otros problemas.

Observación. En el texto se hace ocasionalmente referencia al fascículo *El Concepto de Integral*, del mismo autor. Estas referencias se indican por el número I; así I.13.3e quiere decir que, con fundamento en el apartado 13.3., inciso e, de dicha obra, ... (y se prosigue con el planteamiento respectivo).

3. **CALCULO DE AREAS DE FIGURAS PLANAS.** En el punto I.8, se introdujo la idea del área limitada por una curva simple, dos abscisas y el eje x , como una extensión de la noción del área limitada por una función constante, dos abscisas y el eje x ; además, se presentó un ejemplo para calcular un área en forma aproximada. Posteriormente, en el punto I.9, se formalizó el concepto de integral e implícitamente la idea del área como un caso particular de la integral.

Ahora, en este apartado, se aplicará el concepto de integral para calcular áreas de figuras planas; el procedimiento se ilustrará mediante tres casos teóricos antes de estudiar ejemplos.

CASO 1. La figura 1 muestra la función $u(t)$ como una función continua y acotada en (a,b) .

Por el punto I.9, $u(t)$ es integrable. Como $u(t)$ es positiva en (a,b) ,

* Ver bibliografía en la última página.

$$(1) \quad A = \int_a^b u(t) dt,$$

donde A representa el área limitada por $u(t)$, las abscisas $t = a$, $t = b$ y el propio eje t .

Utilizando un enfoque intuitivo, puede llegarse al mismo resultado (1). Se ilustrará dicho enfoque en el conocido problema del cálculo de áreas y en procedimientos análogos que, en otros casos, se incluyen en este tema.

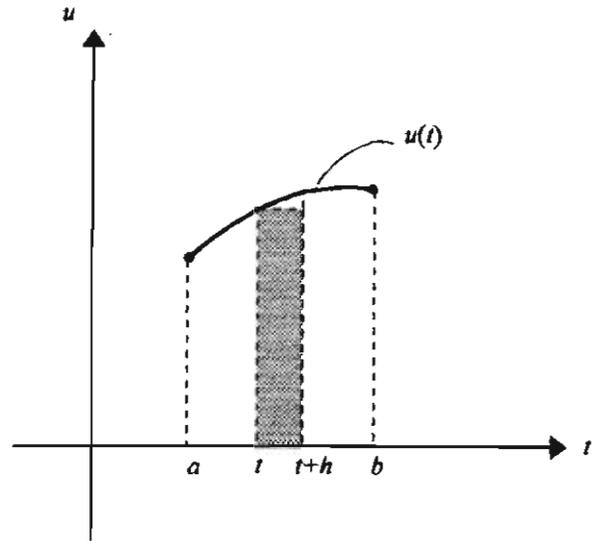


figura 1

Así, si $A(t)$ representa el valor del área hasta el punto t , $A(t+h) - A(t)$ es el área delimitada por la curva $u(t)$ entre t , $t+h$ y el eje t (ver figura 1) y,

$$(2) \quad A(t+h) - A(t) \approx u(t)[(t+h) - t],$$

donde $u(t)[(t+h) - t]$ es el área del rectángulo sombreado y aproxima al área

$$A(t+h) - A(t).$$

Luego, (2) queda:

$$(3) \quad A(t+h) - A(t) \approx [u(t)]h.$$

\Rightarrow^* , dividiendo (3) por h ,

$$(4) \quad \frac{A(t+h) - A(t)}{h} \approx u(t).$$

* Léase " \Rightarrow " como "entonces" o "luego entonces".

Si $h \rightarrow 0$ y existen los límites implicados,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h} = A'(t) \quad \text{y}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} u(t) = u(t)$$

y de (4), en el límite ,

$$(5) \quad A'(t) = u(t).$$

Entonces, por I.13.3.b, si en general existen las integrales implicadas,

$$(6) \quad \int A'(t) dt = \int u(t) dt + C_1$$

y por I.13.3.c

$$(7) \quad \int A'(t) dt = A(t) + C_2.$$

(7) en (6) da

$$A(t) + C_2 = \int u(t) dt + C_1$$

$$\Rightarrow A(t) = \int u(t) dt + C,$$

donde $C = C_1 - C_2$

$$\Rightarrow A(t) \Big|_a^b = A(b) - A(a) \stackrel{A(a)=0}{=} A(b) = \int_a^b u(t) dt.$$

CASO 2. Supóngase que se desea calcular el área limitada por las curvas $v_1(s)$, $v_2(s)$ y las abscisas $s = a$ y $s = b$, ilustrada por la figura 2.

Por el punto I.9, $v_1(s)$ y $v_2(s)$ son integrables.

Similarmente a como se procedió en el caso 1, el área $A(s+h) - A(s)$ se aproximará mediante el área del rectángulo de altura $v_1(s) - v_2(s)$ y anchura $s+h - s = h$, esto es,

$$(1) \quad A(s+h) - A(s) \approx [v_1(s) - v_2(s)]h.$$

Dividiendo ambos miembros de (1) por h se tiene:

$$(2) \quad \frac{A(s+h) - A(s)}{h} \approx [v_1(s) - v_2(s)].$$

Si el lector prosigue en forma análoga al caso 1 y existen los límites respectivos, obtiene:

$$(3) \quad A'(s) = v_1(s) - v_2(s)$$

$$(4) \quad \Rightarrow A(b) = \int_a^b [v_1(s) - v_2(s)] ds,$$

si existen tales integrales.

COMENTARIO. Obsérvese en la figura 2 que la ordenada $v_2(s)$ es negativa; por tanto, $-v_2(s)$ es positiva, luego $v_1(s) - v_2(s)$ es la altura del rectángulo representativo del área que se desea calcular.

La ecuación (4) es lo mismo que calcular $\int_a^b v_1(s) ds$ y sumarle algebraicamente $-\int_a^b v_2(s) ds$. $\int_a^b v_2(s) ds$ es negativo, luego $-\int_a^b v_2(s) ds$ es positivo, esto es, el área delimitada por $v_2(s)$, $s = a$, $s = b$ y el eje s .

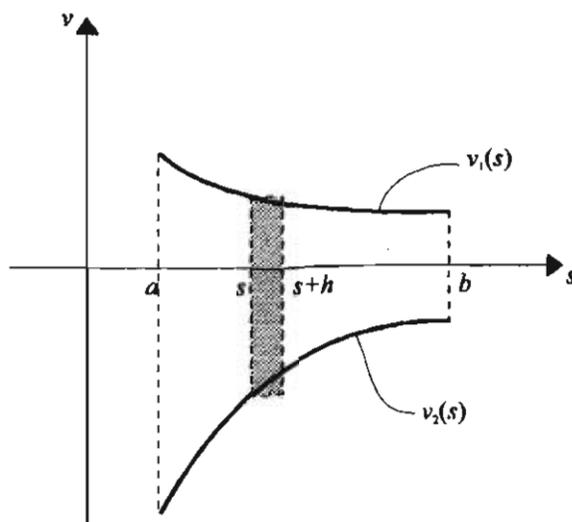


figura 2

PREGUNTAS. ¿Cuál sería la fórmula para calcular el área si $v_1(s)$ y $v_2(s)$ están sobre el eje s ? ¿Y cuál si $v_1(s)$ y $v_2(s)$ están bajo el eje s ? Supóngase que $v_2(s) \leq v_1(s)$ en $[a, b]$.

CASO 3. Una situación más complicada sería determinar el área sombreada de la figura 3.

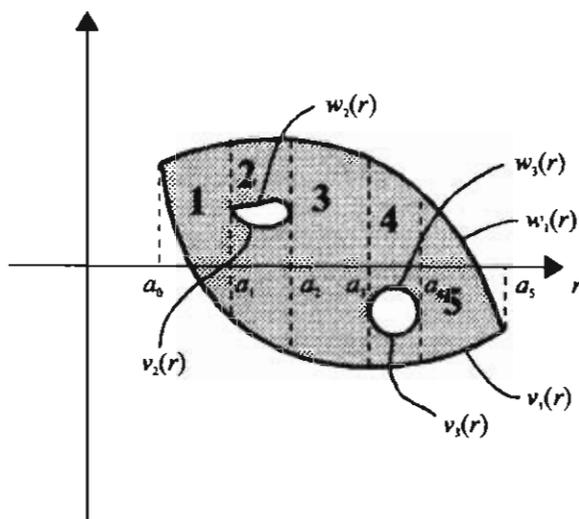


figura 3

Sean $w_1(r)$, $w_2(r)$ y $w_3(r)$ las curvas superiores, según se indica en la figura, y $v_1(r)$, $v_2(r)$ y $v_3(r)$ las inferiores. Las abscisas a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 y a_5 delimitan 5 zonas para el cálculo de las áreas respectivas. Con la finalidad de no complicar la figura 3, no se han trazado los rectángulos representativos en cada zona numerada. Todas las funciones, por

construcción, satisfacen las condiciones de integrabilidad.

Utilizando los resultados de los casos 1 y 2 precedentes, se tiene para cada zona:

Zona 1,

$$(1) \quad A(r)|_{a_0}^{a_1} = \int_{a_0}^{a_1} [w_1(r) - v_1(r)] dr.$$

Zona 2,

$$(2) \quad A(r)|_{a_1}^{a_2} = \int_{a_1}^{a_2} [w_1(r) - w_2(r)] dr + \int_{a_1}^{a_2} [v_2(r) - v_1(r)] dr.$$

Zona 3,

$$(3) \quad A(r)|_{a_2}^{a_3} = \int_{a_2}^{a_3} [w_1(r) - v_1(r)] dr.$$

Zona 4,

$$(4) \quad A(r)|_{a_3}^{a_4} = \int_{a_3}^{a_4} [w_1(r) - w_3(r)] dr + \int_{a_3}^{a_4} [v_3(r) - v_1(r)] dr.$$

Zona 5,

$$(5) \quad A(r)|_{a_4}^{a_5} = \int_{a_4}^{a_5} [w_1(r) - v_1(r)] dr.$$

Sumando (1), (2), ... , (5) se obtiene el área sombreada que se deseaba.

PREGUNTA. ¿Cuál sería la fórmula para calcular el área interior no sombreada de la figura 3 ?

3.1. Ejemplo 1. Calcular el área delimitada por $y(x) = \frac{1}{4}x^2$, $y(x) = x^2 - 3$, $y(x) = 3$ y el eje y en el primer cuadrante.

En la figura 1 se muestra la región propuesta.

En la misma figura, si se trazan rectángulos horizontales, puede apreciarse que se definen dos zonas limitadas por curvas diferentes. La zona 1 por $y(x) = \frac{1}{4}x^2$ y el propio eje y y la zona 2 por $y(x) = x^2 - 3$ y el eje y .

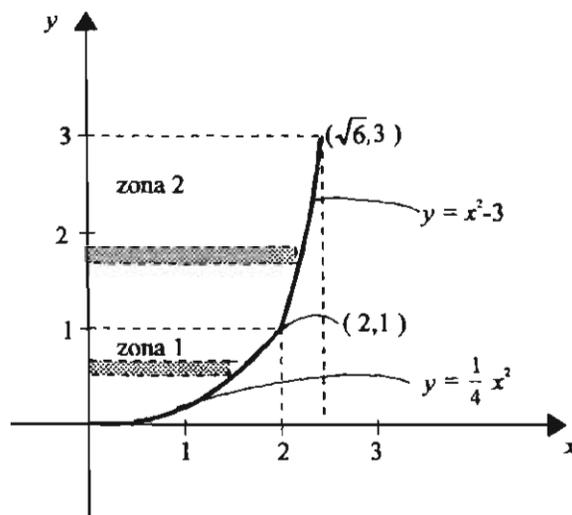


figura 1

Por otra parte, de $y(x) = \frac{1}{4}x^2$, $x^2 = 4y$, por tanto, $x = \pm 2\sqrt{y}$. Similarmente, de $y(x) = x^2 - 3$, $x^2 = y + 3$, luego $x = \pm\sqrt{y+3}$.

Por el caso 1 del punto 3, donde el eje en cuestión es ahora el eje y , y por cumplir las funciones las condiciones de integrabilidad, se tiene:

$$A_{TOTAL} = A_{Zona1} + A_{Zona2}$$

\Rightarrow Si $A_{TOTAL} \equiv A_T$.

$$\begin{aligned} A_T &= \int_0^1 2\sqrt{y} dy + \int_1^3 \sqrt{y+3} dy \\ &= \int_0^1 2y^{1/2} dy + \int_1^3 (y+3)^{1/2} dy \\ &= 2 \frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \frac{(y+3)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^3 = \frac{4}{3} y^{3/2} \Big|_0^1 + \frac{2}{3} (y+3)^{3/2} \Big|_1^3 \\ &= \frac{4}{3} \left[(1)^{3/2} - (0)^{3/2} \right] + \frac{2}{3} \left[(3+3)^{3/2} - (1+3)^{3/2} \right] \\ &= \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \left[6^{3/2} - 8 \right] = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} 6^{3/2} - \frac{16}{3} = \frac{2}{3} 6^{3/2} - \frac{12}{3} \\ &= \frac{2}{3} 6^{3/2} - 4 \text{ unidades cuadradas.} \end{aligned}$$

Aplicación del ejemplo 1. En el departamento de diseño de una industria electromecánica se desea calcular el costo de 250,000 piezas de lámina de la forma ilustrada en la figura 1. Supóngase que el costo por unidad cuadrada ya maquinada para este tipo de piezas (ya

incluye lo que se desperdicia por el troquelado) es de 3 unidades monetarias/unidad cuadrada. ¿Cuál será el costo de las 250,000 piezas?

Si el costo se representa por C entonces:

$$C = \left(\frac{2}{3}6^{\frac{3}{2}} - 4\right)(3)(250,000) \approx 4,348,469.$$

(unidades cuadradas por pieza)(unidades monetarias por unidad cuadrada)(piezas)
= unidades monetarias totales.

COMENTARIO. Al definir un problema tomado de la realidad, es difícil anticipar los conocimientos de matemáticas que requerirá su solución (si la tiene). De ahí que sea necesario analizar toda la información disponible y dilucidar aquella que a su vez define, en su caso, un problema matemático. Esto permite establecer la fase de abstracción que, en el ejemplo anterior, es precisamente la desarrollada en la primera parte del mismo. Luego, retornando al problema real original, se tomaría en cuenta la información adicional para tratar de responder a las interrogantes que desencadenan su solución.

Ejercicio 1. En el ejemplo 1, calcular directamente el área complementaria con respecto al rectángulo formado por el eje x , el eje y , $y = 3$ y $x = \sqrt{6}$ y probar, además, que esta última, adicionada al área determinada en el ejemplo 1, es igual al área del rectángulo, esto es, $3\sqrt{6}$.

Ejemplo 2. Al adaptar un sistema de aprovechamiento de energía solar en un edificio, se ha encontrado que el área de exposición al sol (en la azotea) es de la forma indicada en la figura 1 de este ejemplo (la parte cubierta por el sombreado del dibujo).

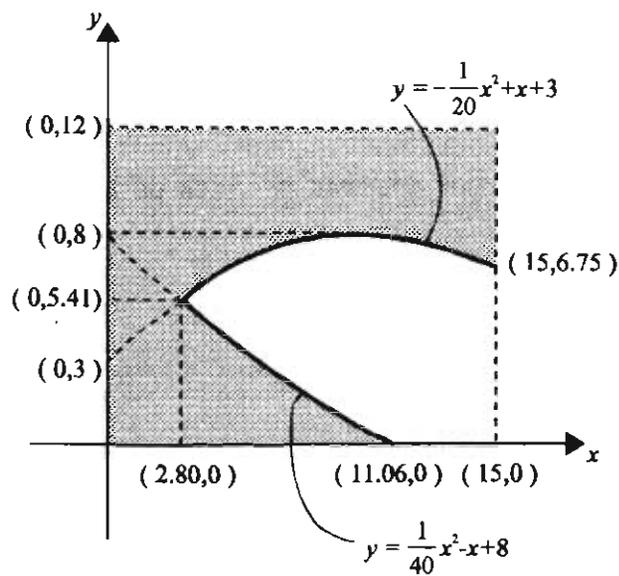


figura 1

La figura 1 muestra ya el resultado de una primera fase del problema; éste, en su origen, pudo plantear una serie de mediciones *in situ* que, al graficarlas, podrían haber presentado una situación como la descrita en la figura 2, a otra escala.

Si se enfoca la atención en esta última figura, el próximo paso habría sido determinar el tipo de curva o curvas que representarían apropiadamente la relación entre x e y . El procedimiento implica ensayar posibilidades hasta lograrlo, si ello es factible. Posteriormente, se procedería a determinar la ecuación o ecuaciones de dichas curvas. Aquí sólo se agregará que el trazado de una curva específica consiste en suponer una curva suave que no necesariamente toque los puntos obtenidos en la medición; así, si se procura que las sumas de las diferencias entre las ordenadas de los puntos y la curva respectiva, suponiendo positivas las que están sobre la misma y negativas las que están bajo ella, sean lo más próximas a cero, la curva representará mejor la relación deseada. Para determinar la ecuación de la

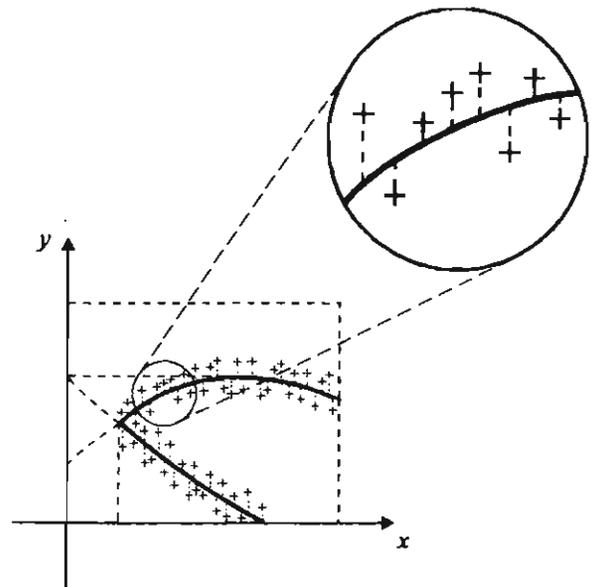


figura 2

curva o curvas se pueden utilizar otros métodos más refinados tales como el método de los cuadrados mínimos o métodos de interpolación.

Supóngase que se encontró que las curvas que delimitan la región de interés son las parábolas

$$y = -\frac{1}{20}x^2 + x + 3 \text{ e } y = \frac{1}{40}x^2 - x + 8.$$

Entonces, para $y = -\frac{1}{20}x^2 + x + 3$,

$$\text{si } x = 0, \quad y = 3$$

$$\text{si } x = 15, \quad y = -\frac{1}{20}(15)^2 + 15 + 3$$

$$= \frac{-225 + 300 + 60}{20} = \frac{135}{20}$$

$$= 6.75$$

y para la parábola $y = \frac{1}{40}x^2 - x + 8$,

$$\text{si } x = 0, \quad y = 8 \quad \text{y, si } y = 0,$$

$$\frac{1}{40}x^2 - x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 40x + 320 = 0.$$

Entonces,

$$x = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 4(1)(320)}}{2} = \frac{40 \pm \sqrt{4(80)}}{2} = \frac{40 \pm 2\sqrt{80}}{2}$$

$$x = 20 \pm \sqrt{80} \Rightarrow \text{tomando aproximaciones de dos decimales,}$$

$$x_1 \approx 28.94 \text{ y } x_2 \approx 11.06 \Rightarrow x \approx 11.06$$

(obsérvese que el primer valor de x está fuera del área de la azotea, por lo que el segundo valor es el que se ajusta a la zona en estudio).

Por otro lado, a continuación se calcula el punto de intersección de las parábolas:

$$-\frac{1}{20}x^2 + x + 3 = \frac{1}{40}x^2 - x + 8$$

$$2(-x^2 + 20x + 60) = x^2 - 40x + 320$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 80x + 200 = 0$$

$$\text{y } x = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 4(3)(200)}}{6} = \frac{80 \pm \sqrt{4000}}{6} = \frac{80 \pm 10\sqrt{40}}{6}$$

$$x = \frac{40 \pm 5\sqrt{40}}{3} \approx \frac{40 \pm 5(6.32)}{3}$$

$$x \approx 13.33 \pm 10.53 \Rightarrow x_1 \approx 23.86 \quad x_2 \approx 2.80$$

y, en la zona de interés, en éste último valor de x se presenta el punto de intersección de las parábolas. Por tanto,

$$y \approx -\frac{1}{20}(2.80)^2 + 2.80 + 3 = -\frac{7.84}{20} + 5.8$$

$$y \approx 5.41,$$

\Rightarrow el punto de intersección es $\approx (2.80, 5.41)$.

Para calcular el área se distinguen tres zonas diferentes: $x \in (0, 2.80)$, $x \in (2.80, 11.06)$, $x \in (11.06, 15)$ (ver figura 1). Por lo tanto, si se trazaran rectángulos representativos (verticales) en cada una de las zonas, se tiene para el área total, puesto que las funciones implícitas satisfacen las condiciones del teorema I.9,

$$\begin{aligned}
 A_T &\approx \int_0^{2.80} 12 dx + \int_{2.80}^{11.06} \left[12 - \left(-\frac{1}{20}x^2 + x + 3 \right) + \frac{1}{40}x^2 - x + 8 \right] dx + \int_{11.06}^{15} \left[12 - \left(-\frac{1}{20}x^2 + x + 3 \right) \right] dx \\
 &= 12x \Big|_0^{2.80} + \int_{2.80}^{11.06} \left(12 + \frac{1}{20}x^2 - x - 3 + \frac{1}{40}x^2 - x + 8 \right) dx + \int_{11.06}^{15} \left(12 + \frac{1}{20}x^2 - x - 3 \right) dx \\
 &= 12x \Big|_0^{2.80} + \int_{2.80}^{11.06} \left(17 + \frac{3}{40}x^2 - 2x \right) dx + \int_{11.06}^{15} \left(\frac{1}{20}x^2 - x + 9 \right) dx \\
 &= 12x \Big|_0^{2.80} + 17x + \frac{1}{40}x^3 - x^2 \Big|_{2.80}^{11.06} + \frac{1}{60}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 9x \Big|_{11.06}^{15} \\
 &= 12(2.80) + 17(11.06) + \frac{1}{40}(11.06)^3 - (11.06)^2 - 17(2.80) - \frac{1}{40}(2.80)^3 + (2.80)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{60}(15)^3 - \frac{1}{2}(15)^2 + 9(15) - \frac{1}{60}(11.06)^3 + \frac{1}{2}(11.06)^2 - 9(11.06) \\
 &\approx 33.60 + 188.02 + 33.82 - 122.32 - 47.60 - 0.55 + 7.84 \\
 &\quad + 56.25 - 112.50 + 135 - 22.55 + 61.16 - 99.54 \\
 &\approx 110.63 \text{ unidades cuadradas.}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 2. En la figura 1 del ejemplo 2, calcular directamente el área de la penumbra y probar que la suma del área calculada en el ejemplo 2 y la de este ejercicio es igual al área del rectángulo ilustrado en la misma figura (excepto por las diferencias de redondeo).

Ejercicio 3. En la figura 1 del ejemplo 2, calcular el área limitada por las parábolas y el eje y , en el intervalo de x , $(0, 2.80)$.

4. **CÁLCULO DE VOLUMENES.** En este punto se tratará la aplicación del concepto de integral al cálculo de volúmenes de revolución y al de volúmenes de sección transversal conocida. En el primer caso se utilizan dos métodos: el de los discos circulares y el de las cáscaras cilíndricas.

4.1. **VOLUMENES DE REVOLUCION, METODO DE LOS DISCOS CIRCULARES.** Un

volumen de revolución es el que se genera cuando una región plana se hace girar con respecto a un eje. Así, en la figura 1, la región limitada por la curva en el plano xy , las abscisas $x = a$, $x = b$ y el eje x , se ha hecho girar con respecto al eje x , generando el volumen indicado por las líneas punteadas.

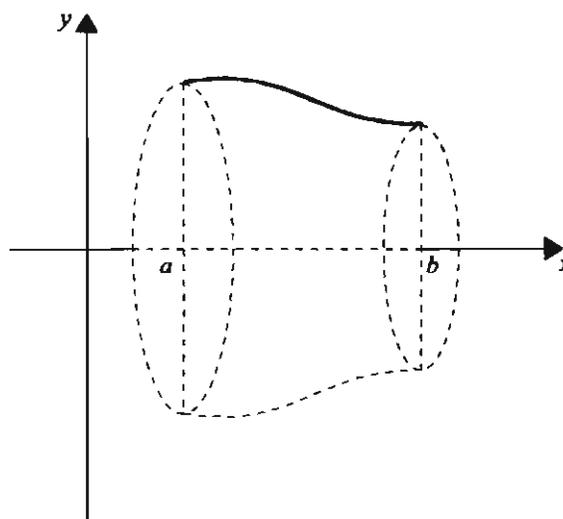


figura 1

Se recordará que en el cálculo de áreas se tomaba un rectángulo representativo del área que se deseaba calcular (ver figuras 1 y 2 del punto 3). En la figura 2 adjunta, obsérvese que al hacer girar el área del rectángulo sombreado con respecto al eje x , se genera un volumen que tiene la forma de un cilindro circular recto o disco circular y cuyo valor es igual al producto de la base por

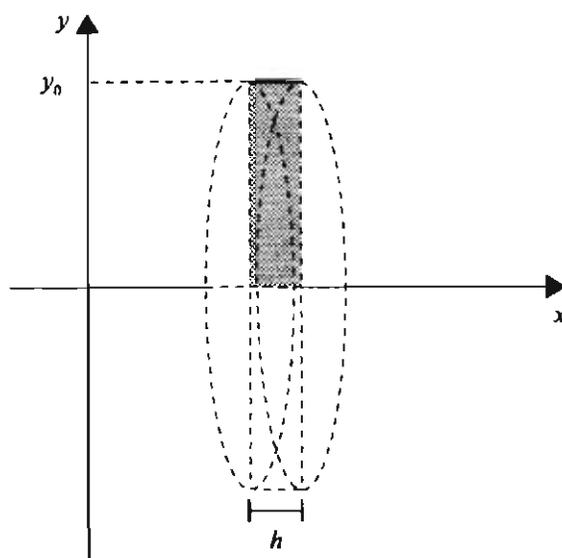


figura 2

la altura. Así, si en la figura 2, el radio del disco es y_0 y su altura es h , el volumen del disco sería $\pi y_0^2 h$.

Tomando las ideas básicas expuestas sobre las figuras 1 y 2, sea ahora el área limitada por la curva $r(t)$ en el plano tr , las abscisas $t = a$, $t = b$ y el eje t la que se hace girar con respecto al eje t . En la figura 3 se ilustra el volumen generado.

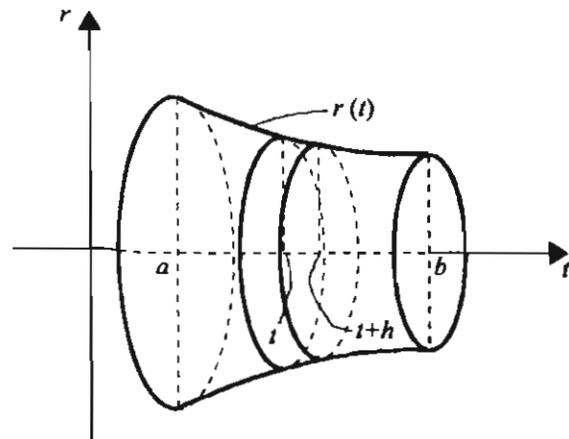


figura 3

Si $V(t)$ representa el valor del volumen generado hasta la abscisa t , entonces $V(t+h)-V(t)$, ilustrado específicamente en la figura 4, podría calcularse aproximadamente mediante el volumen de disco circular trazado en la figura 5, esto es,

$$(1) \quad V(t+h)-V(t) \approx \pi r^2(t)h.$$

Dividiendo (1) por h ,

$$\frac{V(t+h)-V(t)}{h} \approx \pi r^2(t).$$

Si $h \rightarrow 0$ y existen los límites indicados, se tiene:

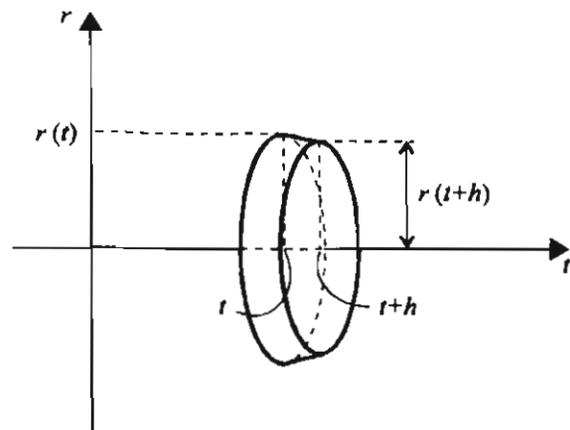


figura 4

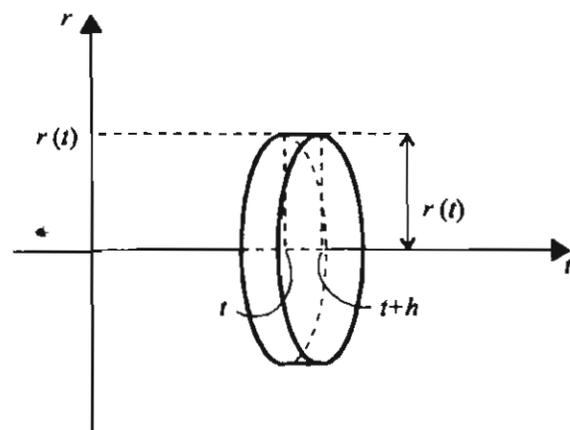


figura 5

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(t+h) - V(t)}{h} = V'(t)$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0} \pi r^2(t) = \pi r^2(t).$$

Luego, en el límite,

$$(2) \quad V'(t) = \pi r^2(t).$$

Por I.13.3.b aplicada a (2), se tiene, si en general existen las integrales implicadas,

$$(3) \quad \int V'(t) dt = \int \pi r^2(t) dt + C_1 = \pi \int r^2(t) dt + C_1$$

y por I.13.3.c,

$$\int V'(t) dt = V(t) + C_2,$$

\Rightarrow en (3),

$$V(t) = \pi \int r^2(t) dt + C,$$

donde $C = C_1 - C_2$.

$$\Rightarrow V(t) \Big|_a^b = V(b) - V(a)$$

$$\stackrel{V(a)=0}{=} V(b) = \pi \int_a^b r^2(t) dt.$$

Ejemplo 1. Se desea calcular el volumen de un tanque cilíndrico recto con casquetes parabólicos. El volumen es generado al hacer girar con respecto al eje y el área delimitada por las

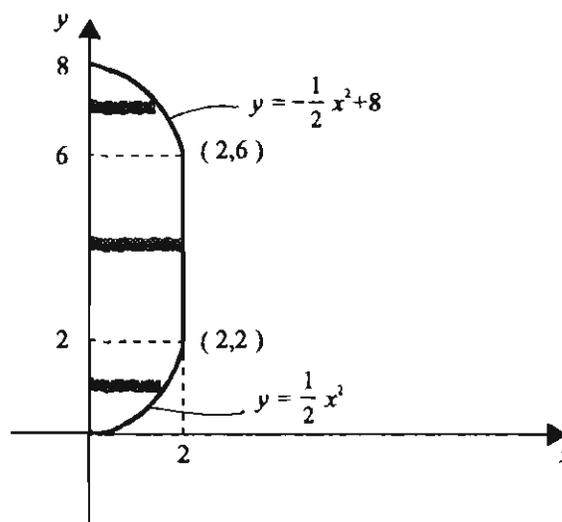


figura 1

parábolas $y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$, $y = \frac{1}{2}x^2$, la abscisa $x = 2$ y el propio eje y ; ver la figura 1.

Para $x = 0$, la parábola superior $y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$ corta al eje y en $y = 8$ y la inferior en $y = 0$; para $x = 2$, el punto de intersección con la parábola superior es $(2,6)$ y con la inferior es $(2, 2)$.

Si se traza un rectángulo representativo horizontal en cada una de las zonas limitadas por las parábolas y otro en la zona central limitada por la abscisa $x = 2$ (ver figura 1), y el área de cada uno de ellos se hace girar con respecto al eje y , entonces, cada rectángulo representativo generará un disco circular representativo de cada zona.

Por tanto, el volumen del casquete parabólico inferior V_i se obtiene mediante $\pi \int_0^2 2y dy$, porque si $y = \frac{1}{2}x^2$, $x^2 = 2y$, donde x es el radio del disco circular representativo del casquete inferior. En la zona central, el volumen V_c del cilindro circular recto que se genera se calcula por $\pi \int_2^6 (2)^2 dy$, porque el radio de los discos circulares en esta zona es constante, es decir $x = 2$. Finalmente, en la zona superior, su volumen V_s se determina por $\int_6^8 (-2y + 16) dy$, porque si $y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$, $x^2 = -2y + 16$, donde x es el radio de giro de los discos circulares respectivos. Puesto que las tres funciones de las integrales anteriores son continuas en los intervalos implícitos, de acuerdo con el teorema I.9, las funciones son integrables en dichos intervalos y, en consecuencia, el volumen total V_T del tanque es:

$$V_T = V_i + V_c + V_s$$

$$V_T = \pi \left[\int_0^2 2y dy + \int_2^6 (2)^2 dy + \int_6^8 (-2y + 16) dy \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \left[\frac{2y^2}{2} \Big|_0^2 + 4y \Big|_2^6 - \frac{2y^2}{2} + 16y \Big|_6^8 \right] \\
&= \pi [4 + 24 - 8 + (-8)^2 + 16(8) - (-6)^2 + 16(6)] \\
&= \pi [20 + (-64 + 128 + 36 - 96)] \\
&= 24\pi \text{ unidades cúbicas.}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1. En el ejemplo 1, un medidor exterior al tanque nos indica la altura del líquido en el mismo. Encontrar la(s) fórmula(s) que proporciona(n) el volumen del líquido que contiene el tanque a una altura cualquiera entre cero y ocho unidades.

Ejemplo 2. ¿Cuántas toneladas de acero, con densidad de 7.65 g/cm^3 , se requieren para fabricar 7 millones de piezas cuyo volumen se genera haciendo girar el área de la figura 1 adjunta con respecto al eje y ?

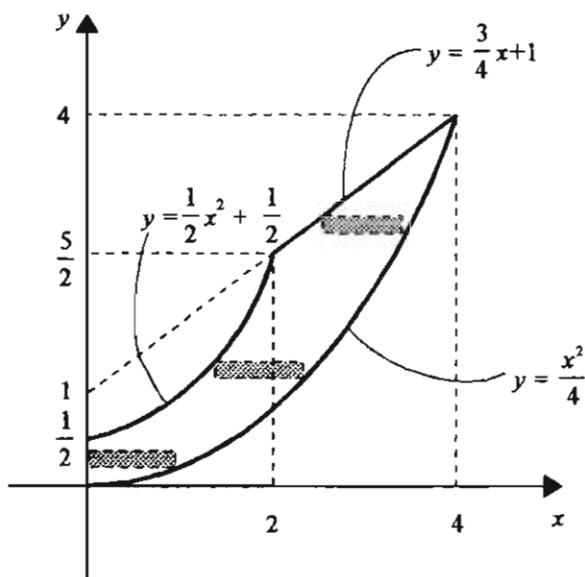


figura 1

La figura 1 muestra las especificaciones del área que, al hacerse girar con respecto al eje y , genera el volumen de la pieza que se desea.

La región está limitada por las parábolas $x^2 = 2y - 1$, $x^2 = 4y$, la recta $y = \frac{3}{4}x + 1$ y el propio eje y .

La recta $y = \frac{3}{4}x + 1$ y la parábola $x^2 = 2y - 1$ se cortan en:

$$x^2 = 2\left(\frac{3}{4}x + 1\right) - 1 = \frac{3}{2}x + 2 - 1 = \frac{3}{2}x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

$$y \quad x = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{el punto} \left(2, \frac{5}{2}\right)$$

es el que se encuentra en la zona en estudio.

Respecto de la intersección entre la parábola $x^2 = 4y$ y la recta $y = \frac{3}{4}x + 1$, a su vez, se tiene:

$$x^2 = 4\left(\frac{3}{4}x + 1\right) = 3x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 4, \quad x_2 = -1 \text{ y, por tanto,}$$

$$y = \frac{3}{4}(4) + 1 = 4 \Rightarrow \text{el punto de intersección es } (4, 4).$$

La parábola $x^2 = 2y - 1$ corta al eje y en $y = \frac{1}{2}$ y la parábola $x^2 = 4y$ en $y = 0$.

De acuerdo con la figura 1, se tienen tres zonas donde los rectángulos representativos horizontales están limitados por curvas diferentes.

En la figura 2 se ilustra el volumen de revolución que se genera al hacer girar el área indicada por el problema.

Por otra parte, antes de proceder a calcular el volumen total, conviene precisar cómo se obtiene el volumen de un disco circular hueco V_h tal como el que se ilustra en la figura 3.

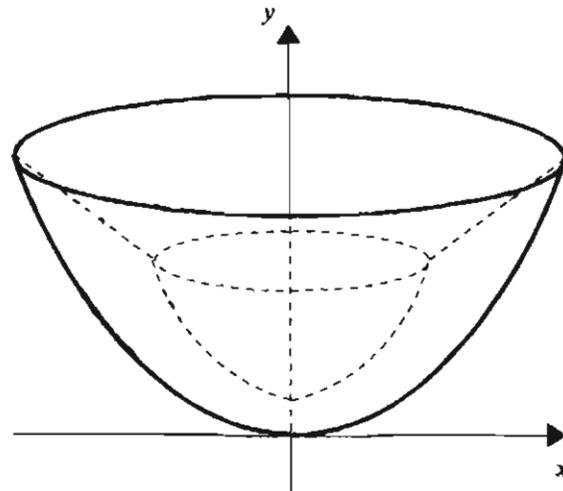


figura 2

$$V_h = \pi r_o^2 a - \pi r_i^2 a = \pi a (r_o^2 - r_i^2).$$

Entonces, el volumen total V_T generado al hacer girar el área de la figura 1 respecto del eje y , mostrado por la figura 2, y tratándose de funciones integrables es:

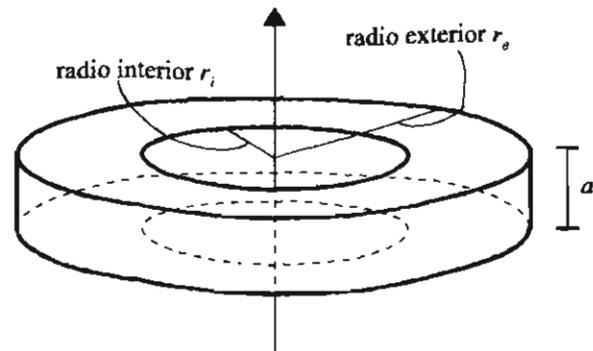


figura 3

$$V_T = \pi \left[\int_0^{1/2} 4y dy + \int_{1/2}^{5/2} (4y - (2y - 1)) dy + \int_{5/2}^4 \left(4y - \left(\frac{4}{3}(y - 1) \right)^2 \right) dy \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \left[\int_0^{1/2} 4y \, dy + \int_{1/2}^{5/2} (2y+1) \, dy + \int_{5/2}^4 \left(4y - \frac{16}{9}y^2 + \frac{32}{9}y - \frac{16}{9} \right) \, dy \right] \\
&= \pi \left[\int_0^{1/2} 4y \, dy + \int_{1/2}^{5/2} (2y+1) \, dy + \int_{5/2}^4 \left(-\frac{16}{9}y^2 + \frac{68}{9}y - \frac{16}{9} \right) \, dy \right] \\
&= \pi \left[2y^2 \Big|_0^{1/2} + y^2 + y \Big|_{1/2}^{5/2} + \left(-\frac{16}{9} \frac{y^3}{3} + \frac{34}{9}y^2 - \frac{16}{9}y \right) \Big|_{5/2}^4 \right] \\
&= \pi \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{5}{2} \right)^2 + \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} + \left\{ -\frac{16}{27}(4)^3 + \frac{34}{9}(4)^2 - \frac{16}{9}(4) + \frac{16}{27} \left(\frac{5}{2} \right)^3 - \frac{34}{9} \left(\frac{5}{2} \right)^2 + \frac{16}{9} \left(\frac{5}{2} \right) \right\} \right] \\
&= \pi \left[\frac{1}{2} + \frac{25}{4} + \frac{5}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{16(64)}{27} + \frac{34(16)}{9} - \frac{64}{9} + \frac{16(125)}{27(8)} - \frac{34(25)}{9(4)} + \frac{16(5)}{9(2)} \right] \\
&= \pi \left[\frac{17}{2} - \frac{16(64)}{27} + \frac{34(16)}{9} - \frac{64}{9} + \frac{2(125)}{27} - \frac{17(25)}{18} + \frac{8(5)}{9} \right] \\
&= \frac{\pi}{54} [17(27) - 2(16)(64) + 6(34)(16) - 6(64) + 4(125) - 3(17)(25) + 6(8)(5)] \\
&= \frac{\pi}{54} [459 - 2048 + 3264 - 384 + 500 - 1275 + 240] \\
&= \frac{756}{54} \pi \\
&= 14\pi \text{ unidades cúbicas.}
\end{aligned}$$

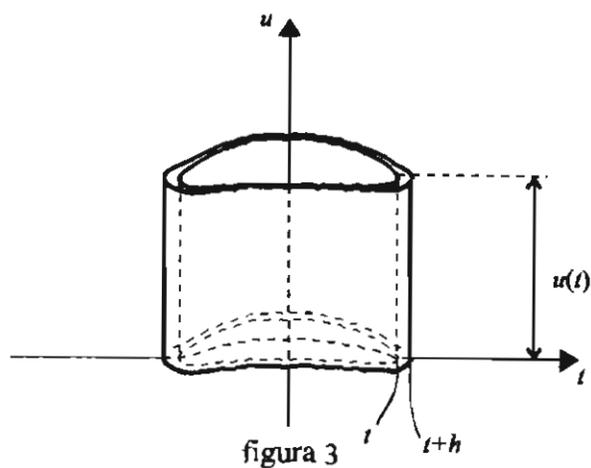
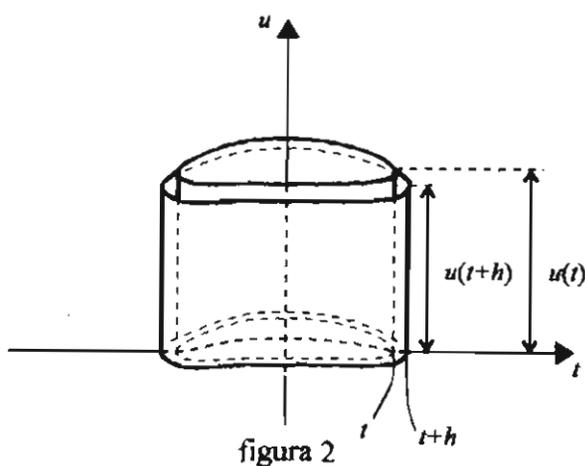
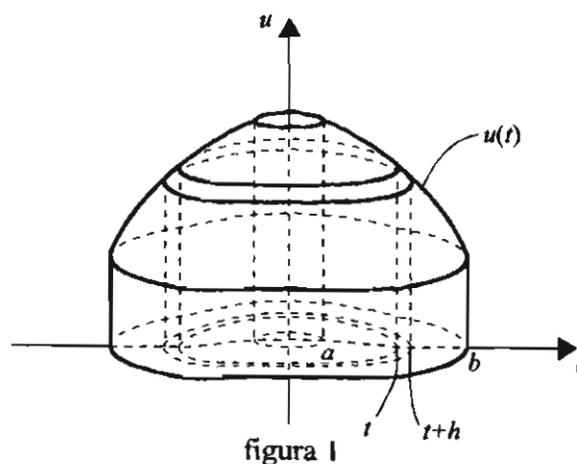
Ahora, para calcular las toneladas requeridas,

$$(14\pi)(7.65)(7 \times 10^6)(10^{-6}) \approx 2,355$$

$$\left(\frac{\text{cm}^3}{\text{pieza}}\right)\left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)(\text{piezas})\left(\frac{1}{\frac{\text{g}}{\text{ton}}}\right) = \text{ton}$$

4.2. VOLUMENES DE REVOLUCION.
METODO DE LAS CASCARAS
CILINDRICAS. Si el área de la
figura 1 de esta sección, limitada por
la curva $u(t)$ en el plano tu , las
abscisas $t = a$, $t = b$ y el eje t , se hace
girar alrededor del eje u , se genera el
volumen de revolución que muestra
la misma figura.

Ahora, si se pudiese imaginar una
especie de sacabocados cilíndrico
recto con un radio ajustable que lo
único que hiciese fuese cortar a
diversos radios el volumen de la
figura 1, el sólido quedaría integrado
por formas casi cilíndricas rectas y
huecas como la de la figura 2, donde
las alturas interior y exterior son
diferentes. Esto permite sugerir que
el volumen de la cáscara casi
cilíndrica recta y hueca de la figura 2



podría aproximarse mediante el volumen de un cilindro recto y hueco como el de la figura 3, cuyo radio exterior es $t+h$, su radio interior es t y tiene por altura $u(t)$. Entonces, el volumen $V(t+h)-V(t)$ de la figura 2 puede aproximarse por el volumen de la figura 3, esto es,

$$(1) \quad V(t+h)-V(t) \approx \pi(t+h)^2 u(t) - \pi t^2 u(t).$$

Por

$$\begin{aligned} \pi(t+h)^2 u(t) - \pi t^2 u(t) &= \pi u(t) [(t+h)^2 - t^2] \\ &= \pi u(t) [t^2 + 2th + h^2 - t^2] \\ &= \pi u(t) (2th + h^2) \\ &= \pi hu(t) (2t + h) \end{aligned}$$

\Rightarrow , en (1), dividiendo por h ,

$$(2) \quad \frac{V(t+h)-V(t)}{h} \approx 2\pi tu(t) + \pi hu(t).$$

Si $h \rightarrow 0$ y existen los límites indicados,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(t+h)-V(t)}{h} = V'(t) \quad \text{y}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (2\pi tu(t) + \pi hu(t)) = 2\pi tu(t).$$

Luego, en el límite, se tendría en (2),

$$(3) \quad V'(t) = 2\pi tu(t).$$

Por I.13.3.b en (3), si en general existen las integrales implicadas, se tiene:

$$(4) \quad \int V'(t)dt = \int 2\pi tu(t)dt + C_1$$

$$\int V'(t)dt = 2\pi \int tu(t)dt + C_1$$

y por I.13.3.c

$$(5) \quad \int V'(t)dt = V(t) + C_2$$

\Rightarrow por (4) y (5),

$$V(t) + C_2 = 2\pi \int tu(t)dt + C_1$$

$$y \quad V(t) = 2\pi \int tu(t)dt + C, \quad C = C_1 - C_2.$$

$$(6) \quad \Rightarrow \quad V(t)\Big|_a^b = V(b) - V(a) \stackrel{V(a)=0}{=} V(b) = 2\pi \int_a^b tu(t)dt.$$

Ejemplo 1. Calcular el volumen del sólido del ejemplo 1 del punto 4.1. por el método de las cáscaras cilíndricas.

El eje de giro es y , la altura de los cilindros está dada por y de la parábola superior menos y de la parábola inferior y el radio de giro es x . Luego, por (6) de este punto, el volumen del sólido V es:

$$(1) \quad V = 2\pi \int_0^2 x(y_s(x) - y_i(x))dx, \text{ donde } y_s(x) \text{ es } y \text{ de la parábola superior y } y_i \text{ es } y \text{ de la parábola inferior.}$$

En consecuencia,

$$V = 2\pi \int_0^2 x \left(-\frac{1}{2}x^2 + 8 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = 2\pi \int_0^2 (-x^3 + 8x) dx$$

$$= 2\pi \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{8x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = 2\pi(-4 + 16) = 2\pi(12)$$

$$= 24\pi \text{ unidades cúbicas.}$$

Ejemplo 2. Determinar el volumen del sólido del ejemplo 2 del punto 4.1. por el método de las cáscaras cilíndricas.

El eje de giro es el eje y , el radio de giro es x y la altura de los cilindros es:

- i) Entre $x = 0$ y $x = 2$, $y_s(x) - y_i(x)$, donde $y_s(x)$ e $y_i(x)$ son las y de las parábolas superior e inferior respectivamente.
- ii) Entre $x = 2$ y $x = 4$, $y_r(x) - y_i(x)$, donde $y_r(x)$ es la y de la recta y $y_i(x)$ la y de la parábola inferior.

Por tanto, aplicando (6) de esta sección, el volumen V es:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \left[\int_0^2 x(y_s(x) - y_i(x)) dx + \int_2^4 x(y_r(x) - y_i(x)) dx \right] \\ &= 2\pi \left[\int_0^2 x \left(\frac{x^2 + 1}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx + \int_2^4 x \left(\frac{3}{4}x + 1 - \frac{x^2}{4} \right) dx \right] \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{4} \int_0^2 (x^3 + 2x) dx + \frac{1}{4} \int_2^4 (3x^2 + 4x - x^3) dx \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^2}{2} \right]_0^2 + \left[\frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_2^4 \\ &= \frac{\pi}{2} (4 + 4 + 64 + 32 - 64 - 8 - 8 + 4) \end{aligned}$$

$$= 14\pi \text{ unidades cúbicas.}$$

COMENTARIO. Para determinar la aplicación de uno de los dos métodos distintos descritos, el de los discos circulares o el de las cáscaras cilíndricas, se sugiere tomar en cuenta los siguientes aspectos:

- i) Observar las regiones limitadas por curvas diferentes a que se daría lugar en cada método.
- ii) El grado de dificultad para expresar una variable en función de la otra, según se requiera en cada método.
- iii) El grado de dificultad de las integrales de las funciones resultantes.

4.3. VOLUMENES DE REVOLUCIÓN CON EJE DE GIRO PARALELO AL EJE x O AL EJE y . Supóngase que el área ilustrada en la figura 1 del ejemplo 1, punto 4.1., se hace girar, dígame, con respecto al eje $x = -3$, deseándose expresar la integral para calcular el volumen del sólido hueco que se genera, por el método de las cáscaras cilíndricas.

El caso se ilustra en la figura 1 de este apartado. En comparación, obsérvese que en el ejemplo 1, punto 4.2., se hizo girar el área, pero respecto del eje y , la ecuación (1) de dicha sección indica la integral para calcular su volumen por el método de las cáscaras cilíndricas. Ahí puede apreciarse que el radio de giro de cada cáscara es t . Ahora bien, si cada una de estas cáscaras, en lugar de generarse al hacerse girar respecto del eje y , cuyo radio es t , se forman al hacerse girar respecto del eje $x = -3$, ¿Cuál es el nuevo radio de giro?

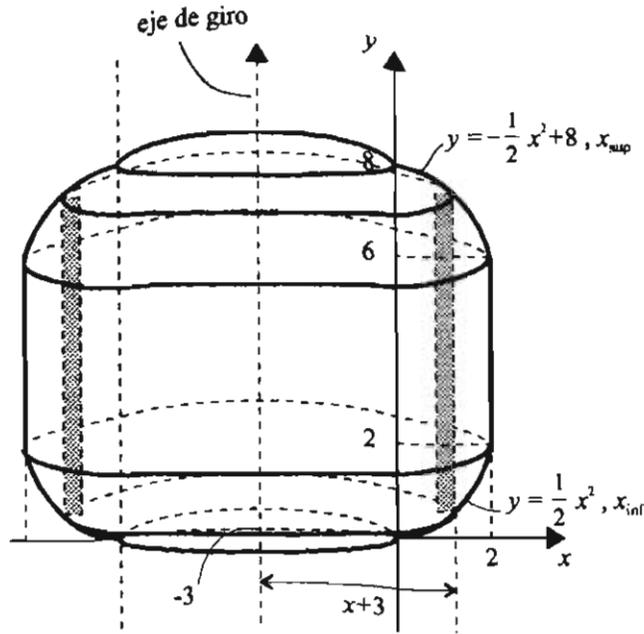


figura 1

En la figura adjunta se observa que el nuevo radio es igual a la distancia x que hay de la cáscara al eje de giro y del ejemplo 1 del punto 4.2. + la distancia que separa al eje y del nuevo eje de giro $x = -3$; tal distancia, medida perpendicularmente al eje de giro, es

$$x + 3$$

y la fórmula para determinar el volumen del sólido hueco que se genera es:

$$(1) \quad V = 2\pi \int_0^2 (x+3)(y_s(x) - y_i(x)) dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 (x+3) \left(-\frac{1}{2}x^2 + 8 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx.$$

Si se intenta calcular el mismo volumen por el método de los discos circulares, por la figura 1 del ejemplo 1, punto 4.1., se observa que se tienen 3 zonas diferentes cuyos discos circulares representativos están limitados por curvas diferentes. Entonces, el volumen total V_T se calcularía mediante:

$$(2) \quad V_T = \pi \left[\int_0^2 \left[(x_{\text{inf}} + 3)^2 - 3^2 \right] dy + \int_2^6 \left[(2+3)^2 - 3^2 \right] dy + \int_6^8 \left[(x_{\text{sup}} + 3)^2 - 3^2 \right] dy \right]$$

$$= \pi \left[\int_0^2 \left[(\sqrt{2y} + 3)^2 - 3^2 \right] dy + \int_2^6 \left[(2+3)^2 - 3^2 \right] dy + \int_6^8 \left[(\sqrt{16-2y} + 3)^2 - 3^2 \right] dy \right].$$

Puede verificarse que el cálculo de (1) y (2) proporciona el mismo valor, 104π unidades cúbicas.

4.4. VOLUMENES DE SÓLIDOS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONOCIDA. Este método se aplica en casos en los cuales es posible expresar el área de toda sección transversal del sólido en función de un parámetro perpendicular a la misma. Así, si en la figura 1 de este punto, para toda t es posible determinar $A(t)$, se dice entonces que el volumen respectivo es de sección transversal conocida.

Si $V(t)$ es el volumen del sólido de la figura 1 hasta la coordenada t , entonces, el volumen de la rebanada ilustrada en la figura 2, $V(t+h)-V(t)$, podría aproximarse mediante el volumen de la "rebanada cilíndrica recta" mostrada por la figura 3, cuyo volumen puede esperarse que sea el producto de la base, esto es, el área de sección transversal, por la altura de la rebanada, es decir h .

Por tanto,

$$(1) \quad V(t+h) - V(t) \approx A(t)h.$$

Dividiendo (1) por h ,

$$(2) \quad \frac{V(t+h) - V(t)}{h} \approx A(t).$$

Si $h \rightarrow 0$ y existen los límites que se indican,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(t+h) - V(t)}{h} = V'(t)$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0} A(t) = A(t).$$

Luego, en el límite, (2) quedaría

$$V'(t) = A(t).$$

Por I.13.3.b, si en general existen las integrales implicadas,

$$\int V'(t) dt = \int A(t) dt + C_1$$

y por I.13.3.c,

$$\int V'(t) dt = V(t) + C_2$$

$$\Rightarrow V(t) + C_2 = \int A(t) dt + C_1$$

$$(3) \quad y \quad V(t) = \int A(t) dt + C,$$

donde $C = C_1 - C_2$.

Por tanto, de (3),

$$V(t) \Big|_a^b = V(b) - V(a) \stackrel{V(a)=0}{=} V(b)$$

$$(4) \quad \Rightarrow \quad V(b) = \int_a^b A(t) dt.$$

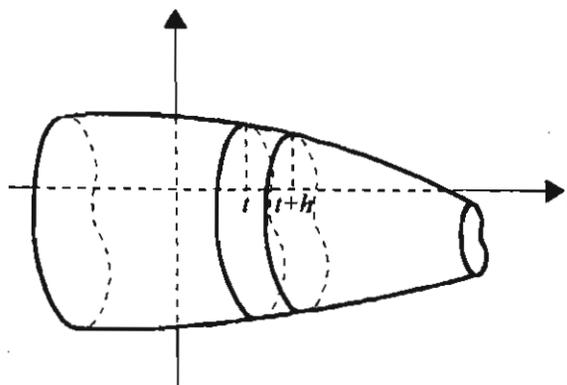


figura 1

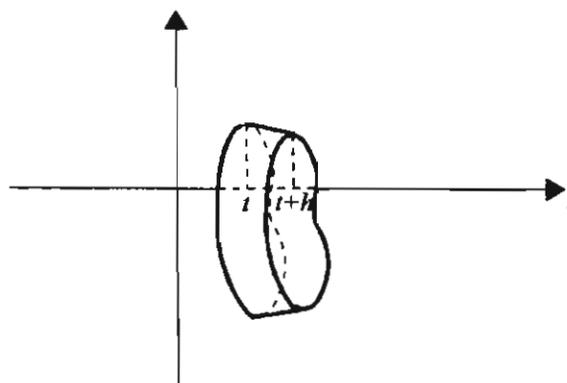


figura 2

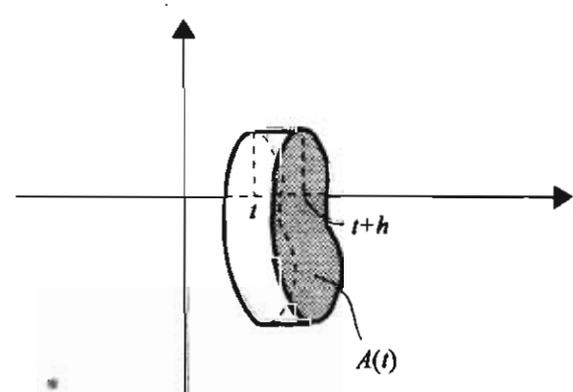


figura 3

COMENTARIO. Puede observarse que el sólido de la figura 1 no es un sólido de revolución y, por tanto, no puede aplicarse ni el método de los discos circulares ni el de las cáscaras cilíndricas para determinar su volumen. En cambio, el volumen de sólidos de revolución cuando se conoce $A(t)$ y su expresión es relativamente sencilla para integrarla, puede obtenerse aplicando el método de la sección transversal conocida.

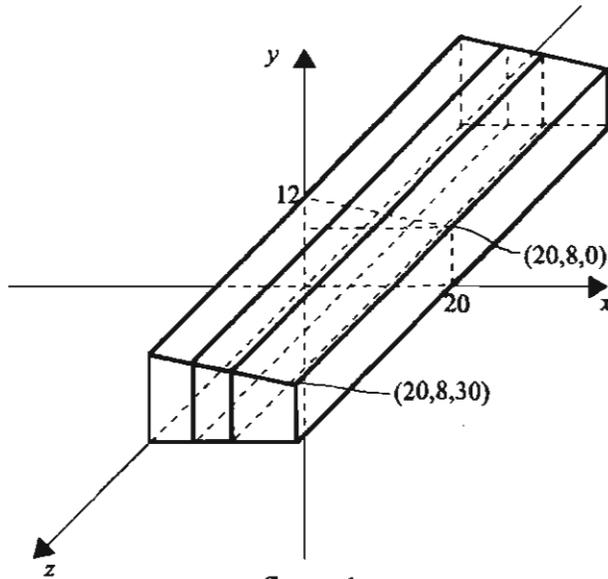


figura 1

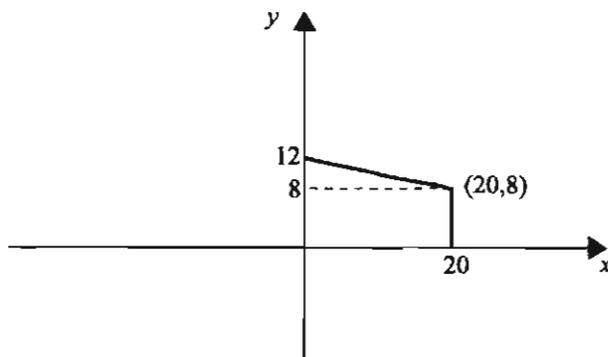


figura 2

plano xy , ver figura 2, es:

$$m = \frac{8 - 12}{20} = -\frac{4}{20} = -\frac{1}{5}$$

Ejemplo 1. Se desea construir una nave industrial con 10 módulos de sección transversal rectangular y con cuatro metros de diferencia en altura entre los extremos de cada módulo para dejar entrar luz; el resto de las dimensiones (en metros) se indican en las figuras adjuntas. Con la finalidad de calcular la recirculación de aire necesaria y regular la concentración máxima de contaminantes, se desea determinar el volumen de aire contenido en la nave.

La pendiente de la recta entre los puntos $(0, 12)$ y $(20, 8)$ en el

y, por tanto, la ecuación de dicha recta es $y = -\frac{1}{5}x + 12$. Esta última representa a la vez la altura de los rectángulos que forman la sección transversal del sólido mostrado en la figura 1; de ahí que si el área de esos rectángulos se representa por $A(x)$, entonces $A(x) = 60y(x)$, donde 60 es la base (constante) de cualquier rectángulo de la sección transversal.

Aplicando (4) del punto 4.4. para obtener el volumen y tratándose de funciones integrables, se tiene:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{20} 60y(x)dx = \int_0^{20} 60\left(-\frac{1}{5}x + 12\right)dx \\ &= \int_0^{20} (-12x + 720)dx = -6x^2 + 720x \Big|_0^{20} \\ &= -6(20)^2 + 720(20) = -2400 + 14,400 \\ &= 12,000 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

En consecuencia, el volumen de los 10 módulos, V_T , es:

$$V_T = 10(12,000) = 120,000 \text{ m}^3.$$

Ejemplo 2. Un canal de sección transversal parabólica tiene 1,000 metros de longitud, tres metros de profundidad en el eje de la parábola y una anchura de 20 metros. Calcular el volumen que contiene el canal para cualquier altura h , $0 \leq h \leq 3$, medida sobre el eje de la parábola.

El vértice de la parábola (ver figura 1) está en $(0, -3)$. La ecuación de una parábola con eje paralelo al eje y y vértice en (l, k) es $(x-l)^2 = 4a(y-k)$, donde a es la distancia del vértice al foco. Por $(l, k) = (0, -3)$,

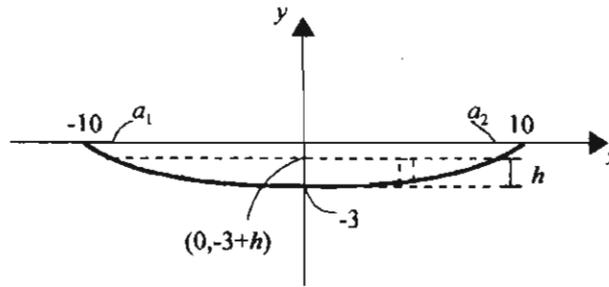


figura 1

$$x^2 = 4a(y+3) \Rightarrow x^2 = 4ay + 12a.$$

En (10, 0),

$$100 = 12a \Rightarrow a = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$$

y, por tanto,

$$x^2 = \frac{100}{3}y + 100$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{100}(x^2 - 100) = \frac{3}{100}x^2 - 3.$$

Ahora, en la misma figura 1, puede apreciarse que el nivel del líquido a una altura h ($h \geq 0$) lo define la recta $y = -3 + h$, la cual tiene por puntos de intersección con la parábola:

$$x^2 = \frac{100}{3}(-3 + h) + 100 = -100 + \frac{100}{3}h + 100 = \frac{100}{3}h$$

$$\Rightarrow x = \pm 10\sqrt{\frac{h}{3}}. \quad 2892928$$

Por otra parte, para cada h fija, el área limitada por la recta $y = -3 + h$ y la parábola $y = \frac{3}{100}x^2 - 3$ permanece constante a lo largo del canal. Luego, es necesario determinar esa área en función de la altura h del líquido para posteriormente calcular el volumen.

Así, si $a_1 = -10\sqrt{\frac{h}{3}}$, $a_2 = 10\sqrt{\frac{h}{3}}$, y_r es y de la recta, y_p es y de la parábola y por ser las funciones integrables, se tiene:

$$\begin{aligned}
 A(h) &= \int_{a_1}^{a_2} (y_r - y_p) dx = \int_{a_1}^{a_2} \left[(-3 + h) - \left(\frac{3}{100}x^2 - 3 \right) \right] dx \\
 &= \int_{a_1}^{a_2} \left[-3 + h - \frac{3}{100}x^2 + 3 \right] dx = hx - \frac{1}{100}x^3 \Big|_{a_1}^{a_2} \\
 &= ha_2 - \frac{a_2^3}{100} - \left(ha_1 - \frac{1}{100}a_1^3 \right) = ha_2 - \frac{a_2^3}{100} - ha_1 + \frac{1}{100}a_1^3 \\
 &= h(a_2 - a_1) + \frac{1}{100}(a_1^3 - a_2^3) \\
 &= h \left(10\sqrt{\frac{h}{3}} + 10\sqrt{\frac{h}{3}} \right) + \frac{1}{100} \left[\left(-10\sqrt{\frac{h}{3}} \right)^3 - \left(10\sqrt{\frac{h}{3}} \right)^3 \right] \\
 &= 20h\sqrt{\frac{h}{3}} + \frac{1}{100} \left[-1000 \left(\frac{h}{3} \right)^{\frac{3}{2}} - 1000 \left(\frac{h}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \right]
 \end{aligned}$$

$$= 20h\sqrt{\frac{h}{3}} - 20\left(\frac{h}{3}\right)^{3/2}$$

$$= 20\left[\sqrt{\frac{h^3}{3}} - \left(\frac{h}{3}\right)^{3/2}\right]$$

Si la longitud del canal se representa en el eje z , perpendicular al plano xy , entonces, por (4) del punto 4.4. , el volumen puede calcularse mediante

$$V = \int_0^{1000} A(z) dz = \int_0^{1000} 20\left[\sqrt{\frac{h^3}{3}} - \left(\frac{h}{3}\right)^{3/2}\right] dz$$

$$= 20\left[\sqrt{\frac{h^3}{3}} - \left(\frac{h}{3}\right)^{3/2}\right] z \Big|_0^{1000}$$

$$= 20\left[\sqrt{\frac{h^3}{3}} - \left(\frac{h}{3}\right)^{3/2}\right] 1000$$

$$= 20,000\left[\sqrt{\frac{h^3}{3}} - \left(\frac{h}{3}\right)^{3/2}\right] \text{ m}^3.$$

¿Cuál es el volumen máximo del canal ? ¿Cuál es el volumen que contiene el canal si la altura del líquido es de 90 cm.?

5. LONGITUDES DE ARCO DE CURVAS PLANAS. Una función $f(t)$ se dice que es *suave* en un intervalo $[a,b]$ si tiene $f'(t)$ y ésta es continua en dicho intervalo. En el presente apartado se considerarán únicamente funciones suaves. En la figura 1 se ilustra la gráfica de una función suave $f(t)$ en $[a,b]$. Se desea calcular la longitud del arco de la curva en el intervalo $[a,b]$.

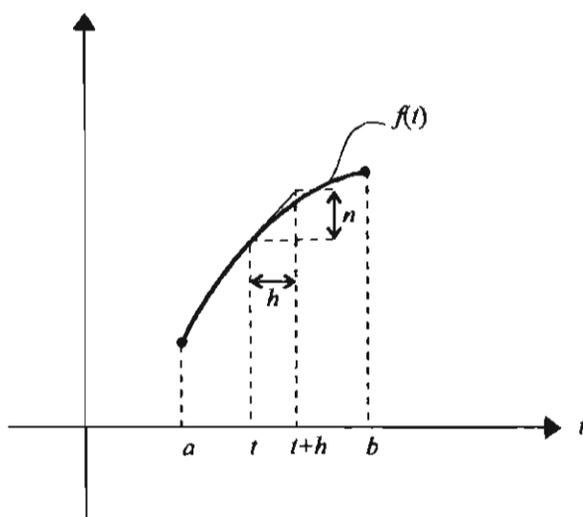


figura 1

Si $l(t)$ representa la longitud del arco de la curva $f(t)$ hasta la abscisa t , entonces $l(t+h) - l(t)$ puede calcularse en forma aproximada a lo largo de la recta tangente a la curva $f(t)$, precisamente en t , lo que se ilustra en la figura 1 como la hipotenusa del triángulo con catetos n y h . Por tanto,

$$l(t+h) - l(t) \approx \sqrt{h^2 + n^2}.$$

Como

$$\frac{n}{h} = f'(t), \quad n = hf'(t) \quad \Rightarrow \quad n^2 = h^2 f'(t)^2.$$

Luego,

$$\sqrt{h^2 + n^2} = \sqrt{h^2 + h^2 f'(t)^2} = \sqrt{h^2(1 + f'(t)^2)} = h\sqrt{1 + f'(t)^2}.$$

De ahí que

$$(1) \quad l(t+h) - l(t) \approx h\sqrt{1+f'(t)^2}.$$

Dividiendo (1) por h ,

$$\frac{l(t+h) - l(t)}{h} \approx \sqrt{1+f'(t)^2}.$$

Si existen los siguientes límites,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{l(t+h) - l(t)}{h} = l'(t)$$

$$y \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{1+f'(t)^2} = \sqrt{1+f'(t)^2},$$

se tiene, en el límite,

$$(2) \quad l'(t) = \sqrt{1+f'(t)^2}.$$

Por I.13.3.b aplicada a (2) y si las funciones implícitas son integrables,

$$(3) \quad \int l'(t) dt = \int \sqrt{1+f'(t)^2} dt + C_1$$

y por I.13.3.c,

$$\int l'(t) dt = l(t) + C_2$$

\Rightarrow en (3)

$$(4) \quad l(t) = \int \sqrt{1+f'(t)^2} dt + C,$$

$$C = C_1 - C_2,$$

$$(5) \Rightarrow l(t)|_a^b = l(b) - l(a) \stackrel{l(a)=0}{=} l(b) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

Ejemplo 1. Un cierto distribuidor de corriente eléctrica se diseña de tal manera que la pieza mecánica que regula la distribución tiene un perímetro simétrico; supóngase que la mitad de éste se representa por la curva $y = \frac{1}{3}(x^2 - 2)^{3/2}$ y la recta $y=0$, según se indica en la figura 1. Calcular el perímetro total de la pieza.

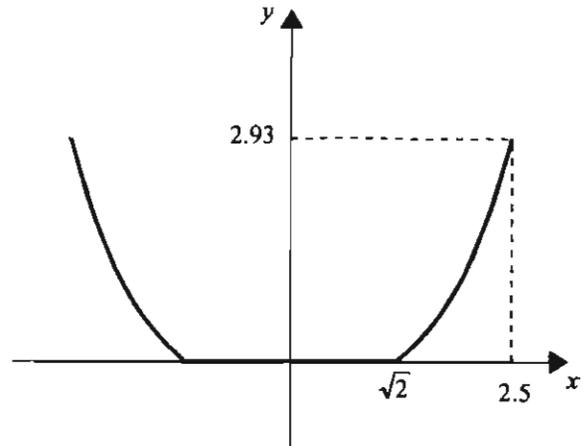


figura 1

La curva $y = \frac{1}{3}(x^2 - 2)^{3/2}$ es simétrica con respecto al eje y , es positiva, y cuando $y = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$.

La función $y(x)$ es suave en $[\sqrt{2}, 2.5]$ porque $y'(x)$ existe y es continua en dicho intervalo,

$$y' = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \right) (x^2 - 2)^{1/2} 2x = x(x^2 - 2)^{1/2}$$

$$y'' = \frac{1}{2} x(x^2 - 2)^{-1/2} 2x + (x^2 - 2)^{1/2} = \frac{x^2}{(x^2 - 2)^{1/2}} + (x^2 - 2)^{1/2},$$

$$y''(2) = \frac{4}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} > 0 \quad \text{y, en consecuencia, es cóncava hacia arriba.}$$

Ahora, para calcular la longitud del arco de la curva de $\sqrt{2}$ a 2.5 y por ser funciones integrables, se tiene:

$$\begin{aligned}
 l &= \int_{\sqrt{2}}^{2.5} \sqrt{1+y'^2} dx = \int_{\sqrt{2}}^{2.5} \sqrt{1+x^2(x^2-2)} dx = \int_{\sqrt{2}}^{2.5} \sqrt{1+x^4-2x^2} dx \\
 &= \int_{\sqrt{2}}^{2.5} \sqrt{x^4-2x^2+1} dx = \int_{\sqrt{2}}^{2.5} \sqrt{(x^2-1)^2} dx = \int_{\sqrt{2}}^{2.5} (x^2-1) dx \\
 &= \left. \frac{x^3}{3} - x \right|_{\sqrt{2}}^{2.5} = \frac{(2.5)^3}{3} - 2.5 - \left(\frac{(\sqrt{2})^3}{3} - \sqrt{2} \right) \\
 &= \frac{15.625}{3} - 2.5 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} \approx 5.208 - 2.5 + \frac{\sqrt{2}}{3} \\
 &\approx 5.208 - 2.5 + 0.471 \approx 3.179.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la longitud total l_T del perímetro de la pieza es, suponiendo que el "diente" de la figura 1 está coronado por otra parte simétrica,

$$l_T \approx 4\sqrt{2} + 4(3.179) \approx 18.372 \text{ unidades de longitud.}$$

Ejemplo 2. Supóngase que se ha podido determinar que el lugar geométrico de una parte del litoral de una bahía está representado por la curva $f(x) = 2x^{2/3} + 1$ entre $x = 1$ y $x = 3$, donde las distancias están medidas en kilómetros. Calcular la longitud del litoral entre dichos puntos.

Primeramente, $f(1) = 3$, $f(3) = 2(3)^{2/3} + 1 \approx 4.16 + 1 = 5.16$

$$f'(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)x^{-1/3} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^{1/3}}\right),$$

$$f''(x) = \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{3} \right) x^{-4/3} = -\frac{4}{9} \left(\frac{1}{x^{4/3}} \right)$$

$\Rightarrow f''(x) < 0$ en $[1, 3]$ y, por tanto, $f(x)$ es cóncava hacia abajo. Además, en el intervalo de trabajo, $f(x)$ es suave. La gráfica de la función se aprecia en la figura 1.

Ahora,

$$\begin{aligned} 1 + \overline{f'(x)}^2 &= 1 + \frac{16}{9} \left(\frac{1}{x^{2/3}} \right) \\ \sqrt{1 + \overline{f'(x)}^2} &= \sqrt{1 + \frac{16}{9} \left(\frac{1}{x^{2/3}} \right)} \\ &= \frac{1}{3x^{1/3}} \sqrt{9x^{2/3} + 16}. \end{aligned}$$

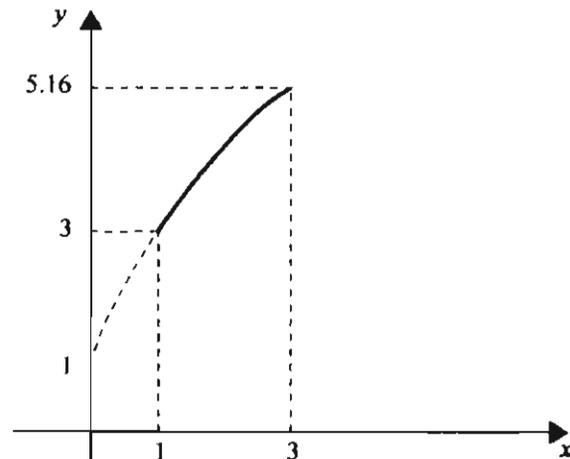


figura 1

Luego, por 5.(5) y ya que la función satisface las condiciones de integrabilidad, se tiene:

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{18} \int_1^3 \frac{18}{3x^{1/3}} \sqrt{9x^{2/3} + 16} dx = \frac{1}{18} \left. \frac{(9x^{2/3} + 16)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right|_1^3 \\ &= \frac{1}{27} (9x^{2/3} + 16)^{3/2} \Big|_1^3 \\ &= \frac{1}{27} \left[(9(3)^{2/3} + 16)^{3/2} - (9(1)^{2/3} + 16)^{3/2} \right] \end{aligned}$$

$$\approx \frac{1}{27} \left[(9(2.08) + 16)^{3/2} - 125 \right]$$

$$\approx \frac{1}{27} [205 - 125] = \frac{80}{27} \approx 2.96 \text{ km.}$$

6. **TRABAJO.** Si una fuerza constante f_c se aplica a un cuerpo para moverlo una distancia d en línea recta y en la dirección de la fuerza, se define el trabajo W , realizado para efectuar el traslado, por

$$(1) \quad W = f_c \cdot d.$$

Es conveniente recordar que la fuerza se expresa en unidades tales como kilogramos-fuerza (kgf), libras-fuerza (lbf), dinas (dyn), Newtons (N), etc., donde a su vez, la fuerza y la masa están relacionadas por

$$(2) \quad f_c = m a,$$

siendo m la masa de un cuerpo y a la aceleración a la que se somete m . Así, se define un Newton por la fuerza generada al acelerar un kilogramo masa un metro por segundo al cuadrado ($1 \text{ kgf} \sim 9.80665 \text{ N}$, $1 \text{ lbf} \sim 4.4482 \text{ N}$, $1 \text{ dina} \sim 10^{-5} \text{ N}$, $1 \text{ julio} \sim \text{Newton-metro}$).

Si la fuerza f que se le aplica a un cuerpo no es constante, pero puede expresarse en función de un parámetro al moverlo en línea recta y en la dirección de la fuerza, entonces, ilustrándose en la figura 1, W , f y la distancia se relacionan como se describe a continuación.

Sea $f(t)$ la fuerza aplicada para mover el cuerpo a partir del punto t , $W(t)$ el trabajo realizado para moverlo en línea recta hasta el punto t , y t el parámetro que representa los desplazamientos del mismo.

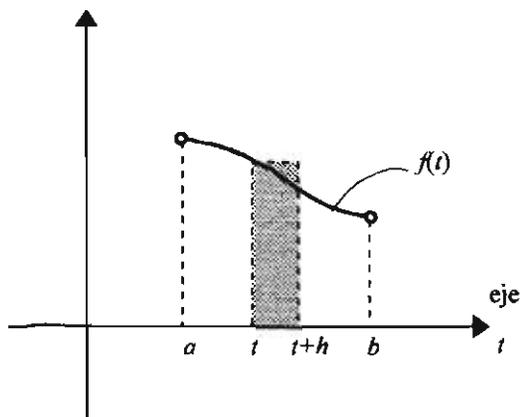


figura 1

Obsérvese que la curva representa a $f(t)$ y no es la trayectoria que describe el cuerpo al moverse; ésta última es en línea recta y hacia la derecha y no se muestra en la figura. Entonces, si h representa un cierto desplazamiento del cuerpo en la dirección y sentido indicados,

$$(1) \quad W(t+h) - W(t) \approx f(t)h.$$

Dividiendo ésta expresión por h ,

$$\frac{W(t+h) - W(t)}{h} \approx f(t)$$

y si $h \rightarrow 0$, y además existen los límites indicados,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{W(t+h) - W(t)}{h} = W'(t) \quad \text{y}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(t) = f(t),$$

por lo que, en el límite,

$$W'(t) = f(t).$$

Si las funciones resultantes satisfacen las condiciones de integrabilidad, por I.13.3.b

$$(2) \quad \int W'(t) dt = \int f(t) dt + C_1$$

y por I.13.3.c

$$(3) \quad \int W'(t)dt = W(t) + C_2,$$

luego, de (2) y (3),

$$(4) \quad W(t) = \int f(t)dt + C,$$

donde $C = C_1 - C_2$.

$$(5) \Rightarrow \quad W(t)|_a^b = W(b) - W(a) \stackrel{W(a)=0}{=} W(b) = \int_a^b f(t)dt.$$

Por (5), el trabajo realizado para desplazar el cuerpo en línea recta, desde $t = a$ hasta $t = b$, aplicando la fuerza f , equivale al área de la región limitada por $t = a$, $t = b$, el eje t y la curva $f(t)$, como se ejemplifica en la figura 1.

Ejemplo 1. Una industria pequeña construye su sistema de almacenaje y uso de agua mediante una cisterna y un tinaco. La cisterna tiene un volumen de cuatro veces el volumen del tinaco, el cual tiene a su vez las mismas características del tanque descrito en el ejemplo 1 del punto 4.1. La cisterna tiene base cuadrada con lado $a = 8$ metros. Calcular el trabajo necesario para llenar el tinaco (dato esencial para seleccionar la capacidad de la bomba requerida), que se instala como se muestra en la figura 1.

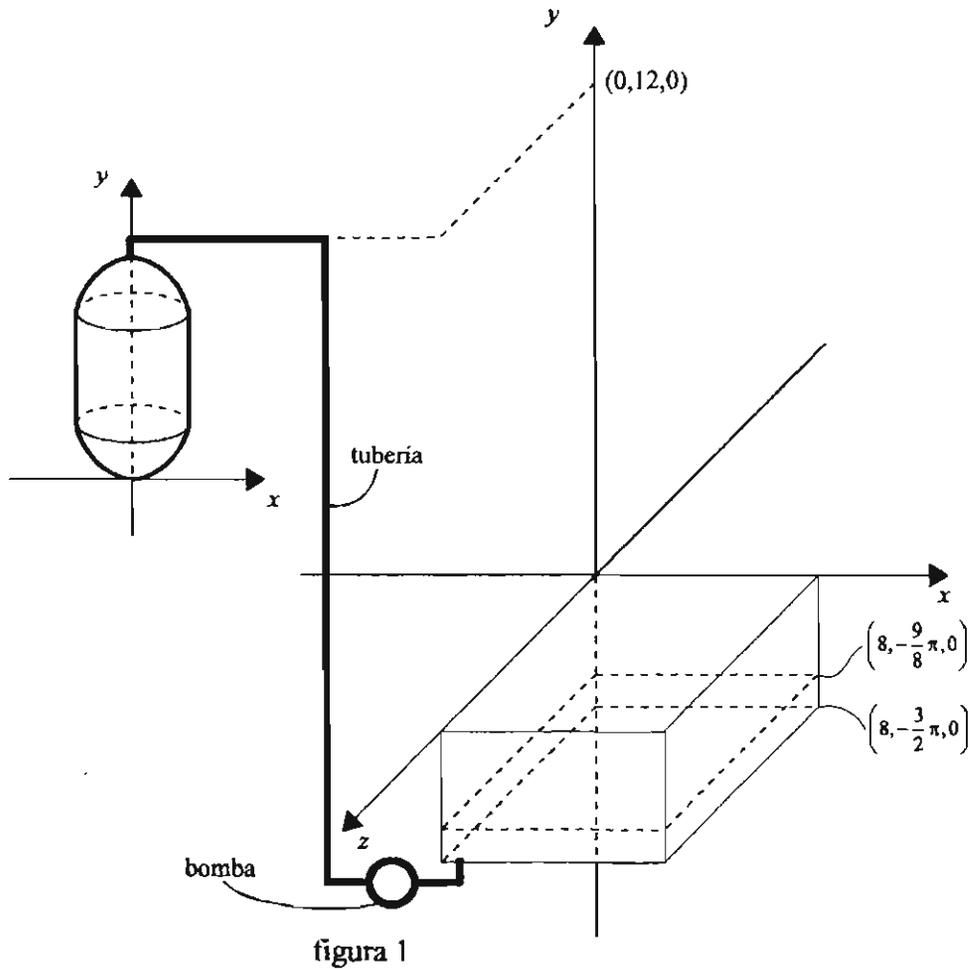
Sea V_T el volumen del tinaco y V_c el de la cisterna. $V_T = 24 \pi$, según se calculó en el ejemplo 1 del punto 4.1. Entonces, $V_c = 4 V_T = 4 (24) \pi = 96 \pi$. Por otra parte, como la cisterna tiene la forma de un paralelepípedo rectangular, su volumen es $V_c = a^2b$, donde a es el lado de la base cuadrada y b la altura de la cisterna.

Luego,

$$a^2b = 96\pi \quad \Rightarrow \quad b = \frac{96}{64} \pi = \frac{3}{2} \pi.$$

Considerando que el trabajo máximo que se efectúa para llenar el tinaco sería justamente el que habría de realizarse cuando la cisterna contuviese un volumen de agua igual al volumen del tinaco, entonces el nivel del agua en la cisterna en este caso, designándose por b_j , sería:

$$b_j = \frac{24}{64} \pi = \frac{3}{8} \pi.$$



Ahora, por (5) de este mismo punto 6,

$$W(b) = \int_a^b f(t) dt,$$

y ya que $f(t) = m(t) \cdot a(t)$, donde $m(t)$ es la masa y $a(t)$ es la aceleración, y la densidad

$\rho(t) = \frac{m(t)}{V(t)}$, donde $m(t)$ y $V(t)$ son, respectivamente, la masa contenida en un volumen

dado, entonces,

$$W(b) = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \rho(t) V(t) a(t) dt.$$

En el caso que se estudia, la densidad $\rho(t)$ del agua se considera constante y, a 20°C , es de aproximadamente $1 \text{ g/cm}^3 \sim 1000 \text{ kg/m}^3$. La aceleración $a(t)$, por su parte, es la de la gravedad y, para fines prácticos, es constante, tomándose al nivel del mar como

$$a(t) = g(t) \approx 9.807 \text{ m/seg}^2.$$

Luego,

$$\rho(t)g(t) \approx \left(1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(9.807 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2}\right) = 9,807 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{seg}^2}.$$

Sea W el trabajo requerido para elevar el volumen del agua, contenido en la cisterna entre

las alturas $-\frac{3}{2}\pi$ y $-\frac{9}{8}\pi$, y considerando que

$$-\frac{9}{8}\pi - \left(-\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{3}{8}\pi,$$

hasta la altura máxima del tubo; las pérdidas de trabajo por fricción en la tubería se considera que no afectan, en tramos cortos, los dígitos significativos del caso en estudio.

Entonces, utilizando 4 del punto 4.4, W puede calcularse mediante:

$$W = \rho g \int_{y_0}^{y_1} [A(y) dy] \vec{d}(y),$$

donde ρ , g , constantes, $A(y)$ es el área de la base de la cisterna; en el caso, $A(y) = 64$; y $\tilde{d}(y)$ es la altura en función de y a la que hay que elevar cada elemento diferencial del volumen. Luego,

$$\begin{aligned}
 W &= \rho g \int_{-3\pi/2}^{-9\pi/8} [64 dy] (12 - y) \\
 &= 64 \rho g \int_{-3\pi/2}^{-9\pi/8} (12 - y) dy \\
 &= 64 \rho g \left[12y - \frac{y^2}{2} \right]_{-3\pi/2}^{-9\pi/8} \\
 &= 64 \rho g \left[12 \left(-\frac{9}{8} \pi \right) - \frac{\left(-\frac{9}{8} \pi \right)^2}{2} - \left(12 \left(-\frac{3}{2} \pi \right) - \frac{\left(-\frac{3}{2} \pi \right)^2}{2} \right) \right] \\
 &= 64 \rho g \left[-\frac{27}{2} \pi - \frac{81}{128} \pi^2 + 18\pi + \frac{9}{8} \pi^2 \right] \\
 &\approx 64(9807) \left[\frac{9}{2} \pi + \frac{63}{128} \pi^2 \right] \\
 &\approx 11,922,087 \quad \text{Julios.}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Determinar una fórmula para calcular el trabajo máximo efectivo que es necesario realizar para elevar verticalmente un montacargas.

Aparentemente, el texto del problema podría considerarse vago y carente de información; sin embargo, se observará cómo es posible irlo definiendo y concretar el diseño de un modelo sencillo que represente la operación deseada.

Con la finalidad de permitir diversas aplicaciones se supondrá que el montacargas tiene una altura a y su peso con carga máxima es P_{ch} . Además, sea P_u el peso del cable por unidad de longitud y el resto de las variables y constantes se ilustra en la figura 1.

Aplicando (5) del punto 6, se tiene:

$$(1) \quad W = \int_{h_0}^{a/2} f(y) dy.$$

Ahora,

$$f(y) = P_{ch}(y) + P_c(y),$$

$P_c(y)$, peso del cable, donde

$$P_c(y) = P_u(-y + b)^*,$$

P_u , peso/unidad del cable, y $P_{ch}(y)$ permanece constante, escribiéndose $P_{ch}(y) \equiv P_{ch}$, luego,

$$W = \int_{h_0}^{a/2} [P_{ch} + P_u(-y + b)] dy = P_{ch}y + P_u \left[-\frac{y^2}{2} + by \right]_{h_0}^{a/2}$$

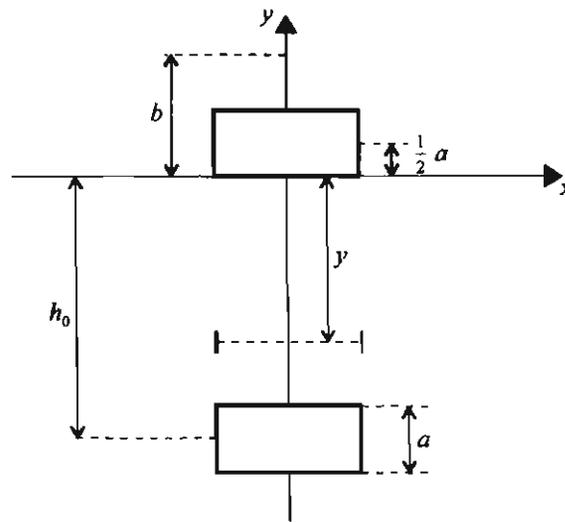


figura 1

* Considerar idealmente que el cable equivale a estar ajustado al centro del montacargas; si éste se sujeta por

arriba, entonces (1) se integraría $\int_{h_0+a/2}^a \dots$

$$\begin{aligned}
&= P_{ch} \left(\frac{1}{2}a - h_0 \right) + P_u \left(-\frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{h_0^2}{2} - bh_0 \right) \\
(2) \quad &= \frac{1}{2}P_{ch}(a - 2h_0) + \frac{1}{8}P_u(-a^2 + 4ab + 4h_0^2 - 8bh_0).
\end{aligned}$$

Si se evalúa la integral con los límites indicados en el pie de página anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}
W &= \int_{h_0 + \frac{1}{2}a}^a [P_{ch} + P_u(-y + b)] dy = P_{ch}y + P_u \left[-\frac{y^2}{2} + by \right]_{h_0 + \frac{1}{2}a}^a \\
&= P_{ch} \left[a - \left(h_0 + \frac{1}{2}a \right) \right] + P_u \left[-\frac{a^2}{2} + ba - \left(\frac{-\left(h_0 + \frac{1}{2}a \right)^2}{2} + b \left(h_0 + \frac{1}{2}a \right) \right) \right] \\
&= P_{ch} \left[a - h_0 - \frac{1}{2}a \right] + P_u \left[-\frac{a^2}{2} + ba + \frac{\left(h_0 + \frac{1}{2}a \right)^2}{2} - b \left(h_0 + \frac{1}{2}a \right) \right] \\
&= P_{ch} \left[\frac{1}{2}a - h_0 \right] + P_u \left[-\frac{a^2}{2} + ba + \frac{1}{2} \left(h_0^2 + ah_0 + \frac{1}{4}a^2 \right) - bh_0 - \frac{1}{2}ab \right] \\
&= P_{ch} \left[\frac{1}{2}a - h_0 \right] + P_u \left[-\frac{a^2}{2} + ba + \frac{1}{2}h_0^2 + \frac{1}{2}ah_0 + \frac{1}{8}a^2 - bh_0 - \frac{1}{2}ab \right] \\
&= P_{ch} \left[\frac{1}{2}a - h_0 \right] + \frac{P_u}{8} \left[-4a^2 + 8ba + 4h_0^2 + 4ah_0 + a^2 - 8bh_0 - 4ab \right]
\end{aligned}$$

$$= P_{ch} \left[\frac{1}{2} a - h_0 \right] + \frac{P_u}{8} \left[-3a^2 + 4ba + 4h_0^2 + 4ah_0 - 8bh_0 \right].$$

Aplicación del ejemplo 2. En el ejemplo anterior, supóngase que el montacargas es un elevador para un máximo de 10 personas, la masa del elevador es de 500 kg, la masa promedio por persona es de 80 kg y la masa adicional por un factor de seguridad es igual al 50% de la masa total del elevador y la carga. Además, sea $h_0 = -36.5$ m, $b = 4$ m, $a = 2.5$ m y $M_u = 10$ (M_u la masa en kg/unidad del cable). Si M_T es la masa total (excepto la del cable), entonces,

$$\begin{aligned} M_T &= 500 + 10(80) + 0.50[500 + 10(80)] \\ &= 1.5 [500 + 10(80)] = 1.5(500 + 800) = 1.5 (1,300) \\ &= 1950 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Ahora, $P_{ch} = M_T \cdot g$; si g es el valor de la gravedad al nivel del mar (ver ejemplo 1 de este mismo punto), se tiene:

$$P_{ch} \approx 1950(9.087) \approx 19,123.7 \text{ Newtons}$$

$$P_u \approx 10(9.087) = 98.07 \text{ Newtons.}$$

En consecuencia, aplicando (2) del ejemplo anterior, se obtiene para W :

$$\begin{aligned} W &\approx \frac{1}{2}(19,123.7)(2.5 - 2(-36.5)) + \frac{1}{8}(98.07)(-(2.5)^2 + 4(2.5)(4) + 4(-36.5)^2 - 8(4)(-36.5)) \\ &\approx 801,978.51 \text{ Julios.} \end{aligned}$$



7. **PRESION DE LIQUIDOS.** La presión es la fuerza que se ejerce por unidad de área. Específicamente, la presión ejercida por un líquido sobre el fondo horizontal del recipiente que lo contiene es igual al peso de la columna del líquido sobre la unidad de área considerada.

Así, sea ρ_A la densidad del agua, g la aceleración debida a la gravedad y h la altura de una columna de agua. Tomando $\rho_A = 1 \text{ g/cm}^3$ y $g \approx 980.7 \text{ cm/seg}^2$, ver punto 6, ejemplo 1, y suponiendo que $h = 2.50 \text{ m}$, entonces, la presión ejercida por la columna sobre 1 cm^2 de base es igual al peso de la columna dividido por el área unitaria. Luego, si p es la presión, y observando que hay 250 cm^3 en cada columna sobre 1 cm^2 de base,

$$(1) \quad p \approx \left(1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)(250 \text{ cm}^3)\left(980.7 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}\right)\left(\frac{1}{1} \frac{1}{\text{cm}^2}\right) = 245,175 \frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2}$$

Por otra parte, la presión que ejerce un líquido en un punto dado, de acuerdo con el principio de Pascal, es igual en todas direcciones. Por lo calculado anteriormente, en dos puntos de un cuerpo de un líquido que se encuentren a diferente profundidad se ejercerán presiones distintas. De ahí que el problema para calcular la fuerza total que ejerce un líquido sobre un fondo horizontal del recipiente que lo contiene sea diferente al de calcular la fuerza total ejercida sobre una pared vertical o inclinada. La solución de ambos problemas es esencial para el diseño de tanques, reactores, presas, canales, etc.

Mediante la aplicación a un caso común, se explicará el método para calcular la fuerza total que ejerce un líquido sobre una pared vertical. Sea la pared o lámina la ilustrada en la figura 1; se encuentra limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = a$, $y = b$.

Por construcción, f y g tienen inversa. Sea k la altura del líquido. Además, considérense constantes ρ y g . Similarmente al cálculo efectuado en (1), la presión ejercida en cualquier punto que se encuentre a una profundidad $k - y$ es :

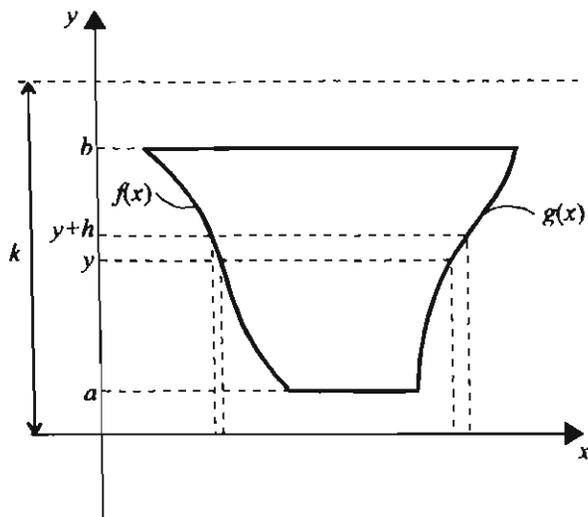


figura 1

$$p = \rho (k - y) g \left(\frac{1}{1} \right) = \rho g (k - y)$$

(Recuérdese que $k-y$ son las unidades cúbicas en la columna de longitud $k-y$).

Ahora bien, si se representa la fuerza total ejercida por el líquido sobre la pared hasta y por $F(y)$, entonces $F(y+h)$ será la fuerza total hasta

$y+h$. Luego, ya que la fuerza es igual a la presión multiplicada por el área, se tiene, en forma aproximada, que

$$(2) \quad F(y+h) - F(y) \approx \rho g (k - y) (x_2 - x_1) h,$$

donde $x_2 = g^{-1}(y)$ y $x_1 = f^{-1}(y)$. Por tanto, (2) permite calcular aproximadamente la fuerza total sobre la región limitada por y , $y+h$, $y = f(x)$ y $y = g(x)$ mediante la fuerza que se ejercería sobre una placa "horizontal" a una profundidad $k - y$ y de las mismas dimensiones que $(x_2 - x_1) h$.

Dividiendo cada miembro de (2) por h , si existen los límites respectivos, se tiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(y+h) - F(y)}{h} = F'(y) \text{ y}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \rho g (k - y) (x_2 - x_1) = \rho g (k - y) (x_2 - x_1).$$

En consecuencia, en el límite,

$$(3) \quad F'(y) = \rho g (k - y) (x_2 - x_1).$$

Por I.13.3.b y si las funciones implicadas en (3) son integrables, recordando que ρ y g se suponen constantes, resulta:

$$(4) \quad \int F'(y)dy = \rho g \int (k-y)(x_2 - x_1)dy + C_1$$

(Si ρ variase con la altura, entonces se buscaría expresar ρ en función de y , si esto fuese posible, en cuyo caso quedaría dentro de la integral).

También, por I.13.3.c,

$$(5) \quad \int F'(y)dy = F(y) + C_2.$$

Luego, por (4) y (5),

$$F(y) = \rho g \int (k-y)(x_2 - x_1)dy + C,$$

$$[C = C_1 - C_2]$$

$$= \rho g \int (k-y)(g^{-1}(y) - f^{-1}(y))dy + C.$$

Por tanto,

$$(6) \quad F(y)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \stackrel{F(a)=0}{=} F(b)$$

$$= \rho g \int_a^b (k-y)(g^{-1}(y) - f^{-1}(y))dy.$$

Ejemplo 1. Calcular la fuerza ejercida por el agua sobre la pared que se encuentra en el plano xy de la cisterna mencionada en el ejemplo 1, punto 6, si ésta última se encuentra llena.

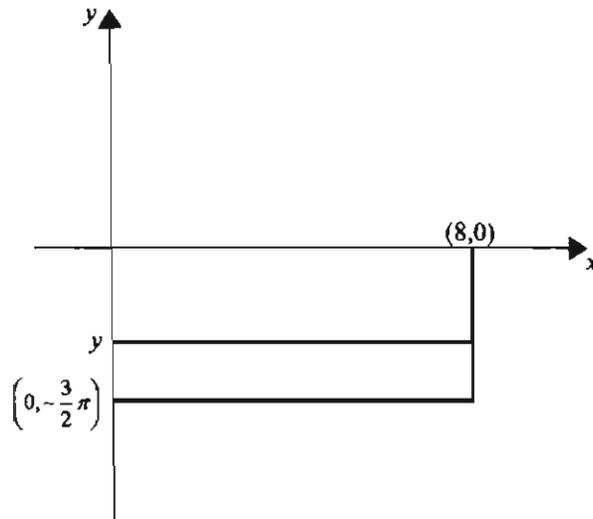


figura 1

La figura 1 muestra la pared de la cisterna en el plano xy . De acuerdo con la fórmula (6) del punto 7, observando que x_1 y x_2 son constantes, la fórmula a aplicar sería:

$$F(b) = \rho g \int_a^b (k - y)(x_2 - x_1) dy.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} F(0) &= \rho g \int_{-3\pi/2}^0 (0 - y)(8 - 0) dy \\ &= \rho g \int_{-3\pi/2}^0 (-8y) dy = -8\rho g \frac{y^2}{2} \Big|_{-3\pi/2}^0 \\ &= -8\rho g \left[0 - \frac{\left(-\frac{3}{2}\pi\right)^2}{2} \right] = -8\rho g \left(\frac{-\frac{9}{4}\pi^2}{2} \right) \\ &= 9\rho g \pi^2. \end{aligned}$$

Tomando el valor de ρg calculado en el ejemplo 1, punto 6, se tiene:

$$F(0) \approx 9(9807)(3.1416)^2,$$

esto es, dimensionalmente,

$$F(0) \approx (9807)(9)(3.1416)^2 \approx 871,120 \text{ Newtons}$$

$$\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{seg}^2} \cdot \text{m}^3 \cdot 1 = \frac{\text{kg m}}{\text{seg}^2} \right]$$

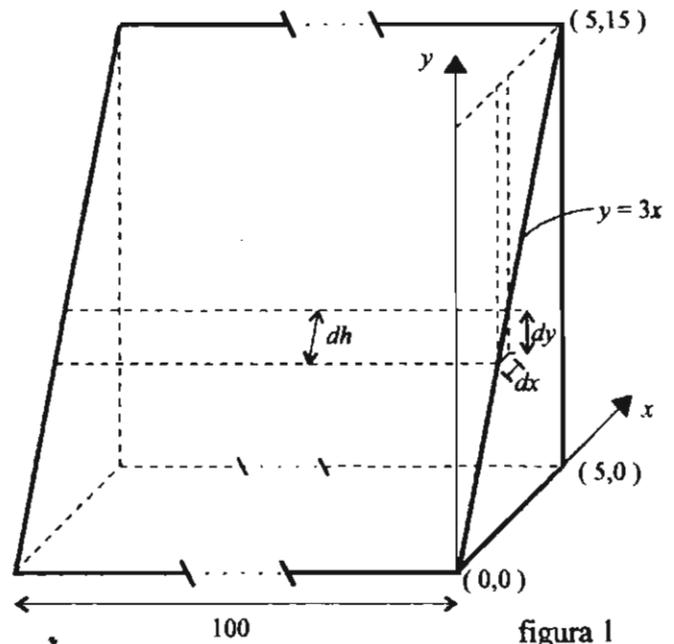
Ejercicio 1. En el ejemplo anterior, calcular la fuerza ejercida por el agua sobre la otra pared (diferente) de la cisterna, así como la que se ejerce sobre el fondo de la misma.

Ejemplo 2. Se construye una presa cuya cortina tiene forma rectangular inclinada. Si la pendiente de la cortina es 3, calcular la fuerza total ejercida por el agua sobre la cortina cuando la presa está llena.

Otras medidas de la cortina son las siguientes: longitud 100 m, altura 15 m y base de la sección triangular transversal 5 m.

En primer término, conviene observar que $\int_a^b (x_2 - x_1) dy$ representa el área de la pared vertical respectiva si la ecuación (4) de esta sección se integra entre $y = a$ y $y = b$. Ahora bien, en este ejemplo, el área sobre la que se aplica la fuerza es el rectángulo de la pared inclinada de la presa (ver figura 1 adjunta). Esto implica que el elemento diferencial de área no es $100 dx$ ó $100 dy$. Para

determinarlo, tómesese en cuenta que la hipotenusa del triángulo mostrado en la figura 1 de



este ejemplo es $\sqrt{(15)^2 + 5^2} \approx 15.811$ y para un elemento diferencial $\cos \theta = \frac{dx}{dh}$, donde dh

es el diferencial de la hipotenusa, o bien $\sin \theta = \frac{dy}{dh}$.

Por $\cos \theta \approx \frac{5}{15.811} \approx 0.316$, $\theta \approx 71^\circ 35'$. Luego, puede realizarse el cálculo de la fuerza por

cualquiera de las dos fórmulas $\left(dh = \frac{dx}{\cos \theta} \text{ ó } dh = \frac{dy}{\sin \theta} \right)$:

$$\text{i) } F(5) \equiv F \approx \rho g \int_0^5 (15 - 3x) \frac{100}{0.316} dx \text{ ó}$$

$$\text{ii) } F(15) \equiv F \approx \rho g \int_0^{15} (15 - y) \frac{100}{0.948} dy, \text{ donde } \sin 71^\circ 35' \approx 0.948$$

(en ambos casos, $100 dh$ es el elemento diferencial del área de la cortina).

Aplicando la fórmula i), se tiene:

$$F(5) \equiv F \approx \rho g \int_0^5 (15 - 3x) \frac{100}{0.316} dx$$

$$= \frac{100}{0.316} \rho g \int_0^5 3(5 - x) dx$$

$$= \frac{300}{0.316} \rho g \int_0^5 (5 - x) dx$$

$$= \frac{300}{0.316} \rho g \left[5x - \frac{x^2}{2} \right]_0^5$$

$$= \frac{300}{0.316} \rho g \left[25 - \frac{25}{2} \right]$$

$$= \frac{3750}{0.316} \rho g.$$

Por el ejemplo 1, punto 6, $\rho g \approx 9807 \text{ kg/m}^2\text{seg}^2$.

Luego,

$$F \approx \frac{\rho g}{0.316} (3750)$$

$$\approx (9807)(3750)(1/0.316) \approx 116,380,000 \text{ Newtons,}$$

$$(\text{kg/m}^2\text{seg}^2)(\text{m}^3)(1) = \text{kg}\cdot\text{m}/\text{seg}^2 = \text{Newtons.}$$

8. **MOMENTOS Y CENTROS DE MASA.** En la figura 1 se ilustra una distribución de 4 masas puntuales sobre el eje x . Las masas se designan por m_1 , m_2 , m_3 y m_4 y sus abscisas correspondientes son x_1 , x_2 , x_3 y x_4 . Si se desea calcular el momento del sistema de masas dado con respecto al origen O , representado por M_0 , se tiene que

$$M_0 = x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + x_4 m_4 = \sum_{i=1}^4 x_i m_i.$$

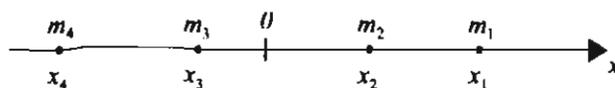


figura 1

En general, si $i = 1, 2, \dots, n$,

$$(1) \quad M_0 = \sum_{i=1}^n x_i m_i.$$

Sea ahora $\sum_{i=1}^n m_i = M$, esto es, la masa total del sistema. Si \bar{x} es la abscisa en la que habría que colocar a M , entonces,

$$\bar{x}M = \sum_{i=1}^n x_i m_i$$

para que el nuevo sistema M , de masa concentrada, tenga el mismo momento con respecto a O que el sistema de masas distribuido, entonces a \bar{x} se le denomina el centro de masa del sistema.

En forma análoga, para un sistema de masas distribuido en dos dimensiones y el correspondiente sistema concentrado, considerando ahora los momentos con respecto a los ejes x e y , se tiene:

$$M_x = \sum_{i=1}^n y_i m_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^n x_i m_i$$

donde M_x y M_y representan los momentos del sistema referidos a los ejes x e y , respectivamente. Entonces, (\bar{x}, \bar{y}) representará el centro de masa del sistema si

$$\bar{x}M = \sum_{i=1}^n x_i m_i, \quad \sum_{i=1}^n m_i = M \quad \text{y} \quad \bar{y}M = \sum_{i=1}^n y_i m_i.$$

Luego,

$$(2) \quad \bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

De manera similar, en tres dimensiones, si se tiene un sistema distribuido de masas y tomando los momentos de inercia del mismo con respecto a los planos yz , zx y xy por M_{yz} , M_{zx} y M_{xy} , respectivamente, y $\sum_{i=1}^n m_i = M$, entonces, su centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ se define y obtiene por

$$(3) \quad \bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{y} = \frac{M_{zx}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

En el caso de sólidos, para fines prácticos, y si no se establece nada en contrario, se supone que la materia del sólido está distribuida uniformemente. Esto permite definir la densidad mediante

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad \Rightarrow \quad dm = \rho dV,$$

donde Δm y ΔV significan incrementos en la masa y el volumen, respectivamente, y dm , dV , los incrementos diferenciales correspondientes. En tal caso, la densidad ρ es puntual.

Por su importancia aplicativa, se hace referencia específica a los tres casos siguientes:

- i) **Cuando la "densidad" de un sólido se proporciona por unidad lineal, como en el caso de un cable.** Entonces, $dm = \rho_l dl$, donde ρ_l es la masa/unidad de longitud y dl la longitud del arco del elemento dm .

Si M_p representa el momento de un sólido con respecto a un punto P y x la distancia de dm a P , entonces, para el centro de masa se obtiene:

$$\bar{x} \int dm = \int x dm, \quad dm = \rho_l(x) dx, \quad \rho_l(x) \text{ puntual,}$$

de donde

$$(1) \quad \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm}$$

Nótese que si $\rho_l(x)$ es constante, sale de las integrales de (1) y se cancelan.

ii) Cuando la "densidad" de un sólido se considera por unidad de área, como es el caso de una lámina. Así, $dm = \rho_A dA$, donde ρ_A es la masa por unidad de área y dA representa el área del elemento dm .

Observación. En virtud de que en este grado de avance de un curso de cálculo integral se están estudiando únicamente funciones reales de una sola variable real, ρ_A se considera constante o bien función de la variable de integración, según sea el caso. Se supone también que A es posible expresarla análogamente.

Por lo tanto, si M_x y M_y representan los momentos de la masa del sólido con respecto a los ejes x e y y, a su vez, x e y son las distancias de dm a los ejes y y x , respectivamente, entonces, por

$$M_x = \int y dm \quad \text{y} \quad M_y = \int x dm,$$

$$(2) \quad \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm}, \quad dm = \rho_A dA.$$

Si ρ_A es constante, se cancelan en los cocientes de (2).

En (2), (\bar{x}, \bar{y}) es el centro de masa del sólido (lámina).

- iii) **Cuando la densidad de un sólido se aplica en su sentido formal como la masa por unidad de volumen.** Entonces, de manera similar a los casos anteriores, considerando a $dm = \rho_v dV$, donde ρ_v es constante o función de la variable de integración respectiva y dV también expresable en función de la variable de integración, se tiene:

$$M_{yz} = \int x dm, \quad M_{zx} = \int y dm, \quad M_{xy} = \int z dm$$

y

$$(3) \quad \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dm}{\int dm},$$

Si ρ_v es constante, se cancelan en los cocientes de (3). $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ representa las coordenadas del centro de masa del sólido y el resto de las magnitudes tienen un significado obvio.

Ejemplo 1. Calcular el centro de masa de una lámina de densidad ρ_A cuya área es la delimitada en el ejemplo 1 del punto 3.1.

Trazando $y = 1$ y $x = 2$ en la figura 1 del citado ejemplo se delimitan tres subzonas de la lámina:

- i) La región comprendida por $y = 1$, $y = 3$, $x = 0$ y $x = 2$, que constituye un cuadrado. A esta subzona se le denominará subzona 1.
- ii) La región comprendida por $y = 1$, $x = 0$ y $y = \frac{1}{4}x^2$, a la que se denominará subzona 2. E,
- iii) La región limitada por $y = 3$, $x = 2$ y $y = x^2 - 3$, denominándose subzona 3.

A continuación se calcularán los centros de masa de cada subzona y, a partir de éstos, el centro de masa de la lámina.

SUBZONA 1. Como esta región tiene forma cuadrada, su centro de masa está en la intersección de las diagonales. Las ecuaciones de las diagonales son $y = x + 1$ y $y = -x + 3$.

Luego,

$$x + 1 = -x + 3 \Rightarrow x = 1$$

y

$$y = x + 1 = 1 + 1 = 2,$$

punto que también pudo obtenerse por simple geometría.

Por tanto, $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{y}_1 = 2$, donde (\bar{x}_1, \bar{y}_1) representan las coordenadas del centro de masa de la subzona 1. Por ρ_A constante, el centro de masa no se ve afectado; enseguida se aprecia formalmente esta consideración.

SUBZONA 2. Por ii (2) del punto 8, donde (\bar{x}_2, \bar{y}_2) es el centro de masa de esta subzona y tomando rectángulos representativos verticales, se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 &= \frac{\int_{m_1}^{m_2} x dm}{\int_{m_1}^{m_2} dm} = \frac{\int_{A_1}^{A_2} x \rho_A dA}{\int_{A_1}^{A_2} \rho_A dA} \stackrel{\rho_A = \text{cte}}{=} \frac{\rho_A \int_{A_1}^{A_2} x dA}{\rho_A \int_{A_1}^{A_2} dA} \\ &= \frac{\int_0^2 x \left(1 - \frac{1}{4} x^2\right) dx}{\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{4} x^2\right) dx} = \frac{\int_0^2 \left(x - \frac{1}{4} x^3\right) dx}{\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{4} x^2\right) dx} \end{aligned}$$

$$\frac{\left. \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} \right|_0^2}{\left. x - \frac{1}{4} \frac{x^3}{3} \right|_0^2} = \frac{2-1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{6-2}{3}} = \frac{3}{4}$$

y, mediante rectángulos representativos horizontales,

$$\begin{aligned} \bar{y}_2 &= \frac{\int_{m_1}^{m_2} y dm}{\int_{m_1}^{m_2} dm} = \frac{\int_{A_1}^{A_2} y \rho_A dA}{\int_{A_1}^{A_2} \rho_A dA} \stackrel{\rho_A = cte}{=} \frac{\int_0^1 y (2\sqrt{y} dy)}{\int_0^1 2\sqrt{y} dy} \\ &= \frac{2 \int_0^1 y^{3/2} dy}{2 \int_0^1 y^{1/2} dy} = \frac{\left. \frac{2}{5} y^{5/2} \right|_0^1}{\left. \frac{2}{3} y^{3/2} \right|_0^1} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

SUBZONA 3. Análogamente, por ii (2) del punto 8, donde (\bar{x}_3, \bar{y}_3) es el centro de masa de esta subzona, utilizando rectángulos representativos verticales, se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{x}_3 &= \frac{\int_{m_1}^{m_2} x dm}{\int_{m_1}^{m_2} dm} = \frac{\int_{A_1}^{A_2} x \rho_A dA}{\int_{A_1}^{A_2} \rho_A dA} \stackrel{\rho_A = cte}{=} \frac{\int_{A_1}^{A_2} x dA}{\int_{A_1}^{A_2} dA} \\ &= \frac{\int_2^{\sqrt{6}} x [3 - (x^2 - 3)] dx}{\int_2^{\sqrt{6}} [3 - (x^2 - 3)] dx} = \frac{\int_2^{\sqrt{6}} (3x - x^3 + 3x) dx}{\int_2^{\sqrt{6}} (6 - x^2) dx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\int_2^{\sqrt{6}} (6x - x^3) dx}{\int_2^{\sqrt{6}} (6 - x^2) dx} = \frac{3x^2 - \frac{x^4}{4} \Big|_2^{\sqrt{6}}}{6x - \frac{x^3}{3} \Big|_2^{\sqrt{6}}} \\
&= \frac{18 - 9 - 12 + 4}{6\sqrt{6} - 2\sqrt{6} - 12 + \frac{8}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}(18\sqrt{6} - 6\sqrt{6} - 36 + 8)} \\
&= \frac{3}{12\sqrt{6} - 28} = \frac{3}{4(3\sqrt{6} - 7)} \approx 2.152
\end{aligned}$$

y, mediante rectángulos representativos horizontales,

$$\begin{aligned}
\bar{y}_3 &= \frac{\int_{m_1}^{m_2} y dm}{\int_{m_1}^{m_2} dm} = \frac{\int_{A_1}^{A_2} y \rho_A dA}{\int_{A_1}^{A_2} \rho_A dA} \stackrel{\rho_A = \text{cte}}{=} \frac{\rho_A \int_{A_1}^{A_2} y dA}{\rho_A \int_{A_1}^{A_2} dA} \\
&= \frac{\int_1^3 y(\sqrt{y+3} - 2) dy}{\int_1^3 (\sqrt{y+3} - 2) dy}
\end{aligned}$$

Ahora, si $u = \sqrt{y+3}$, $u^2 = y+3$, $y = u^2 - 3$ y $dy = 2u du$ (por el método de cambio de variable I.16), luego, para

$$\begin{aligned}
\int y \sqrt{y+3} dy &= \int (u^2 - 3)u(2u du) = 2 \int (u^4 - 3u^2) du \\
&= 2 \left(\frac{u^5}{5} - u^3 \right) = \frac{2}{5} (u^5 - 5u^3)
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{5} u^3 (u^2 - 5) = \frac{2}{5} (y+3)^{3/2} (y-2).$$

Por tanto, volviendo al cálculo de \bar{y}_3 ,

$$\bar{y}_3 = \frac{\int_1^3 y(\sqrt{y+3}-2) dy}{\int_1^3 (\sqrt{y+3}-2) dy} = \frac{\frac{2}{5}(y+3)^{3/2}(y-2) - y^2 \Big|_1^3}{\frac{2}{3}(y+3)^{3/2} - 2y \Big|_1^3}$$

$$= \frac{\frac{2}{5}(6)^{3/2} - 9 - \frac{2}{5}(8)(-1) + 1}{\frac{2}{3}(6)^{3/2} - 6 - \frac{2}{3}(8) + 2} = \frac{\frac{2}{5}(6)^{3/2} - 8 + \frac{16}{5}}{\frac{2}{3}(6)^{3/2} - 4 - \frac{16}{3}}$$

$$= \frac{\frac{2(6)^{3/2} - 40 + 16}{5}}{\frac{2(6)^{3/2} - 12 - 16}{3}} = \frac{3 \left(\frac{2(6)^{3/2} - 24}{5} \right)}{2(6)^{3/2} - 28} \approx 2.321.$$

En consecuencia, para un sistema de masa distribuido en dos dimensiones, según el punto 8, y dados los centros de masa de las tres subzonas y las masas correspondientes M_1 , M_2 y M_3 , a saber,

$$(1,2), \quad \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{5} \right) \quad \text{y} \quad (2.152, 2.321)$$

$$M_1 = \int_{m_1}^{m_2} dm = \rho_A A = 4\rho_A, \quad M_2 = \int_{m_1}^{m_2} dm = \frac{4}{3}\rho_A, \quad M_3 = \int_{m_1}^{m_2} dm = 0.466\rho_A$$

(verificar estos valores, calculando $\int_{m_1}^{m_2} dm$, sea para (\bar{x}_1, \bar{y}_1) , (\bar{x}_2, \bar{y}_2) o (\bar{x}_3, \bar{y}_3))

se tiene, para el centro de masa de la lámina, denotado por (\bar{x}_i, \bar{y}_i) , según 8. (2),

$$\bar{x}_i \approx \frac{(1)(4\rho_A) + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\rho_A\right) + 2.152(0.466\rho_A)}{4\rho_A + \frac{4}{3}\rho_A + 0.466\rho_A}$$

$$= \frac{4 + 1 + 2.152(0.466)}{4 + \frac{4}{3} + 0.466} \approx 1.035$$

y

$$\bar{y}_i \approx \frac{2(4\rho_A) + \frac{3}{5}\left(\frac{4}{3}\rho_A\right) + 2.321(0.466\rho_A)}{4\rho_A + \frac{4}{3}\rho_A + 0.466\rho_A}$$

$$= \frac{8 + \frac{4}{5} + 2.321(0.466)}{4 + \frac{4}{3} + 0.466} \approx 1.704.$$

COMENTARIO. El centro de masa de la subzona 1 puede calcularse también de manera similar a la forma en que se calcularon los de las subzonas 2 y 3.

Ejemplo 2. El arco de curva $y = \frac{1}{2}x^2$, limitado por $x = \sqrt{2}$ y $x = 3$, se hace girar con respecto al eje y generando un paraboloides truncado. Determinar el centro de masa del sólido.

Si $x = \sqrt{2}$, $y = 1$ y si $x = 3$, $y = 4.5$. Por simetría, $\bar{x} = 0$, $\bar{z} = 0$. Entonces, solo falta determinar \bar{y} . Por iii (3) del punto 8,

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\int_{m_1}^{m_2} y dm}{\int_{m_1}^{m_2} dm} = \frac{\int_{V_1}^{V_2} y \rho_V dV}{\int_{V_1}^{V_2} \rho_V dV} \stackrel{\rho_V = \text{cte}}{=} \frac{\rho_V \int_{V_1}^{V_2} y dV}{\rho_V \int_{V_1}^{V_2} dV} \\ &= \frac{\int_1^{4.5} y \pi x^2 dy}{\int_1^{4.5} \pi x^2 dy} = \frac{\int_1^{4.5} y x^2 dy}{\int_1^{4.5} x^2 dy} = \frac{\int_1^{4.5} 2y^2 dy}{\int_1^{4.5} 2y dy} \\ &= \frac{\int_1^{4.5} y^2 dy}{\int_1^{4.5} y dy} = \frac{\left. \frac{y^3}{3} \right|_1^{4.5}}{\left. \frac{y^2}{2} \right|_1^{4.5}} \approx \frac{30.375 - 0.333}{10.125 - 0.500} = \frac{30.042}{9.625} \\ &\approx 3.12. \end{aligned}$$

9. MOMENTOS DE INERCIA. La energía cinética (E_c) de una masa m que se mueve en línea recta con velocidad v es

$$(1) \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2.$$

Si la masa m gira en forma circular alrededor de un eje t con velocidad angular ω , radio r_t y velocidad lineal $v = \omega r_t$ (ver figura 1), entonces, la energía cinética de m es

$$(2) \quad E_c = \frac{1}{2} m \omega^2 r_t^2.$$

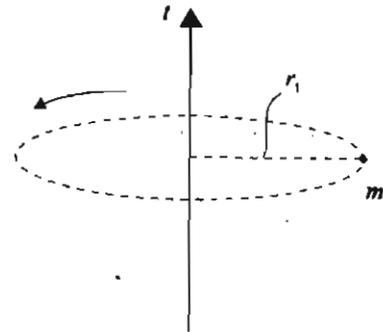


figura 1

Por otra parte, si se tiene un sistema de masas m_1, m_2, \dots, m_n , que gira, respectivamente, con radios r_1, r_2, \dots, r_n alrededor del mismo eje y a la misma velocidad angular, entonces, la energía cinética del sistema es

$$(3) \quad E_c = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \omega^2 m_i r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

$$(4) \quad A \quad I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

se le denomina momento de inercia.

En las ecuaciones (1), (2) y (3) la E_c respectiva representa el trabajo que es necesario realizar para detener el cuerpo o sistema, y dejarlo en reposo. Análogamente, también es el trabajo que se requeriría para ponerlo en movimiento, a partir del reposo, hasta alcanzar las condiciones de velocidad y giro implícitas.

Si la masa m es la de un alambre, una lámina o un sólido, y la distribución de la misma es continua, la fórmula (4) sugiere que el momento de inercia estaría expresado por

$$(5) \quad I = \int r^2 dm,$$

donde r representa el radio de giro de la masa dm con respecto a un eje dado (r y dm expresables en función de la variable de integración). En consecuencia, si ω es la velocidad angular constante de m ,

$$(6) \quad E_c = \frac{1}{2} \omega^2 I.$$

Ejemplo 1. Una flecha sólida de un material con densidad ρ_v cte., radio de 10 unidades y longitud de 500 unidades, se hace girar con respecto al eje y (coincidente este con su propio eje) a una velocidad angular ω . Calcular I_y y E_c .

Por (5) y aplicando el método de las cáscaras cilíndricas (ver 4.2 (6)) para dm ,

$$\begin{aligned} I_y &= \int_0^{10} x^2 (2\pi\rho_v x 500) dx \\ &= 1000\pi\rho_v \int_0^{10} x^3 dx = 1000\pi\rho_v \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{10} \\ &= 1000\pi\rho_v \left[\frac{10^4}{4} \right] = 1000(2500)\pi\rho_v \\ &= 2.5 \times 10^6 \pi\rho_v. \end{aligned}$$

Ahora, por (6),

$$E_c = \frac{1}{2} \omega^2 (2.5 \times 10^6 \pi\rho_v) = 1.25 \times 10^6 \pi\rho_v \omega^2.$$

Ejemplo 2. En el ejemplo 1 del punto 3.1, calcular los momentos de inercia de la lámina con respecto a los ejes y y x y la energía cinética respectiva si las velocidades angulares son ω_y y ω_x , respectivamente. La "densidad" de la lámina es ρ_A , cte.

En la figura 1 se ilustran la lámina y los rectángulos representativos para calcular el área de cada región limitada por curvas diferentes.

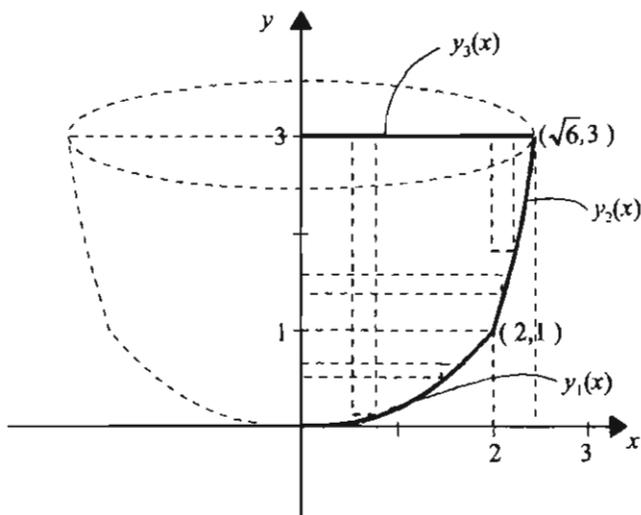


figura 1

Según el ejemplo 1 del punto 3.1,

$$y_1(x) = \frac{1}{4}x^2,$$

$$y_2(x) = x^2 - 3 \quad \text{y}$$

$$y_3(x) = 3.$$

Por ii del punto 8, $dm = \rho_A dA$. Se hará el cálculo por rectángulos representativos verticales en dos zonas: una de $x = 0$ hasta $x = 2$ y la otra de $x = 2$ hasta $x = \sqrt{6}$. Luego, para I_y se tiene:

$$\begin{aligned} I_y &= \int_0^2 x^2 \rho_A \left(3 - \frac{1}{4}x^2 \right) dx + \int_2^{\sqrt{6}} x^2 \rho_A \left[3 - (x^2 - 3) \right] dx \\ &= \rho_A \int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) dx + \rho_A \int_2^{\sqrt{6}} (6x^2 - x^4) dx \\ &= \rho_A \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{1}{4} \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 + \frac{6x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \Big|_2^{\sqrt{6}} \right] \\ &= \rho_A \left[8 - \frac{32}{20} + 2(\sqrt{6})^3 - \frac{(\sqrt{6})^5}{5} - \left(16 - \frac{32}{5} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \rho_A \left[8 - \frac{8}{5} + 12\sqrt{6} - \frac{36\sqrt{6}}{5} - 16 + \frac{32}{5} \right] \\
&= \frac{\rho_A}{5} [40 - 8 + 60\sqrt{6} - 36\sqrt{6} - 80 + 32] \\
&\approx 8.56\rho_A
\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$E_{cy} = \frac{1}{2} \omega_y^2 I_y \approx \frac{1}{2} \omega_y^2 (8.56\rho_A) = 4.28\rho_A \omega_y^2.$$

Ahora, calculando I_x y tomando las mismas dos subzonas, pero utilizando rectángulos representativos horizontales, se tiene:

$$\begin{aligned}
I_x &= \int_0^1 y^2 \rho_A 2\sqrt{y} dy + \int_1^3 y^2 \rho_A \sqrt{y+3} dy \\
&= \rho_A \int_0^1 2y^{3/2} dy + \rho_A \int_1^3 y^2 \sqrt{y+3} dy.
\end{aligned}$$

Evaluando separadamente las integrales,

$$\int_0^1 2y^{3/2} dy = 2y^{7/2} \left(\frac{2}{7} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{7} \quad e$$

$\int y^2 \sqrt{y+3} dy$, haciendo $u = y^2$, $du = 2y dy$; $dv = \sqrt{y+3} dy$, $v = \frac{2}{3}(y+3)^{3/2}$, para integrar

por partes, resulta:

$$\int y^2 \sqrt{y+3} dy = \frac{2}{3} y^2 (y+3)^{3/2} - \int \frac{4}{3} y (y+3)^{3/2} dy$$

$$= \frac{2}{3}y^2(y+3)^{3/2} - \frac{4}{3} \int y(y+3)^{3/2} dy.$$

Integrando por partes nuevamente,

$$\bar{u} = y, \quad d\bar{v} = (y+3)^{3/2} dy$$

$$d\bar{u} = dy, \quad \bar{v} = \frac{2}{5}(y+3)^{5/2},$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \int y^2 \sqrt{y+3} dy &= \frac{2}{3}y^2(y+3)^{3/2} - \frac{4}{3} \left[\frac{2}{5}y(y+3)^{5/2} - \frac{2}{5} \int (y+3)^{5/2} dy \right] \\ &= \frac{2}{3}y^2(y+3)^{3/2} - \frac{8}{15}y(y+3)^{5/2} + \frac{8}{15} \left(\frac{2}{7} \right) (y+3)^{7/2} + C \\ \Rightarrow \int_1^3 y^2 \sqrt{y+3} dy &= \frac{2}{3}y^2(y+3)^{3/2} - \frac{8}{15}y(y+3)^{5/2} + \frac{16}{105}(y+3)^{7/2} \Big|_1^3 \\ &= \frac{2}{3}(3)^2(6)^{3/2} - \frac{8}{15}(3)(6)^{5/2} + \frac{16}{105}(6)^{7/2} - \left[\frac{2}{3}(1)^2(4)^{3/2} - \frac{8}{15}(1)(4)^{5/2} + \frac{16}{105}(4)^{7/2} \right] \\ &\approx 88.18 - 141.09 + 80.62 - 5.33 + 17.06 - 19.50 \\ &= 19.94. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_x \approx \left(\frac{4}{7} + 19.94 \right) \rho_A \approx 20.51 \rho_A$$

$$y \quad E_{\alpha} = \frac{1}{2} \omega_x^2 I_x \approx \frac{1}{2} \omega_x^2 (20.51 \rho_A)$$

$$\approx 10.26 \rho_A \omega_x^2.$$

BIBLIOGRAFIA:

Bers, Lipman. *Cálculo diferencial e integral*, vol. 1. 1a. ed. Tr. por Fausto A. Toranzos. México, Interamericana, 1972. 582 pp.

Leithold, Louis. *El cálculo con geometría analítica segunda edición*. 1a. ed. Tr. por Martha de Garay *et al.* México, Harla, 1973. 1014 pp.

Marroquín, Ermilo J. *El concepto de integral*. 1a. ed. México, UAM-A, 1987, 73 pp.

Swokowski, Earl W. *Cálculo con geometría analítica segunda edición*. 1a. ed. Tr. por José L. Abreu *et al.* Belmont, Cal., Estados Unidos de América, Wadsworth, Inc., 1982. 967 pp.

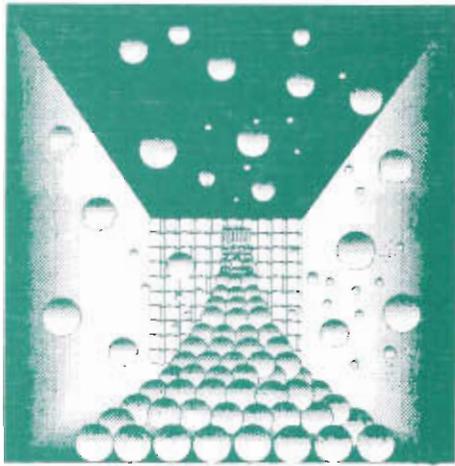
Thomas, George B. *Calculus and analytic geometry*. Second edition. Reading, Mass., United States of America, 1958. 822 pp.

APLICACIONES
DE
LA INTEGRAL

Se terminó de imprimir en el mes de junio del año 2001 en los talleres de la Sección de Impresión y Reproducción de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco. La edición estuvo a cargo de la Sección de Producción y Distribución Editoriales. Se imprimieron 100 ejemplares más sobrantes para reposición.

UAM
QA308
M3.75
2001

2892928
Marroquín, Ermilo J.
Aplicaciones de la Integr



0092101 15839



11.00 - \$ 11.00