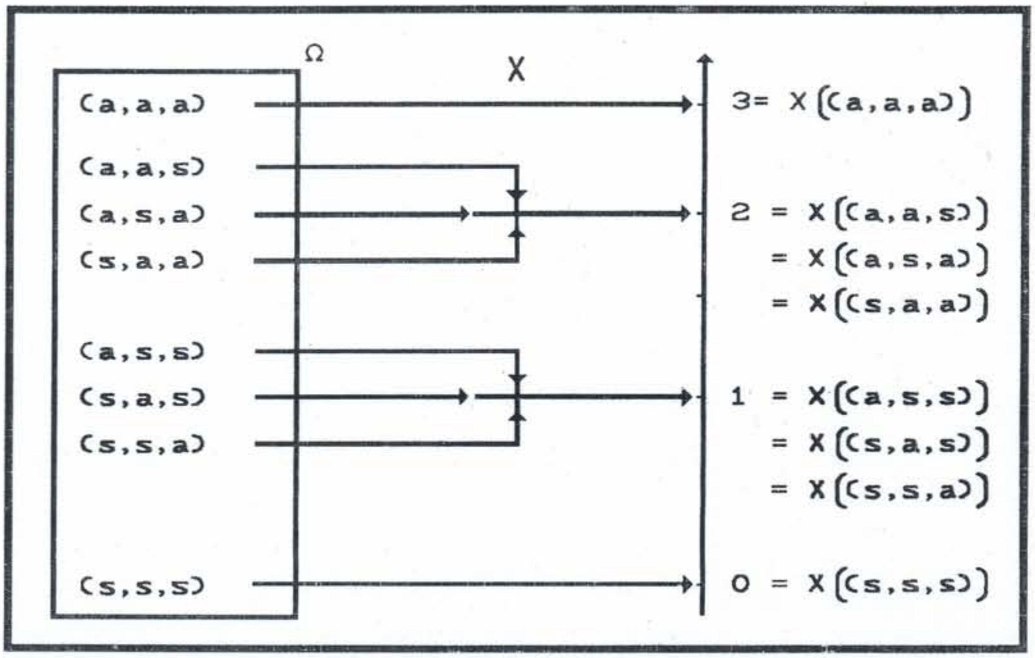
Variables aleatorias

Miguel Angel Gutiérrez Andrade



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Azcapotzalco

Variables aleatorias

Miguel Angel Gutiérrez Andrade

2a. reimpresión, 1997

Departamento de Sistemas

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Unidad Azcapotzalco

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

7.- VARIABLES ALEATORIAS

7.1. Identifica las siguientes variables aleatorias como discretas o continuas:

a) La altura del agua en una represa.

b) Número de personas esperando ser atendidas en una sala.

c) Número total de goles anotados en un partido de fútbol.

d) Número de reclamaciones recibidas por una Cía. de seguros.

e) La cantidad de lluvia que cae en la Cd. de México en la siguiente semana.

f) Tiempo de reacción de un conductor de automóvil cuando se enfrenta a un peligro inminente.

g) El número de bacterias por cm^3 de agua potable.

h) El número de cuentas vencidas en una tienda en un día particular del mes.

i) Su presión arterial.

j) Su ritmo cardíaco.

SOLUCION

a) La altura del agua puede tomar cualquier valor entre 0 y la altura máxima en la represa. Por lo tanto, es continua.

b) El número de personas puede tomar cualquier valor entre (0, 1, 2,......). Por lo tanto, es discreta.

c) Discreta, por la misma razón que en (*b*).

d) Discreta, por la misma razón que en (*b*).

e) Continua, ya que esta cantidad puede tomar cualquier valor real positivo o cero.

f) Continua, por la misma razón que en (*e*).

g) Discreta.

h) Discreta.

i) Continua.

j) Continua o discreta, según la manera de hacer la medición o según el aparato con que se realice.

7.2. Dibuja una gráfica del tipo que debería ser la función de densidad de las siguientes situaciones:

a) La estatura de los individuos en una población específica.

b) El peso de los individuos en una población específica.

c) El ingreso familiar. Piensa en una colonia rica y otra proletaria, por ejemplo, Lomas de Chapultepec y Azcapotzalco, respectivamente.

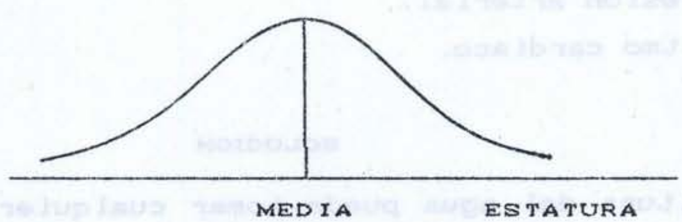
d) El tiempo de vida de las personas.

e) La demanda de agua en las diferentes horas del día.

f) Número de personas en una tienda a las diferentes horas del día.

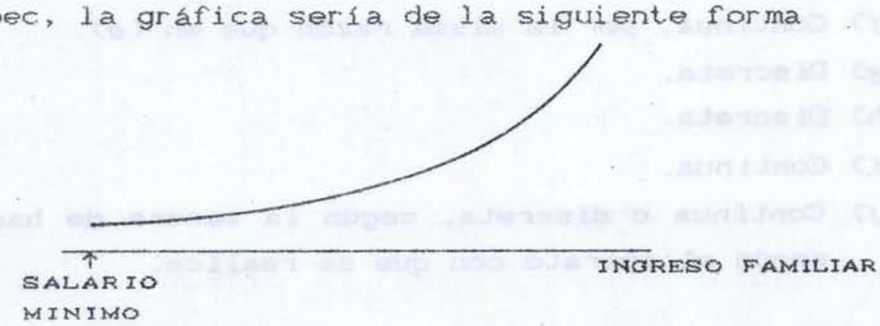
SOLUCION

a) Si uno observa las estaturas de las personas en un grupo, estas tienden a aglutinarse alrededor de una estatura "media" en forma simétrica habiendo pocos "chaparros" y pocos "altos". Por lo tanto, una gráfica de esta distribución es del tipo:

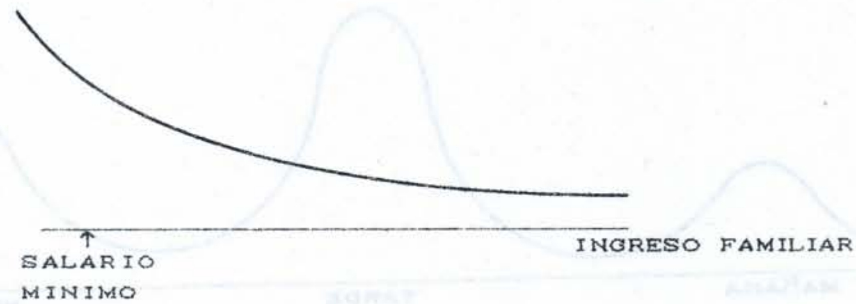


b) Como el peso de las personas está en función de su estatura y del tipo de alimentación; en un grupo específico, estas dos características son comunes entre sus individuos. Así, la gráfica es muy parecida a (*a*).

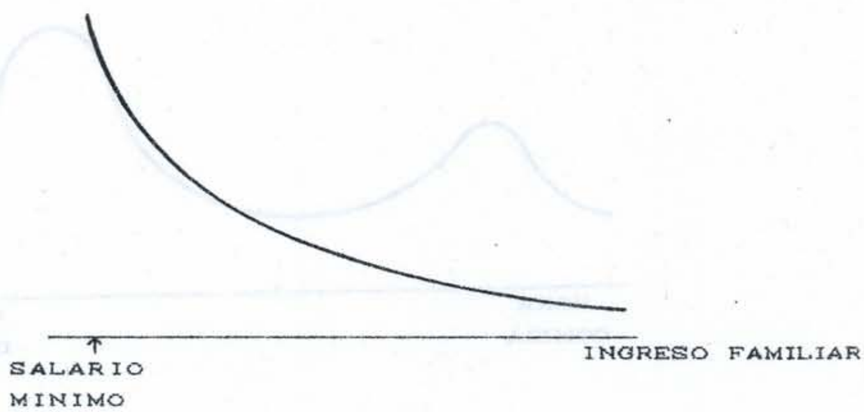
c) Al analizar el ingreso familiar en una colonia como Lomas de Chapultepec, la gráfica sería de la siguiente forma



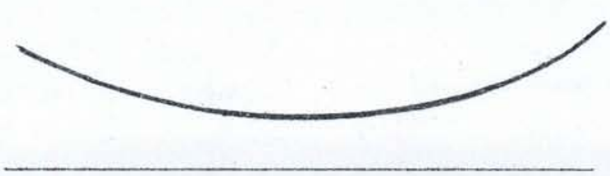
Haciendo lo mismo en una colonia proletaría observaríamos la siguiente gráfica



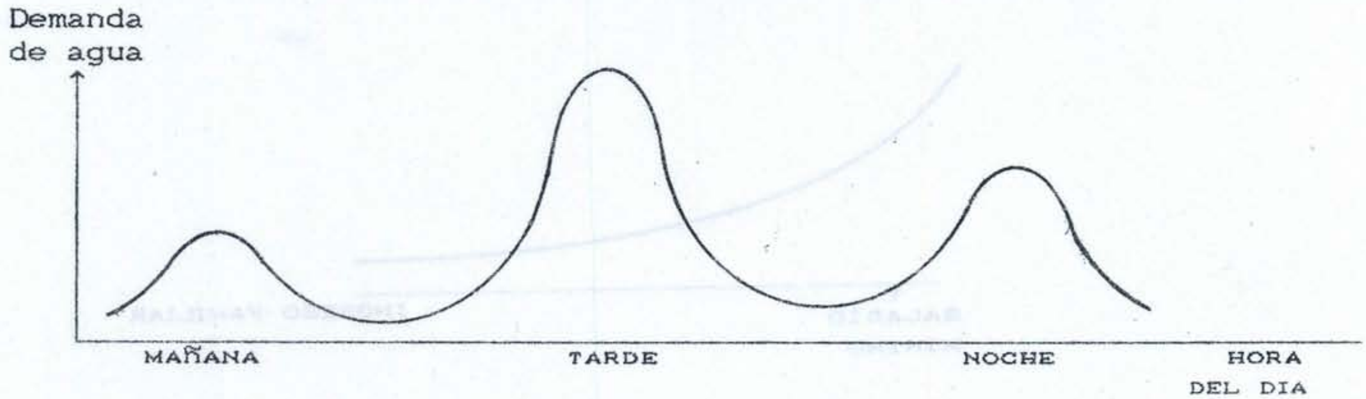
Si estamos hablando de una población como los habitantes de la Cd. de México o de la República Mexicana, podemos observar que existen una gran cantidad de familias con ingresos bajos, pocos con ingresos medios y muy pocos con ingresos altos: la gráfica debe ser algo del siguiente tipo:



d) Las personas, en una sociedad como la nuestra, regularmente mueren, en los primeros años de vida o después de los 60 años (aproximadamente), por lo tanto, esta variable tiene una distribución:

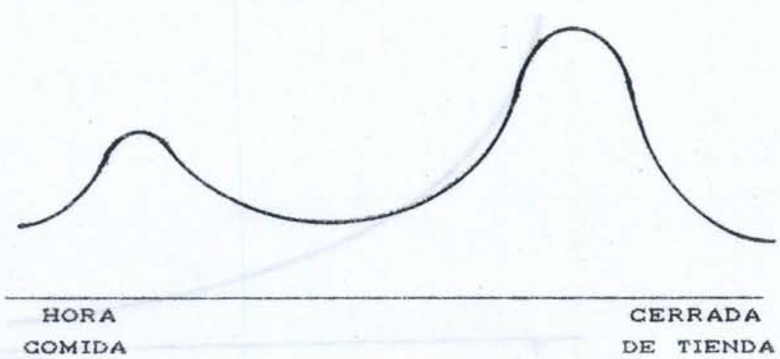


e) La demanda de agua en las colonias donde hay muchas casas habitación debe ser alta por la mañana (uso del baño), baja a media mañana, alta a medio día (agua usada en la comida), baja a media tarde y alta por la noche (agua usada en el baño y cena). Por lo tanto, la distribución debe ser más o menos:



Este es un diagrama bivariado porque está mostrando la relación entre dos variable, no es univariado como en los incisos anteriores.

f) La distribución del número de personas en una tienda debe ser parecida al inciso (e) pero con los picos a media mañana y un pico mayor a media tarde, aunque en días de quincena, la gráfica tendría un comportamiento diferente.



7.3. Un vendedor calcula que cada entrevista con un cliente lleva a una venta con probabilidad 0.2. Cada día entrevista a dos clientes. Calcula la distribución de probabilidad del número de clientes que firman un contrato de ventas. (Suponer que las entrevistas representan sucesos independientes).

SOLUCION

Denotemos por V_1 y V_2 a los eventos, venta en la primera y segunda entrevista respectivamente. Entonces, el espacio muestral del experimento lo podemos dividir en

$$\Omega = \Omega\,\Omega = \left(V_1 + V_1'\right)\left(V_2 + V_2'\right) = V_1V_2 + V_1'V_2 + V_1V_2' + V_1'V_2'$$

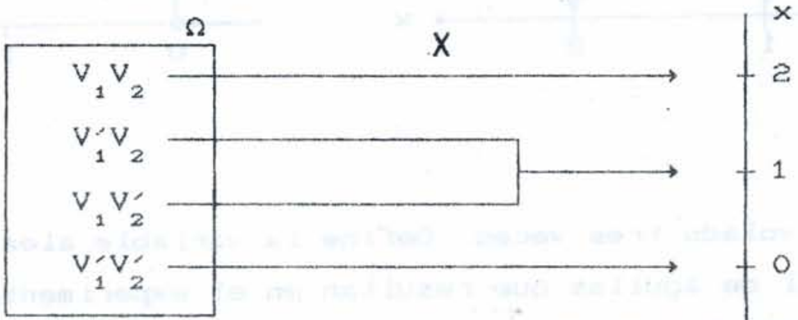
donde el superíndice (′) significa complemento. La división se muestra en el siguiente esquema

Ω

	V_1	V_1'
V_2	V_1V_2	$V_1'V_2$
V_2'	V_1V_2'	$V_1'V_2'$

Sea X la variable aleatoria que denota el número de clientes que firman contrato de venta.

La asociación entre el espacio muestra Ω y los valores x que toma X (recuerda que en realidad X es una función del espacio muestra Ω a los reales) se muestra enseguida



donde resalta que el rango de la variable aleatoria X es $\{0, 1, 2\}$. También resalta la correspondencia entre eventos de Ω y el lenguaje de números reales para los que fácilmente podremos encontrar el valor f(x) a cada número x prefijado. Por ejemplo, cuando queremos conocer $f(0) = P(X=0)$, mejor nos preguntamos qué significa el evento $(X=0)$ en el espacio Ω y observamos en el esquema anterior que corresponde al evento intersección $V'_1 V'_2$. Por lo que

$$f(0) = P(X=0) = P(V'_1V'_2) = P(V'_1)P(V'_2) = (0.8)(0.8) = 0.64$$

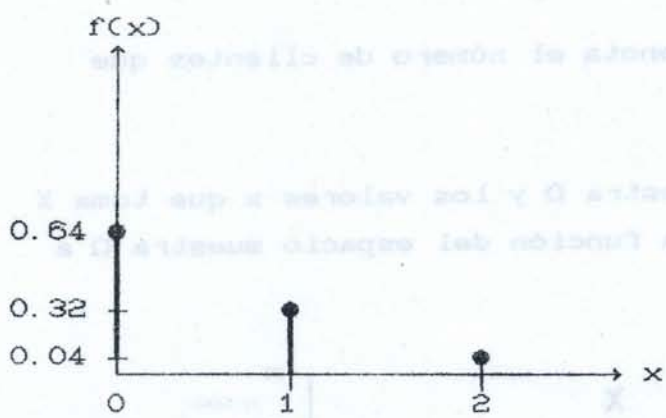
Similarmente:

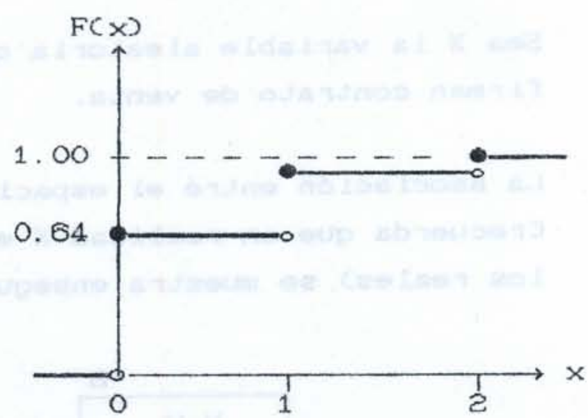
$$f(1) = P(X=1) = P(V'_1V_2 \cup V_1V'_2) = P(V'_1V_2) + P(V_1V'_2)$$
$$= P(V'_1)P(V_2) + P(V_1)P(V'_2) = 2(0.2)(0.8) = 0.32$$

$$f(2) = P(X=2) = P(V_1V_2) = P(V_1)P(V_2) = (0.2)(0.2) = 0.04$$

Por lo tanto, las funciones de densidad y de distribución nos quedan como:

$$f(x) = \begin{cases} 0.64 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0.32 & \text{si} \quad x = 1 \\ 0.04 & \text{si} \quad x = 2 \\ 0.00 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0.00 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0.64 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 0.96 & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ 1.00 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$





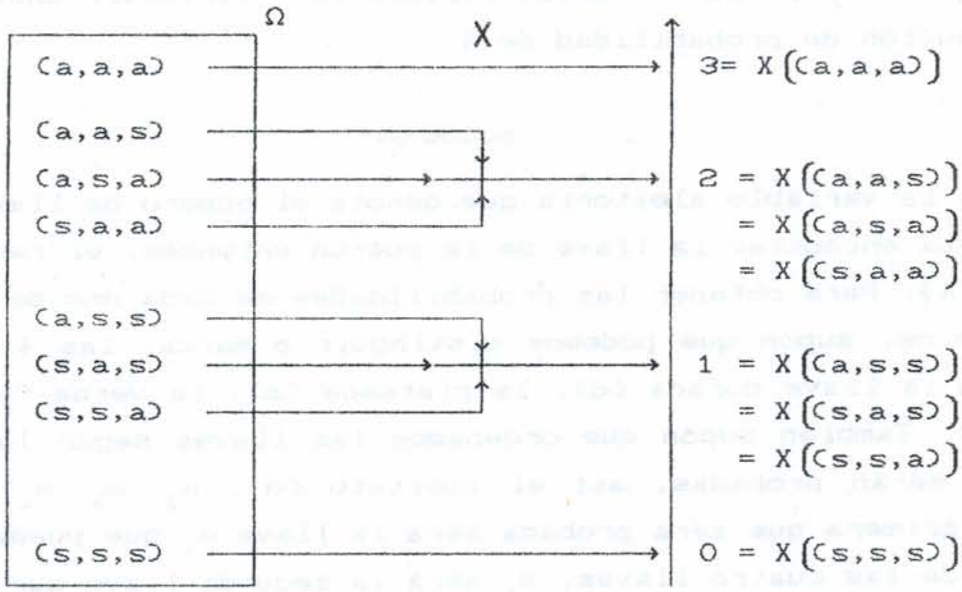
7.4. Se tira un volado tres veces. Define la variable aleatoria X como el número total de águilas que resultan en el experimento. ¿Qué valores x toma la variable X? Muestra la asociación de la regla X, dando su dominio y su rango. También da la función de densidad puntual de X.

SOLUCION

El espacio muestra es

$$\Omega=\{(a,a,a),(a,a,s),(a,s,a),(s,a,a),(a,s,s),(s,a,s),(s,s,a),(s,s,s)\}$$

La contabilización de águilas que hace la variable X equivale a la función (asociación) que se describe en el siguiente esquema:



$$f(0)=P[X=0]=P[\{(s,s,s)\}]=\frac{1}{8}$$

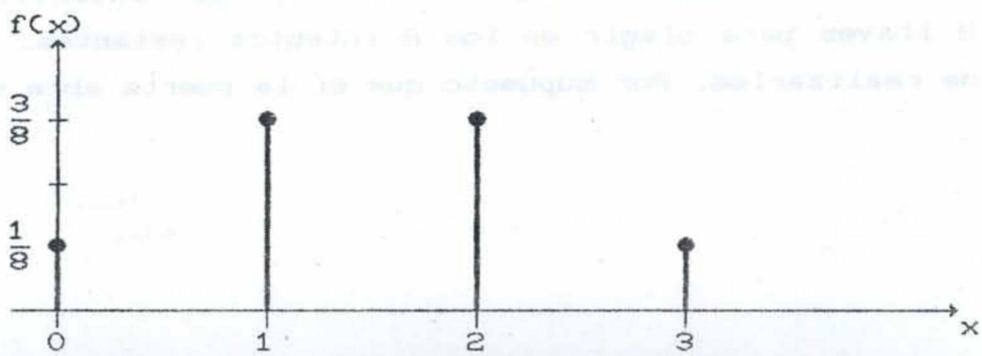
$$f(1)=P[X=1]=P[\{(s,s,a),(s,a,s),(a,s,s)\}]=\frac{3}{8}$$

$$f(2)=P[X=2]=P[\{(a,a,s),(a,s,a),(s,a,a)\}]=\frac{3}{8}$$

$$f(3)=P[X=3]=P[\{(a,a,a)\}]=\frac{1}{8}$$

En resumen

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8} & \text{si } x=0,3\\ \frac{3}{8} & \text{si } x=1,2\end{cases}$$



7.5. Un llavero contiene 4 llaves de una oficina que son idénticas en su apariencia. Sólo una abre la puerta de la oficina. Supongamos que se selecciona una al azar y se prueba, si no es la llave adecuada, se selecciona al azar una de las tres restantes, si esta última no es la llave adecuada, se selecciona una de las dos restantes, etc. Sea X el número de llaves que se tienen que probar hasta encontrar la llave que abra la puerta de la oficina (X = 1,2,3,4). Encuentra la distribución de probabilidad de X.

SOLUCION

Si X es la variable aleatoria que denota el número de llaves probadas hasta encontrar la llave de la puerta entonces, el rango de X es $\{1,2,3,4\}$. Para obtener las probabilidades de cada uno de estos cuatro puntos, supón que podemos distinguir o marcar las 4 llaves por ejemplo la llave dorada (d), la plateada (p), la verde (v) y la negra (n). También supón que ordenamos las llaves según la secuencia en que serán probadas, así el cuarteto $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ significa que la primera que será probada será la llave α_1 que puede ser cualquiera de las cuatro llaves, α_2 será la segunda llave que probaremos elegida de entre las tres restantes, etc.; este orden lo podemos dar de 4! formas. Por ejemplo, la ordenación $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (d,p,v,n)$ significa que primero probamos la llave dorada, después la plateada, enseguida la verde y por último la negra. La ordenación $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (n,v,p,d)$ significa que primero intentamos la llave negra, después la verde, etc.

Si la verdadera llave es la negra, el resultado $\omega = (v,n,p,d)$ implica que X= 2. El resultado $\omega = (v,p,d,n)$ implica que X=4. El evento X= 1 sucede con cualquiera de los siguientes intentos:

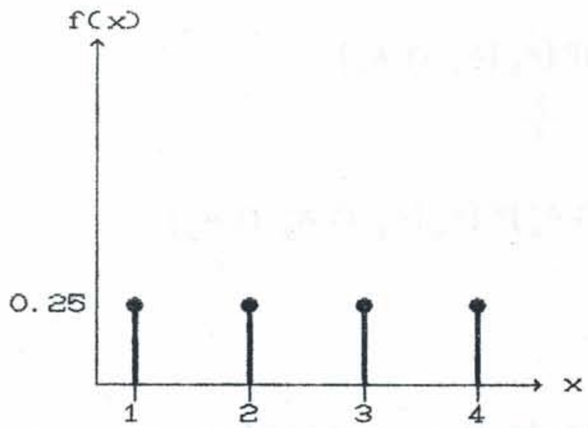
(n,v,p,d), (n,v,d,p), (n,p,v,d), (n,p,d,v), (n,d,v,p), (n,d,p,v).

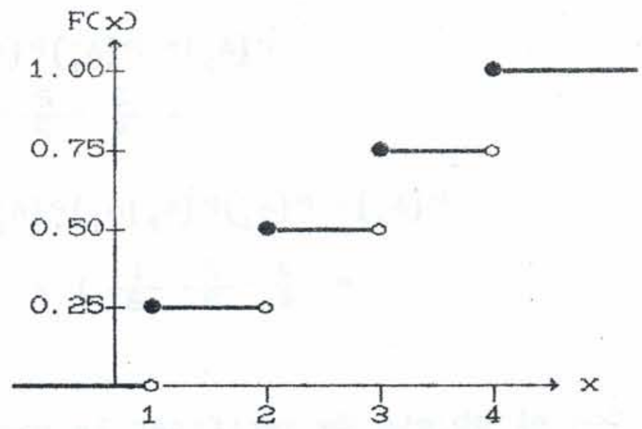
¿Te fijaste? Si fijamos la negra como el primer intento, entonces restan 3 llaves para elegir en los 3 intentos restantes, o sea, 3! formas de realizarlos. Por supuesto que si la puerta abre en el primer intento, no vamos a realizar los restantes, sin embargo, deben considerarse porque la definición clásica de probabilidad debe aplicarse cuando los resultados son igualmente probables. Así:

$$P(X=1) = \frac{3!}{4!} = \frac{1}{4}$$

De la misma forma: $P(X=2) = P(X=1) = P(X=3) = P(X=4)$. Por lo tanto, las funciones de densidad y de distribución de X están dadas por

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si} \quad x = 1,2,3,4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1/4 & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ 2/4 & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ 3/4 & \text{si} \quad 3 \le x < 4 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$$





SOLUCION II PARA ESTE MISMO PROBLEMA (7.5).

Se puede simplificar el experimento anterior al esquema de seleccionar en una urna con cuatro bolas distinguibles por color (o número). Supón como antes que: la llave que abre la puerta es la negra. Entonces nos preguntamos por la probabilidad de los eventos A_i, extraer la bola negra en el i-ésimo ensayo (sin reemplazamiento). También observa que $A_i = (X=i)$ de modo que $P(A_i) = P(X=i)$ para $i=1,2,3,4$. Ahora, A_1 quiere decir extrar bola negra en el primer ensayo. $P(A_1) = 1/4$, ya que tendremos 1 oportunidad en 4 de extraer bola negra; por lo que $P(A_1) = P(X=1) = 1/4$.

Si queremos obtener la probabilidad de A_2 hay que observar que, para que A_2 se verifique necesitamos que en la primera extracción seleccionemos cualquier bola excepto la negra y en la segunda seleccionemos la bola negra, esto es

$$A_2 = A_1' \cap A_2$$

pero esta probabilidad es fácil de calcular usando la ley producto de probabilidades

$$P(A_2) = P(A_1')P(A_2|A_1') = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

así que

$$P(A_2) = P(X=2) = \frac{1}{4}$$

Por los mismos argumentos podemos observar que

$$A_3 = A_1' \cap A_2' \cap A_3 \qquad y \qquad A_4 = A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4$$

Por consiguiente

$$P(A_3) = P(A_1')P(A_2'|A_1')P(A_3|A_1' \cap A_2')$$
$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A_4) = P(A_1')P(A_2'|A_1')P(A_3'|A_1' \cap A_2')P(A_4|A_1' \cap A_2' \cap A_3')$$
$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

7.6. Con el objeto de verificar la exactitud de su contabilidad, las compañías utilizan auditores regularmente para verificar las anotaciones en sus cuentas. Supongamos que los empleados de la compañía hacen anotaciones erróneas el 5% de las veces. Si un auditor revisa al azar 3 anotaciones:

a) Encuentra la distribución de probabilidad del número de errores X detectados por el auditor.

b) Encuentra la probabilidad de que el auditor detecte más de un error.

SOLUCION

a) Sea X la variable aleatoria que denota el número de errores detectados por el auditor, el rango de X es $\{0,1,2,3\}$. Sea E_i el evento de obtener error en la i-ésima anotación revisada. Suponiendo independencia entre los eventos E_i, $i = 1,2,3$, podemos calcular las probabilidades pedidas:

$$P(x=0) = P(E_1'E_2'E_3') = P(E_1')P(E_2')P(E_3') = (0.95)^3$$

$$P(x=1) = P(E_1E_2'E_3' \cup E_1'E_2E_3' \cup E_1'E_2'E_3) = 3(0.05)(0.95)^2$$

$$P(x=2) = P(E_1E_2E_3' \cup E_1E_2'E_3 \cup E_1'E_2E_3) = 3(0.05)^2(0.95)$$

$$P(x=3) = P(E_1E_2E_3) = (0.05)^3$$

Por lo tanto, las funciones de densidad y distribución son:

$$f(x) = \begin{cases} 0.857 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0.135 & \text{si} \quad x = 1 \\ 0.007 & \text{si} \quad x = 2 \\ 0.001 & \text{si} \quad x = 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0.857 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 0.992 & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ 0.999 & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

b) $P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - F(1) = 1 - 0.992 = 0.008$

7.7. Un lote contiene 24 transistores de los cuales 4 son defectuosos. En un proceso de inspección se toman 4 transistores al azar de este lote y se examinan para ver si son o no son defectuosos. Define la variable aleatoria X que denota el número de transistores defectuosos en la muestra.

a) Dá el rango de X.

b) Encuentra la $P(X = x)$ para cada x en el rango de X.

SOLUCION

a) Como en la muestra tomada de los 24 transistores puede haber 0,1, 2,3,4 transistores defectuosos entonces, el rango de X es $\{0,1,2,3,4\}$.

b) $P(X=0) = \dfrac{\binom{20}{4}\binom{4}{0}}{\binom{24}{4}} = \dfrac{4845}{10626} = 0.456$

$$P(X=1) = \frac{\binom{20}{3}\binom{4}{1}}{\binom{24}{4}} = \frac{4560}{10626} = 0.429$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{20}{2}\binom{4}{2}}{\binom{24}{4}} = \frac{1140}{10626} = 0.107$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{20}{1}\binom{4}{3}}{\binom{24}{4}} = \frac{80}{10626} = 0.008$$

$$P(X=4) = \frac{\binom{20}{0}\binom{4}{4}}{\binom{24}{4}} = \frac{1}{10626} = 0.000$$

7.8. Una máquina termina un artículo en un tiempo aleatorio w elegido al azar entre 3 y 4 horas, o sea que, $\Omega = [3,4]$. Supón que su costo al terminarlo depende del tiempo tomado en su elaboración y que este costo indicado por X, está dado por: $X = X(w) = 5w^2$.

a) Dá el rango de X.

b) ¿Qué significa $(45 < X < 60)$?

c) Encuentra la probabilidad que el costo de un artículo esté entre 45 y 60.

SOLUCION

a) $R_X = [45,80]$

b) En el lenguaje de pesos, es el conjunto de todos los puntos en el espacio muestral, que bajo la variable aleatoria X toman valores entre 45 y 60; o sea, es el conjunto de artículos cuyo costo de producción oscila entre 45 y 60 pesos.

En el lenguaje del espacio muestra (tiempo de producción) observa lo siguiente: Si un artículo se fabrica en un tiempo w su costo

será $x = 5w^2$ y si su costo es x, su tiempo w será $w = \sqrt{\frac{x}{5}}$. Así si cuesta 45 pesos, significa que se fabricó en $w = \sqrt{\frac{45}{5}} = 3$ horas; similarmente si cuesta $x = 60$ pesos, $w = \sqrt{\frac{60}{5}} = 3.4641$ horas.

c) Observa que para que un artículo cueste entre 45 y 60, su tiempo de fabricación debió de haber sido entre 3 y 3.4641 horas. Como se está haciendo la suposición que un artículo cualquiera tiene la misma "oportunidad" de fabricarse en cualquier tiempo que esté entre 3 y 4 horas entonces, esta probabilidad debe ser el tamaño relativo del intervalo $(3, \sqrt{12})$ con respecto a $[3,4]$ o sea $(\sqrt{12} - 3) / (4 - 3)$, que es igual a 0.4641. Lo anterior se puede expresar en símbolos como:

Sea $A = \{w \mid w \in \Omega,\ 45 < X(w) < 60\}$

$$P_X(A) = P(45 < X < 60) = P\left(\sqrt{\frac{45}{5}} < w < \sqrt{\frac{60}{5}}\right)$$

$$= P\left(3 < w < \sqrt{12}\right) = \sqrt{12} - 3 = 0.4641$$

7.9. Un fabricante líder ofrece 4 años de garantía en los televisores que produce reemplazando sin costo el aparato cuando el cinescopio falla en ese período. Se estima que la vida del cinescopio usado por este fabricante tiene una función de densidad de probabilidad:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-t/10} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) ¿Qué porcentaje de televisores tendrá fallas durante el período de garantía?

b) ¿Durante un año?

a) Sea X la variable aleatoria que denota el tiempo de falla en años del cinescopio; así, la probabilidad de que un televisor falle durante el período de garantía es:

$$P(X \leq 4) = \int_0^4 \frac{1}{10} e^{-t/10}\, dt = 1 - e^{-4/10} = 0.33$$

Por lo tanto, el 33% de los televisores fallan durante el período de garantía, de 100 vendidos tendremos que reemplazar 33 televisores (teóricamente).

b) La probabilidad de que un televisor falle durante el primer año es:

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-t/10}\, dt = 1 - e^{-1/10} = 0.095$$

Por lo tanto, el 9.5% de los televisores fallan durante el primer año de uso.

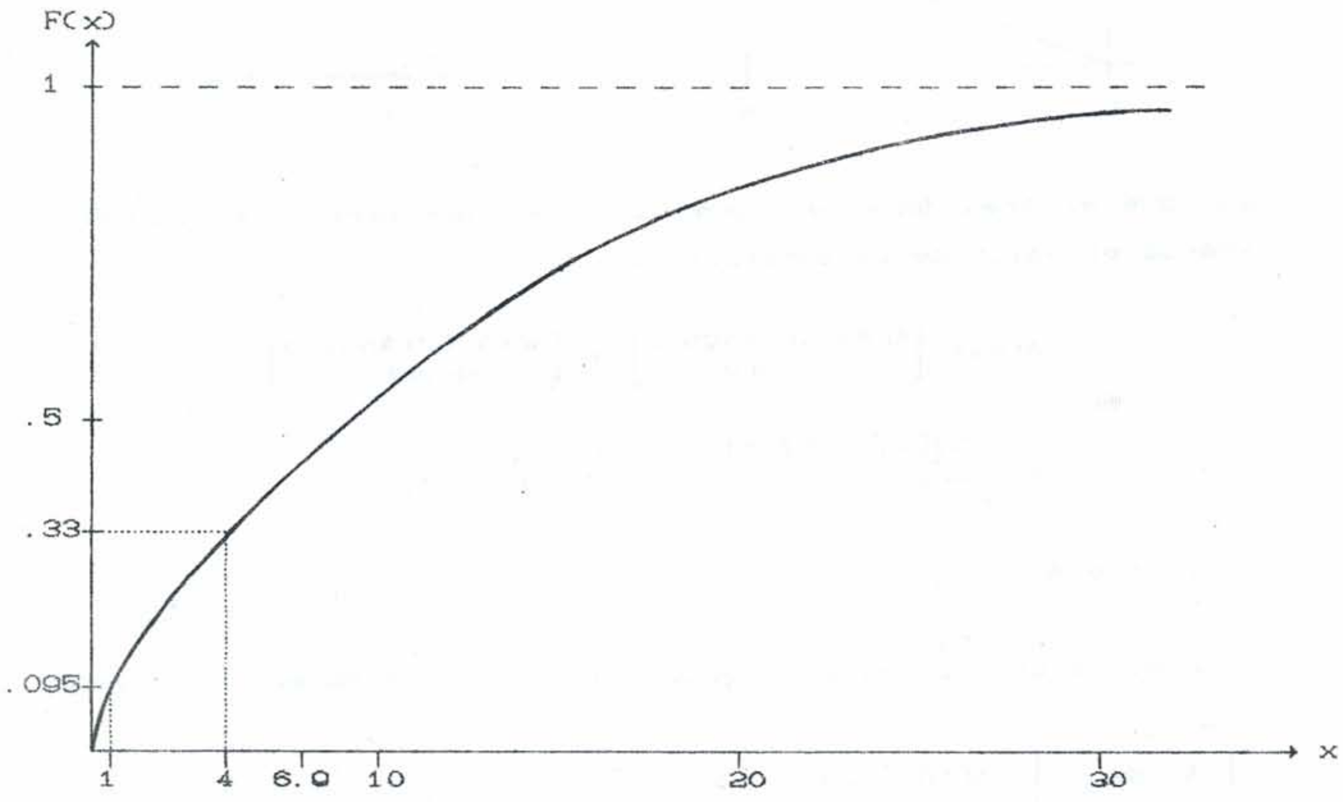
Nota que si hubiéramos calculado la función de distribución acumulada $F(x) = P\{X \leq x\}$ para cualquier número x, las preguntas anteriores fácilmente se contestan, ya que para la primera basta con evaluar $F(x)$ en $x = 4$ y la segunda en $x = 1$. La función de distribución en este ejemplo es ampliamente conocida y fácil de encontrar, de hecho se hizo veladamente anteriormente. La calcularemos para que veas cómo luce para esta variable X que es continua y la contrastes con las distribuciones escalonadas que hemos estado presentando para variables discretas.

Cuando $x < 0$ tenemos que $F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$

Cuando $x > 0$ tenemos

$$F(x)= P\left(X \leq x\right)= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt= \int_{0}^{x} \frac{1}{10}\, e^{-t/10}\, dt= 1 - e^{-x/10}$$

Cuando conoces la función de distribución acumulada $F(x)$ puedes contestar todas las preguntas acerca del fenómeno: probabilidades de cualquier evento (intervalos semiabiertos, semicerrados, etc), incluso la caja con bigotes. Te dejamos un espacio para que bosquejes la gráfica de $F(x)$ y la caja con bigotes. Te ayudamos con la primera.



7.10 La cantidad de pan (en cientos de kilos) que la panificadora "El Rosal" puede vender en un día es un fenómeno aleatorio con una f.d.p. dada por:

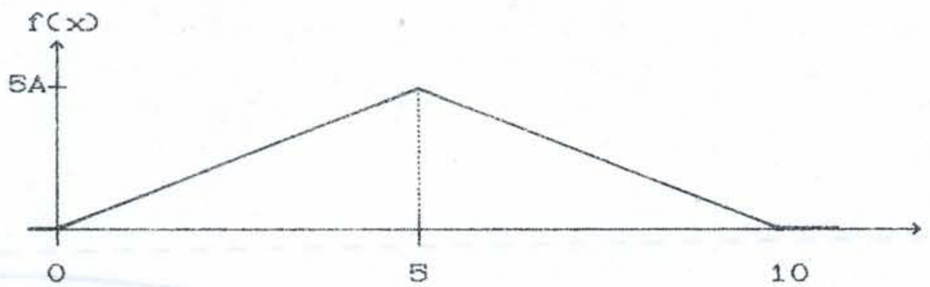
$$f(x) = \begin{cases} Ax & 0 \le x < 5 \\ A(10 - x) & 5 \le x \le 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Encuentra el valor de A para que f(x) sea una función de densidad

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de kilos de pan que sean vendidos mañana exceda los 500 kilos?

SOLUCION

a) Observa la siguiente figura



Dado que el área debe ser igual a 1, podemos encontrar geométricamente el valor de la constante A.

$$\text{Area} = \begin{pmatrix} \text{Area triángulo} \\ \text{izquierdo} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Area triángulo} \\ \text{derecho} \end{pmatrix}$$

$$1 = \frac{5(5A)}{2} + \frac{5(5A)}{2}; \qquad 1 = 25A;$$

por lo que $A = \frac{1}{25}$

Si sabes cálculo integral, puedes hacerlo de la manera siguiente:

$$\int_0^5 Ax\,dx + \int_5^{10} A(10 - x)\,dx = 1$$

$$\frac{Ax^2}{2}\Bigg|_0^5 + 10Ax\Bigg|_5^{10} - \frac{Ax^2}{2}\Bigg|_5^{10} = 1$$

$$\frac{25}{2}A + 100A - 50A - \frac{100}{2}A + \frac{25}{2}A = 1$$

$$A = \frac{1}{25}$$

b) Para que el número de kilos vendidos exceda a los 500, debe ocurrir que $X > 5$:

$$P(X > 5) = \int_5^{10} \frac{10 - x}{25}\,dx = \frac{10x - x^2}{25}\Bigg|_5^{10} = 1/2$$

¿Cómo contestarías si conocieras la función de distribución acumulada $F(x) \equiv P(X \leq x)$? Fácil: $P(X > 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - F(5)$. El problema sería encontrar

$$F(x) \equiv P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

pero aquí cuidado al encontrarla porque la $f(t)$ cambia según el valor x hasta el cual quieres acumular. Cuando quieras acumular hasta un x negativo, resulta que $f(t) = 0$, por lo que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0 \qquad \text{si} \quad x < 0$$

Cuando vas a acumular hasta un x que esté entre 0 y 5 kilos (miles), resulta

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{25}\,t\,dt = \frac{1}{25}\,\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^x = \frac{1}{25}\left[\frac{x^2}{2} - 0\right] = \frac{1}{50}\,x^2$$

Cuando acumulas hasta x mayor a 5 kilos, pero menor a 10 kilos resulta

$$F(x) = \int_0^5 f(t)\,dt + \int_5^x f(t)\,dt = \int_0^5 \frac{1}{25}\,t\,dt + \int_5^x \frac{1}{25}(10 - t)\,dt$$

La primera integral del lado derecho es 1/2, ¿por qué? corresponde al área del primer triángulo y visualmente vemos que es igual al triángulo derecho (la función es simétrica) y por lo tanto, el área del primer triángulo es 1/2.

$$F(x) = \frac{1}{2} + \int_5^x \frac{1}{25}(10 - t)dt = \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{2} + \frac{2}{5}x - \frac{1}{50}x^2\right)$$

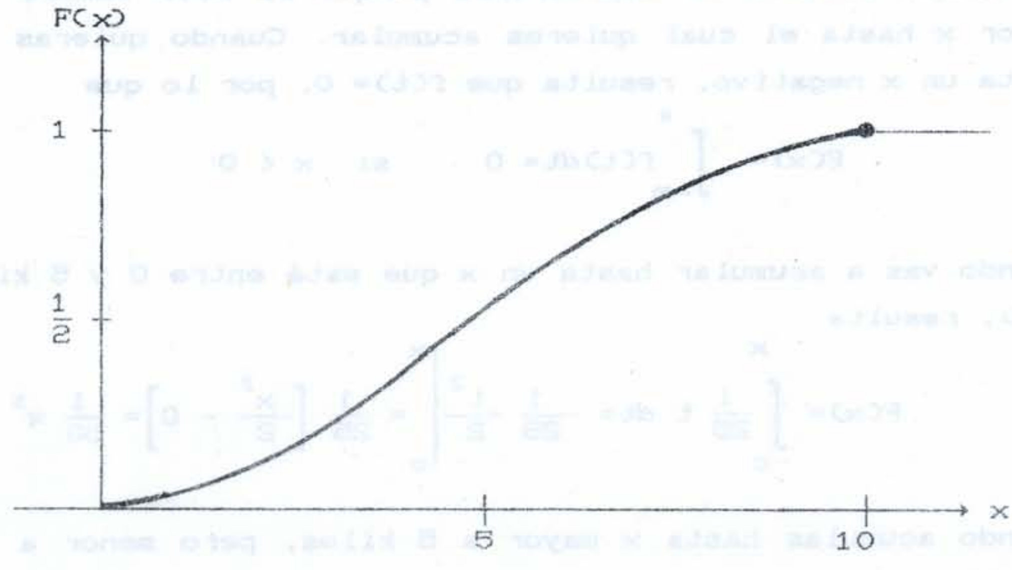
$$= -1 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{50}x^2$$

Cuando acumulamos a un x mayor a 10, resulta

$$F(x) = \int_0^5 \frac{1}{25}\, t\, dt + \int_5^{10} \frac{1}{25}(10 - t)\, dt + \int_{10}^x f(t)dt = 1$$

En resumen tenemos

$$F(x) = \begin{cases} 0\ ; & x \leq 0 \\ \frac{1}{50}x^2\ ; & 0 \leq x < 5 \\ -1 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{50}x^2\ ; & 5 \leq x < 10 \\ 1\ ; & x > 10 \end{cases}$$



7.11 Un artículo en almacén es objeto de una demanda diaria X cuya probabilidad está dada por:

X	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0.10	0.15	0.20	0.25	0.15	0.10	0.05

a) Encuentra la función de distribución de X.

b) Encuentra la probabilidad de que un pedido pase de 4 usando $F(x)$.

c) Encuentra la probabilidad de que un pedido sea inferior a 2.

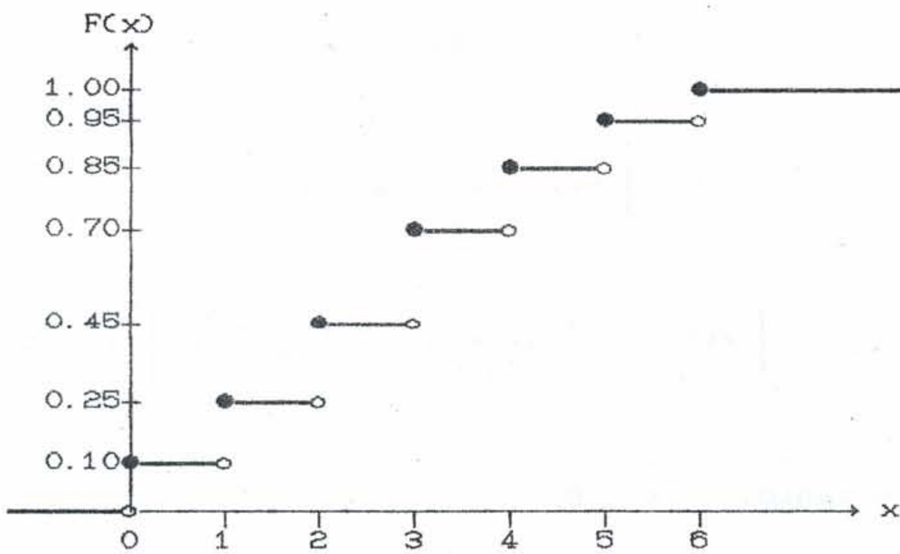
d) ¿Para cuál x se tiene $P(X < x) = 0.7$?

e) ¿Para qué valor de x se tiene que $P(X \geq x) = 0.3$?

SOLUCION

a)

$$F(x) = \begin{cases} 0.00 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0.10 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0.25 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0.45 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 0.70 & \text{si} \quad 3 \leq x < 4 \\ 0.85 & \text{si} \quad 4 \leq x < 5 \\ 0.95 & \text{si} \quad 5 \leq x < 6 \\ 1.00 & \text{si} \quad x \geq 6 \end{cases}$$



b) $P\{X > 4\} = 1 - P\{X \leq 4\} = 1 - F(4) = 1 - 0.85 = 0.15$

c) $P\{X < 2\} = F(2^-) = 0.25$ donde $F(2^-)$ denota el límite por la izquierda de 2.

d) Inspeccionando la función $F(x)$ o su gráfica deducimos que esto es válido para $3 \leq x < 4$

e) Nota que $P\{X \geq x\} = 1 - P\{X < x\} = 1 - F(x^-)$ donde $F(x^-)$ es el límite antes de x. Ahora, como $P\{X \geq x\} = 0.3$, resulta que $F(x^-) = 0.7$ Esta igualdad se sostiene cuando x cumple $3 \leq x < 4$.

7.12 Una gasolinera se abastece una vez a la semana de gasolina. Si el volumen semanal de ventas en miles de litros es una variable aleatoria con densidad de probabilidad igual a :

$$f(x) = \begin{cases} K(1-x)^4 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Encuentra el valor de K

b) ¿Qué capacidad debe tener el tanque de almacenamiento de la gasolinera para que la probabilidad de que se quede sin gasolina en una semana dada sea de 0.01?

SOLUCION

a)

$$\int_0^1 K(1-x)^4 \, dx = 1$$

$$\int_0^1 K(1-x)^4 \, dx = -\left. \frac{K(1-x)^5}{5} \right|_0^1 = \frac{K}{5}$$

Por lo tanto, $K = 5$.

b) Observa que si X es la variable aleatoria que denota en número de litros vendidos, queremos encontrar un valor t para el que se tenga que: $P(X \le t) = 0.99$, ya que si t fuera la capacidad de nuestro tanque y comenzáramos con tanque lleno; entonces, la probabilidad de quedarse sin gasolina en una semana, sería equivalente a vender más de t litros de gasolina o

$P(X > t) = 1 - P(X \le t) = 0.01$, por lo tanto, debemos resolver:

$$P(X \le t) = \int_0^t 5(1-x)^4\, dx = 0.99$$

$$= -(1-x)^5 \Big|_0^t = -(1-t)^5 + 1 = 0.99$$

así, $t = 1 - \sqrt[5]{0.01}$ ó $t = 0.602$ miles de litros.

7.13 Un autobús viaja entre las ciudades A y B que están a 100 km de distancia. Si el autobús tiene una descompostura, la distancia del lugar de descompostura a la ciudad A tiene una distribución uniforme entre (0,100). Hay estaciones de servicio en la ciudad A y en B y en el centro de la ruta entre ambas ciudades. Se sugiere que sería más eficiente tener 3 estaciones de servicio localizadas a 25, 50 y 75 km, respectivamente de A. ¿Es cierto o falso? y ¿por qué?

SOLUCION

Observa la siguiente figura, los puntos denotan la colocación de las estaciones de servicio:

Coloquemos las marcas x y y a 1/8 y 7/8 respectivamente de la distancia entre A y B, como se muestra a continuación

Observa que si el autobús tiene una descompostura en cualquier punto entre x y y, la distancia viajada de este punto a la estación de servicio más cercana es menor o igual a la geometría sugerida que en la actual. Por lo tanto, una descompostura entre x y y es mejor "sufrirla" en la geometría sugerida que en la actual.

Ahora, si se tiene una descompostura fuera del intervalo (x, y), en la geometría sugerida; se viajará una distancia menor o igual a 1/4 de la distancia total, pero también en la geometría actual existen puntos con estas características (1/4, 3/4). Como la distribución de las descomposturas es uniforme, concluimos que la geometría sugerida es la mejor.

Una forma más rigurosa de probar lo anterior es: calcular la distancia esperada de la descompostura a la estación de servicio más cercana en ambos casos y ver que en la geometría sugerida es menor que en la geometría actual.

7.14 En un grupo hay 5 mujeres y 5 hombres que se clasifican u ordenan de acuerdo a sus calificaciones obtenidas en el examen.

Supón que en el examen no hay dos calificaciones iguales. También considera que todas las posibles clasificaciones son igualmente probables, es decir, todos los estudiantes son igualmente competitivos.

Sea X el rango más alto ocupado por las mujeres. Por ejemplo, X= 1 significa que el primer lugar fue obtenido por una de las mujeres, X= 2 significa que el primer lugar lo ocupa un hombre y el segundo lugar fue ocupado por alguna de las mujeres.

i) Encuentra $P(X=x)$ para cada valor posible de x.

ii) Encuentra la función de distribución de X.

SOLUCION

El problema de ordenar a los estudiantes de acuerdo a sus calificaciones se puede visualizar de dos maneras:

i) Vía como selección de bolas de una urna.
ii) Vía como colocación de fichas en celdas.

Primer veremos el primer enfoque y el otro sólo lo comentaremos.

Considera que cada estudiante se identifica con una bola según la lista del grupo, su teléfono u otra característica.

Entonces se tiene una urna con 10 bolas. De esta urna se hacen 10 selecciones ordenadas: la primera extracción corresponde al primer lugar, la segunda extracción corresponde al segundo lugar y así sucesivamente. Así, si en la i-ésima extracción se obtiene la bola α_i, se entiende que el lugar i lo obtuvo el estudiante α_i. Esquemáticamente tenemos la siguiente asignación

$$\underset{\text{(lugar ó extracción i)}}{i} \longrightarrow \underset{\text{(estudiante)}}{\alpha_i} = \text{estudiante que recibió el lugar i}$$

Considera que las primeras 5 bolas se identifican con las mujeres y las bolas de la 6 a la 10 identifican a los hombres. Así el conjunto de M de mujeres es $M = \{1,2,3,4,5\}$ y el conjunto H de hombres es $H=\{6,7,8,9,10\}$.

El espacio muestra es

$$\Omega = \{\omega = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{10});\ \alpha_i \in (1,2,\ldots,10),\ \alpha_i \neq \alpha_j\}$$

Por ejemplo, la selección $\omega = (5,10,9,8,7,6,4,3,2,1)$ indica que el primer lugar lo obtuvo una mujer (la mujer 5), los siguientes lugares corresponden a los hombres (los hombres 10,9,8,7,6) y los últimos lugares fueron ocupados por mujeres (4,3,2,1). Observa que su tamaño es

$$\nu(\Omega) = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 10!$$

Para conocer la probabilidad de que una mujer ocupe el primer lugar, $P(X=1)$, observe que el evento $(X=1)$ corresponde a lo siguiente:

$$(X=1)=\{\omega=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{10}):\ X(\omega)=1\}$$
$$=\{\omega=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{10}):\alpha_1\in\{1,2,\ldots,5\}\}$$

Este evento corresponde a que el primer lugar sea ocupado por la mujer α_1 cualquiera de ellas, o sea, $\alpha_1\in M=\{1,2,\ldots,5\}$ y los siguientes lugares sean ocupados por las personas α_j que restan sin importar el sexo, o sea que:

$$\alpha_2\in\{1,2,\ldots,10\}-\{\alpha_1\};\quad \alpha_3\in\{1,2,\ldots,10\}-\{\alpha_1,\alpha_2\};\quad \text{etc.}$$

Por lo tanto,

$$P(X=1)=\frac{\nu(\ \omega\in\Omega:\ \ X(\omega)=1)}{\nu(\Omega)}$$

$$P(X=1)=\frac{5\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10!}=\frac{1}{2}$$

El evento $(X=2)$ corresponde a que el primer lugar lo haya obtenido el hombre α_1, o sea, $\alpha_1\in\{6,7,8,9,10\}$, que el segundo lugar lo haya obtenido la mujer α_2, es decir $\alpha_2\in\{1,2,\ldots,5\}$, y los otros lugares j los hayan obtenido las personas α_j de cualquier sexo, por ejemplo, el tercer lugar lo obtuvo una persona $\alpha_3\in\{1,2,\ldots,10\}-\{\alpha_1,\alpha_2\}$; el cuarto la persona $\alpha_4\in\{1,2,\ldots,10\}-\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$. Entonces

$$P(X=2)=\frac{5\cdot 5\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10!}=\frac{5}{18}$$

El evento $(X=3)$ significa que el primer lugar lo obtuvo el hombre α_1 y el segundo lugar lo obtuvo otro hombre α_2, el tercer lugar lo obtuvo una mujer; y los otros lugares son ocupados por el resto de los alumnos, o sea:

$$\alpha_1\in H=\{6,7,8,9,10\}$$

$$\alpha_2\in H=\{6,7,8,9,10\}-\{\alpha_1\}$$

$$\alpha_3\in M=\{1,2,3,4,5\}$$

$$\alpha_4 \in \{1,2,\ldots,10\} - \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$$
$$\vdots$$
$$\alpha_j \in \{1,2,\ldots,10\} - \{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{j-1}\}$$

$$P\left(X=3\right)=\frac{5\cdot4\cdot5\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{10!}=\frac{5}{36}$$

Similarmente:

$$P\left(X=4\right)=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot5\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{10!}=\frac{5}{84}$$

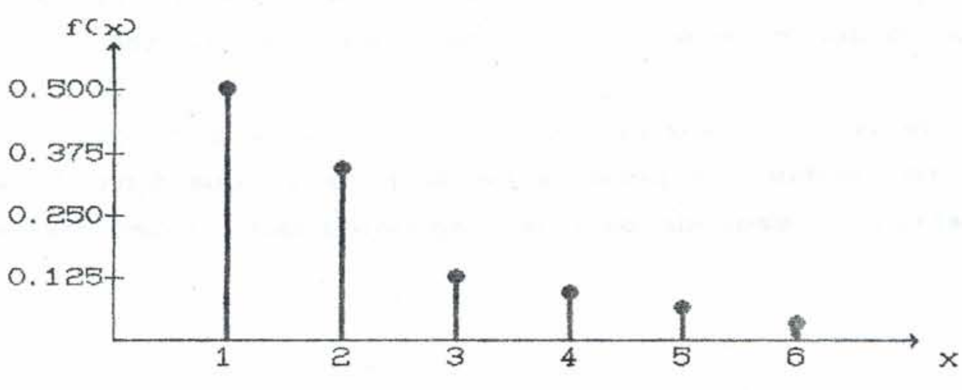
$$P\left(X=5\right)=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot5\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{10!}=\frac{5}{252}$$

$$P\left(X=6\right)=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{10!}=\frac{5!5!}{10!}=\frac{1}{252}$$

$$P\left(X=7\right)=P\left(\emptyset\right)=0$$

En resumen tenemos que $f(x)=P\left(X=x\right)$ es

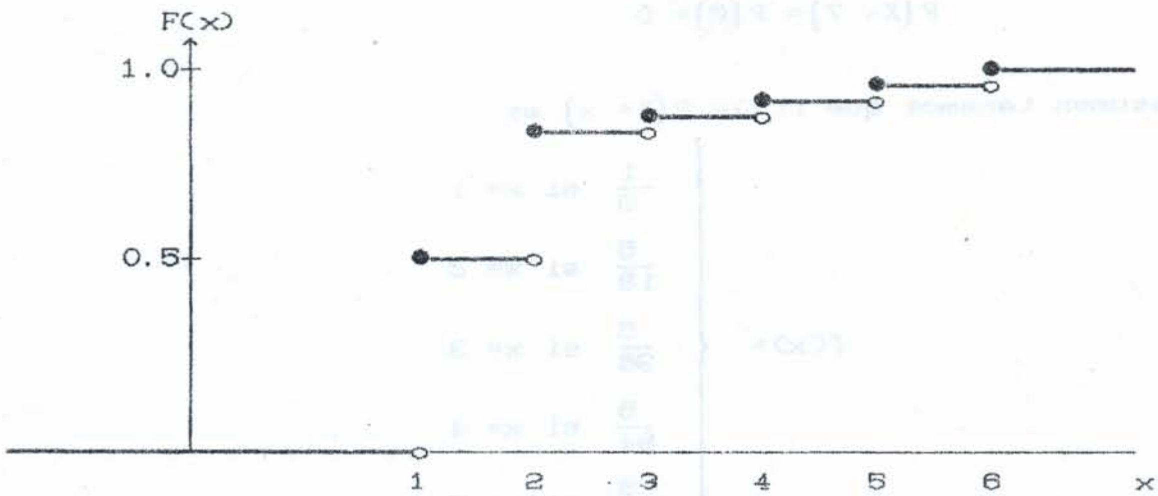
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{si } x=1\\ \frac{5}{18} & \text{si } x=2\\ \frac{5}{36} & \text{si } x=3\\ \frac{5}{84} & \text{si } x=4\\ \frac{5}{252} & \text{si } x=5\\ \frac{1}{252} & \text{si } x=6\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$



La función de distribución $F(x) = P\left(X \leq x\right)$ es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{14}{18} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{33}{36} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ \frac{82}{84} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ \frac{251}{252} & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si } 6 \leq x \end{cases}$$

La gráfica correspondiente es:



OTRA SOLUCION

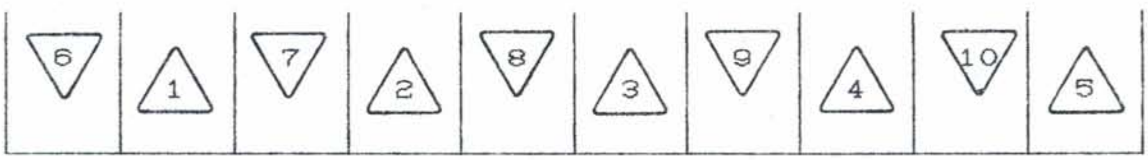
Supón que los 10 estudiantes están identificados con 10 fichas; las fichas del 1 al 5 son mujeres y las fichas del 6 al 10 son hombres.

La ordenación de los 10 estudiantes es equivalente a colocar las 10 fichas en las 10 celdas; la primera celda para el que tuvo la calificación más alta, la segunda para el segundo lugar, y así sucesivamente.

$$i \longrightarrow \beta_i$$
$$\text{estudiante} \longrightarrow \text{celda } \beta_i$$

Nótese que la suposición de que todas las calificaciones son distintas equivale a que no se coloque más de una ficha en una misma celda.

Cada colocación de las 10 fichas se puede indicar por el arreglo $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{10})$. Por ejemplo $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{10}) = (2,4,6,8,10,1,3,5,7,9)$ significa que las 5 mujeres (las 5 fichas 1,2,3,4,5) se colocaron en las celdas 2,4,6,8,10 respectivamente o que las mujeres sacarán los lugares pares, como se muestra en el siguiente esquema



El análisis para la determinación de las probabilidades es similar a la forma de la primera solución. Sin embargo, puede que sea más natural el enfoque que se siguió en la primera solución, aunque depende del gusto personal.

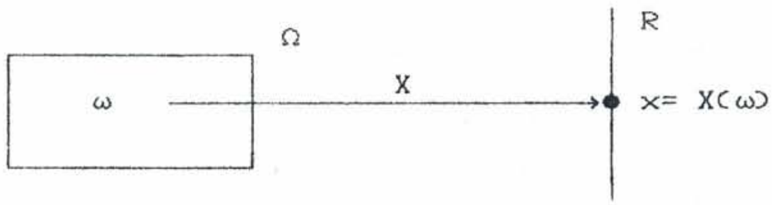
SUMARIO DE VARIABLES ALEATORIAS Y DE LA MEDICION DE SU OCURRENCIA.

I. VARIABLE ALEATORIA.

El concepto de variable aleatoria fue "inventado" principalmente para rebautizar los resultados de un espacio muestra, según el interés del experimentador que está estudiando el fenómeno aleatorio o según la facilidad que resulte para describir abstractamente la variabilidad de un fenómeno. Pensando que X da un nuevo nombre a los elementos ω del espacio muestra, la variable aleatoria X se puede ver como una función del espacio muestra Ω al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Simbólicamente:

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

o esquemáticamente se ilustra por



Este esquema es muy claro porque ilustra el símbolo x con que se rebautiza el elemento ω y así se dice que x es la imagen de ω bajo la regla (función o asignación) X, sin embargo, se desperdicia mucho papel, por lo que en su lugar introducimos la notación

$$\omega \longmapsto x = X(\omega)$$

que significa lo mismo: x es el número que asignamos a ω cuando seguimos la regla X. Fíjate muy bien en la diferencia entre x minúscula y X mayúscula.

Ayudándonos de ambas notaciones, podemos resumir simbólicamente el concepto de una variable aleatoria X como sigue

$$\boxed{\begin{array}{l} X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad\ \omega \longmapsto x = X(\omega) \end{array}}$$

Nota que el nombre de variable aleatoria contradice su definición de ser una función, sin embargo, se conserva por tradición.

Cuando se habla de una función X se mencionan varios objetos asociados a la función X: su dominio, su contradominio y su recorrido.

El dominio de X es el conjunto de elementos que se desean rebautizar. En nuestro caso, en que X es una variable aleatoria, su dominio es el espacio muestra Ω.

El contradominio de X es aquel conjunto de símbolos que se usarán para renombrar a los elementos de Ω. En el caso de la variable aleatoria X, se usaron números para nombrarlos, por lo que el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales es el contradominio de X.

El recorrido de la función X, también llamado con el desafortunado nombre de rango, es aquel subconjunto de $\mathbb{R}$ que son suficientes para rebautizar a los elementos ω del espacio muestra Ω, en símbolos:

$$(\text{recorrido de } X) = \{ x \in \mathbb{R} \mid \text{existe un } \omega \in \Omega \text{ tal que } x = X(\omega) \}$$

II. MIDIENDO LA FRECUENCIA DE OCURRENCIA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA.

Hay dos herramientas: puntualmente o acumuladamente. Para medirla puntualmente, usamos la función $f(x)$. Para medirla acumulativamente a la izquierda, usamos $F(x)$, que se definen como sigue:

$$\text{Puntual} \left[\begin{array}{l} f(x) = P\{X = x\} = \text{probabilidad de que X tome exclusivamente (puntualmente) el valor } x. \\ f(x) = \text{función de probabilidad de tipo discreto.} \end{array} \right.$$

Acumulada $\left[\begin{array}{l} F(x) = P\left(X \le x\right) = \text{probabilidad de que X tome el valor de x o menor a x.} \\ F(x) = \sum_{t=-\infty}^{x} P\left(X=t\right) \end{array}\right.$

La relación entre las ocurrencias puntuales y acumuladas es

$$\boxed{F(x) = \sum_{t=-\infty}^{x} f(t)}$$

Con cualquiera de las funciones $F(x)$ o $f(x)$ podemos dar la ocurrencia de que X tome valores en cualquier conjunto E, o sea, podemos evaluar $P\left(X \in E\right) = \sum_{t \in E}^{x} P\left(X=t\right)$.

Si nos dan como dato $F(x)$, ¿cómo evaluamos la ocurrencia de un evento arbitrario E de números reales? Cuando el evento E consiste de un sólo número, digamos que $E = \{x\}$ tenemos

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \equiv P\left(X = x\right) = (\text{salto de F en x}) \\ f(x) = (\text{valor de F en x}) - (\text{valor de F antes de x}) \\ f(x) = F\left(x\right) - F\left(x^-\right) \end{array}}$$

Cuando E tiene más números y consiste de todos los enteros entre dos números particulares a y b resultan las siguientes alternativas

$$\boxed{\begin{array}{l} P\left(a \le X \le b\right) = F\left(b\right) - F\left(a^-\right) \\ P\left(a < X \le b\right) = F\left(b\right) - F\left(a\right) \\ P\left(a < X < b\right) = F\left(b^-\right) - F\left(a\right) \\ P\left(a \le X < b\right) = F\left(b^-\right) - F\left(a^-\right) \end{array}}$$

¿Cómo saber si la función $f(x)$ es un función de probabilidad puntual (sin importar que represente apropiadamente al experimento)? Debe cumplir la definición:

$$f(x) \geq 0 \qquad y \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

¿Cómo saber si F(x) es la función de distribución acumulada? Debe cumplir

$$F(-\infty) = P\left(X \leq -\infty\right) = P\left(\emptyset\right) = 0$$
$$F(\infty) = P\left(X \leq \infty\right) = P\left(\Omega\right) = 1$$
$$F(x) \text{ no decreciente}$$

III. MIDIENDO LA FRECUENCIA DE OCURRENCIA DE UNA VARIABLE CONTINUA.

Cuando X es una variable continua, su recorrido es algún tipo de segmento de la recta de números reales, que tiene tantos puntos que es un conjunto no contable. Sin embargo, a pesar de que hay tantos puntos en el recorrido, la probabilidad de que tome el valor de un punto particular x_* es cero:

$$P\left(X = x_*\right) = 0$$

Pero las probabilidades de que tome cualquier punto de algún intervalo de los siguientes tipos (a,b), (a,b], [a,b), [a,b] son:

$$P\left(a < X < b\right) = \int_a^b f(x)dx$$

$$P\left(a < X \leq b\right) = P\left(a < X < b\right) + P\left(X = b\right) = P\left(a < X < b\right)$$

En forma similar:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$$

Interpretación de la función de densidad f(x):

$$f(x) \neq P\left(X = x\right)$$

$$f(x) \cdot \Delta x \simeq P\left(x - \tfrac{1}{2}\Delta x \leq X \leq x + \tfrac{1}{2}\Delta x\right) = \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} f(t)dt$$

Relación entre $f(x)$ y $F(x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = F'(x)$$

Expresando probabilidades con la función acumulada:

$$P(a \leq X \leq b) = F(a) - F(b)$$

Para el caso continuo no tiene importancia hablar de intervalo cerrado, intervalo abierto, abierto por la izquierda o abierto por la derecha, pues la probabilidad de cada uno de ellos resulta ser la misma. Esto se debe a que la probabilidad en un punto es cero.

$$P(X = b) = \int_{b}^{b} f(x)\,dx = 0$$

Por lo tanto

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

APENDICE

POR SI YA SE TE OLVIDO.

SUMAS FINITAS.

Notación. La sumatoria Σ, es sólo un símbolo para abreviar la expresión correspondiente a la suma de n objetos. Es decir

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

ALGUNAS PROPIEDADES DE LA SUMATORIA.

Propiedad aditiva:

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Propiedad homogénea:

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{n} (ca_i) = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Propiedad telescópica:

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = (a_1 - a_o) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_o$$

Otras propiedades:

$$(5) \quad \sum_{i=1}^{n} (a_i + c) = (a_1 + c) + (a_2 + c) + \ldots + (a_n + c) = \sum_{i=1}^{n} a_i + nc$$

$$(6) \quad \sum_{i=1}^{n} a_i + c = \sum_{i=1}^{n} a_i + c$$

Contraste (6) y (5) ¿Ves la diferencia al considerar paréntesis en los términos de la sumatoria?

ALGUNAS SUMAS FINITAS UTILES:

(7) $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}\, n(n+1)$$

(8) $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1 + 4 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(9) $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1 + 8 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

(10) $$(1 - r) \sum_{i=0}^{n} r^i = \sum_{i=0}^{n} \left(r^i - r^{i+1}\right) = r^0 - r^{n+1} = 1 - r^{n+1}$$

(11) $$\sum_{i=0}^{n} r^i = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\ ; \quad r \neq 1$$

(12) $$\sum_{i=1}^{n} r^i = r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{r - r^{n+1}}{1 - r}\ ; \quad r \neq 1$$

SUMAS INFINITAS.

Serie geométrica:

(13) $$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = 1 + r + r^2 + \ldots = \frac{1}{1 - r}\ ; \quad |r| < 1$$

(14) $$\sum_{i=1}^{\infty} r^i = r + r^2 + \ldots = \frac{r}{1 - r}\ ; \quad |r| < 1$$

Otras series:

(15) $$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{r^i}{i!} = 1 + r + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \ldots = e^r$$

PROBLEMAS

1. Sea la función de densidad de X definida por $f(x) = \frac{x}{10}$, con $x = 1, 2, 3, 4$. Determina

   a) $P\left(X \le 2\right)$

   b) $P\left(2 \le X \le 4\right)$

   R: 0.30, 0.90

2. Para cada uno de los siguientes incisos determina la constante C, de modo que f(x) tiene las propiedades de una función de densidad.

   a) $f(x) = cx, \quad x = 1, 2, \ldots, 25$

   b) $f(x) = c(x + 1)^3 \quad x = 0, 1, 2.$

   c) $f(x) = c(1/3)^x \quad x = 1, 2, 3, \ldots n$

   TIP: Ver apéndice de sumatorias, por si ya se te olvidó.

   R: $\frac{1}{325}$; $\frac{1}{36}$; $\frac{2}{\left(1 - 1/3^n\right)}$

3. Sea X con función de densidad $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}$, $x = 1, 2, 3\ldots$

   a) Muestra que f(x) es realmente una función de densidad.

   b) Determina $F(x) = P\left(X \le x\right)$, $x = 1, 2, 3, \ldots$

   c) Calcula $P\left(4 \le X \le 7\right)$

   R: $F(x) = 1 - (5/6)^x$; $x = 1, 2, 3, \ldots$

   $P(4 \le X \le 7) = F(7) - F(3) = (5/6)^3 - (5/6)^7$

4. Supón que la densidad de probabilidad f(x) de el tiempo X de una llamada telefónica internacional medida al minuto más cercano, es

x	1	2	3	4
f(x)	0.2	0.5	0.2	0.1

   a) Calcula $P\left(X \le 2\right)$, $P\left(X < 2\right)$ y $P\left(X \ge 1\right)$

   b) Calcula y grafica la función de distribución acumulada F(x) contra x

   R: $P(X \le 2) = 0.7$; $P(X < 2) = 0.2$; $P(X \ge 1) = 1$.

5. Se lanza una moneda honesta tantas veces como sean necesarias hasta obtener una águila. Sea X el número de ensayos hasta obtener la primera águila

a) Encuentra el rango de X (el recorrido de X)

b) Encuentra la función de densidad de X

c) Calcula $P(X \leq 4)$

R: (recorrido de X) = $\{1,2,3,...\}$

$f(x) = (1/2)^x$; $x = 1,2,3,...$

6. Sea X una variable aleatoria con densidad $f(x) = 3(1-x)^2$, $0 < x < 1$. Calcula

a) $P(0.1 < X < 0.5)$

b) $P(X > 4)$

c) $(0.3 < X < 2)$

7. Encuentra el 50-avo percentil (mediana), el 25-avo percentil (primer cualtil), el 75-avo percentil (tercer cualtil) y el 90-avo percentil (también llamado el noveno decil) para las siguientes densidades

a) $f(x) = 4x^3$, $0 < x < 1$

b) $f(x) = e^{-x}$, $0 < x < \infty$

8. Cinco mujeres y cinco hombres se ordenan de acuerdo a su calificación en un examen. Supón que no puede haber dos con la misma calificación y que todas las 10! ordenaciones son igualmente posibles. Sea X la variable aleatoria que que denota el lugar más alto obtenido por una mujer (por ejemplo X= 2 si el primer lugar lo obtuvo un hombre y el segundo una mujer). Encuentra $P(X = i)$, $i = 1,2,...,10$

9. Sea X que represente la diferencia entre el número de águilas y soles obtenido cuando una moneda se lanza n veces. ¿Cuáles son los posibles valores de X?

10. Supón que conoces la función de distribución F de una variable aleatoria X. Explica cómo se puede determinar $P\{X=1\}$.

11. La cantidad de tiempo en horas, que una computadora funciona antes de sufrir una descompostura es una variable aleatoria continua con densidad de probabilidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x/100} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

¿Cuál es la probabilidad que una computadora funcione entre 50 y 150 horas antes de descomponerse? ¿Cuál es la probabilidad de que funcione menos de 100 horas?

R: $\lambda = 1/100$; $F(x) = 1 - e^{-x/100}$

$P\{50 \leq X \leq 150\} = F(150) - F(50) = e^{-1/2} - e^{-3/2} = 0.3833$

12. El tiempo de vida (en horas) de una lámpara es una variable aleatoria que tiene densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 100 \\ \dfrac{100}{x^2} & \text{si } x > 100 \end{cases}$$

¿Cuál es la probabilidad que exactamente 2 de 5 lámparas sean reemplazadas dentro de las primeras 150 horas de operación? Supón que los eventos E_i, $i = 1,2,3,4,5$, que la i-ésima lámpara tenga que reemplazarse dentro de este tiempo, son independientes.

TIP: Primero encuentra la probabilidad p de que una sola lámpara, cualquiera de las producidas, se reemplace dentro de las primeras 150 horas de operación: $p = \{X \leq 150\}$; e interpreta la p como la probabilidad de "falla" (águila) de una sola lámpara. Después toma 5 lámparas (piensa que tiras 5 volados) e inspecciona cada una para ver si sale "águila" (falla) y contabiliza con Y el total de las lámparas dardo al origen del blanco.

i) Haz un diagrama en que se muestre la regla X del espacio muestra Ω a los reales.

ii) Da el recorrido de X.

iii) Considera un conjunto de los reales, digamos E= $(X \leq 1/4)$, determina qué subconjunto A de Ω está generando E. Encuentra la probabilidad de E.

iv) Se ganan 100 pesos si el dado cae a una distancia del origen menor que 25 cm. Se ganan 50 pesos si la distancia está entre 25 y 50 cm. Encuentra la probabilidad de ganar 100 pesos y la probabilidad de ganar 50 pesos.

v) Encuentra la probabilidad de que el dardo caiga exactamente a una distancia de 24 cm.

R: *i)* [0,1]

ii) 1/16.

iii) 1/16; 3/16

iv) 0.

16. Considera que se toma un número aleatorio del intervalo Ω= (0,1). Define la variable aleatoria X por

$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$\omega \longmapsto x = X(\omega) =$ posición del primer dígito distinto de cero en el número ω.

i) Da el recorido de X.

ii) Da los correspondientes subconjuntos de Ω, generados por los eventos $(X=3)$, $(X=4)$ y $(X=n)$ de R. También de las probabilidades de estos eventos, considerando que los elementos de Ω son igualmente probables.

R: *i)* $\{1,2,3,\ldots\}$

ii) $P(X=3) = P(.001 \leq \omega < .01) = .009$

con falla (contabiliza el total de "águilas").

R: $p= \int_{100}^{150} f(x)\,dx= 1/3. \quad P(Y= 2)= (5/2)p^2(1-p)^3$

13. El tiempo que tarda en repararse una computadora personal es una variable aleatoria cuya densidad en horas está dada por

$$f(x)= \begin{cases} 1/2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El costo de reparación depende del tiempo que toma hacerlo y es igual a $40 + 30\sqrt{x}$ cuando x es el tiempo. Calcula la probabilidad que el costo de reparación esté entre 60 y 70.

TIP: Llama Y al costo de reparación: $Y= 40 + 30\sqrt{X}$
Nos preguntan $P(60 \le Y \le 70)$, para encontrarla expresa el evento $(60 \le Y \le 70)$ en términos de la variable X.

R: $P(60 \le Y \le 70)= P(60 \le 40 + 30\sqrt{X} \le 70)= P(4/9 \le X \le 1)$

$$= \int_{4/9}^{1} \frac{1}{2}\,dx= \frac{5}{18}$$

14. Para el ejemplo 7.12, calcula la función de probabilidad de la distancia entre la descompostura y la estación de servicio más cercana para
a) La geometría actual.
b) La geometría sugerida.

15. Se tira un dardo a un blanco circular de un metro de radio. El espacio muestra es

$$\Omega= \{\omega=(a_1,a_2):\ a_1^{\,2}+a_2^{\,2} \le 1 \}$$

Supón que tu puntería es tal que el dardo puede caer el cualquier punto del blanco con igual ventaja, o sea, que los elementos de Ω

los fallos (contaminantes) del total de "agujas".

$$P = \int_{[illegible]}^{[illegible]} f(x)\,dx = [illegible]$$

El tiempo que tarda en restaurarse una computadora personal es una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El costo de reparación depende del tiempo que toma (repararla) y es igual a $40 + 30\sqrt{x}$, siendo x el tiempo. Calcule la probabilidad que el costo de reparación este entre 60 y 70.

Sol. Llamemos Y el costo de reparación: $Y = 40 + 30\sqrt{X}$. Se pregunta $P(60 \le Y \le 70)$, que equivalentemente expresa el evento $(60 \le Y \le 70)$ en términos de la variable X:

$$P(60 \le Y \le 70) = P(60 \le 40 + 30\sqrt{X} \le 70) = P\left(\frac{4}{9} \le X \le 1\right) = \int_{4/9}^{1} \frac{1}{2}\,dx = \frac{5}{18}$$

14. Para el ejemplo 7.12, calcule la función de probabilidad de la distancia entre la desembocadura y la estación de servicio más cercana para:
a) La geometría actual
b) La geometría sugerida

15. Se tira un dardo a un blanco circular de un metro de radio. El espacio muestral es

$$\Omega = \{\omega = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$$

Supón que la puntería es tal que el dardo pueda caer en cualquier punto del blanco con igual ventaja, o sea, que los elementos de Ω

REFERENCIAS

□ Ross, S. M. *"A First Course in Probability"*
Mac Millan Publishing Company.
3a. Ed. New York, 1988.

□ Ross, S. M. *"Introduction to Probability and Statistics for Engineering and Scientists"*
Wiley, 1987.

□ Hogg, R. V. & Ledolter, J. *"Engineering Statistics"*.
Mac Millan Publishing Company. New York, 1987.

REFERENCIAS

□ Ross, S. M. *"A First Course in Probability"*
Mac Millan Publishing Company.
3a. Ed. New York, 1988.

□ Ross, S. M. *"Introduction to Probability and Statistics for Engineering and Scientists"*
Wiley, 1987.

□ Hogg, R. V. & Ledolter, J. *"Engineering Statistics"*.
Mac Millan Publishing Company. New York, 1987.

Variables aleatorias
Se terminó de imprimir en el mes de marzo de 1997
en los talleres de la Sección de Impresión y Reproducción
de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco.
Diseño y cuidado editorial: Salvador Guadarrama Méndez.
Se imprimieron 150 ejemplares, más sobrantes para reposición