

1041

# MECANICA DE FLUIDOS

Mabel Vaca • Raymundo López


---



UAM  
TA357  
U3.3



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
UNIDAD AZCAPOTZALCO



**UAM-AZCAPOTZALCO**  
**Colección Libro de Texto 1992**

Rogelio Cruzvillegas  
**Tecnología prima para T.V.**

Darío Guaycochea  
**Flujo en tubos a presión**

Rafael López Rangel  
**Problemas metropolitanos  
y desarrollo nacional**

Elodino Meléndez  
**Procesos siderúrgicos**

Juan Ramón Prado  
**La planeación y el control  
de la producción**

Clementina Ramírez  
**Tratamiento de aguas  
residuales industriales**

Carlos Reynoso Castillo  
**Los regímenes laborales  
especiales**

Luis Soto Walls  
**El diseño de lo privado**

Mabel Vaca  
Raymundo López  
**Mecánica de fluidos**

# MECANICA DE FLUIDOS

COLECCION  
LIBRO DE TEXTO  
1992

# 217472

C.B. 2892981

Mabel Vaca Mier  
Raymundo López Callejas

## MECANICA DE FLUIDOS



2892981



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA  
UNIDAD AZCAPOTZALCO.

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA**

**Rector General**

Dr. Gustavo A. Chapela Castañares

**Secretario General**

Dr. Enrique Fernández Fassnacht

677  
TA 324  
13.2

**UNIDAD AZCAPOTZALCO**

**Rectora**

Dra. Sylvia Ortega Salazar

**Secretario**

Ing. Enrique Tenorio Guillén

**Coordinador de Extensión Universitaria**

José Lever

**Jefa de la Sección Editorial**

Mtra. Silvia Pappe

**Cuidado de la edición:**

Ma. Eugenia Varela C.

**Diseño de la portada**

Luisa Martínez

ISBN 970-620-163-7

© 1992 Universidad Autónoma Metropolitana

Unidad Azcapotzalco

Av. San Pablo No. 180

Azcapotzalco, México D.F., 02200

Impreso en México

Printed in México

## Indice

	Pág.
Cap. 1. Conceptos fundamentales	11
1.1 Diferencia entre sólidos, líquidos y gases.	13
1.2 Definición de fluido.	13
1.3 Líquidos y gases.	13
1.4 Esfuerzo.	13
1.5 El fluido como medio continuo.	14
1.6 Propiedades del fluido.	15
1.6.1 Densidad.	15
1.6.2 Peso específico.	15
1.6.3 Volumen específico.	16
1.6.4 Gravedad específica.	16
1.6.5 Tensión superficial.	16
1.6.6 Compresibilidad.	21
1.6.7 Dilatación volumétrica.	22
1.6.8 Calor específico.	22
1.6.9 Viscosidad.	22
1.6.10 Ley de la viscosidad de Newton.	23
1.6.11 Viscosidad cinemática.	24
1.7 Diagrama reológico.	29
1.8 Propiedades cinemáticas.	30
1.8.1 Campo de velocidades.	32
1.8.1.1 Flujo uniforme.	32
1.8.1.2 Flujo permanente.	32
1.8.2 Flujo volumétrico y flujo másico.	33
1.8.2.1 Velocidad media.	34
Problemas propuestos.	35
Cap. 2. Método experimental	39
2.1 Variables físicas, dimensiones y unidades.	41
2.2 Congruencia dimensional.	43
2.3 Teorema $\pi$ de Buckingham.	44
2.4 Números adimensionales más importantes en mecánica de fluidos.	45
2.5 La modelización.	49
2.6 Semejanza geométrica.	50
2.7 Semejanza cinemática.	50
2.8 Semejanza dinámica.	50
Problemas propuestos.	52
Cap. 3. Hidrostática	55
3.1 Definición de presión.	57
3.2 Presión en un punto.	57
3.3 Equilibrio de una partícula fluida o ecuación fundamental de la estática de los fluidos.	58
3.4 Unidades y escalas para la medición de la presión.	61
3.5 Manometría.	63
3.5.1 Manómetros mecánicos.	63
3.5.2 Manómetros de líquido.	63

3.6 Fuerzas hidrostáticas sobre superficies sumergidas.	70
3.6.1 Fuerza hidrostática sobre superficies planas.	70
3.6.1.1 Superficie horizontal.	71
3.6.1.2 Superficie vertical.	73
3.6.1.3 Superficie inclinada.	76
3.6.2 Fuerzas hidrostáticas en superficies curvas.	80
3.6.2.1 Componente horizontal sobre una superficie curva.	80
3.6.2.2 Componente vertical sobre una superficie curva.	81
3.7 Fuerza de flotación.	87
3.8 Distribución de presiones en movimiento como sólido rígido.	89
3.8.1 Aceleración lineal uniforme.	89
3.8.2 Aceleración angular uniforme respecto a un eje vertical.	93
Problemas propuestos.	96
Cap. 4. Campo de flujo y volumen de control	103
4.1 Sistema.	105
4.2 Leyes de la mecánica.	105
4.3 Volumen de control.	106
4.4 Línea de corriente.	107
4.5 Propiedades intensivas, extensivas y específicas.	107
4.6 Operador matemático de transformación del volumen de control.	108
Cap. 5. Conservación de la masa y la cantidad de movimiento	111
5.1 La Ecuación de conservación de la masa.	113
5.2 Fuerzas externas.	117
5.3 Ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento lineal.	117
5.3.1 Resultante de las fuerzas de presión sobre una superficie de control cerrada.	121
5.3.2 Alabes fijos y móviles.	125
5.4 Ecuación de Euler y ecuación de Bernoulli.	129
5.5 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento angular	141
Problemas propuestos.	144
Cap. 6. Conservación de la energía	151
6.1 Ecuación de energía para un flujo permanente.	155
6.2 Diagrama de energía.	156
6.3 Presiones estática, dinámica y de estancamiento.	164
6.4 Flujo laminar y turbulento.	168
6.5 Flujo laminar en tuberías.	169
6.6 Flujo turbulento en tuberías.	174
6.7 Problemas de tuberías.	174
6.7.1. Problemas simples de tuberías.	174
6.7.2 Pérdidas menores.	180
6.7.2.1 Método del coeficiente de pérdida.	181
6.7.2.2 Método de longitud equivalente.	181
6.7.3 Tuberías en serie.	185
6.7.4 Tuberías en paralelo.	188
Problemas propuestos.	194
Apéndice A	199
Solución a problemas propuestos	206
Bibliografía	210

*Dedico este trabajo a mi  
sobrino Fernando*

**M.V.M.**





## Prólogo

La mecánica de fluidos se ocupa de los fluidos en movimiento o en reposo y los efectos consiguientes sobre los contornos, que pueden ser una superficie sólida u otro fluido.

Este libro fue escrito para un curso a nivel introductorio de la materia. Requiere, de los alumnos, el conocimiento básico de la física y las matemáticas aprendidas en el Tronco Básico Común. El objetivo principal de este texto es ayudar a los estudiantes a desarrollar una metodología conveniente para la solución de problemas en la materia. Se desarrollan las ecuaciones fundamentales, mostrando con claridad las hipótesis que las sustentan y se resuelven los problemas que ejemplifican los temas, relacionando el resultado con el comportamiento físico esperado.

Se ha hecho una cuidadosa selección de ejercicios para ofrecer a los alumnos la posibilidad de mejorar la comprensión de los temas desarrollados en el texto y de ampliar su sensibilidad por el sentido físico del movimiento de los fluidos y de las aplicaciones prácticas de los conceptos tratados.

Teniendo en cuenta que en su actividad profesional los futuros ingenieros tendrán necesidad de utilizar unidades del sistema inglés, se ha mantenido una proporción entre los ejercicios y ejemplos con unidades de dicho sistema y del Sistema Internacional.

Los temas desarrollados en este libro fueron seleccionados tomando como referencia fundamental el programa analítico vigente de la asignatura, preparado por la Comisión del Departamento de Energía para la revisión y la elaboración de los programas analíticos de la Mecánica de Fluidos y unidades enseñanza-aprendizaje afines, el cual es cubierto en su totalidad. Cuando los alumnos hayan concluido el estudio del libro se espera que sean capaces de: distinguir a los fluidos con base en sus propiedades mecánicas; conocer la importancia de la experimentación –con sus alcances y limitaciones– y los principios de la teoría de semejanza; conocer las ecuaciones de la hidrostática y de conservación de la masa, de la energía y de la cantidad de movimiento; determinar pérdidas de energía en conductos cerrados y obtener las características de una bomba en una instalación sencilla. Confiamos en que los estudiantes habrán comprendido los conceptos básicos a un nivel tal que habrán de ser capaces de aplicarlos aun en problemas a los que no se hayan enfrentado previamente.

Los autores deseamos agradecer a todas las personas que hicieron posible la preparación de este libro. En particular nos encontramos en deuda con el M. en C. Fernando Carmona, la M. en C. Rosa María Vaca, el Ing. Alejandro León, el Ing. David Sandoval, los señores Alvaro Cedeño, Erick Guerra, Luis Soto, Luis Amezcua y la señora Cecilia Vaca.

M. V. M.  
R. L. C.



**CAPITULO 1**  
**CONCEPTOS FUNDAMENTALES**



### 1.1 Diferencia entre sólidos, líquidos y gases

La estructura molecular de los sólidos es tal, que la distancia entre las moléculas es constante, ellas están acomodadas en una formación específica de redes, y su movimiento está restringido. Por otra parte, debido a la estructura molecular de los líquidos el espacio entre sus moléculas es esencialmente constante (sufren una ligera modificación por acción de los cambios de temperatura o presión) de tal forma que una cierta masa de líquido ocupará un volumen bien definido de espacio. Por ello, cuando se vacía un líquido en un recipiente, tomará la forma de éste en el volumen que ocupa.

La separación entre las moléculas de un gas, es mucho mayor que la de los sólidos o líquidos, y también es variable. De ahí que el gas llene completamente el recipiente que lo contiene, y las moléculas del gas viajan en líneas rectas por el espacio hasta que rebotan en las paredes del recipiente o son desviadas por la interacción con otras moléculas del gas.

### 1.2 Definición de fluido

Se define un fluido como una sustancia que sufre una deformación continua cuando se le aplica un esfuerzo cortante muy pequeño. Por el contrario, cuando a un sólido se le aplica un esfuerzo cortante, éste no se deforma continuamente, sino que toma una configuración deformada fija. Existen algunos materiales o sustancias que pueden exhibir ambas formas de comportamiento, según las condiciones en que se encuentren.

### 1.3 Líquidos y gases

Los fluidos se clasifican en líquidos y gases. Como ya se dijo, las fuerzas intermoleculares son mayores en los primeros que en los segundos.

Desde el punto de vista de la dinámica no importa si el fluido es líquido o gas, las leyes que se aplican son las mismas, y dependiendo del fluido que se trate, es posible desprestigiar algunos efectos y simplificar su estudio.

### 1.4 Esfuerzo

Si se toma una porción del fluido aislada se pueden considerar dos tipos de fuerzas actuando sobre ella: las fuerzas de cuerpo, que son aquellas que actúan sobre el mismo sin contacto físico directo, por ejemplo, la fuerza de la gravedad y la fuerza electromagnética, entre otras; y las fuerzas de superficie, que son debidas al material externo en contacto físico con la frontera de la porción considerada.

En la figura 1.1 se muestra una porción aislada de fluido. Sobre un área infinitesimal  $\Delta A$  de su superficie, cuya dirección se indica con el vector normal unitario  $\vec{n}$ , actúa una fuerza  $\Delta \vec{F}$ .

La dirección de esta fuerza, en general, no es la dirección de  $\Delta \vec{F}$ . Esta fuerza se descompone en dos vectores, a saber:

$$\Delta \vec{F} = \Delta F_n \vec{n} + \Delta F_t \vec{t} \quad [1.1]$$

donde  $\vec{t}$  es un vector unitario tangente al área infinitesimal.

El esfuerzo se define como la fuerza que actúa en el área unitaria. Por ello, en este caso se pueden definir dos tipos de esfuerzo

$$\tau_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} \quad [1.2]$$

y

$$\tau_t = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A} \quad [1.3]$$

$\tau_n$  es el esfuerzo normal, es el esfuerzo tangencial o cortante.

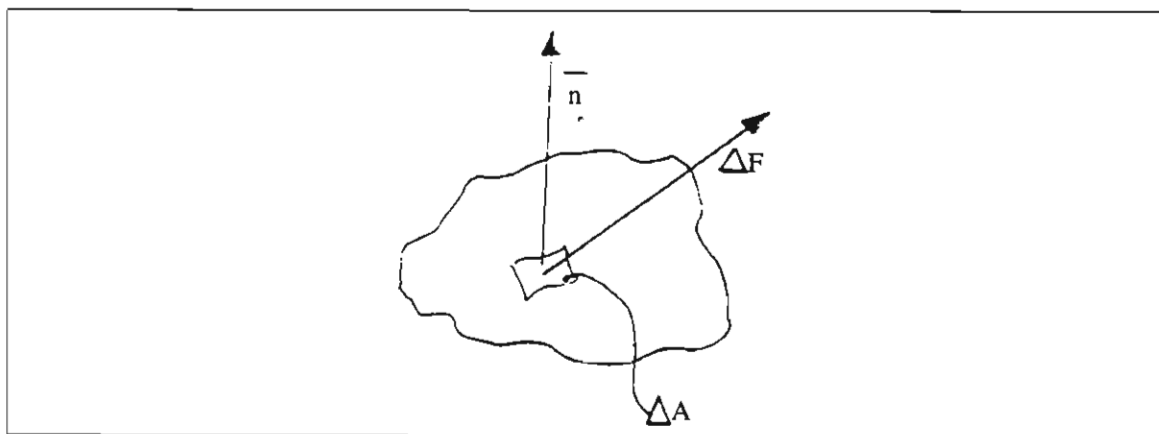


Figura 1.1 La fuerza  $\Delta \vec{F}$  actúa sobre un área  $\Delta A$ .

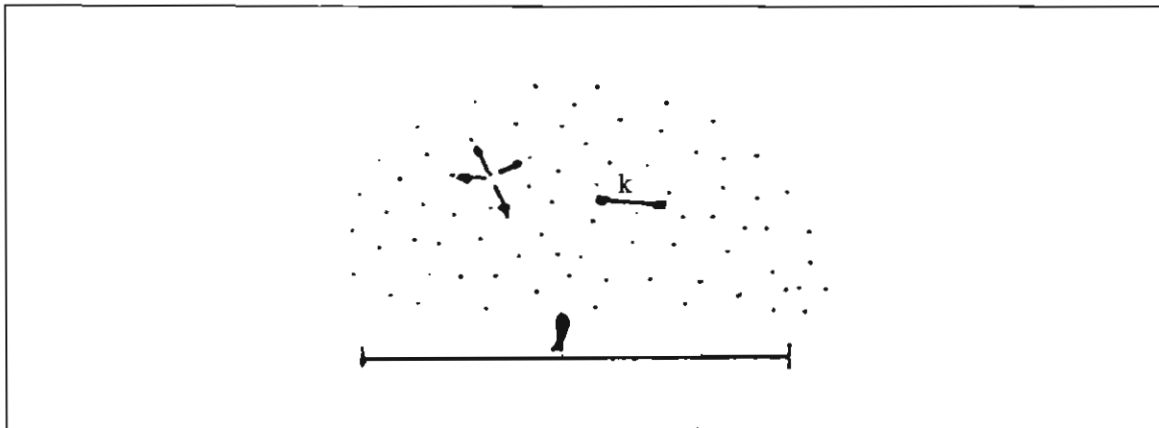
### 1.5 El fluido como medio continuo

Como ya se dijo, los fluidos son agregaciones de moléculas muy separadas en los gases y próximas en los líquidos. La distancia entre las moléculas es mucho mayor que el diámetro molecular. Las moléculas no están fijas en una red, sino que se mueven libremente.

Una sustancia se considera como medio continuo si la longitud de la trayectoria libre promedio de la molécula,  $k$ , es mucho más pequeña que la dimensión de longitud menor considerada en el problema físico,  $l$ , es decir, si la relación  $k/l$  es mucho más pequeña que la unidad entonces el fluido se considera como un medio continuo (figura 1.2).

Por ejemplo, para justificar la validez de la suposición de un continuo se elige estudiar el flujo de aire que pasa por una esfera hueca de 1 cm de diámetro, la cual tiene un volumen aproximado de  $5.2 \times 10^{-7} \text{ m}^3$ . De acuerdo con la definición de medio continuo, éste prevalece si el número de moléculas de aire en un volumen mucho más pequeño que el de la esfera es lo suficientemente grande para que los efectos promedio dentro del segundo volumen, como la densidad y la presión, sean constantes o cambien suavemente con el tiempo. Considerando que el número de moléculas en  $10 \text{ m}^3$  de aire a la temperatura ambiente y a una presión igual a la del nivel del mar es alrededor de  $10^{25}$ , se tiene que, en un volumen de  $10^{-19} \text{ m}^3$  (aproximadamente el tamaño de una partícula de polvo, la cual es mucho menor que la esfera) se encontrarían  $10^6$  moléculas de aire. Este número de moléculas es tan grande que los efectos promedio

dentro del microvolumen serían en realidad virtualmente constantes. Por otro lado, si la esfera de 1 cm estuviese a una altitud de 305 km, habría tan sólo una probabilidad de 1 en  $10^8$  de encontrar una molécula en el microvolumen, y el concepto de una condición promedio carecería de sentido, con lo cual la suposición del continuo desaparece.



**Figura 1.2** Distribución de moléculas de una sustancia, la relación  $k/l$  es mucho menor que la unidad, por lo tanto, se considera como medio continuo.

## 1.6 Propiedades del fluido

### 1.6.1 Densidad

La densidad de un fluido,  $\rho$ , se define como la relación que existe entre la masa y el volumen.

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad [1.4]$$

donde  $\Delta V = (\Delta \wedge)^3$  y  $(\Delta \wedge)$  es una dimensión muy pequeña comparada con la dimensión menor considerada en el problema físico, pero es mucho más grande que la longitud de la trayectoria libre promedio de la molécula de acuerdo con la definición de medio continuo.

### 1.6.2 Peso específico

El peso específico,  $\gamma$ , es la relación entre la fuerza gravitacional por unidad de volumen de fluido, o bien, el peso por unidad de volumen.

$$\gamma = \frac{W}{V} = \rho g \quad [1.5]$$



### 1.6.3 Volumen específico

El volumen específico de un fluido,  $V_s$ , es la relación que existe entre su volumen por unidad de masa, o sea, es el recíproco de la densidad.

$$V_s = \frac{1}{\rho} \quad [1.6]$$

### 1.6.4 Gravedad específica

La gravedad específica,  $\delta$ , es la relación entre el peso de una sustancia y el peso de un volumen igual de agua.

$$\delta = \frac{W_s}{W_{H,O}} = \frac{\gamma_s}{\gamma_{H,O}} = \frac{\rho_s}{\rho_{H,O}} \quad [1.7]$$

### 1.6.5 Tensión superficial

Un líquido al no ser capaz de expandirse libremente, formará una interfase con un segundo fluido. Las moléculas inmersas en la masa líquida se repelen mutuamente debido a su proximidad, pero las que se encuentran en la superficie libre están en desequilibrio y por ello la superficie está sometida a tensión. Estos efectos superficiales representan el concepto de tensión superficial.

En un experimento sencillo, se coloca una pequeña aguja en la superficie del agua en reposo y se observa que es sostenida por la película, es decir, la aguja flota. La formación de esta película se puede visualizar con base en la energía superficial, o el trabajo por unidad de área, requerida para atraer a las moléculas a la superficie. La tensión superficial es, entonces, la fuerza de estiramiento necesaria para formar la película y se obtiene al dividir el término de energía superficial, entre la unidad de longitud de la película en equilibrio.

En la figura 1.3 se tiene un alambre móvil entre dos fijos, que enmarcan a una película de jabón. Si se desea mantener un área de la película de jabón se necesita una fuerza. Esta fuerza está relacionada con la tensión superficial.

El coeficiente de tensión superficial  $\sigma$  se define como

$$\sigma = \frac{F}{2L} \quad [1.8]$$

En este caso se tienen dos interfases entre la solución de jabón y el aire. Por esta razón se necesita una fuerza  $\frac{F}{2}$  para cada superficie.

Si se desea aumentar el área de la película, se desplaza el alambre móvil a una distancia  $l$ , lo que implica un trabajo de magnitud  $F \cdot l$ . Esta energía se almacena como energía de la superficie.

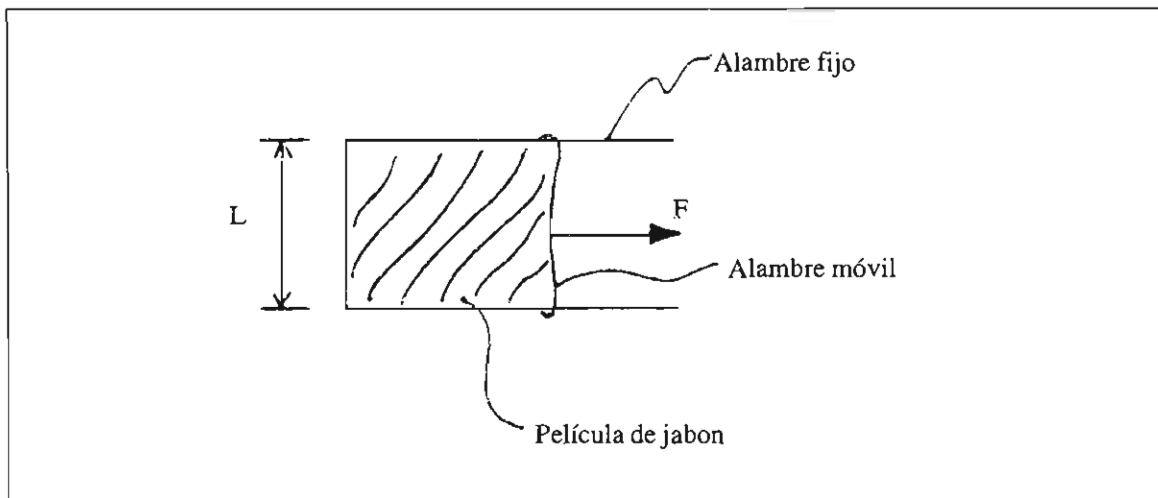
Si en una interfase se hace un corte longitudinal  $dL$ , aparecen fuerzas iguales y opuestas en ambos lados del corte, de valor  $\sigma dL$ , perpendiculares al corte y coplanarias con aquella; a la magnitud  $\sigma$  se le denomina coeficiente de tensión superficial, definido anteriormente.

Para el caso de un cilindro líquido, el cual es seccionado en la parte media, la figura 1.4 muestra las fuerzas que actúan, se observa que el aumento de la presión en el interior está equilibrado con las fuerzas de dos generatrices.

$$2R L \Delta P = 2\sigma L$$

De donde se obtiene que:

$$\sigma = \Delta P R \quad [1.9]$$



**Figura 1.3** Sobre la película de jabón se aplica una fuerza  $\vec{F}$  para mantener un área de la misma, la cual aumenta al deslizar el alambre móvil.

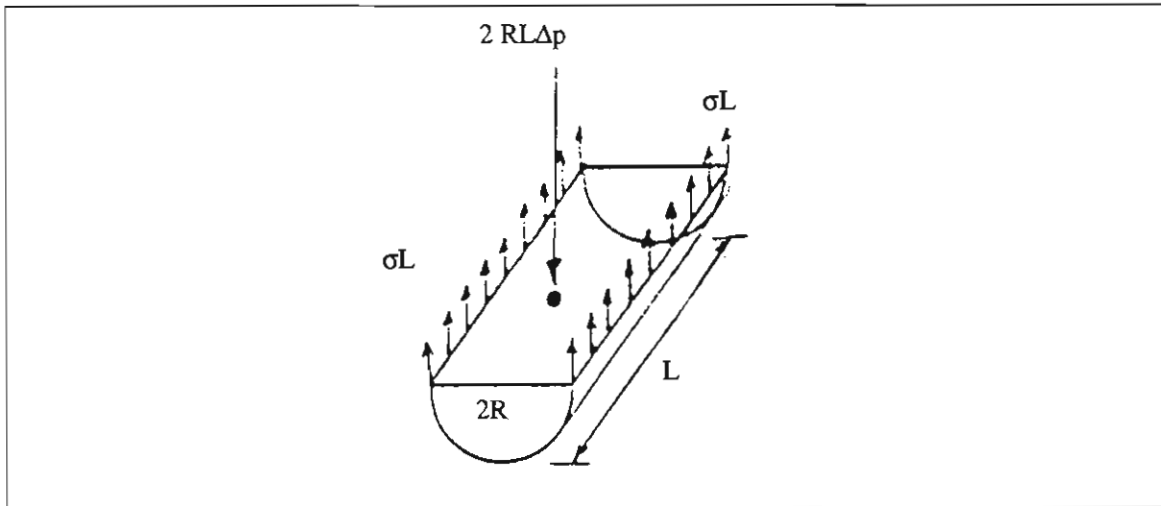
Para el caso de una gota esférica, mostrada en la figura 1.5, el aumento de la presión en su interior equilibra una fuerza distribuida anularmente, debido a la tensión superficial, de magnitud:

$$\pi R^2 \Delta P = 2 \pi R \sigma$$

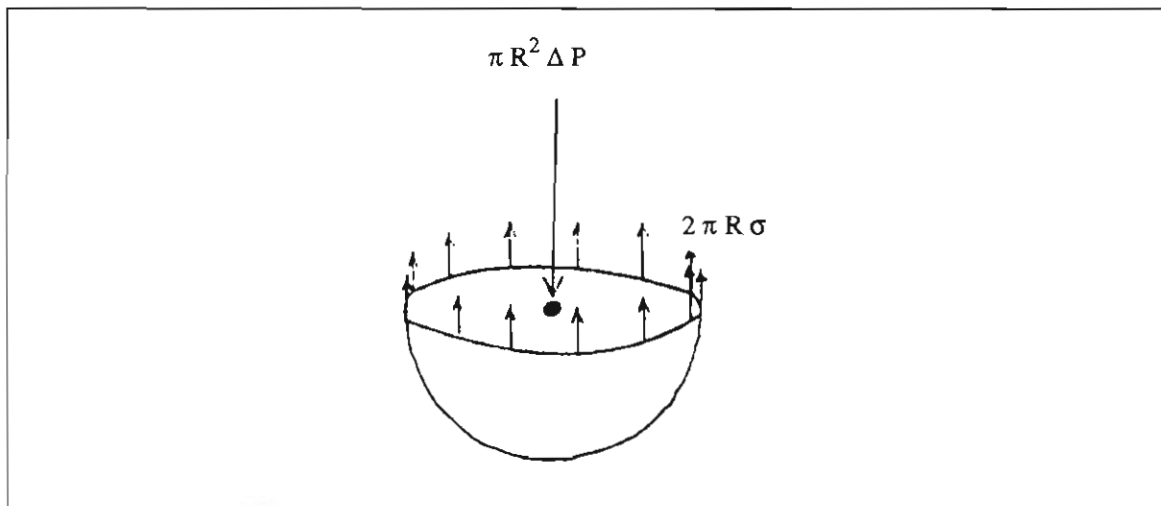
obteniéndose:

$$\sigma = \frac{\Delta P R}{2} \quad [1.10]$$

En las ecuaciones 1.9 y 1.10 no se ha tomado en cuenta el peso de los líquidos.



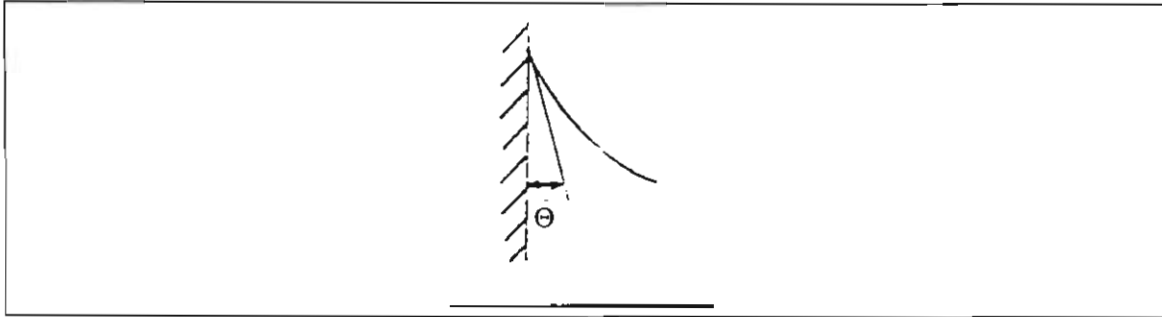
**Figura 1.4** Aumento de la presión en un cilindro líquido por efecto de la tensión superficial.



**Figura 1.5** Aumento de la presión en el interior de una gota líquida por efecto de la tensión superficial.

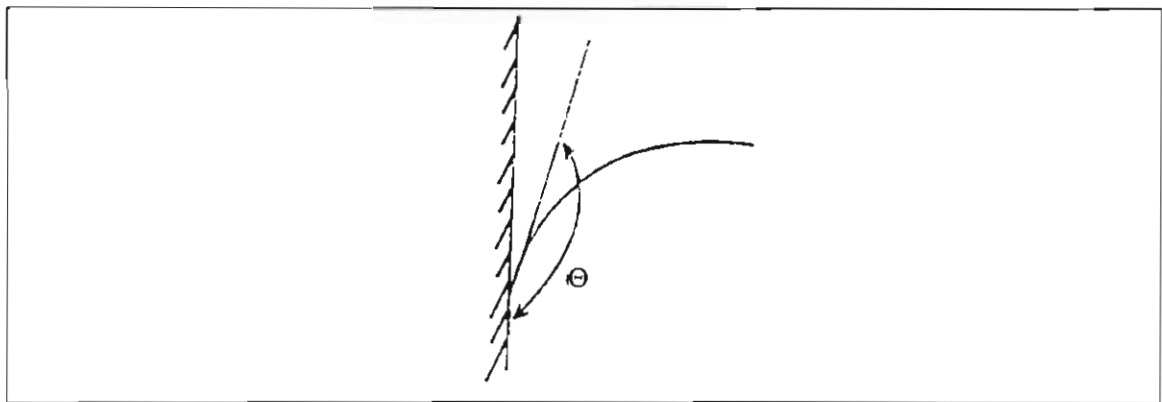
La tensión superficial juega un papel importante en el fenómeno de atracción capilar, al cual da origen en combinación con las fuerzas de adhesión entre el líquido y el sólido y las fuerzas de cohesión en el líquido.

Para un líquido que moja la pared de un sólido la adhesión es mayor que la cohesión. En este caso la tensión superficial ocasiona que el líquido suba a través de cualquier tubo vertical de diámetro pequeño que se encuentra parcialmente sumergido en el líquido, como se muestra en la figura 1.6



**Figura 1.6** Si el líquido moja la pared el ángulo  $\theta$  es menor de  $90^\circ$ , como el agua, por ejemplo.

En el caso de líquidos que no mojan al sólido, la tensión superficial tiende a abatir el menisco en un pequeño tubo vertical. Cuando se conoce el ángulo de contacto entre el líquido y el sólido, la elevación del líquido se puede calcular considerando una forma para el menisco. En este caso la cohesión es mayor que la adhesión (figura 1.7).



**Figura 1.7** Si el líquido no moja la superficie el ángulo  $\theta$  es mayor de  $90^\circ$ , como el mercurio.

El agua moja muy bien el vidrio limpio, con  $\theta$  igual a  $0^\circ$ . En una interfase mercurio-aire-vidrio,  $\theta$  es igual a  $130^\circ$ . El ángulo de contacto  $\theta$ , es muy sensible a las condiciones físico-químicas de la superficie. El agua moja al jabón, pero no moja la cera.

### Problema 1.1

Una pompa de jabón de 3 cm de diámetro tiene una sobrepresión interior de 30 Pa ( $1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ ). Calcular la tensión superficial de interfase aire-agua jabonosa.

Solución:

La pompa de jabón tiene dos interfases con el aire, una exterior y otra interior, y es prácticamente el mismo radio, puesto que la película de jabón es muy delgada. Entonces, al hacer el corte e igualar las fuerzas, se tiene:

En el caso límite de variaciones infinitesimales, queda una relación entre la velocidad de deformación y el gradiente de la velocidad.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dy} \quad [1.16]$$

La ecuación 1.14 indica que el esfuerzo aplicado es también proporcional al gradiente de la velocidad para los fluidos comunes. La constante de proporcionalidad es el coeficiente de viscosidad  $\mu$ , obteniéndose

$$\tau = \mu \frac{d\theta}{dt} = \mu \frac{du}{dy} \quad [1.17]$$

Los fluidos que obedecen esta ecuación, llamada ley de viscosidad de Newton, se conocen con el nombre de fluidos newtonianos. El coeficiente de viscosidad  $\mu$ , también recibe el nombre de viscosidad dinámica o viscosidad absoluta de la sustancia.

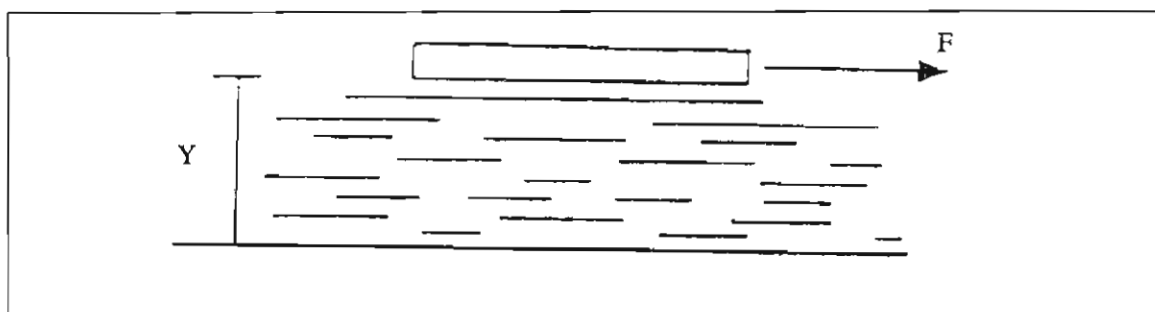
### 1.6.11 Viscosidad cinemática

La viscosidad cinemática de una sustancia  $\nu$ , se define como la relación que existe entre la viscosidad absoluta y la densidad, es decir:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad [1.18]$$

### Problema 1.3

Una placa situada a 0.5 mm de una placa fija se mueve a  $0.25 \frac{m}{s}$  y se requiere una fuerza por unidad de área de  $2 Pa$  para mantener esta velocidad. Determinése la viscosidad de la sustancia entre las dos placas.



Solución:

El esfuerzo cortante que provoca la placa móvil en el fluido es constante, con lo cual se aplica la ley de Newton de la viscosidad, para encontrar la viscosidad del fluido que permite mantener la velocidad con la que se mueve la placa móvil.

$$\tau = \mu \left( \frac{du}{dy} \right)$$

Al integrar esta ecuación con

$$y = 0, u = 0 ;$$

$$y = h, u = u$$

se obtiene:

$$\tau = \mu \frac{u}{y}; \mu = \frac{\tau y}{u}$$

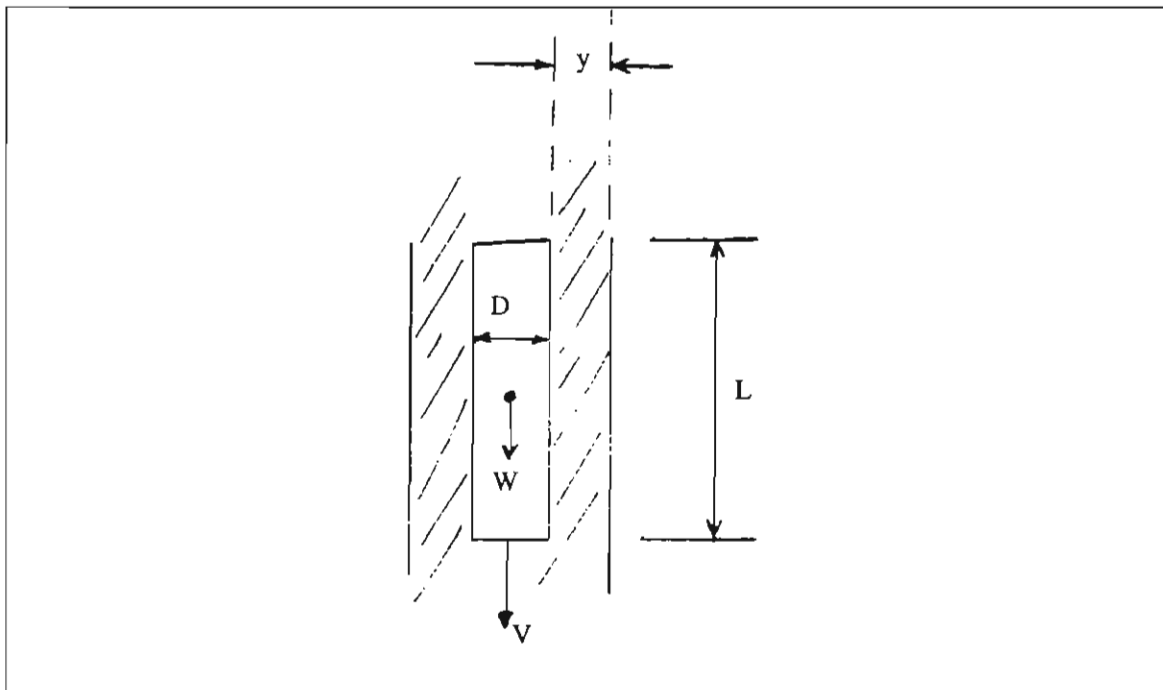
$$\mu = 2 \frac{N}{m^2} \times \frac{0.0005 m}{0.25 \frac{m}{s}}$$

$$\mu = 0.004 \frac{N \cdot s}{m^2}$$

Esta es la viscosidad del fluido que se encuentra entre las placas.

#### Problema 1.4

Un cilindro de acero de 1 in de diámetro y 12 in de largo cae, debido a su propio peso, a una velocidad uniforme de  $0.5 \frac{ft}{s}$  dentro de un tubo ligeramente mayor. Una película de aceite de ricino de espesor constante está entre el cilindro y el tubo. Determinése el espacio libre entre el tubo y el cilindro. La temperatura es de 100°F y la densidad relativa del acero es 7.85



Solución:

Para resolver este problema, como en el anterior, es necesario aplicar la ley de la viscosidad de Newton, pero ahora no se tiene una placa plana sino un cilindro sólido, en torno al cual actúa la viscosidad del fluido. La única fuerza aplicada en este caso es la del peso del cuerpo.

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{W}{A} = \mu \frac{u}{y}$$

$$y = \frac{\mu u A}{W}$$

El peso  $W$  del cilindro es

$$W = v \gamma_A$$

$$\gamma_A = \gamma_{H_2O} \delta_A$$

El volumen es igual a

$$V = \frac{\pi D^2}{4} L$$

El área de contacto  $A$  está dada por

$$A = \pi D L$$

Por lo tanto

$$y = \frac{4 \mu u \pi D L}{\pi D^2 L \gamma_{H_2O} \delta_\lambda}$$

$$y = \frac{4 \mu u}{D \gamma_{H_2O} \delta_\lambda}$$

La viscosidad del fluido la obtenemos de tablas, la cual a una temperatura de 100 °F tiene un valor de  $\mu = 6.2 \times 10^{-3} \frac{lb \cdot s}{ft^2}$

Sustituyendo valores se tiene:

$$y = \frac{4 \times 6.2 \times 10^{-3} \frac{lb \cdot s}{ft^2} \times 0.5 \frac{ft}{s}}{\frac{1}{12} ft \times 62.4 \frac{lb}{ft^3} \times 7.85}$$

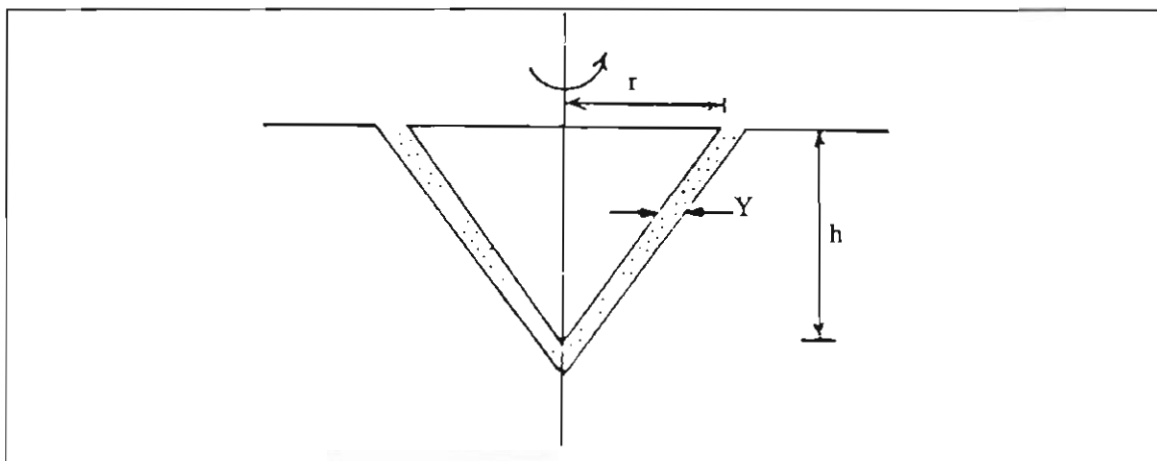
$$y = 0.003 ft$$

Esta es la distancia radial que existe entre el cilindro y el tubo.

### Problema 1.5

Un cuerpo cónico gira a una velocidad constante de  $10 \frac{rad}{s}$ . Una película de aceite de  $\mu = 2.15 \times 10^{-3} \frac{N \cdot s}{m^2}$  separa al cono del recipiente que lo contiene. El espesor de la película es 0.25 mm.

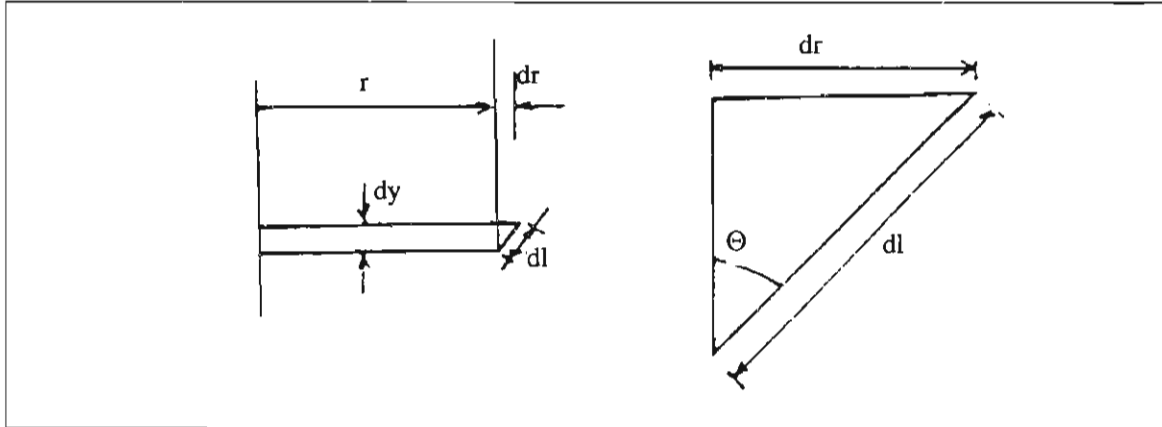
¿Qué par se necesita para mantener el movimiento? El cono tiene una base de 5 cm de radio y una altura de 10 cm. Utilice la distribución de velocidad lineal y la ley de viscosidad de Newton





Solución:

El problema consiste en determinar el par necesario para mantener girando al cono y se debe resolver utilizando la ley de la viscosidad de Newton con la distribución de velocidades lineal. Primero, dividamos al cono en pequeñas rodajas.



De la ley de viscosidad de Newton se tiene:

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{u}{y}$$

Con  $u = \omega r$ ,

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{\omega r}{y}$$

En forma diferencial

$$dF = \frac{\mu \omega r}{y} dA$$

La expresión del par es

$$dT = r dF$$

$$dT = \frac{\mu \omega r^2}{y} dA$$

De la figura anterior el  $dA$  de la rodaja en contacto con el recipiente es

$$dA = 2 \pi r dl$$

$$dl = \frac{dr}{\sin \theta}$$

$$dA = \frac{2\pi r}{\sin \theta} dl$$

Sustituyendo

$$dT = \frac{2\pi\mu\omega r^3}{y \sin \theta} dr$$

Los límites de integración del radio son de  $r = 0$  hasta  $r = r$

$$\int_0^r dt = \frac{2\pi\mu\omega}{y \sin \theta} \int_0^r r^3 dr$$

$$T = \frac{2\pi\mu\omega}{y \sin \theta} \frac{r^4}{4} = \frac{\pi\mu\omega}{2y \sin \theta} r^4$$

El ángulo  $\theta$  vale:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r}{h}$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{r}{h} \right)$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{5}{10} \right)$$

$$\theta = 26.56^\circ$$

$$T = \frac{\pi \times 2.15 \times 10^{-3} \frac{N \cdot s}{m^2} \times 10 \frac{1}{s} \left( (0.05)^4 m^4 \right)}{2 \times 0.00025 m \times \sin 26.56^\circ}$$

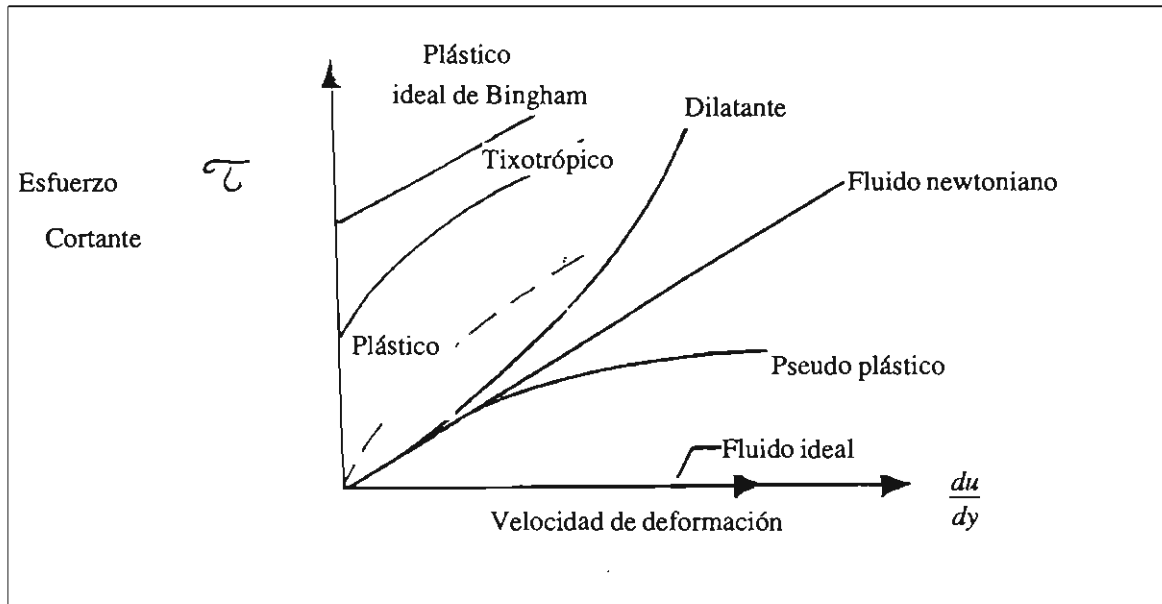
$$T = 1.88 \times 10^{-3} N \cdot m$$

### 1.7 Diagrama reológico

Una forma sencilla de representar el comportamiento de los fluidos, en cuanto a su respuesta a los esfuerzos cortantes, es el diagrama reológico, el cual se muestra en la figura 1.9.

La ciencia de la reología se ocupa del estudio de la deformación y del flujo de la materia en sustancias tales como los plásticos, la sangre, las suspensiones, las pinturas, y los alimentos que fluyen pero cuya resistencia al flujo no se caracteriza por la ecuación 1.17.

En el diagrama reológico, los fluidos newtonianos se representan por una línea recta que pasa a través del origen y tiene una pendiente igual a  $\mu$ . Todos los fluidos que no siguen la ley de la viscosidad de Newton, se conocen con el nombre de fluidos no newtonianos y a continuación se describe su comportamiento, ilustrado en dicho diagrama.



**Figura 1.9** Diagrama reológico

Un fluido dilatante es aquel en que la resistencia a la deformación aumenta al incrementarse el esfuerzo cortante. Un fluido pseudoplástico es el que disminuye su resistencia al aumentar el esfuerzo. Si este efecto es muy importante, como el ejemplo marcado en la figura 1.9 con línea discontinua, el fluido se denomina plástico. El caso extremo de sustancia plástica es aquel que requiere la aplicación de un esfuerzo finito (límite de fluencia) antes de que fluya.

Se muestra también la representación del comportamiento del fluido plástico de Bingham ideal, que generalmente es lineal. Por ejemplo, la pasta de dientes fluye de esta manera al exterior, después de que se sobrepasa un cierto esfuerzo provocado al apretar el tubo que la contiene.

El fluido ideal es aquel en el cual la viscosidad es nula, por lo tanto, siempre estará sobre el eje de velocidad de deformación.

La sustancia tixotrópica tiene una viscosidad que depende de la deformación angular inmediata anterior de la sustancia y tiende a solidificarse cuando se encuentra en reposo, por ejemplo, la tinta.

## 1.8 Propiedades cinemáticas

### 1.8.1 Campo de velocidades

En un flujo dado, la determinación experimental o teórica de las propiedades del fluido es función de la posición y del tiempo. Para analizar los problemas en mecánica, existen dos puntos de vista, a saber:

a) El método de Euler o euleriano, que es el más apropiado para la mecánica de fluidos, trata del campo de flujo. En este método se calcula el campo de presiones  $P(x,y,z,t)$  del flujo, y no los cambios de presión  $P(t)$  que experimenta una partícula al moverse, es decir, analiza una cierta región del espacio.

b) El método de Lagrange, el cual sigue a la partícula en su trayectoria, es más apropiado para la mecánica de los sólidos.

La más importante de todas las propiedades del flujo es el campo de velocidades  $\vec{V}(x, y, z, t)$ ; en general, la velocidad es un vector, función de la posición y del tiempo, que tiene tres componentes escalares  $u, v, w$ .

$$\vec{V}(x, y, z, t) = \hat{i} u(x, y, z, t) + \hat{j} v(x, y, z, t) + \hat{k} w(x, y, z, t) \quad [1.19]$$

La aceleración  $\vec{a}$  es una magnitud fundamental en mecánica de los fluidos, ya que aparece en la segunda ley de Newton. La aceleración se define como:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad [1.20]$$

Como

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w$$

entonces

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left( u \frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial\vec{V}}{\partial z} \right) \quad [1.21]$$

donde el primer término del lado derecho representa la aceleración local y los otros tres, la aceleración convectiva.

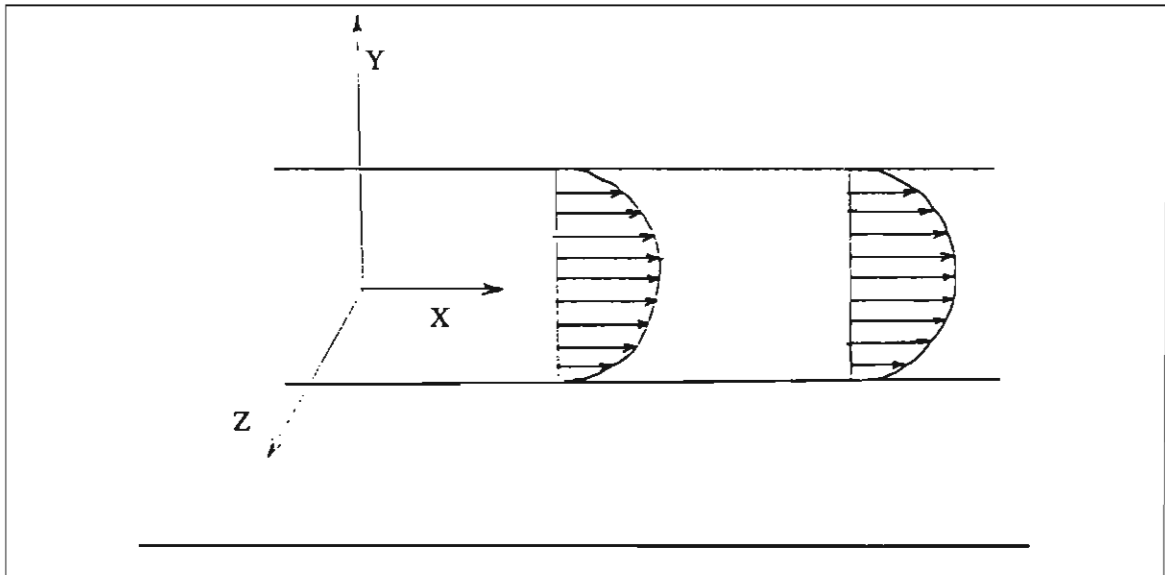
Utilizando el operador gradiente, la expresión se simplifica a

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \quad [1.22]$$

Si el flujo varía sólo en una coordenada, se dice que el flujo es unidimensional. Para la dirección  $x$ , tendríamos:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = u \frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$$

La dirección del flujo es la dirección del vector velocidad y está determinada por los componentes de la velocidad que no son iguales a cero. Si la velocidad se escribe en términos de una sola componente, el flujo es unidireccional y está asociado con la dirección de dicha componente. En la figura 1.10 se muestra un flujo entre dos placas paralelas, que varía en la dimensión  $Y$ , tiene la dirección  $X$ , y en  $Z$  no varía; la única componente de la velocidad que no vale cero es  $u$ . El perfil de velocidades en las dos secciones no cambia, es decir, permanece constante.



**Figura 1.10** Flujo unidireccional entre dos placas paralelas

*1.8.1.1 Flujo uniforme.*

En el flujo uniforme, la velocidad de un punto a otro no cambia.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial s} = 0$$

donde  $s$  es el vector de posición.

Si el flujo es no uniforme, la velocidad sí cambia de un punto a otro.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial s} \neq 0$$

*1.8.1.2 Flujo permanente.*

En el flujo permanente o estacionario la velocidad no varía con el tiempo, es decir,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$$

Si la velocidad varía con el tiempo, el flujo se llama no permanente o no estacionario.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \neq 0$$

### 1.8.2 Flujo volumétrico y flujo másico

La segunda propiedad cinemática más importante es el flujo volumétrico o caudal  $Q$  que pasa a través de una superficie del campo fluido.

Considere un pequeño elemento de área  $dA$ , como el de la figura 1.11, de un campo de flujo. La velocidad del fluido  $V$  es perpendicular al área. En un tiempo  $dt$ , el volumen que atraviesa al elemento  $dA$  es el volumen paralelepípedo mostrado.

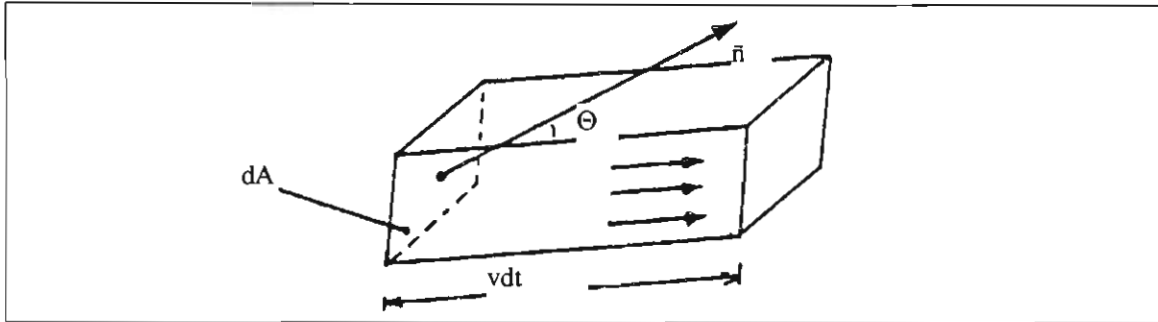


Figura 1.11 Flujo volumétrico a través de una superficie  $dA$

Integrando:

$$dV = V dt dA \cos \theta$$

$$dV = (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA dt$$

$$\frac{dV}{dt} = Q = \int (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

$$Q = \int v_n dA \quad [1.23]$$

donde  $V_n$  es la velocidad normal al área considerada.

Este flujo volumétrico multiplicado por la densidad nos da el flujo másico  $\dot{m}$

$$\dot{m} = \int \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad [1.24]$$

Si la densidad es constante, entonces

$$\dot{m} = \rho Q \quad [1.25]$$

2892981

### 1.8.2.1 Velocidad media.

El flujo volumétrico se utiliza a menudo, particularmente en movimiento en conductos, para definir la velocidad media

$$v_m = \frac{Q}{A} = \frac{\int_s v_n dA}{\int_s dA} \quad [1.26]$$

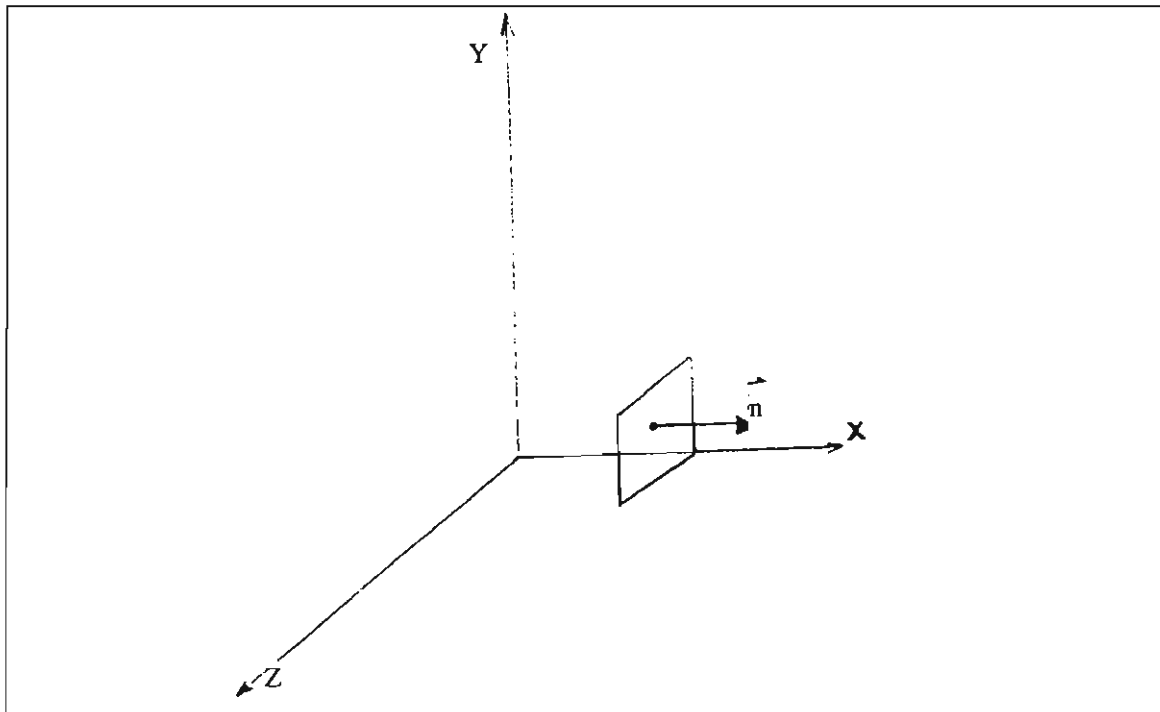
#### Problema 1.6

Un campo de velocidades arbitrarias está dado por  $\vec{V} = 2x^2 \hat{i} - xy \hat{j} - 3xz \hat{k}$ . Encuentre el flujo volumétrico  $Q$  que pasa por el cuadro delimitado por los siguientes puntos  $(x,y,z)$ :  $(1,0,0)$ ,  $(1,1,0)$ ,  $(1,1,1)$  y  $(1,0,1)$ .  
Solución:

El problema consiste en determinar el flujo volumétrico que pasa a través del cuadrado cuyos vértices se indican por los puntos  $(x,y,z)$ ; este cuadrado está colocado en un campo de flujo proporcionado por  $\vec{V}$ . La ecuación que nos da el flujo es:

$$Q = \int_s (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

El cuadrado se puede apreciar en la siguiente figura.



El vector normal del área es igual a  $\hat{i}$  y el  $dA$  es igual a  $dy dz$ , puesto que el área no varía en  $x$  como se observa en la figura.

$$Q = \int (2x^2 \hat{i} - xy \hat{j} - 3xz \hat{k} \cdot \hat{i}) dz dy$$

$$Q = \int 2x^2 dz dy$$

$$Q = \int_0^1 \int_0^1 2x^2 dz dy$$

$$Q = 2x^2$$

Como  $x$  no varía, su valor es igual a 1. Por lo tanto.

$$Q = 2$$

### Problemas propuestos

1.1 Una burbuja de jabón de 1 in de diámetro tiene una presión interna de  $0.004 \frac{lb}{in^2}$  sobre la atmosférica.

Calcular la tensión superficial de la interfase jabón-aire, recordando que una burbuja de jabón tiene dos interfaces en el aire, una superficie interior y una exterior, y el radio de ambas es casi igual.

1.2 Despreciando el peso del alambre, ¿cuál es la fuerza requerida para levantar un aro delgado de alambre de 4 cm de diámetro de una superficie de agua a  $20^\circ C$ ?

1.3 Estimar la altura a la cual se elevará el agua a  $70^\circ F$  en un tubo capilar de 0.12 in de diámetro.

1.4 Un recipiente de acero para alta presión está parcialmente lleno de un líquido a una presión de 10 atm. El volumen del líquido es de 1.232 L. A una presión de 25 atm dicho volumen es de 1.231 L. ¿Cuál es el módulo de elasticidad volumétrica del líquido?

1.5 Un tanque esférico está lleno de agua a 4442 psi. ¿Qué cantidad de agua, en peso, será recolectada a presión atmosférica, si se libera el agua del tanque? El volumen del tanque es de  $800.4069 in^3$ . Considerar que  $\beta_c = 305\ 000$  psi.

1.6 El agua de una prensa hidráulica se somete a una presión de 15 000 psia a  $68^\circ F$ . Si la presión inicial es de 15 psia ¿cuál será el porcentaje de reducción del volumen específico? Considerar que  $\beta_c = 365\ 000 \frac{lb}{in^2}$  para este intervalo de presión.

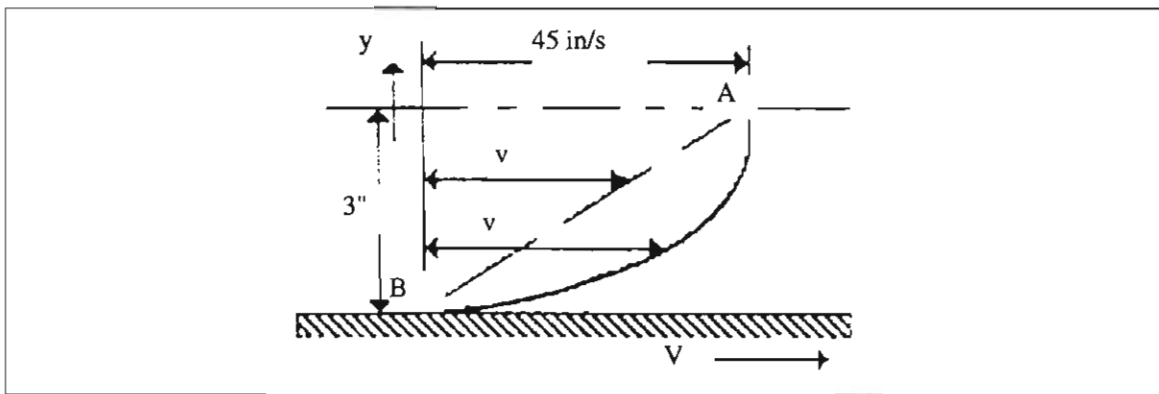
1.7 A una profundidad de 8 km en el mar, la presión es de 81.8 MPa. Suponiendo que el peso específico del agua de mar en la superficie es de  $10\ 050 \frac{N}{m^3}$  y  $\beta_c = 2.34 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$  para ese intervalo de presión, a) ¿Cuál será el cambio de volumen específico entre los valores en la superficie y en dicha profundidad?; b)



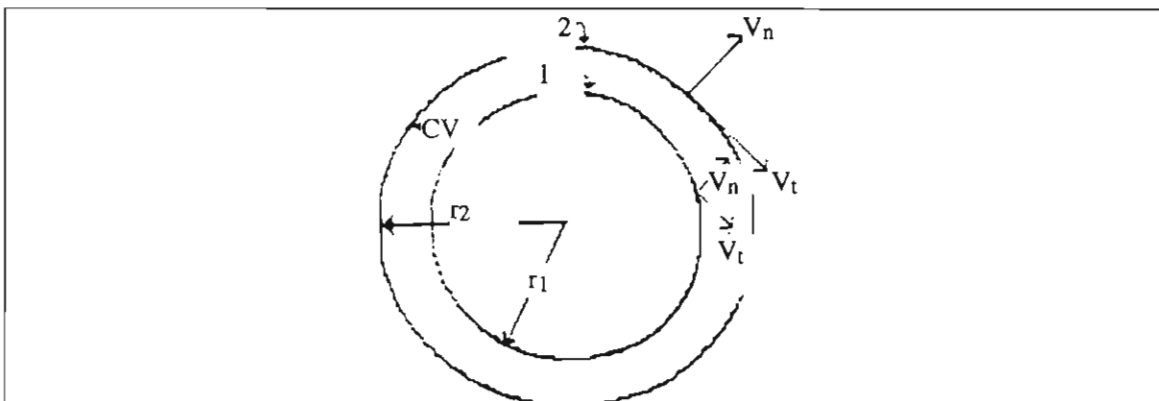
¿cuál será el volumen específico a la mencionada profundidad y c) ¿Cuál será el peso específico a esa profundidad?

1.8 ¿Qué presión debe aplicarse al agua a 60 °F para reducir su volumen en 2 %?

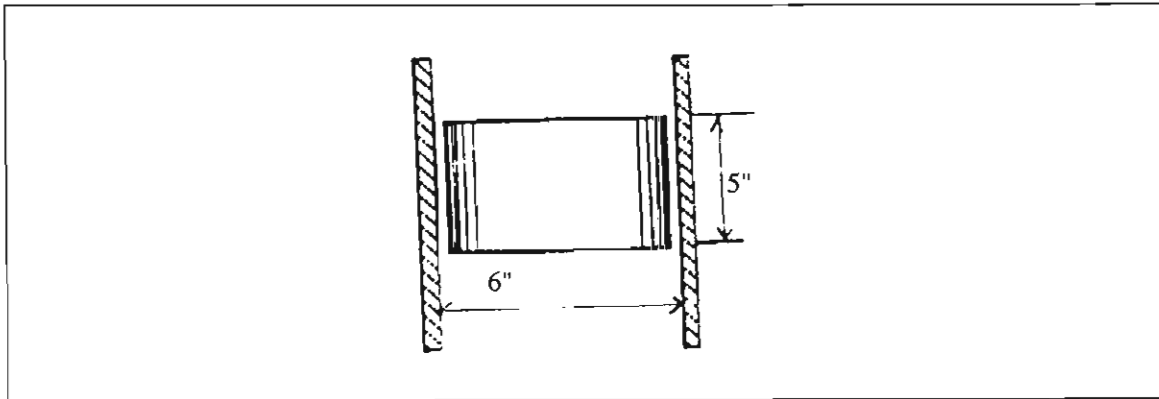
1.9 La viscosidad del fluido de la figura es  $\mu = 0.001 \frac{lb \cdot s}{ft^2}$  y su densidad relativa es  $\delta = 0.913$ . Calcular el gradiente de velocidad y la magnitud del esfuerzo cortante en la frontera y a 1, a 2 y a 3 pulgadas de la frontera, suponiendo a) una distribución lineal de la velocidad y b) una distribución parabólica de la velocidad.



1.10 Un cilindro de 0.4 ft de radio rota concéntricamente dentro de un cilindro fijo de 0.42 ft de radio. La longitud de ambos cilindros es de 1 ft. Determinar la viscosidad del líquido que llena el espacio entre los cilindros si se requiere un par de 0.65 lb · ft para mantener una velocidad angular de 60 rpm.



1.11 Un cilindro que pesa  $120\text{ lb}$  se desliza en un tubo lubricado, como se observa en la figura. La tolerancia entre el cilindro y el tubo es de  $0.001\text{ in.}$  Si el cilindro se desacelera a razón de  $2\frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$  cuando la velocidad es de  $20\frac{\text{ft}}{\text{s}}$  ¿cuál es la viscosidad del lubricante?





# **CAPITULO 2**

## **METODO EXPERIMENTAL**



Los parámetros adimensionales profundizan de manera significativa nuestra comprensión de los fenómenos de flujo de fluidos. Un caso ilustrativo al respecto es el del gato hidráulico, donde la relación de los diámetros de pistón que determina la ventaja mecánica, nos da un número adimensional que es independiente del tamaño total del gato.

Los números adimensionales permiten aplicar resultados experimentales limitados en número, y extrapolarlos a situaciones en que se tengan diferentes dimensiones físicas, o bien, inclusive, diferentes propiedades de fluido.

Los conceptos de análisis dimensional presentados en este capítulo hacen posible desarrollar esta generalización a partir de datos empíricos, para describir el fenómeno en estudio en su totalidad sin estar restringido a la discusión del experimento especializado que se llevó a cabo. Esta metodología ofrece importantes ventajas, como el ahorro de tiempo y recursos, al permitir encontrar respuestas significativas a un problema, desarrollando una pequeña cantidad de ensayos; también facilita la comunicación idónea de los resultados de la investigación práctica, al presentarlos en forma muy concisa y significativa mediante los parámetros adimensionales.

Muchos de los parámetros adimensionales se pueden percibir como la razón de un par de fuerzas del fluido, cuya magnitud relativa indica la importancia correspondiente de una de estas fuerzas con respecto a la otra. Si en un flujo cuyas características se analizarán, algunas de las fuerzas son mucho mayores que otras, es posible desprestigiar el efecto de las más pequeñas y considerar el fenómeno como si fuera determinado completamente por las fuerzas mayores, para obtener una muy buena aproximación a la respuesta buscada. Esto implica que se pueden usar procedimientos matemáticos y experimentales menos complejos, aunque no necesariamente más fáciles, para resolver el problema.

## 2.1 Variables físicas, dimensiones y unidades

Todas las variables físicas se miden como múltiplos de ciertas cantidades llamadas unidades. Algunas se expresan en términos de otras. Se pueden encontrar ciertas unidades, cuya combinación permite expresar las demás variables físicas. La dimensión es el tipo de variable que puede medirse.

Los dos sistemas de dimensiones fundamentales más convencionales son:

- a)  $M, L, t, \theta$  que representa masa, longitud, tiempo y temperatura.
- b)  $F, L, t, \theta$  que representa fuerza, longitud, tiempo y temperatura.

Las dimensiones de todas las variables físicas pueden explicarse de términos de las dimensiones fundamentales, como se observa en la tabla 2.1.

Como se puede observar, la relación que existe entre estos dos sistemas de dimensiones es la segunda ley del movimiento de Newton expresada por

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad [2.1]$$

La cual expresada en forma dimensional es

$$F = M L t^{-2} \quad [2.2]$$

**TABLA 2.1 Dimensiones de las variables físicas**

Cantidad	Simbolo	Dimensiones M, L, t, $\theta$	Dimensiones F, L, t, $\theta$
Masa	m	M	$FL^{-1}t^2$
Longitud	L	L	L
Tiempo	t	t	t
Temperatura	$\theta$	$\theta$	$\theta$
Velocidad	u	$Lt^{-1}$	$Lt^{-1}$
Aceleración	a	$Lt^{-2}$	$Lt^{-2}$
Fuerza	F	$MLt^{-2}$	F
Esfuerzo	$\sigma$	$ML^{-1}t^{-2}$	$FL^{-2}$
Densidad	$\rho$	$ML^{-3}$	$FL^{-4}t^{-2}$
Peso específico	$\gamma$	$ML^{-2}t^{-2}$	$FL^{-3}$
Viscosidad dinámica	$\mu$	$ML^{-1}t^{-1}$	$FL^{-2}t$
Viscosidad cinemática	$\nu$	$L^2t^{-1}$	$L^2t^{-1}$
Tensión superficial	$\sigma$	$Mt^{-2}$	$FL^{-1}$
Módulo de elasticidad volumétrica	$\beta_c$	$ML^{-1}t^{-2}$	$FL^{-2}$
Caudal	Q	$L^3t^{-1}$	$L^3t^{-1}$
Gravedad	g	$Lt^{-2}$	$Lt^{-2}$
Coefficiente de dilatación volumétrica	$\beta_d$	$\theta^{-1}$	$\theta^{-1}$

La mayor parte de las ecuaciones en las ciencias naturales son dimensionalmente homogéneas. Así, se puede utilizar la ecuación para determinar la dimensión de uno de sus parámetros si se conocen las dimensiones de los otros.

Las unidades congruentes de fuerza, masa, longitud y tiempo simplifican mucho la solución de problemas en mecánica; igualmente, mediante unidades congruentes se pueden realizar derivaciones sin referencia a algún sistema en particular. Se dice que un sistema de unidades mecánicas es congruente cuando una unidad de fuerza causa que una unidad de masa sufra una unidad de aceleración.

Se ha adoptado en muchos países el sistema internacional (SI), que tiene al newton,  $N$ , como unidad de fuerza, al kilogramo,  $kg$ , como unidad de masa, al metro,  $m$ , como unidad de longitud y al segundo,  $s$ , como unidad de tiempo. Con el kilogramo, el metro y el segundo como unidades definidas, se deriva el newton para satisfacer exactamente la segunda ley del movimiento de Newton dado por la ecuación 2.1, de la cual obtenemos:

$$1 N = 1 kg \times \frac{1 m}{s^2} \quad [2.3]$$

En Estados Unidos el sistema consecuente de unidades en la actualidad, incluye la libra,  $lb$ , para la fuerza; para la masa, el *slug*; el pie,  $ft$ , es la unidad de longitud y el segundo,  $s$ , lo es para el tiempo. El

*slug* es una unidad derivada; es la unidad de masa a la que una libra se acelera un pie por segundo cuadrado, es decir,

$$1 \text{ lb} = 1 \text{ slug} \times \frac{1 \text{ ft}}{\text{s}^2} \quad [2.4]$$

En Estados Unidos también se utiliza el sistema inconsecuente de unidades libra-fuerza, *lb*, libra-masa, *lb<sub>m</sub>*, pie, *ft*, para la longitud y segundo *s*, para el tiempo. Con las unidades no consecuentes se requiere una constante de proporcionalidad en la segunda ley de Newton, generalmente escrita para este caso, como:

$$F = \frac{m}{g_0} a \quad [2.5]$$

con lo cual se obtiene que  $g_0$  es igual a  $32.174 \frac{\text{lb}_m \cdot \text{ft}}{\text{lb} \cdot \text{s}^2}$ . Para el sistema métrico,  $g_0$  es igual a  $9.806 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{kg}_f \cdot \text{s}^2}$ . Para todos los sistemas de unidades,  $g_0$  se puede obtener de la tabla 2.2.

**Tabla 2.2 Valores de  $g_0$  para sistemas de unidades comunes**

Sistema	Masa	Longitud	Tiempo	Fuerza	$g_0$
SI	kg	m	s	N	$1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}^2}$
USC	slug	ft	s	lb <sub>f</sub>	$1 \frac{\text{slug} \cdot \text{ft}}{\text{lb} \cdot \text{s}^2}$
Us inconsistente	lb <sub>m</sub>	ft	s	lb <sub>f</sub>	$32 \frac{\text{lb}_m \cdot \text{ft}}{\text{lb} \cdot \text{s}^2}$
Métrico, cgs	g	cm	s	dina	$1 \frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{dina} \cdot \text{s}^2}$
Métrico, mks	kg	m	s	kg <sub>f</sub>	$9.81 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{kg}_f \cdot \text{s}^2}$

## 2.2 Congruencia dimensional

Se pueden combinar las variables físicas de tal forma que resulta un grupo adimensional, por ejemplo

$$\left[ \frac{\rho u L}{\mu} \right] = \frac{(M L^{-3}) (L t^{-1}) (L)}{(M L^{-1} t^{-1})} = M^0 L^0 t^0$$

Este grupo adimensional llamado número de Reynolds no tiene dimensiones. Los corchetes (paréntesis cuadrados) significan “dimensiones de”.

No es necesario decir que todas las ecuaciones deben estar balanceadas en magnitud, pero sí conviene aclarar que las ecuaciones racionales (obtenidas de las leyes fundamentales de la física) deben ser dimensionalmente homogéneas. Es decir, el miembro izquierdo de la ecuación debe tener las mismas



dimensiones que el derecho. Más aún, cada término debe tener las mismas dimensiones. Así, se tiene la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z = cte \quad [2.6]$$

que en este caso todos los miembros tienen dimensiones de longitud.

### 2.3 Teorema $\pi$ de Buckingham

El teorema  $\pi$  de Buckingham demuestra que, en un problema físico que incluye  $n$  variables físicas en las que hay  $m$  dimensiones, las cantidades se pueden ordenar en  $n - m$  parámetros adimensionales independientes, llamados parámetros  $\pi$ .

Sean  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  las variables físicas implicadas en el problema que se desea resolver. Se sabe que todas las cantidades son esenciales a la solución por lo que debe existir alguna relación funcional

$$F(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0 \quad [2.7]$$

Si  $\pi_1, \pi_2, \dots$ , representan agrupaciones adimensionales de las cantidades  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , entonces con  $m$  dimensiones implicadas, existe una ecuación de la forma

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0 \quad [2.8]$$

El método para determinar los parámetros  $\pi$  consiste en seleccionar  $m$  de las variables  $A$ , con diferentes dimensiones que contengan entre ellas las  $m$  dimensiones y usarlas como variables repetitivas (es esencial que ninguna de las  $m$  variables seleccionadas, usadas como variable repetitiva se puedan obtener a partir de las demás variables repetitivas); junto con una de las otras variables  $A$  para cada parámetro  $\pi$ . Por ejemplo, sea  $A_1, A_2, A_3$  que contengan  $M, L, t$ , no necesariamente en cada una, sino en forma colectiva. Entonces el primer parámetro  $\pi$  está compuesto por

$$\pi_1 = A_1^x A_2^y A_3^z A_4$$

el segundo por

$$\pi_2 = A_1^x A_2^y A_3^z A_5$$

En estas ecuaciones se determinarán los exponentes para que cada  $\pi$  sea adimensional. Las dimensiones de las variables físicas  $A$ , se sustituyen y los exponentes de  $M, L, t$  se evalúan igual a cero. Estos producen tres ecuaciones con tres incógnitas para cada parámetro  $\pi$ , con lo cual se pueden determinar los exponentes  $x, y, z$  y de aquí los parámetros  $\pi$ .

Los pasos en un análisis dimensional, se pueden resumir como sigue:

1. Seleccionar las variables físicas que intervienen en el problema que se analiza.
2. Escribir la relación funcional, es decir

$$F(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0$$

3. Seleccionar las variables repetitivas. Estas variables deben contener todas las  $m$  dimensiones posibles del problema. Frecuentemente se selecciona una variable que especifique la escala, otra la condición cinemática y la tercera es una variable que está relacionada con la masa del sistema.

4. Escribir los parámetros  $\pi$  en términos de exponentes incógnitos.

5. Para cada una de las expresiones  $\pi$  escribir las ecuaciones de los exponentes, de manera que su suma en cada dimensión sea cero.

6. Resolver las ecuaciones simultáneamente.

7. Sustituir en las expresiones  $\pi$  del paso 4. Los exponentes para obtener los parámetros  $\pi$  adimensionales.

8. Establecer la relación funcional

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m}) = 0$$

o bien, resolver para cada uno de los parámetros  $\pi$  explícitamente

$$\pi_2 = f_1(\pi_1, \pi_3, \dots, \pi_{n-m})$$

#### 2.4 Números adimensionales más importantes en mecánica de fluidos.

Para obtener estos números adimensionales se resolverá el siguiente problema a manera de ejemplo.

##### Problema 2.1

En la mecánica de los fluidos sin transferencia de calor, las siguientes variables físicas pueden ser importantes: presión ( $P$ ), longitud ( $L$ ), viscosidad dinámica ( $\mu$ ), tensión superficial ( $\sigma$ ), velocidad del sonido ( $c$ ), aceleración de la gravedad ( $g$ ), densidad ( $\rho$ ) y velocidad ( $u$ ). Se desea encontrar los grupos adimensionales.

*Solución:*

La relación funcional es:

$$F(P, L, \mu, \sigma, c, g, \rho, u) = 0$$

El número de variables físicas es  $n = 8$ . El número de dimensiones es  $m = 3$ . Por lo tanto, habrá  $8 - 3 = 5$  parámetros adimensionales  $\pi$ .

El número de variables repetitivas es igual a  $m = 3$ . Estas variables serán: longitud,  $L$ ; velocidad,  $U$ ; densidad,  $\rho$ . Los números  $\pi$  son :

$$\begin{aligned}\pi_1 &= L^x u^y \rho^z P \\ \pi_2 &= L^x u^y \rho^z \mu \\ \pi_3 &= L^x u^y \rho^z \sigma \\ \pi_4 &= L^x u^y \rho^z c \\ \pi_5 &= L^x u^y \rho^z g\end{aligned}$$

sustituyendo las dimensiones de  $\pi$ .

$$\pi_1 = (L)^{x_1} (L t^{-1})^{y_1} (M L^{-3})^{z_1} (M L^{-1} t^{-2})$$

las ecuaciones simultáneas son :

$$\begin{aligned} M ; z_1 + 1 &= 0 \\ L ; x_1 + y_1 - 3z_1 - 1 &= 0 \\ t ; -y_1 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

obteniéndose

$$\begin{aligned} z_1 &= -1 \\ y_1 &= -2 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \pi_1 &= L^0 u^{-2} \rho^{-1} P \\ \pi_1 &= \frac{P}{u^2 \rho} = E \end{aligned}$$

Los otros parámetros  $\pi$  son:

$$\begin{aligned} \pi_2 &= \frac{L \rho u}{\mu} = Re \\ \pi_3 &= \frac{L u^2 \rho}{\sigma} = W \\ \pi_4 &= \frac{u}{c} = M \\ \pi_5 &= \frac{u^2}{L g} = Fr \end{aligned}$$

cuyos nombres son número de Euler, número de Reynolds, número de Weber, número de Mach y número de Froude, respectivamente.

Cabe aclarar que los parámetros adimensionales se pueden elevar a cualquier potencia sin que pierdan su condición de ser adimensionales.

La relación funcional de estos parámetros es

$$f\left(\frac{P}{u^2 \rho}, \frac{L \rho u}{\mu}, \frac{\rho u^2 L}{\sigma}, \frac{u}{c}, \frac{u^2}{L g}\right) = 0$$

El número de Euler,  $\left(\frac{P}{u^2 \rho}\right)$ , es la relación de las fuerzas de presión a las fuerzas de inercia. Este número es poco importante a menos que las caídas de presión sean lo suficientemente grandes para dar lugar a la formación de vapor en el líquido.

El número de Reynolds,  $\left(\frac{L \rho u}{\mu}\right)$  es la relación de las fuerzas de inercia a las fuerzas viscosas. Un número crítico de Reynolds hace distinción entre regímenes de flujo; tales como laminar o turbulento en ductos, en la capa límite, o alrededor de objetos sumergidos en una corriente fluida.

El número Weber,  $\left(\frac{\rho u^2 L}{\sigma}\right)$  es la relación de las fuerzas de inercia a la fuerza de tensión superficial. Es relevante en las interfases gas-líquido, o líquido-líquido y también donde estas interfases están en contacto con una frontera.

El número de Mach,  $\left(\frac{u}{c}\right)$  es la relación de las fuerzas de inercia a las fuerzas elásticas. Este parámetro es significativo si se maneja un flujo de un gas cuando su velocidad es muy cercana a la velocidad del sonido en ese medio.

El número de Froude,  $\left(\frac{u^2}{Lg}\right)$  es la relación de la fuerza de inercia a la fuerza de la gravedad. Este parámetro es muy importante en las estructuras hidráulicas, tales como, canales, salto hidráulico, etcétera.

### Problema 2.2

Si se sabe que el esfuerzo cortante  $\sigma$  depende de la viscosidad y la rapidez de deformación angular  $\frac{du}{dy}$  en un flujo laminar unidimensional, determínese la forma de la ley de la viscosidad por razonamiento dimensional.

*Solución:*

La relación funcional formada por cuatro variables físicas es:

$$F(\tau, \mu, du, dy) = 0$$

Las dimensiones de cada variable son

$$\begin{aligned} [\tau] &= F L^{-2} \\ [\mu] &= F L^{-2} t \\ [du] &= L t^{-1} \\ [dy] &= L \end{aligned}$$

Por lo tanto  $m - n = 4 - 3 = 1$ , sólo habrá un parámetro adimensional  $\pi$ , el cual es

$$\begin{aligned} \pi &= (\tau)^x (\mu)^y (du)^z (dy) \\ \pi &= [F L^{-2}]^x [F L^{-2} t]^y [L t^{-1}]^z [L] \end{aligned}$$

de donde se tiene, para:

$$\begin{aligned} F; x + y &= 0 \\ L; -2x - 2y + z + 1 &= 0 \\ t; y - z &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene

$$\begin{aligned}x &= 1 \\y &= -1 \\z &= -1\end{aligned}$$

Sustituyendo

$$\pi = \frac{\tau dy}{\mu du}$$

Entonces

$$\tau = c \mu \frac{du}{dy}$$

donde el análisis dimensional no dice el valor de la constante  $c$ , el cual se debe obtener por experimentación, pero en este caso es sabido que  $c$  es igual a 1.

Por lo tanto

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

que es justamente la ley de la viscosidad de Newton.

### Problema 2.3

Usando las variables  $Q$ ,  $D$ ,  $\frac{\Delta H}{L}$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $g$  como pertinentes al flujo de un tubo liso, arreglarlas en parámetros adimensionales con  $Q$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ , como variables repetitivas.

*Solución:*

La relación funcional de las variables físicas involucradas es:

$$F\left(Q, D, \frac{\Delta H}{L}, \rho, \mu, g\right) = 0$$

Las dimensiones de cada variable son:

La variable  $\frac{\Delta H}{L}$  tiene como dimensiones a la unidad, por lo tanto ya es un parámetro adimensional.

Existen cinco variables físicas y se utilizan 3 dimensiones para expresarlas, por lo tanto sólo habrá dos parámetros adimensionales más, los cuales se obtendrán como

$$\begin{aligned}[Q] &= L^3 t^{-1} \\[D] &= L\end{aligned}$$

$$\left[ \frac{\Delta H}{L} \right] = 1$$

$$[\rho] = M L^{-3}$$

$$[\mu] = M L^{-1} t^{-1}$$

$$[g] = L t^{-2}$$

$$\pi_1 = (Q)^x (\rho)^y (\mu)^z D$$

$$\pi_2 = (Q)^x (\rho)^y (\mu)^z g$$

Para  $\pi_1$ :

$$\pi_1 = [L^3 t^{-1}]^x [M L^{-3}]^y [M L^{-1} t^{-1}]^z [L]$$

$$L; 3x - 3y - z + 1 = 0$$

$$t; -x - z = 0$$

$$M; y + z = 0$$

resolviendo el sistema se obtiene

$$x = -1$$

$$y = -1$$

$$z = 1$$

sustituyendo valores

$$\pi_1 = \frac{\mu D}{Q \rho}$$

Realizando lo mismo para  $\pi_2$  se obtiene

Por lo tanto, la relación funcional de los parámetros

$$\pi_2 = \frac{Q^3 \rho^5 g}{\mu^5}$$

adimensionales será

$$f\left(\frac{\mu D}{Q \rho}, \frac{Q^3 \rho^5 g}{\mu^5}, \frac{\Delta H}{L}\right) = 0$$

## 2.5 La modelización.

Hasta este momento se ha aplicado el teorema de Buckingham, para llevar una relación físicamente homogénea a su forma adimensional. Aunque esta transformación sea matemáticamente correcta, hay ciertas dificultades ingenieriles que necesitan ser discutidas.

Hasta aquí se ha considerado que es posible especificar todas las variables que intervienen en el proceso. En la práctica, la selección de las variables que influyen en el mismo, necesitan gran juicio y experiencia.



2892981

El ingeniero debe decidir por ejemplo, ¿es importante la viscosidad? ¿influyen los efectos de la temperatura? ¿qué pasa con la tensión superficial? entre muchos otros aspectos.

Cada grupo adimensional que se retiene, aumenta el precio y el esfuerzo necesario. El juicio correcto sobre qué variables deben de retenerse en cada caso es consecuencia de la práctica y la madurez que se tenga.

Una vez que se han seleccionado las variables y realizado el análisis dimensional, el investigador debe buscar la semejanza entre el modelo ensayado y el prototipo a diseñar.

Con suficientes ensayos, los datos obtenidos del modelo proporcionarán la función adimensional buscada, disponible en tablas, gráficas, o en forma analítica; poseemos entonces la seguridad de obtener la semejanza completa entre el modelo y el prototipo, es decir: *Las condiciones del flujo para un modelo ensayado son completamente semejantes a las del prototipo si los valores correspondientes al modelo y al prototipo coinciden para todos los parámetros adimensionales.* O bien,

$$\begin{aligned}\pi_{1m} &= \pi_{1p} \\ \pi_{2m} &= \pi_{2p}\end{aligned}$$

donde  $m$  es el modelo y  $p$  el prototipo.

## 2.6 Semejanza geométrica.

La semejanza geométrica se refiere a la dimensión ( $L$ ) y debe asegurarse que se cumple antes de proceder a los ensayos con cualquier modelo. La definición es: *Un modelo y un prototipo son geoméricamente semejantes si, y sólo si todas las dimensiones espaciales, en las tres coordenadas, tienen la misma relación de escala lineal.*

En la semejanza geométrica todos los ángulos físicos y todas las direcciones del flujo se conservan. La orientación del modelo y del prototipo con respecto a los objetos de los alrededores debe ser idéntica. Esto se expresa matemáticamente, por la razón de escala

$$\lambda = \frac{l_p}{l_m}$$

## 2.7 Semejanza cinemática.

La semejanza cinemática exige que todas las relaciones entre longitudes homólogas del modelo y del prototipo tengan el mismo valor y también que todas las relaciones entre tiempos homólogos tengan un valor común, es decir: *Los movimientos de dos sistemas son cinemáticamente semejantes, si partículas homólogas alcanzan puntos homólogos en instantes homólogos.*

## 2.8 Semejanza dinámica.

Existe semejanza dinámica cuando el modelo y el prototipo tienen la misma relación de escala longitudinal, la misma relación de escala de tiempo y la misma relación de escala de fuerza (o de masa). En otras palabras, si:

$$\begin{aligned}Re_m &= Re_p \\ Fr_m &= Fr_p\end{aligned}$$

$$E_m = E_p$$

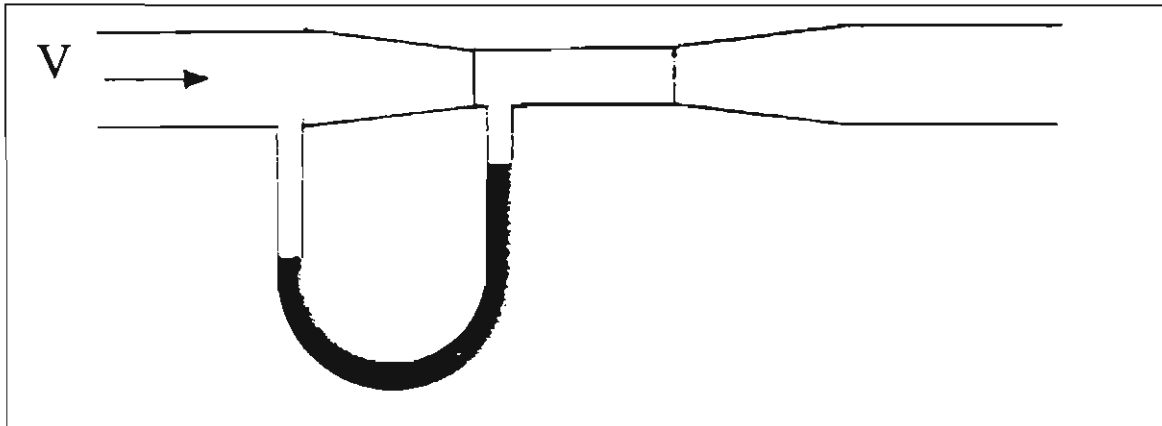
$$M_m = M_p$$

$$W_m = W_p$$

#### Problema 2.4

Un modelo de un medidor de Venturi tiene dimensiones lineales de un quinto de las del prototipo. El prototipo opera con agua a 20°C y el modelo con agua a 95°C. Para un diámetro de garganta de 600 mm y una velocidad de  $6 \frac{m}{s}$  en la garganta del prototipo, ¿qué descarga se necesita a través del modelo para que se mantenga la similitud ?

Solución:



Un medidor Venturi es un dispositivo que sirve para medir la relación del flujo que circula a través de la tubería donde se encuentra instalado.

Está formado por dos secciones cilíndricas del mismo diámetro de la tubería; una sección cilíndrica intermedia, conocida como garganta; y dos secciones troncocónicas, una de las cuales es mucho mayor que la primera. Entre la sección de entrada y la garganta se encuentra un medidor diferencial de presión, con el cual se mide la caída de presión que provoca el paso del flujo a través del medidor, y de esta manera es posible conocer la relación de flujo.

Para que exista semejanza dinámica entre el modelo y el prototipo es necesario que algunos parámetros adimensionales sean iguales. Es evidente que en este problema el parámetro más importante es el número de Reynolds; se debe cumplir que

$$Re_m = Re_p$$

$$\left( \frac{VD\rho}{\mu} \right)_m = \left( \frac{VD\rho}{\mu} \right)_p$$

Como  $Q = VA$ , entonces es necesario conocer la velocidad del modelo.



$$V_m = V_p \frac{D_p}{D_m} \frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{\mu_m}{\mu_p}$$

La relación de escala es

$$\frac{l_m}{l_p} = \frac{1}{5} = \lambda$$

De tablas

$$\rho_p = 998.2 \frac{kg}{m^3}$$

$$\mu_p = 1.005 \times 10^{-3} N \cdot \frac{s}{m^2}$$

$$\rho_m = 961.9 \frac{kg}{m^3}$$

$$\mu_m = 0.299 \times 10^{-3} N \cdot \frac{s}{m^2}$$

Por tanto

$$V_m = 6 \frac{m}{s} \times 5 \times \frac{998.2}{961.9} \times \frac{0.299 \times 10^{-3}}{1.005 \times 10^{-3}}$$

$$V_m = 9.26 \frac{m}{s}$$

$$D_m = \frac{D_p}{5} = \frac{600 \text{ mm}}{5} = 120 \text{ mm}$$

$$Q_m = 9.26 \frac{m}{s} \times \frac{\pi}{4} \times (0.12 \text{ m})^2$$

$$Q_m = 0.1046 \frac{m^3}{s}$$

Este es el caudal que se necesita tener en el modelo para que exista similitud con el prototipo

### Problemas Propuestos

**2.1** Usando las variables  $Q$ ,  $D$ ,  $\frac{\Delta H}{L}$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $g$  como pertinentes al flujo en tubo liso, arreglarlas en parámetros adimensionales, con  $Q$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  como variables repetitivas.

**2.2** La caída de presión en un medidor de Venturi varía con la densidad del fluido, la velocidad de aproximación y la relación de diámetros del medidor. Se prueba un modelo de medidor de Venturi con agua a  $20^\circ\text{C}$  y se observa una caída de presión de  $5 \text{ kPa}$  cuando la velocidad de aproximación es de  $4 \frac{m}{s}$

Un prototipo con similitud geométrica se usa para medir gasolina ( $\rho = 680 \frac{kg}{m^3}$ ) a  $20^\circ C$  y con un gasto de  $9 \frac{m^3}{min}$ . Si el manómetro del prototipo tiene su mejor precisión a  $15 kPa$ , ¿cuál debe ser el diámetro de la tubería corriente arriba?

2.3 ¿Cuál es el gasto de aire a  $70^\circ F$  y  $50 psi$  en un tubo de  $1 in$  de diámetro si se desea obtener similitud dinámica con una tubería de  $4 in$  de diámetro por la que fluyen  $250 gpm$  de agua a  $60^\circ F$ ? La viscosidad del aire es  $\mu = 3.82 \times 10^{-7} \frac{lbs}{ft^2}$ .

2.4 Una embarcación de  $600 ft$  de longitud será operada a  $25 mph$  en agua de mar con viscosidad de  $1.2 cP$  y peso específico de  $64 \frac{lb}{ft^3}$ . ¿Cuál deberá ser la viscosidad cinemática de un fluido empleado en un modelo de  $10 ft$  de longitud a fin de que los números de Reynolds y de Froude sean los mismos que para el prototipo? ¿Existe un líquido con tales características?

2.5 Un modelo de aeroplano posee dimensiones lineales de un vigésimo de las del prototipo. Si el aeroplano debe volar a  $400 mph$ , ¿cuál debe ser la velocidad del aire en el túnel de viento para un mismo número de Reynolds, si la temperatura y la presión son iguales?



# **CAPITULO 3**

## **HIDROSTATICA**



Un fluido en reposo no puede soportar esfuerzos cortantes sin deformarse, como ya se vio en la definición de fluido. En otras palabras, el esfuerzo normal sobre cualquier plano que pase por una partícula fluida en reposo es igual a un único valor denominado presión del fluido  $P$ , convencionalmente se considera positivo este esfuerzo a pesar de ser de compresión.

### 3.1 Definición de presión.

En cada punto de un fluido estático existe una cierta intensidad de presión. De modo específico, la intensidad de presión, llamada simplemente presión. Se define como el esfuerzo normal, visto en el capítulo 1, esto es:

$$P = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

donde  $dF$  es la fuerza normal que actúa sobre el área  $dA$ . La presión así definida es una cantidad escalar, esto es, tiene tan sólo magnitud y actúa de igual modo en todas direcciones.

### 3.2 Presión en un punto.

Ahora se demostrará el último párrafo de la sección anterior. Considérese una pequeña cuña de fluido en reposo de tamaño  $\Delta x$  por  $\Delta z$  por  $\Delta s$  y de anchura igual a  $b$  perpendicular al papel.

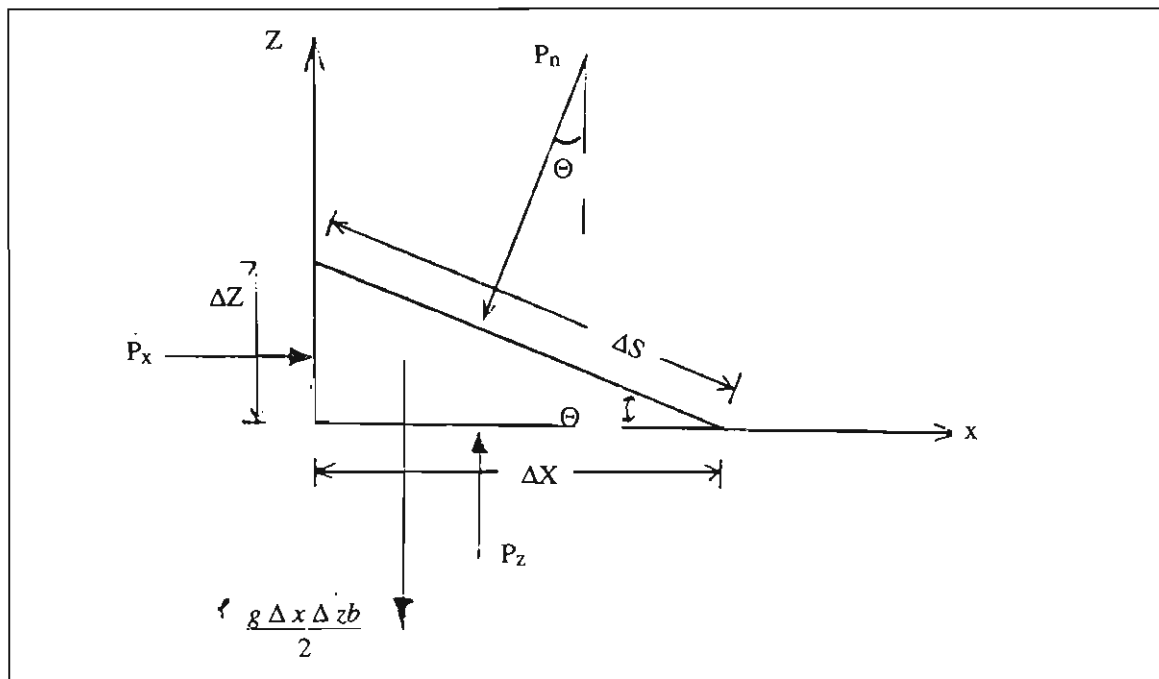


Figura 3.1 Diagrama de cuerpo libre de una cuña de fluido en reposo.

Por definición no hay esfuerzos cortantes, pero consideramos que las presiones  $P_x$ ,  $P_z$  y  $P_n$  son diferentes. La suma de las fuerzas que actúan en la cuña debe ser igual a cero, puesto que no hay aceleración en alguna dirección, esto es:

$$\Sigma F_x = 0 = P_x b \Delta z - P_n b \Delta s \text{ sen } \theta$$

$$\Sigma F_z = 0 = P_z b \Delta x - P_n b \Delta s \text{ cos } \theta - \frac{1}{2} \rho g b \Delta x \Delta z$$

De la geometría de la cuña se obtiene

$$\Delta z = \Delta s \text{ sen } \theta ; \Delta x = \Delta s \text{ cos } \theta$$

sustituyendo  $P_x = P_n$

$$P_z = P_n + \frac{1}{2} \rho g \Delta z \quad [3.1]$$

En el límite, la cuña es un punto,  $\Delta z \rightarrow 0$ , entonces se obtiene

$$P_x = P_z = P_n \quad [3.2]$$

De aquí se concluye, que la presión en un punto de un fluido en reposo es la misma en todas direcciones.

### 3.3 Equilibrio de una partícula fluida o ecuación fundamental de la estática de los fluidos.

Las fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido en reposo constan de fuerzas de superficie y fuerzas de cuerpo. Con la fuerza de gravedad como única fuerza de cuerpo que actúa, al considerar el eje  $z$  vertical positivo hacia arriba, la componente de la fuerza en la dirección  $z$  es  $-\rho g \delta x \delta y \delta z$ . Considere un pequeño elemento de fluido en reposo, como el que se muestra en la figura 3.2.

Con la presión  $P$  en el centro  $(x, y, z)$ , la fuerza ejercida en el lado normal al eje  $z$  más cercano al origen es:

$$\left[ P - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y$$

y la fuerza ejercida en el lado opuesto es

$$\left[ P + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y$$

donde  $\frac{\delta z}{2}$  es la distancia del centro a una cara normal a  $z$ .

Sumando las fuerzas que actúan en el elemento en la dirección z, se obtiene

$$\delta F_z = -\frac{\partial P}{\partial z} \delta x \delta y \delta z - \rho g \delta x \delta y \delta z$$

Para las direcciones x y y, no actúa alguna fuerza de cuerpo, por lo cual se obtiene

$$\delta F_x = -\frac{\partial P}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$$

$$\delta F_y = -\frac{\partial P}{\partial y} \delta x \delta y \delta z$$

El vector de fuerza elemental  $\delta \vec{F}$  está dado por

$$\delta \vec{F} = \hat{i} \delta F_x + \hat{j} \delta F_y + \hat{k} \delta F_z = \left[ \hat{i} \frac{\partial P}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial P}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial P}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z - \hat{k} \rho g \delta x \delta y \delta z$$

Dividiendo entre  $\delta x \delta y \delta z = \delta v$ , la expresión es:

$$\frac{\delta F}{\delta v} = - \left[ \hat{i} \frac{\partial P}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial P}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial P}{\partial z} \right] - \hat{k} \rho g$$

La cantidad entre paréntesis es el gradiente de la presión, obteniéndose

$$\vec{f} = -\nabla P$$

donde  $\vec{f}$  es el campo vectorial de la fuerza de presión superficial por unidad de volumen, por tanto

$$\vec{f} = -\hat{k} \rho g = 0 \quad [3.3]$$

que es la ley de la estática de fluidos referente a la variación de la presión.

La ecuación 3.3 en función de sus componentes se convierte en

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0; \frac{\partial P}{\partial y} = 0; \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad [3.4]$$

donde las ecuaciones parciales horizontales (x, y) son una forma de la ley de Pascal, que dice: *“Todas las partículas de flujo que se encuentren en la misma elevación de la misma masa continua de fluido en reposo, tienen la misma presión”*.

Ya que la presión sólo es una función de z, entonces

$$dP = -\rho g dz \quad [3.5]$$

Esta sencilla ecuación diferencial relaciona el cambio de presión con el peso específico y al cambio de elevación y es válida tanto para fluidos compresibles como para fluidos incompresibles.



Para fluidos incompresibles la densidad  $P$ , permanece constante, entonces al integrar la ecuación 3.5 se obtiene

$$P = -\rho g z + c$$

en la cual  $c$  es la constante de integración. La ley de la hidrostática frecuentemente se escribe como

$$P = \rho g h \quad [3.6]$$

en la cual  $h$  se mide verticalmente hacia abajo.  $h = -z$  desde la superficie libre del líquido y  $P$  es el aumento de presión referida a esa superficie libre.

Si el fluido es compresible, es decir un gas, la densidad debe ser considerada variable, y en la ecuación 3.5 la integración supone grandes cambios de presión. Pueden obtenerse resultados muy precisos utilizando la ley de gases perfectos, esto es

$$\int_1^2 \frac{dP}{P} = \ln \frac{P_2}{P_1} = -\frac{g}{R} \int_1^2 \frac{dz}{T} \quad [3.7]$$

La integración respecto a  $z$  requiere conocer la variación de la temperatura  $T(z)$ . Una aproximación muy común es la de la atmósfera isoterma, en que  $T = T_0$ , luego

$$\frac{dP}{P} = -\rho g dz = -\frac{P}{RT} g dz$$

separando variables e integrando entre 1 y 2, se tiene

$$P_2 = P_1 \exp \left[ -\frac{g (z_2 - z_1)}{R T_0} \right] \quad [3.8]$$

Esta ecuación es una buena aproximación para alturas pequeñas, pero realmente la temperatura atmosférica media disminuye casi linealmente con  $z$  en la troposfera (11,000 m aproximadamente)

$$T \approx T_0 - B z \quad [3.9]$$

donde  $T_0$  es la temperatura atmosférica al nivel del mar y  $B$  es el gradiente térmico, los cuales pueden variar día con día. Por acuerdo internacional, en la tropósfera se tienen los siguientes valores:

$$T_0 = 518.69 \text{ } ^\circ R = 288.16 \text{ } K = 15 \text{ } ^\circ C \quad [3.10]$$

$$B = 0.003566 \frac{^\circ R}{ft} = 0.0065 \frac{K}{m}$$

Al introducir la ecuación 3.9 en la 3.7 se tiene

$$P = P_0 \left[ 1 - \frac{Bz}{T_0} \right]^{\frac{g}{RB}} \quad [3.11]$$

donde para el aire  $\frac{g}{R B} = 5.26$ , con  $R = 287 \frac{m^2}{S^2 \cdot R}$

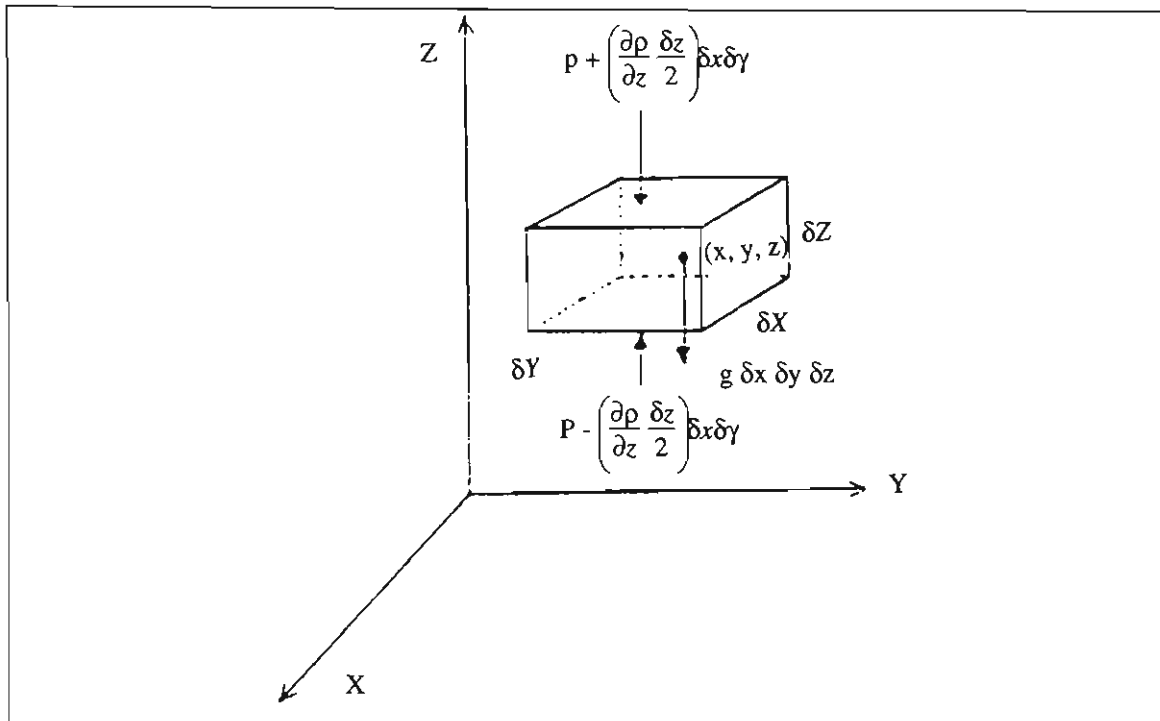


Figura 3.2 Diagrama de un pequeño elemento de fluido en reposo.

### 3.4 Unidades y escalas para la medición de la presión.

La presión se puede expresar con referencia a cualquier dato arbitrario. Los datos usuales son el cero absoluto y la presión atmosférica local. Cuando se expresa como una diferencia entre su valor y el vacío total se llama presión absoluta. Cuando se expresa como una diferencia entre su valor y la presión atmosférica local, se llama presión manométrica. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$P_{abs} = P_{bar} + P_{man} \quad [3.12]$$

Para evitar confusiones en este libro, todas las presiones serán manométricas, a menos que se señale expresamente que son absolutas.

La figura 3.3 muestra los datos y las relaciones de las unidades comunes de medición de presión.

La presión en el sistema internacional se expresa en Pascales, ( $Pa = \frac{N}{m^2}$ ). También es usual indicarla como una columna de fluido de determinado peso específico.

La presión atmosférica local se mide con un barómetro de mercurio o con un barómetro aneroide, que proporciona la diferencia de presión entre la atmósfera y una caja o tubo al vacío total, este es un medidor del tipo mecánico.

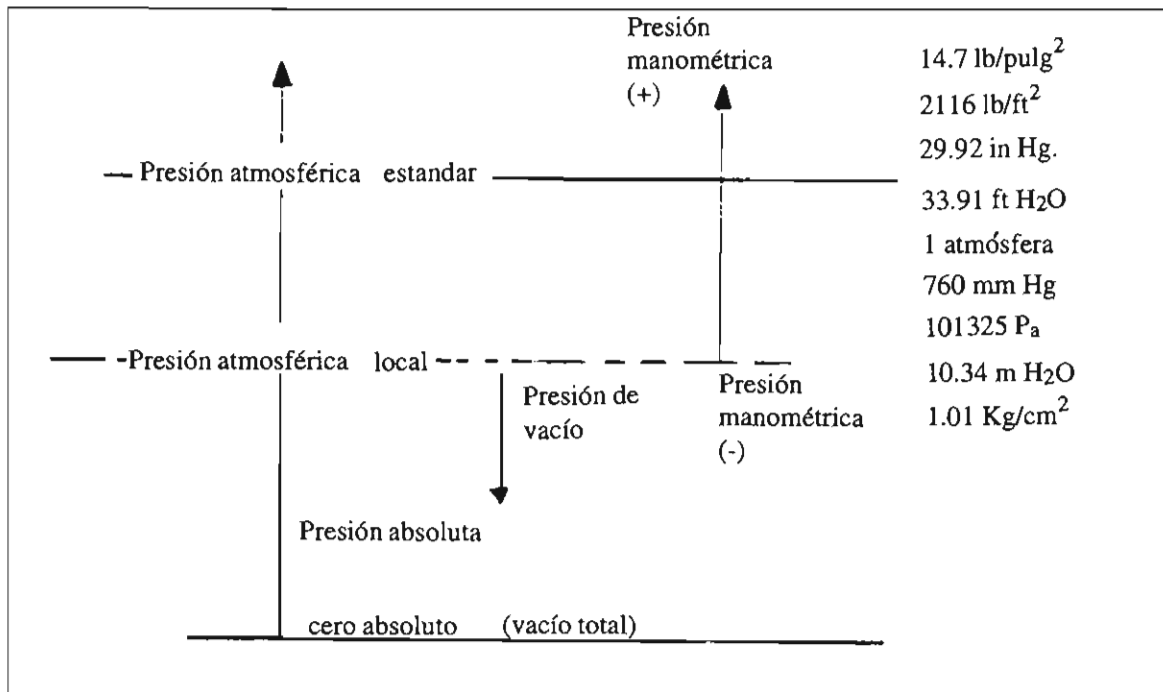
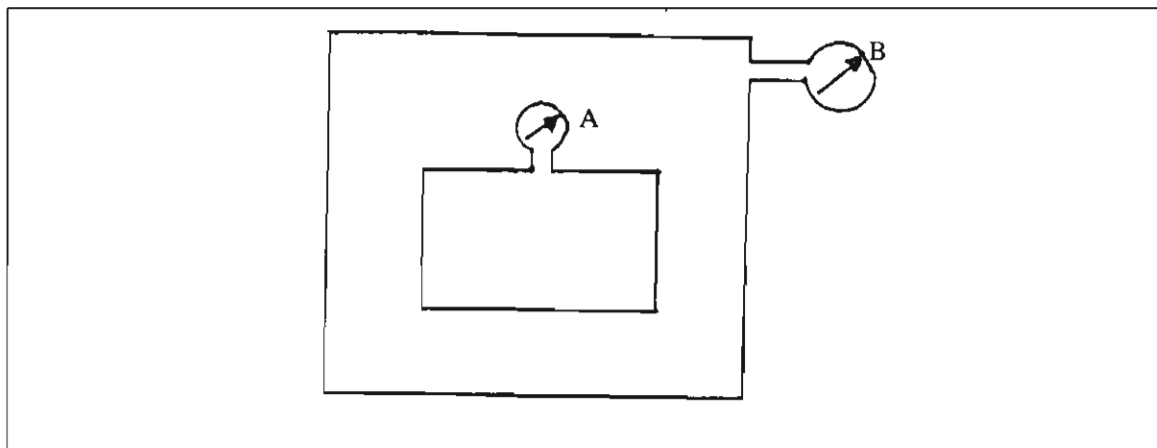


Figura 3.3 Escala de la presión con unidades.

**Problema 3.1**

Un medidor de Bourdon A dentro de un tanque de presión registra una lectura de 12 *psi*. Otro medidor de Bourdon B afuera del tanque de presión y conectado con él, muestra una presión de 20 *psi* y un barómetro aneroides indica 29 *in Hg* ¿Cuál es la presión absoluta medida por A en pulgadas de mercurio ?



Solución:

La presión absoluta medida por el manómetro B es:

$$P_{abs_B} = P_{bar} + P_{man_B}$$

La presión absoluta que mide A debe ser:

$$P_{abs_A} = P_{abs_B} + P_{man_A}$$

Por lo tanto

$$P_{abs_A} = P_{bar} + P_{man_B} + P_{man_A}$$

Sustituyendo valores

$$P_{abs_A} = 29 \text{ in Hg} + 20 \text{ psi} + 12 \text{ psi}$$

$$= 29 \text{ in Hg} + 32 \text{ psi}$$

$$1 \text{ psi} = 2.035 \text{ in Hg}$$

$$P_{abs_A} = 29 \text{ in Hg} + 32 \text{ psi} \times \left[ \frac{2.035 \text{ in Hg}}{1 \text{ psi}} \right]$$

$$P_{abs_A} = 94.13 \text{ in Hg}$$

Este es el valor de la presión absoluta que se mide en el manómetro A.

### 3.5 Manometría.

Los manómetros son dispositivos que nos sirven para medir la presión. Existen en dos tipos básicamente: los mecánicos y los de columna de líquido.

#### 3.5.1 Manómetros mecánicos

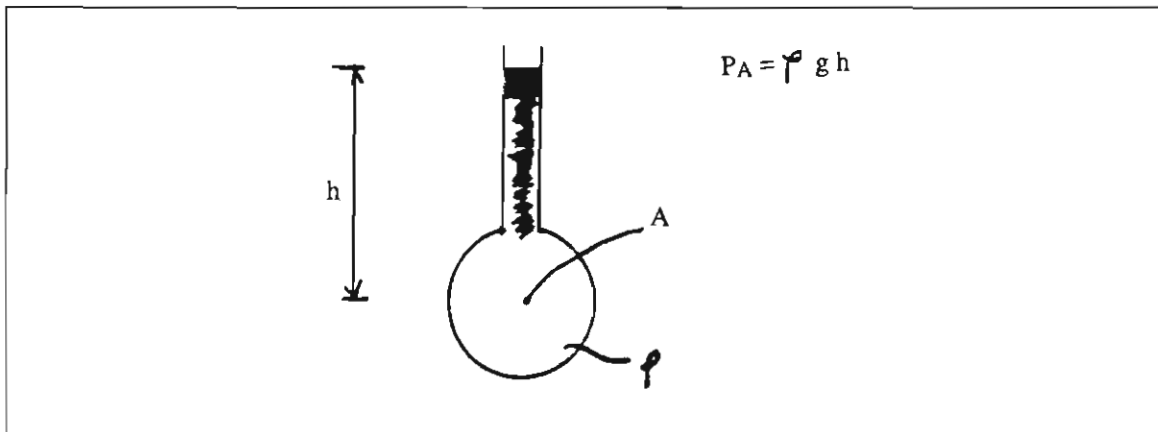
Los manómetros mecánicos son aquellos que utilizan un elemento elástico para la medición de presión, ayudándose de una escala graduada. Son ejemplo de estos medidores: el manómetro de tubo de Bourdon, para presiones absolutas y relativas; el manómetro de membrana; el manómetro diferencial combinado de diafragma y resorte; el manómetro de émbolo, que es utilizado como calibrador de manómetros por su precisión; y el manómetro de émbolo y resorte.

Este tipo de manómetros carecen de interés en este curso de mecánica de fluidos, por lo tanto, sólo nos limitaremos a conocer su nombre: el estudio de su aplicación y su funcionamiento se deja para los cursos del laboratorio.

#### 3.5.2 Manómetros de líquido

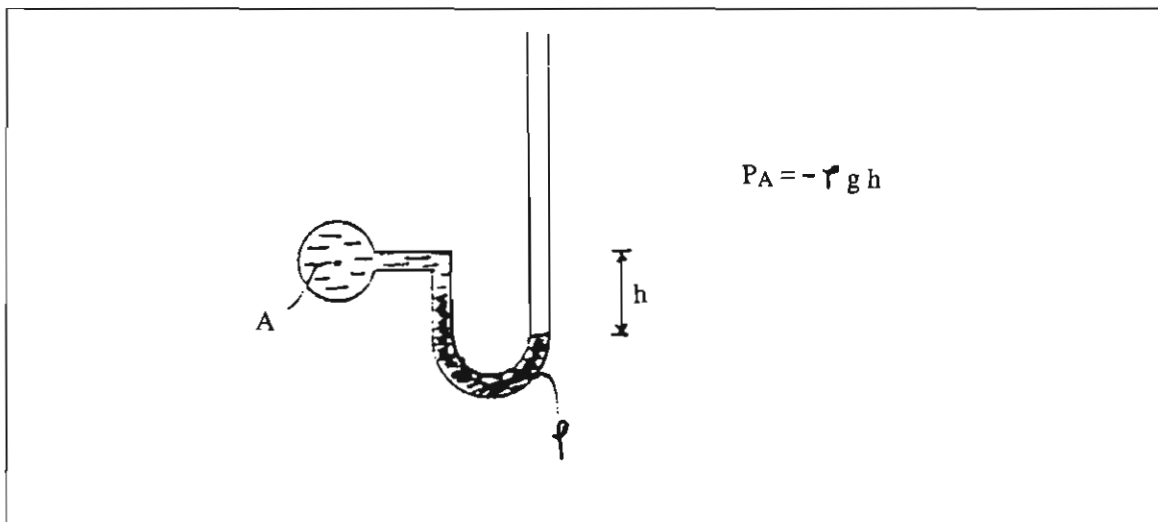
Este tipo de manómetros emplean columnas de líquido para determinar diferencias de presión.

El manómetro más elemental, llamado piezómetro (figura 3.4), mide la presión de un líquido cuando ella está arriba del cero manométrico. Es un tubo de vidrio conectado al espacio interior del recipiente. No se utiliza para presiones de vacío, porque entraría aire al recipiente. No es práctico para medir presiones grandes, ya que en esos casos el tubo debería ser muy largo.



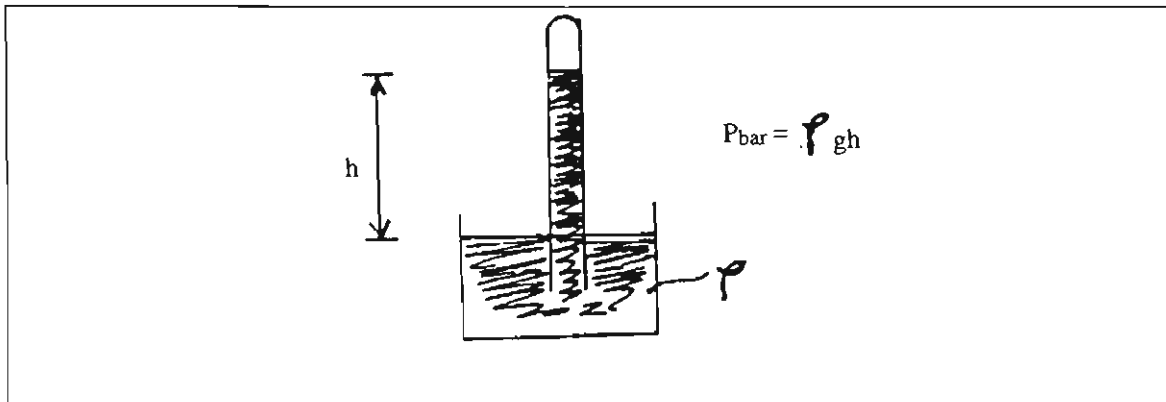
**Figura 3.4** Piezómetro, es el manómetro más elemental.

Es posible utilizarlo para presiones negativas, pero con la forma que se observa en la figura 3.5, ya que la presión en el menisco es el cero manométrico, y la presión decrece con la elevación.



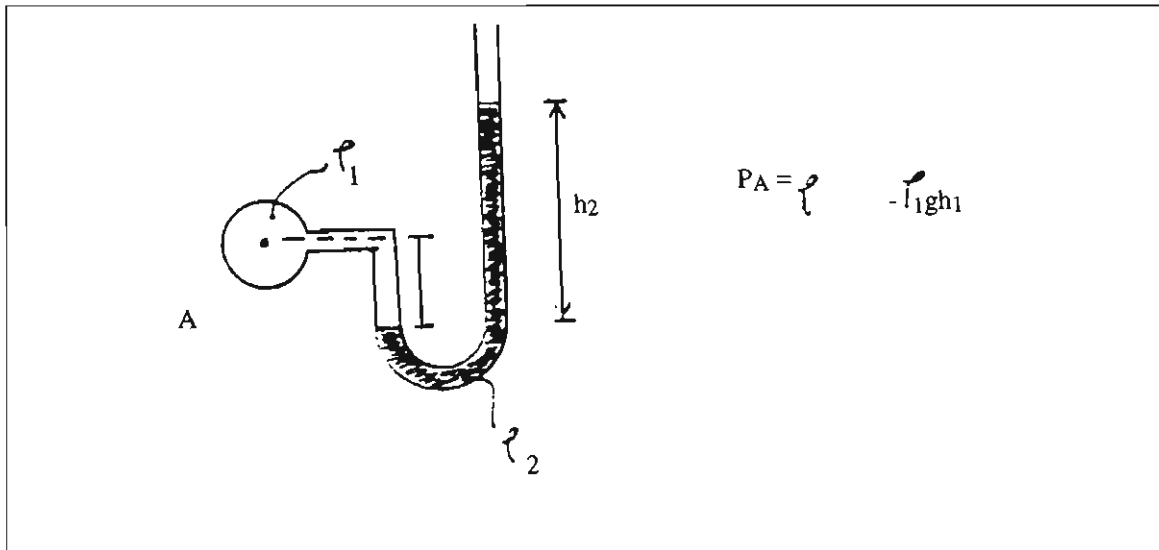
**Figura 3.5** Piezómetro utilizado en presiones de vacío.

Para la medición de la presión atmosférica o barométrica se utiliza el barómetro de mercurio. Es un tubo de vidrio cerrado en un extremo, lleno de mercurio e invertido, de manera que el extremo abierto quede sumergido en mercurio. Tiene una escala arreglada de tal manera que se puede leer la altura  $h$ .



**Figura 3.6** Barómetro de mercurio.

Para presiones manométricas negativas o positivas grandes, se emplea un segundo líquido de mayor densidad relativa (figura 3.7). Este líquido debe ser inmisible con el primer fluido, que puede ser un gas.



**Figura 3.7** Manómetro en U.

El manómetro diferencial (figura 3.8) determina la diferencia de presiones entre dos puntos A y B cuando la presión real en cualquier punto del sistema no se puede determinar.

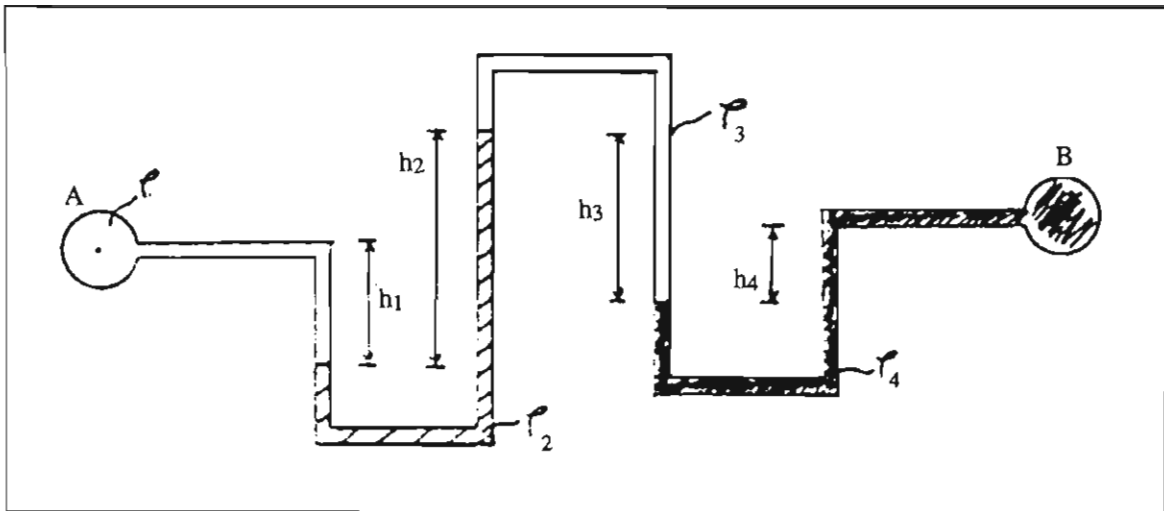


Figura 3.8 Manómetro diferencial.

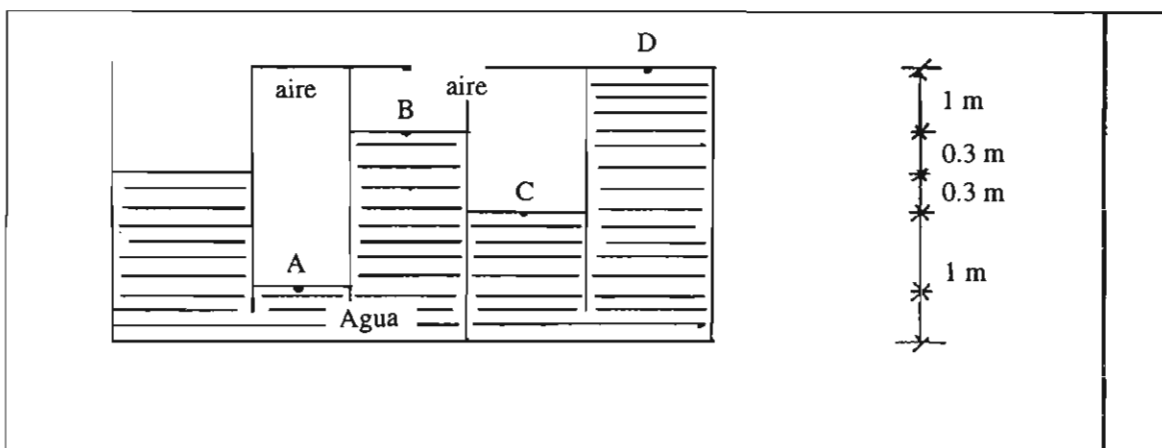
Cuando se trabaja con manómetros no es conveniente aprender alguna fórmula en particular, sino aplicar la ecuación general de la hidrostática para comprender su significado físico.

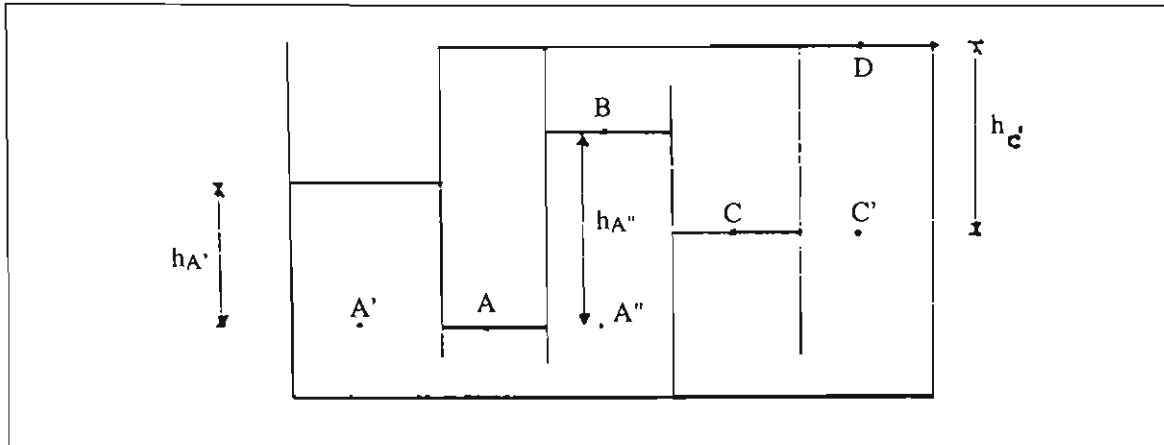
**Problema 3.2**

El recipiente de la figura contiene agua y aire como se muestra. ¿Cuál es la presión en *A*, *B*, *C* y *D* en Pascales?

Solución:

Primero determinaremos la presión en el punto *A*, para lo cual se emplea la ecuación fundamental de la hidrostática.





Del diagrama, la presión en A es igual a la que se tiene en A' y en A'', por ser el mismo fluido y estar en contacto, por lo tanto

$$P_A = P_{A'} = P_{A''}$$

$$P_A = \rho g h_{A'}$$

La presión en B es

La presión en C es igual a la presión de B puesto que el fluido que los tiene en contacto es aire y como su densidad es muy pequeña entonces se considera despreciable.

$$P_A = P_{A''}$$

$$P_A = \rho g h_{A'} + P_B$$

$$P_B = \rho g h_{A'} - \rho g h_{A''}$$

$$P_B = \rho g (h_{A'} - h_{A''})$$

La presión en D es

$$P_C = P_{C'}$$

$$P_C = \rho g h_{C'} + P_D$$

$$P_D = P_C - \rho g h_{C'}$$

$$P_D = \rho g (h_{A'} - h_{A''}) - \rho g h_{C'}$$

$$P_D = \rho g (h_{A'} - h_{A''} - h_{C'})$$



Sustituyendo valores

$$P_A = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 1.3 \text{ m} = 12740 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$P_B = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (1.3 - 1.6) \text{ m} = -2940 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

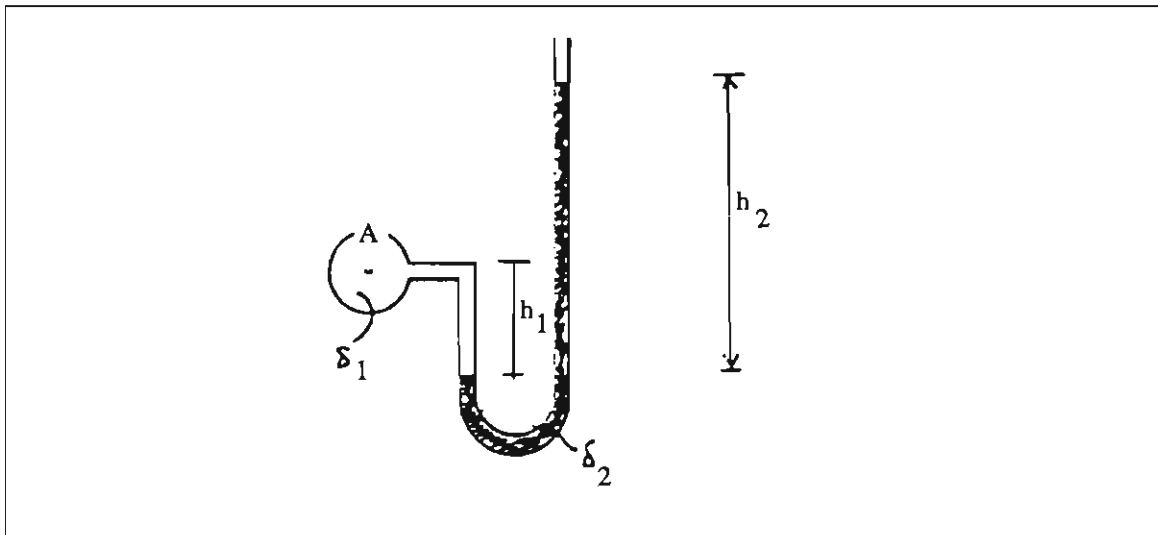
$$P_C = -2940 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$P_D = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (1.3 - 1.6 - 1.6) \text{ m} = -18620 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Las presiones en los puntos B, C y D son de vacío.

### Problema 3.3

En la figura  $\delta_1 = 0.86$ ,  $\delta_2 = 1.0$ ,  $h_1 = 90 \text{ mm}$ ,  $h_2 = 150 \text{ mm}$ . Encuéntrese  $P_A$  en  $\text{mm Hg}$ .



Solución:

La presión del punto A es

$$P_A = -\rho \delta_1 g h_1 + \rho \delta_2 g h_2$$

$$P_A = \rho g (-\delta_1 h_1 + \delta_2 h_2)$$

Como

$$P = \rho g h; \quad h = \frac{P}{\rho g}$$

entonces

$$h = \frac{(-\delta_1 h_1 + \delta_2 h_2)}{\delta_{Hg}}$$
$$h = \frac{(-0.86 \times 90 \text{ mm} + 1 \times 150 \text{ mm})}{13.6}$$
$$h = 5.3 \text{ mm}$$

Este es el valor de la presión en altura para el punto A.

#### Problema 3.4

Determinar la presión manométrica en el centro del tubo A en *psi* manométricas.

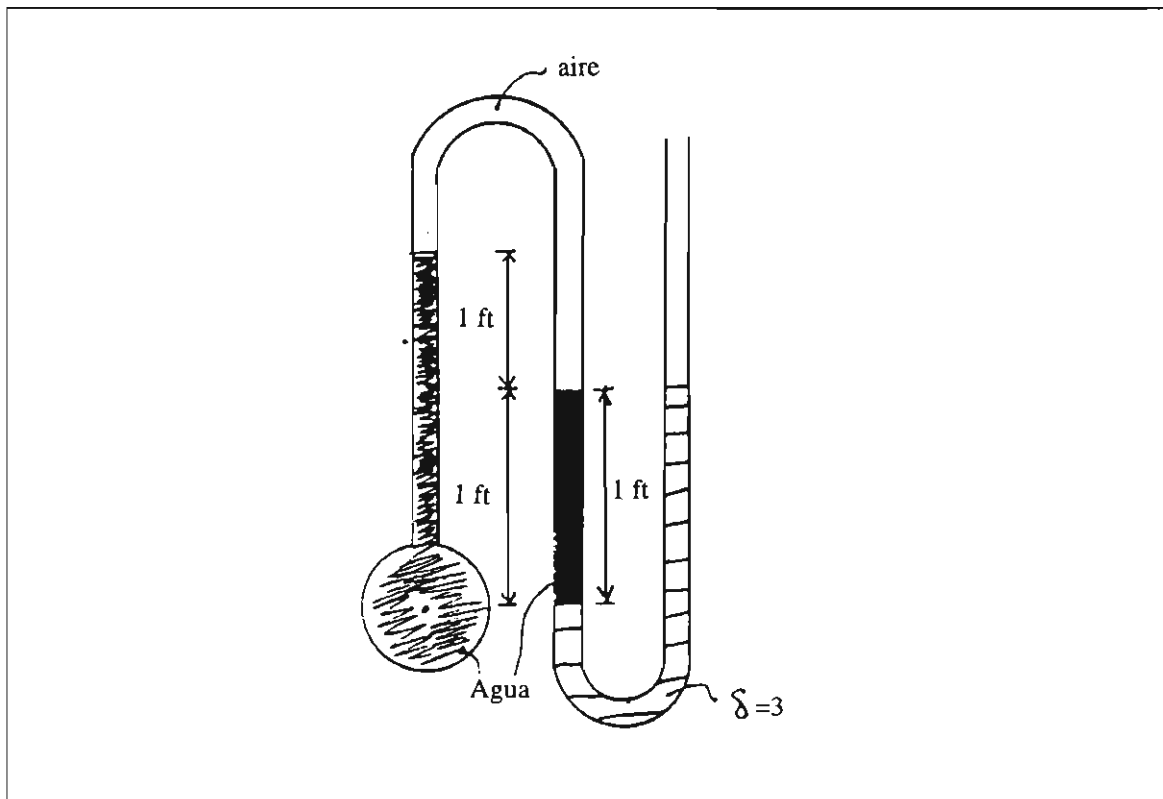
*Solución:*

La presión del punto A es

$$P_A = \rho_{Hg} g h_1 - \rho_{H_2O} g h_2 + \rho_{Hg} \delta g h_3$$
$$P_A = \rho_{Hg} g (h_1 - h_2 + \delta h_3)$$

sustituyendo los valores

$$P_A = 1.94 \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} \times 32.2 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} (2 - 1 + 3 \times 1 -) \text{ft}$$
$$P_A = 249.87 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^2} \times 1 \frac{\text{ft}^2}{(12)^2 \text{in}^2}$$
$$P_A = 1.73 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$$



### 3.6 Fuerzas hidrostáticas sobre superficies sumergidas

Conociendo la manera como varía la presión de un fluido estático, podemos ahora estudiar las fuerzas que se producen debido a la presión sobre superficies sumergidas en un líquido.

Para determinar completamente la fuerza que actúa sobre una superficie, se debe especificar:

- La magnitud de la fuerza
- La dirección de la fuerza
- La línea de acción de la fuerza resultante (centro de presión)

La magnitud de la fuerza resultante y su línea de acción se pueden determinar por tres métodos:

- Fórmula
- Integración
- Concepto de prisma de presión

#### 3.6.1 Fuerza hidrostática sobre superficies planas

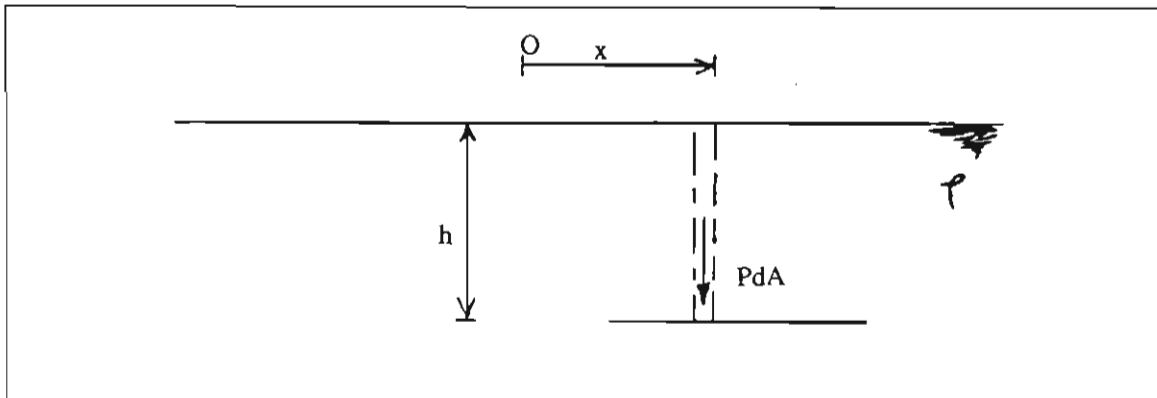
Existen tres casos de superficies planas sumergidas en un fluido, éstas son:

- Horizontal
- Vertical
- Inclinada

El caso más general es el de superficie inclinada, aquí analizaremos los tres.

### 3.6.1.1 Superficie Horizontal.

Una superficie plana horizontal en posición horizontal dentro de un fluido en reposo, como la que se muestra en la figura 3.9, está sujeta a una presión constante.



**Figura 3.9** Fuerzas en una superficie plana horizontal

La magnitud de la fuerza que actúa en un lado de la superficie, utilizando el método de integración, es

$$F = \int P dA = P \int dA = P A \quad [3.13]$$

Esta ecuación indica que las fuerzas elementales  $PdA$  que actúan sobre  $A$  son todas paralelas y tienen el mismo sentido; por lo tanto, la suma escalar de todos estos elementos representa la magnitud de la fuerza resultante. La dirección es normal a la superficie y apunta hacia ella si  $P$  es positiva.

A continuación se aplica el método del prisma.

Para el pequeño elemento diferencial de área de la figura 3.9, la fuerza resultante es  $dF = P dA$ , integrando esta expresión:

$$F = \int P dA$$

pero la presión  $P$  es igual a  $\rho g h$ , entonces

$$F = \int \rho g h dA$$

donde  $\rho g$  es constante y  $h dA$  es el diferencial de volumen que está por encima del elemento diferencial de área

$$F = \rho g \int dv$$

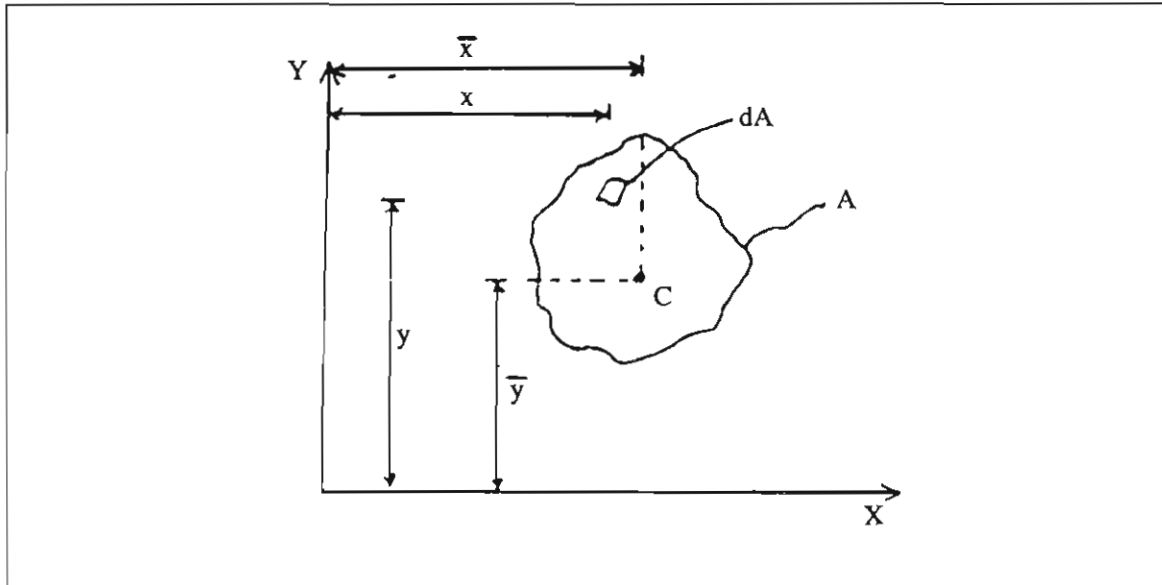
integrando se obtiene

$$F = \rho g v \quad [3.14]$$

donde el volumen  $v$  es la cantidad de fluido por encima de la superficie plana. Por lo tanto, la fuerza que actúa sobre dicha superficie es igual al peso específico de fluido multiplicado por el volumen del líquido que está por arriba de la misma.

Para encontrar la línea de acción de la resultante, es decir, el punto del área donde el momento de la fuerza distribuida respecto a cualquier eje a través del punto es cero, se pueden escoger los ejes  $x$  y  $y$  arbitrarios, como en la figura. 3.10.

Entonces el momento de la resultante debe ser igual al momento del sistema de fuerza distribuida en torno a cualquier eje, por ejemplo el eje  $y$ .



**Figura 3.10** Línea de acción de la fuerza resultante.

$$P A x' = \int x P dA \quad [3.15]$$

en el cual  $x'$  es la distancia del eje  $y$  a la resultante. Ya que  $P$  es constante,

$$x' = \frac{1}{A} \int_A x dA = \bar{x}$$

en la que  $\bar{x}$  es la distancia al centroide del área. Por lo tanto, *para un área horizontal sujeta a presión estática del fluido, la resultante pasa a través del centroide del área.*

Para el caso del método del prisma, se encuentra, de acuerdo con la figura 3.9, que la línea de acción de la resultante se determina al igualar los momentos de los componentes  $\rho g dv$  respecto al eje conveniente, con el momento de la fuerza resultante. Para el eje  $O$  (figura 3.9)

$$F x' = \rho g \int x dv$$

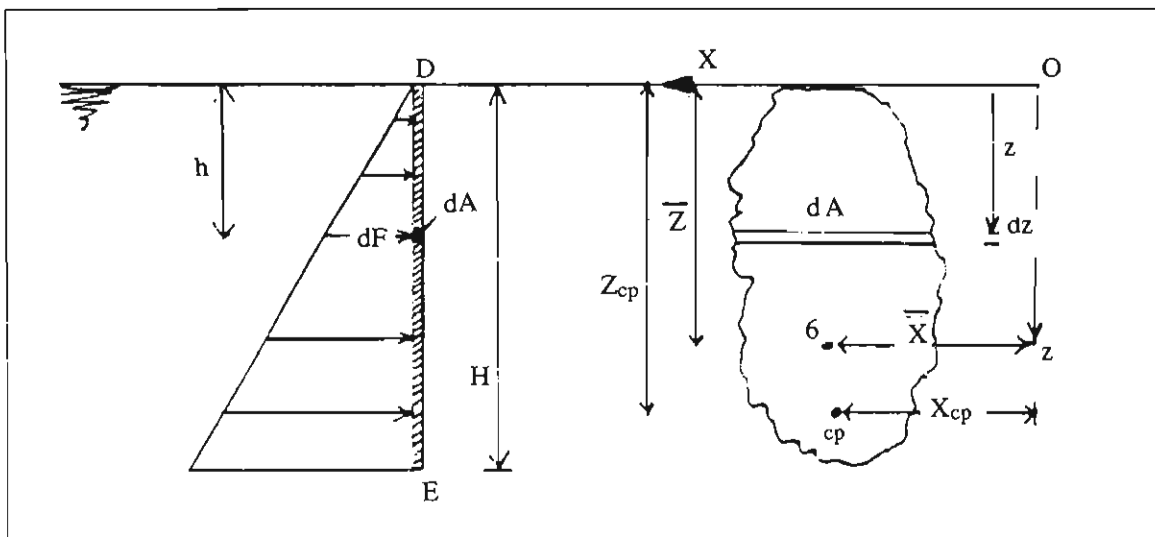
entonces, ya que  $F = \rho g v$ , se tiene

$$x' = \frac{1}{v} \int x dv = \bar{x} \quad [3.16]$$

donde  $\bar{x}$  es la distancia al centroide del volumen. Por lo tanto, *la línea de acción de la fuerza resultante para una superficie plana pasa a través del centroide del volumen que se extiende arriba de la superficie.*

### 3.6.1.2 Superficie vertical

Para el caso de una superficie vertical sumergida en un fluido en reposo, se tendrá una distribución de fuerzas que dependerá de la profundidad a la que se encuentre la superficie, como se observa en la figura 3.11.



**Figura 3.11** Fuerzas en una superficie vertical sumergida en un fluido en reposo.

La presión que actúa en el punto  $D$  es igual a cero, puesto que en ese lugar se encuentra la superficie libre del líquido. La presión máxima se tendrá en el punto  $E$ , ya que es el punto más profundo de la superficie, su valor es

$$P_E = \rho g h$$

Para un elemento de área  $dA$  como el indicado, la magnitud de la fuerza  $dF$  que actúa sobre él es

$$dF = P dA = \rho g z dA$$

Ya que todas estas fuerzas elementales son paralelas, la integral es

$$F = \int \rho z dA = \rho g \int z dA = \rho g \bar{z} A \quad [3.17]$$

donde  $\bar{z}$  es la distancia de la superficie libre del fluido al centroide de la placa, por lo tanto, la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la placa vertical es igual al peso específico del líquido por el área y por la profundidad del centroide de la misma.

La línea de acción de esta fuerza resultante se aplica en el punto llamado *centro de presión* que tiene como coordenadas  $(x_{cp}, z_{cp})$

Para encontrar el centro de presión, los momentos de la resultante  $x_{cp} F$ ,  $z_{cp} F$  se igualan al momento de las fuerzas distribuidas respecto a los ejes  $x$  y  $z$ , respectivamente, esto es

$$x_{cp} F = \int_A x P dA$$

$$z_{cp} F = \int_A z P dA$$

Resolviendo para el eje  $z$  se obtiene

$$z_{cp} = \frac{1}{F} \int z P dA$$

$$z_{cp} = \frac{1}{\rho g \bar{z} A} \int z \rho g z dA \quad [3.18]$$

$$z_{cp} = \frac{\rho g}{\rho g \bar{z} A} \int z^2 dA$$

$$z_{cp} = \frac{I_x}{\bar{z} A}$$

Utilizando el teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia

$$I_x = I_{cg} + \bar{z}^2 A$$

donde  $I_{cg}$  es el segundo momento de área en torno a su eje centroidal horizontal.

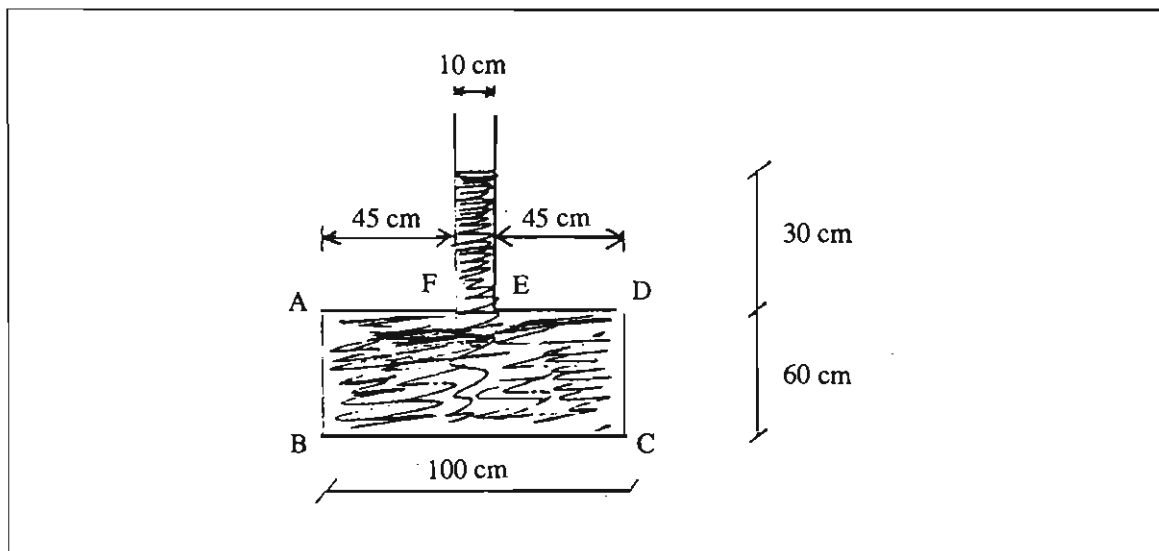
De esta forma se obtiene

$$z_{cp} = \bar{z} + \frac{I_{cg}}{\bar{z} A} \quad [3.19]$$

$l_{cg}$  siempre es positivo por lo tanto, el centro de presiones siempre estará abajo de la superficie una distancia igual a  $\frac{l_{cg}}{z}$ .

### Problema 3.5

El depósito de la figura mide 50 cm en dirección perpendicular al papel. Calcular: a) la fuerza y el centro de presiones en la pared del fondo BC y, b) la fuerza y el centro de presiones en la pared lateral AB. Despreciar la presión atmosférica.



Solución:

a) Para determinar la fuerza en la base del recipiente, BC, primero se determina la presión en esa superficie

$$P_{BC} = \rho g h$$

$$P_{BC} = 1000 \frac{kg}{m^3} \times 9.8 \frac{m}{s^2} \times 0.90 m$$

$$P_{BC} = 8820 \frac{N}{m^2}$$

La fuerza la obtenemos al multiplicar esta presión por el área de la superficie. Esta es la fuerza que actúa sobre el fondo del recipiente, en el centroide de la misma,

$$F_{BC} = P_{BC} A_{BC}$$

$$F_{BC} = 8820 \frac{N}{m^2} \times 1 m \times 0.5 m$$



$$F_{BC} = 4410 \text{ N}$$

es decir, en el centro de la placa.

b) Para determinar la fuerza que actúa en la pared vertical  $AB$ , se utiliza la ecuación obtenida para este caso, es decir:

$$F_{AB} = \rho g h_{cg} A_{AB}$$

$$F_{AB} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0.60 \text{ m} \times 0.5 \text{ m} \times 0.6 \text{ m}$$

$$F_{AB} = 1764 \text{ N}$$

El punto de aplicación de esta fuerza resultante se encuentra con

$$h_{cp} = h_{cg} + \frac{l_{cg}}{h_{cg} A}$$

Para una superficie rectangular el momento es

$$l_{cg} = \frac{b h^3}{12 b h}$$

$$h_{cp} = 0.6 \text{ m} + \frac{0.5 \text{ m} (0.6 \text{ m})^3}{12 \times 0.6 \text{ m} \times 0.5 \text{ m} \times 0.6 \text{ m}}$$

$$h_{cp} = 0.65 \text{ m}$$

Este resultado indica que el centro de presiones está ubicado a  $0.65 \text{ m}$  desde la superficie libre del fluido.

### 3.6.1.3 Superficie inclinada

La figura 3.12 muestra una superficie plana inclinada a un cierto ángulo  $\theta$  con respecto a la horizontal. Para un elemento de área  $dA$  la fuerza que actúa es:

$$dF = P dA = \gamma h dA = \gamma y \sin \theta dA \quad [3.20]$$

$$F = \gamma \bar{h} A$$

es decir, la fuerza resultante que actúa sobre la superficie plana inclinada es igual al producto del peso específico del fluido por la profundidad del centroide y por el área de la superficie.

La línea de acción de la fuerza resultante tiene su punto de incidencia en la superficie, en el punto llamado *centro de presión*. Al igual que para la superficie vertical es necesario igualar los momentos resultantes  $x_{cp} F$ ,  $Y_{cp} F$  al momento de las fuerzas distribuidas respecto al eje  $x$  y al eje  $y$ , respectivamente, así

$$x_{cp} F = \int_A x P dA$$

$$Y_{cp} P = \int_A Y P dA$$

obteniéndose para  $y$

$$y_{cp} = \frac{1}{\bar{y} A} \int_A y^2 dA = \frac{I_x}{\bar{y} A} \quad [3.21]$$

por el teorema de los ejes paralelos

$$I_x = I_{cx} + \bar{y}^2 A$$

con lo cual

$$y_{cp} = \bar{y} + \frac{I_{cx}}{\bar{y} A} \quad [3.22]$$

lo cual indica que el centro de presión siempre estará por debajo del centroide de la superficie.

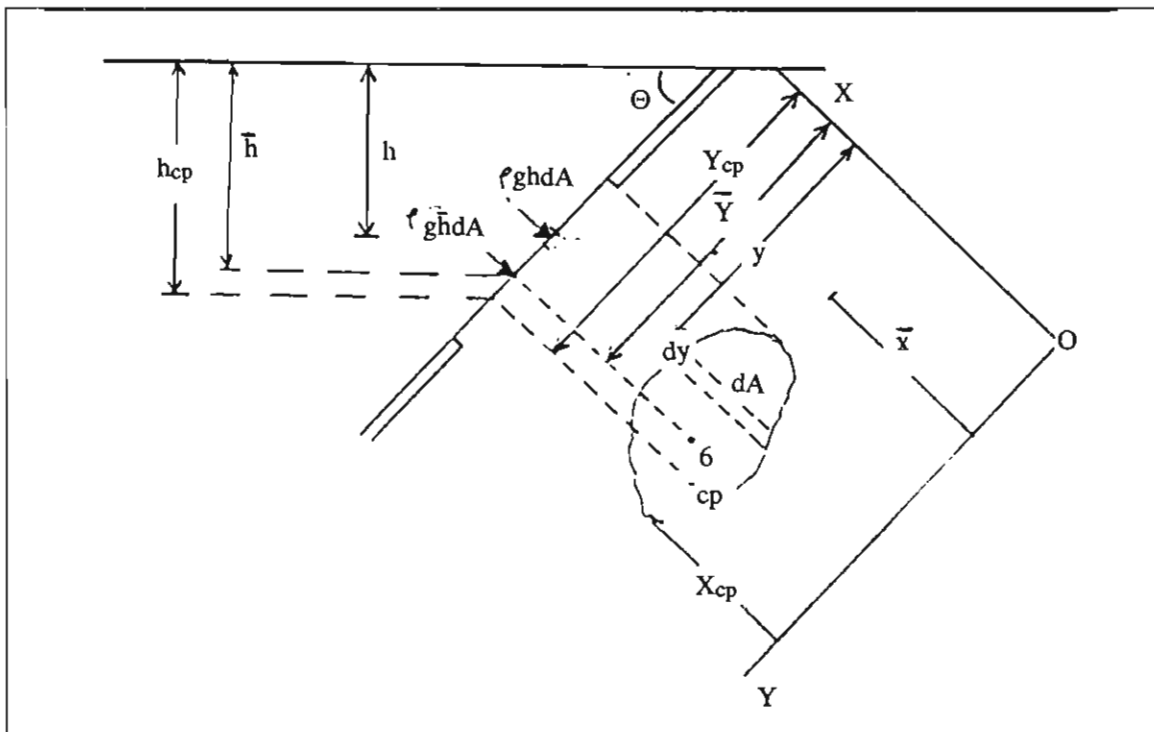
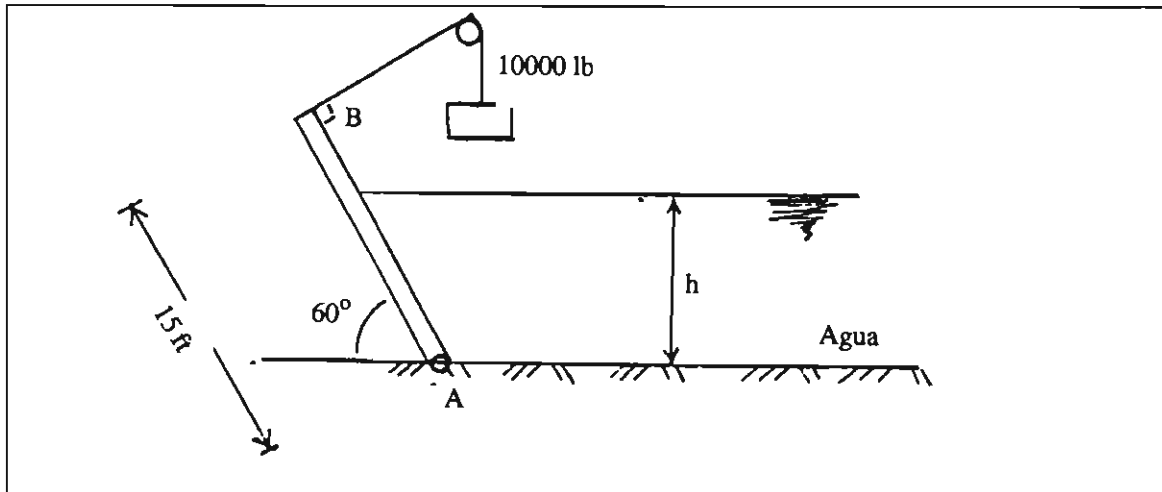


Figura 3.12 Fuerzas sobre una superficie plana inclinada.

**Problema 3.6**

La compuerta  $AB$  de la figura mide  $10\text{ ft}$  en dirección perpendicular al papel; está articulada en  $A$  y tiene un tope en  $B$ . Calcular el nivel  $h$  de agua necesario para que la compuerta comience a abrirse, suponiendo que su peso es despreciable.



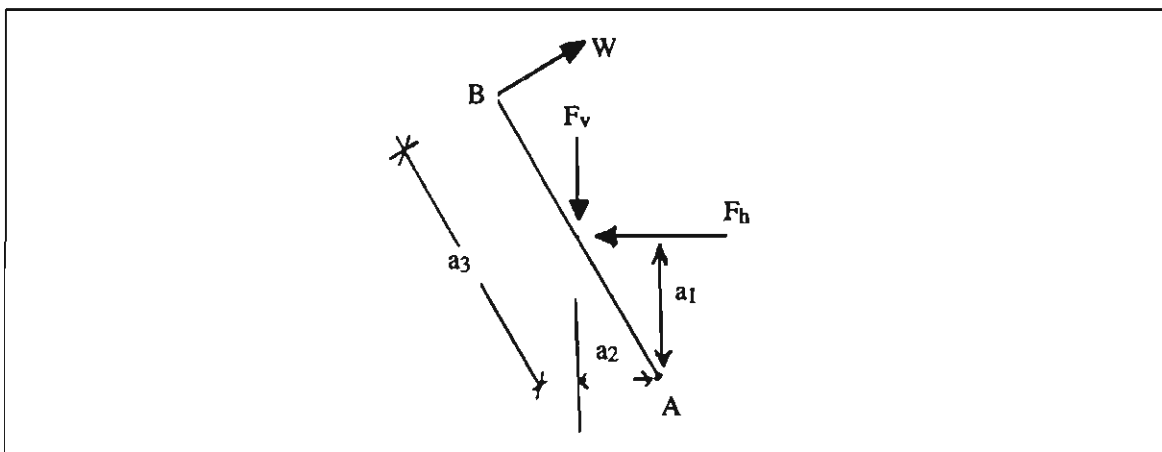
*Solución:*

Para determinar la altura del fluido que hace que la compuerta empiece a abrirse, se traza el diagrama de cuerpo libre con las fuerzas que actúan sobre la compuerta y las distancias que existen hasta el punto  $B$ .

La fuerza horizontal es

$$F_h = \rho g \frac{h}{2} h b = \frac{\rho g b h^2}{2}$$

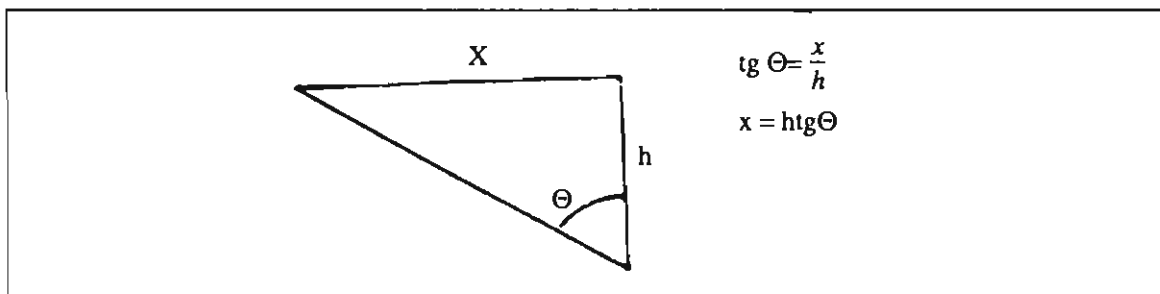
La altura del centro de presión es



$$h_{cp} = h_{cg} + \frac{I_{cx}}{h_{cg} A} = h_{cg} + \frac{b h^3}{12 h_{cg} b h} = \frac{h}{2} + \frac{1}{6} h$$

$$h_{cp} = \frac{2}{3} h$$

Entonces la distancia  $a$ , está a  $\frac{h}{3}$  desde el punto  $A$ .



La fuerza vertical es

La fuerza está aplicada a una distancia

$$a_2 = \frac{h \operatorname{tg} \theta}{3}$$

$$F_v = \rho g v$$

$$F_v = \rho g \frac{h}{2} h \operatorname{tg} \theta b$$

$$F_v = \rho g \frac{h^2}{2} b \operatorname{tg} \theta$$

Tomando momentos con respecto al punto  $A$  y considerando el equilibrio se obtiene

$$\sum M_A^{\pm} = 0 = F_h a_1 + F_v a_2 - W a_3 = 0$$

$$\frac{\rho g h^2 b}{2} x \frac{h}{3} + \frac{\rho g h^2 b \operatorname{tg} \theta}{2} x \frac{h \operatorname{tg} \theta}{3} - W a_3 = 0$$

$$\frac{\rho g h^3 b}{6} + \frac{\rho g h^3 b (\operatorname{tg} \theta)^2}{6} - W a_3 = 0$$

$$\frac{\rho g b h^3}{6} (1 + (\operatorname{tg} \theta)^2) - W a_3 = 0$$

$$\therefore h = \left[ \frac{6 x W a_3}{\rho g b (1 + (tg \theta)^2)} \right]^{\frac{1}{3}}$$

Sustituyendo los valores

Esta es la altura de agua que debe existir para que la compuerta empiece a abrirse.

$$h = \left[ \frac{6 x 10\,000 \text{ lb} x 15 \text{ ft}}{1.94 \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} x 32.2 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} x 10 \text{ ft} (1 + (tg 30^\circ)^2)} \right]^{\frac{1}{3}}$$

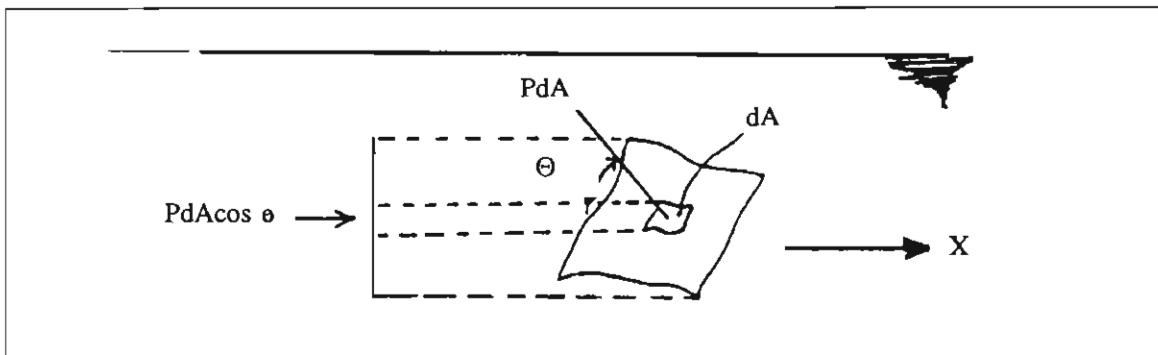
$$h = 10.26 \text{ ft}$$

### 3.6.2 Fuerzas hidrostáticas en superficies curvas.

Cuando las fuerzas elementales  $PdA$  varían en dirección, como en el caso de una superficie curva, deben sumarse como cantidades vectoriales; es decir, sus componentes en tres direcciones mutuamente perpendiculares se suman como escalares y luego las tres componentes se suman vectorialmente. Con dos componentes horizontales en ángulos rectos y con la componente vertical, todas fácilmente calculadas para una superficie curva, se puede determinar la resultante.

#### 3.6.2.1 Componente horizontal sobre una superficie curva.

La componente horizontal de la fuerza de presión sobre una superficie curva es igual a la fuerza de presión ejercida sobre una proyección de dicha superficie. El plano vertical de la proyección es normal a la dirección de la componente. La superficie de la figura 3.13 representa cualquier superficie tridimensional.



**Figura 3.13** Componente horizontal de la fuerza de presión sobre una superficie curva.

El diferencial  $dA$  es un elemento de su área, cuya normal forma un ángulo  $\theta$  con la dirección negativa  $x$ , entonces

$$dF_x = P dA \cos\theta$$

Sumando las componentes  $x$  de la fuerza sobre la superficie

$$F_x = \int_A P \cos \theta \, dA$$

en la cual  $\cos \theta \, dA$  es la proyección de  $dA$  sobre un plano perpendicular a  $x$ . Entonces, la fuerza que actúa sobre esta proyección es la componente horizontal de la fuerza ejercida sobre la superficie curva en la dirección normal al plano de proyección. El punto de aplicación de esta fuerza se obtiene con la ecuación 3.19

### 3.6.2.2 Componente vertical sobre una superficie curva

La componente vertical de la fuerza de presión sobre una superficie curva es igual al peso del líquido situado verticalmente por arriba de la misma y que se extiende hasta la superficie libre del fluido. Se determina sumando las componentes verticales de la fuerza de presión en áreas elementales  $dA$  de la superficie, como en la figura 3.14, donde se muestra la fuerza  $PdA$  actuando normal a la superficie,  $\theta$  es el ángulo que la normal del elemento de área hace con la vertical.

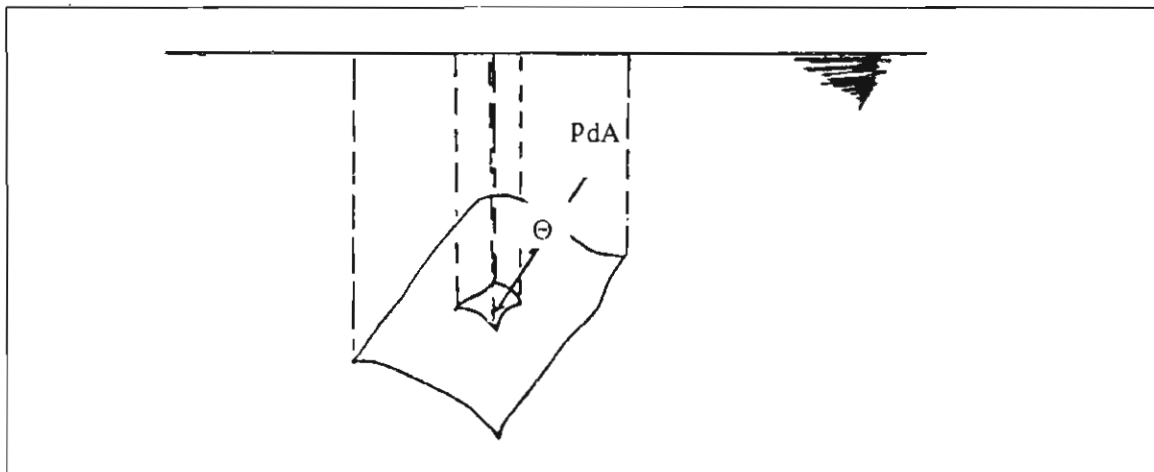


Figura 3.14 Fuerza vertical en una superficie curva.

Entonces la componente vertical es:

$$F_v = \int_A P \cos \theta \, dA$$

$$F_v = \int_A \rho g h \cos \theta \, dA \quad [3.23]$$

$$F_v = \rho g \int_v dv$$

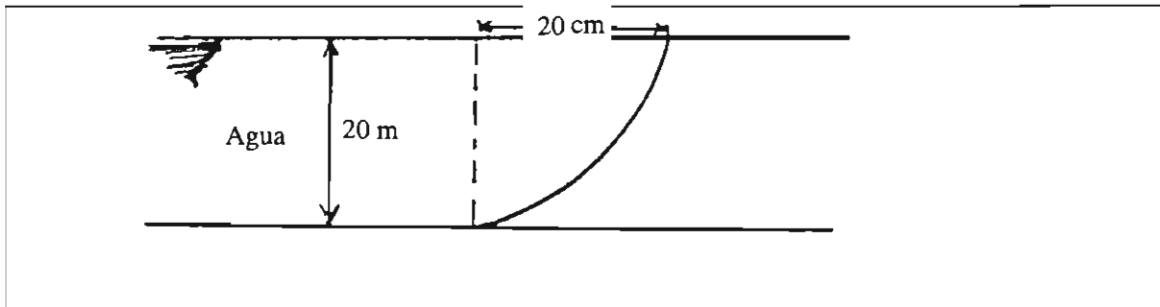
$$F_v = \rho g v$$

La línea de acción de la componente vertical, coincide con el centroide del volumen, esto es

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \int_v x \, dv$$

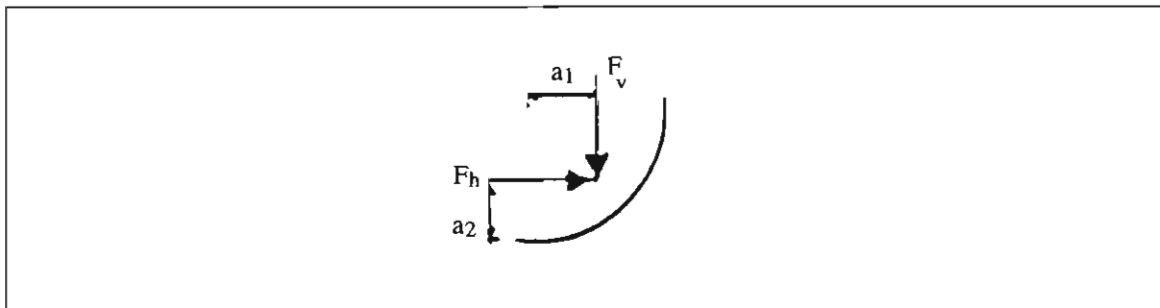
**Problema 3.7**

La presa de la figura tiene forma de cuarto de círculo y 50 m de anchura. Determinar las componentes vertical y horizontal de la fuerza hidrostática, la fuerza resultante y la línea de acción de esta fuerza.



Solución:

El diagrama de cuerpo libre de la compuerta es



La fuerza vertical es

La línea de acción de esta fuerza pasa por

$$F_v = \rho g v$$

$$F_v = \rho g \frac{\pi}{4} D^2 x \frac{1}{4} b$$

$$F_v = 1\,000 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \frac{\pi}{4} \frac{(40)^2 \text{m}^2}{4} \times 50 \text{ m}$$

$$F_v = 153\,938 \text{ kN}$$

$$a_1 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \times 20}{3\pi}$$

$$a_1 = 8.49 \text{ m}$$

La fuerza horizontal es

$$F_h = \rho g h_{cg} A$$

$$F_h = 1\,000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 10 \text{ m} \times 20 \text{ m} \times 50 \text{ m}$$

$$F_h = 98\,000 \text{ kN}$$

Se aplica en

$$a_2 = r - \left[ h_{cg} + \frac{I_{cg}}{h_{cg} A} \right]$$

$$a_2 = 20 - \left[ 10 + \frac{50 \times (20)^3}{12 \times 10 \times 50 \times 20} \right]$$

$$a_2 = 6.67 \text{ m}$$

La fuerza resultante tiene un valor de

$$F = \sqrt{F_v^2 + F_h^2}$$

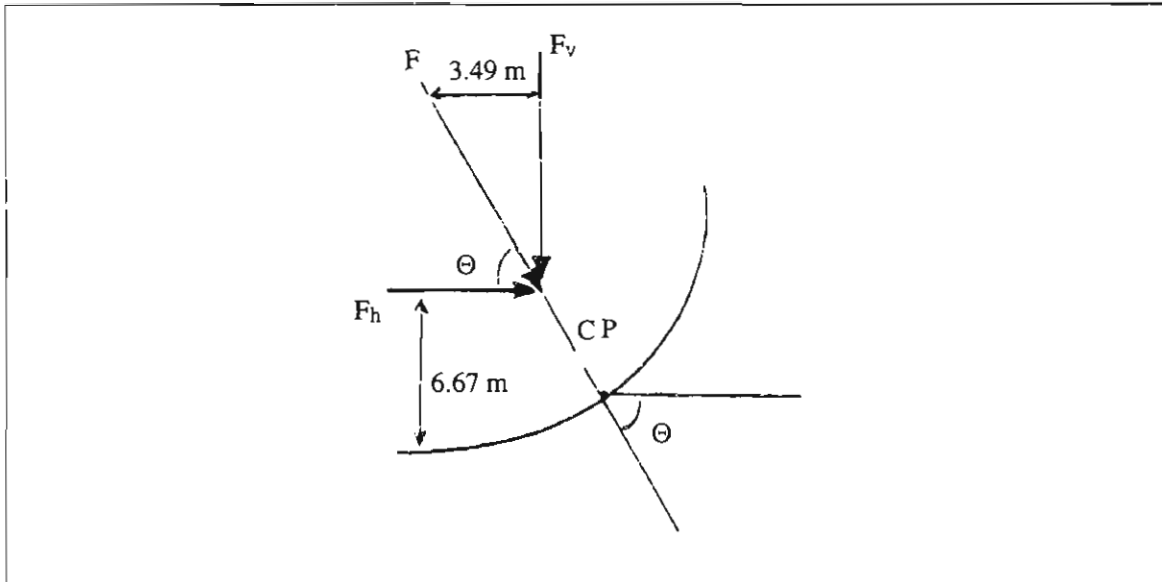
$$F = \sqrt{(153\,938)^2 + (98\,000)^2}$$

$$F = 1.8248 \times 10^5 \text{ kN}$$

El ángulo  $\theta$  es

La fuerza resultante pasa por el punto  $(x, z) = (8.49, 6.67)$  y tiene su línea de acción a un ángulo  $\theta$  igual a  $57.5^\circ$ .

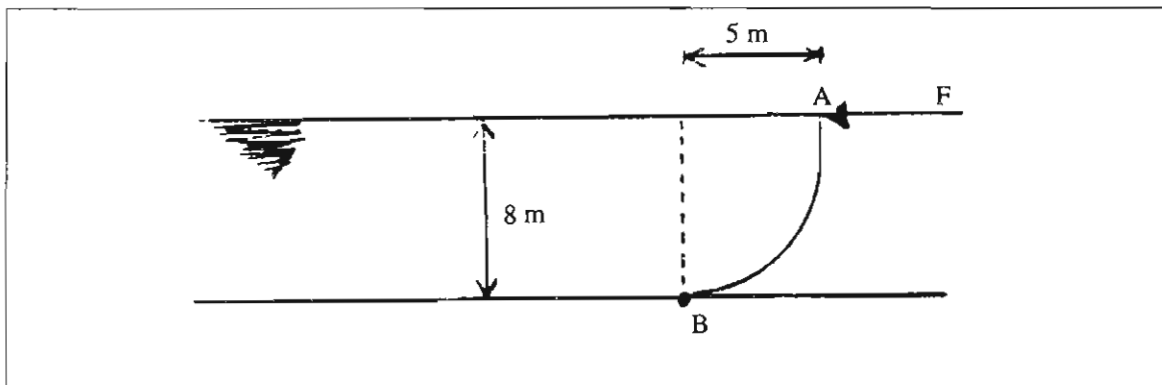




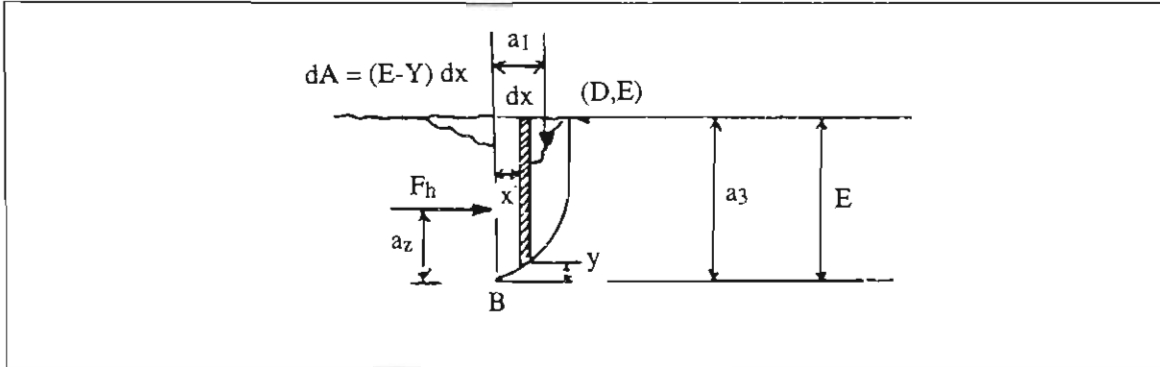
**Problema 3.8**

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{F_v}{F_h} \\ \theta &= \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{F_v}{F_h} \right] \\ \theta &= \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{153938400}{98000000} \right] \\ \theta &= 57.5^\circ \end{aligned}$$

La compuerta  $AB$  de la figura, de  $10 \text{ m}$  de anchura, tiene forma parabólica y está abisagrada en  $B$ . Calcular la fuerza  $F$  necesaria para mantenerla en equilibrio.



Solución:



Para determinar el valor de la fuerza  $F$ , que se necesita para mantenerla en equilibrio, del diagrama de cuerpo de la compuerta aplicamos la condición

$$\sum M_B^{\pm} = 0 = F a_3 - F_v a_1 - F_h a_2 \quad [*]$$

$$F = \frac{F_v a_1 + F_h a_2}{a_3}$$

La fuerza vertical se obtiene por

$$F_v = \int \rho g dv$$

$$dv = b dA ; dA = (E - y) dx$$

$$F_v = \int \rho g b (E - y) dx$$

La ecuación de la parábola es  
o bien

$$y = \frac{E}{D^2} x^2 \text{ con } \frac{E}{D^2} = \frac{8}{25}$$

$$y = k x^2$$

$$8 = k (5)^2$$

$$k = \frac{8}{25}$$

$$y = \frac{8}{25} x^2$$

Sustituyendo

$$F_v = \int_0^D \rho g b \left( E - \frac{E}{D^2} x^2 \right) dx$$

$$F_v = \rho g b \left[ E x - \frac{E}{D^2} \frac{x^3}{3} \right]_0^D$$

$$F_v = \rho g b \left[ E D - \frac{E}{D^2} \frac{D^3}{3} \right] = \rho g b \left[ \frac{2}{3} E D \right]$$

$$F_v = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \frac{2}{3} (8 \text{ m} \times 5 \text{ m})$$

$$F_v = 2613333 \text{ N}$$

El punto de aplicación de esta fuerza, esta definido por

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \int_v x dv; \quad v = b dA$$

en donde  $\bar{x} = a_1$ , por lo tanto  $a_1 = \frac{1}{v} \int x b dA$

$$v = A b = \frac{2}{3} E D b$$

$$a_1 = \frac{1 b}{\frac{2}{3} E D b} \int_0^D x (E - y) dx$$

$$a_1 = \frac{3}{2 E D} \int_0^D \left[ x E - \frac{E}{D^2} x^3 \right] dx$$

$$a_1 = \frac{3}{2 E D} \left[ \frac{x^2 E}{2} - \frac{E}{D^2} \frac{x^4}{4} \right]_0^D$$

$$a_1 = \frac{3}{2 E D} \left[ \frac{D^2 E}{2} - \frac{E}{D^2} \frac{D^4}{4} \right]$$

La fuerza horizontal está dada por  
y es aplicada en

$$a_1 = \frac{3}{2ED} \left[ \frac{D^2 E}{4} \right]$$

$$a_1 = \frac{3D}{8}$$

$$a_1 = \frac{3}{8} \times 5 = 1.875 \text{ m}$$

$$F_b = \rho g h_{cg} A$$

$$F_b = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 4 \text{ m} \times 8 \times 10 \text{ m}^2$$

$$F_b = 3161000 \text{ N}$$

$$a_2 = \frac{8}{3} = 2.67 \text{ m}$$

Sustituyendo valores en la ecuación (\*)

$$F = \frac{2613333 \times 1.875 + 3136000 \times 2.67}{8}$$

$$F = 1588827 \text{ N}$$

Este es el valor que se necesita para mantener la compuerta en equilibrio.

### 3.7 Fuerza de flotación

Considérese un cuerpo sumergido en un fluido como el de la figura 3.15.

En este caso no existe componente horizontal de la fuerza resultante, ya que, para que el cuerpo esté en equilibrio no debe actuar alguna fuerza, y efectivamente las componentes horizontales se eliminan por tener sentidos contrarios.

Por esto la única fuerza resultante ejercida por un fluido estático sobre un cuerpo se le llama fuerza de flotación, la cual siempre actúa verticalmente y hacia arriba. La fuerza de flotación sobre un cuerpo sumergido es la diferencia entre las componentes verticales de la fuerza de presión en su lado superior e inferior. El diferencial de fuerza se determina por:

$$dF_v = (P_2 - P_1) dA = \rho g (h_2 - h_1) dA$$

$$dF_v = \rho g h dA$$

Integrando

$$F_v = \rho g v \quad [3.24]$$

Por lo tanto, la fuerza de flotación es igual al peso específico del fluido multiplicado por el volumen de fluido desplazado por el cuerpo.

La línea de acción de la fuerza de flotación actúa sobre el centroide del volumen desplazado y se conoce con el nombre de centro de flotación.

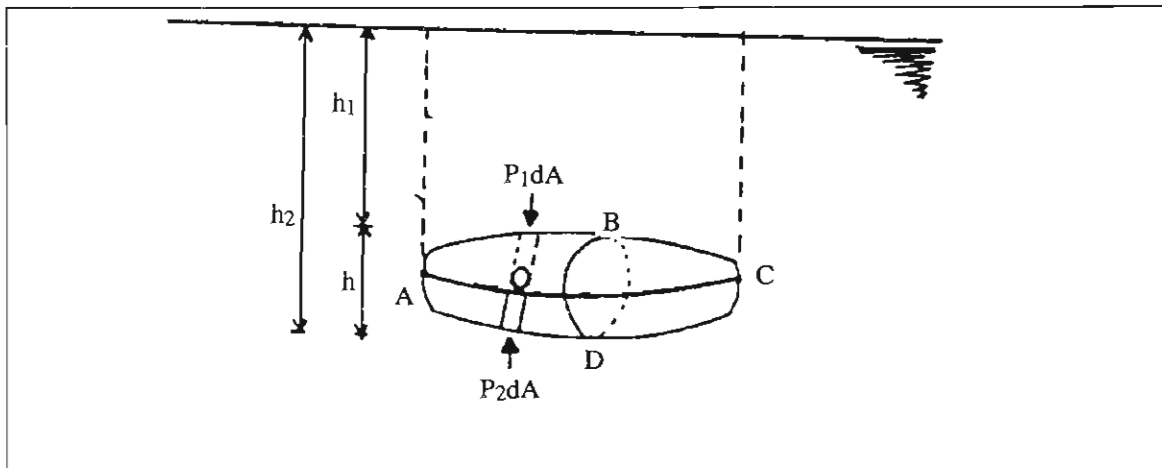
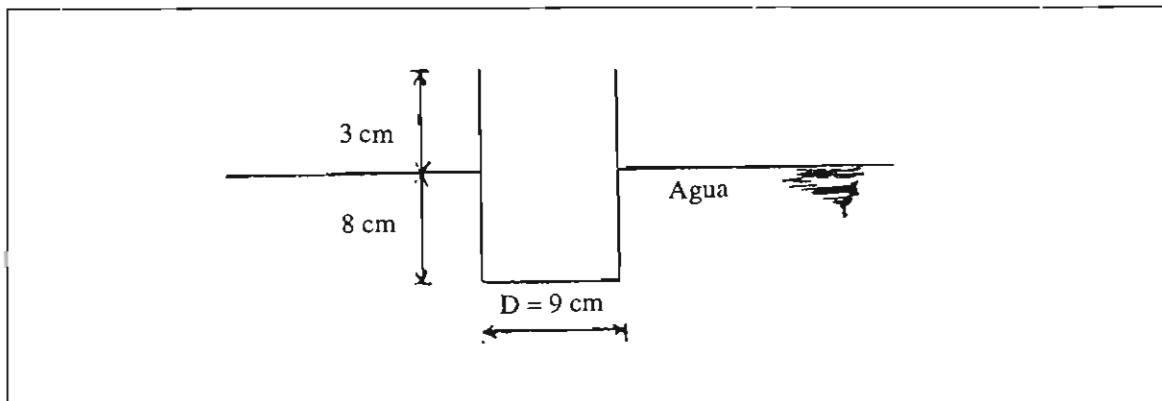


Figura. 3.15 Fuerza de flotación en un cuerpo sumergido.

### Problema 3.9

El bote de la figura flota en la posición indicada ¿Cuál es su peso?



Solución:

El peso del bote es igual a la fuerza de flotación que el fluido ejerce sobre el mismo.

Por lo tanto

$$F_v = w = \gamma v$$

El volumen del fluido desplazado es:  
y el peso

El bote tiene un peso de 4.9 N.

$$v = A L = \frac{\pi D^2}{4} L$$

$$v = \frac{\pi \times (0.09)^2}{4} \times 0.08 \text{ m}$$

$$v = 0.0005 \text{ m}^3$$

$$W = 9800 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times 0.0005 \text{ m}^3$$

$$W = 4.9 \text{ N}$$

### 3.8 Distribución de presiones en movimiento como sólido rígido.

Cuando un fluido es acelerado de manera que ninguna capa se mueva en relación a una adyacente, es decir, cuando el fluido se mueve como si fuera un sólido rígido, no ocurren esfuerzos cortantes y la variación de la presión se puede determinar escribiendo la ecuación de movimiento para un cuerpo libre apropiado. Hay dos casos de interés, la aceleración lineal uniforme y la rotación uniforme alrededor de un eje vertical. Cuando se mueve así, se dice que el fluido está en equilibrio relativo.

#### 3.8.1 Aceleración lineal uniforme

A un líquido en un recipiente abierto se le da una aceleración uniforme  $a$  como en la figura. 3.16. Después de un tiempo, el líquido se mueve como un sólido, es decir, la distancia entre dos partículas cualesquiera permanece fija y por lo tanto no ocurren esfuerzos cortantes.

De la ecuación 3.3, pero ahora tomando en cuenta la aceleración, se tiene

$$\vec{f} = -\hat{k} \rho g = -\nabla P - \hat{k} \gamma = \rho \vec{a}$$

de la cual se puede obtener

$$\nabla P = \hat{i} \frac{\partial P}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial P}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial P}{\partial z} = -\hat{k} \gamma - \gamma (\hat{i} a_x + \hat{k} a_z)$$

o bien

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\gamma}{g} a_x; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\gamma \left[ 1 + \frac{a_z}{g} \right]$$

Puesto que  $P$  es una función de la posición  $(x, y, z)$ , su diferencial total es

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

Sustituyendo los valores anteriores

$$dP = -\gamma \frac{a_x}{g} dx - \gamma \left[ 1 + \frac{a_z}{g} \right] dz$$

Para un fluido incompresible se puede integrar, obteniendo

$$P = -\gamma \frac{a_x}{g} x - \gamma \left( 1 + \frac{a_z}{g} \right) z + c$$

donde la constante de integración se evalúa cuando  $x = 0, z = 0, P = P_o$  dando que  $c = P_o$ .

$$P = P_o - \gamma \frac{a_x}{g} x - \gamma \left( 1 + \frac{a_z}{g} \right) z \quad [3.25]$$

La ecuación de la línea que se forma es

$$z = -\frac{a_x}{a_z + g} x + \frac{P_o - P}{\left[ 1 + \frac{a_z}{g} \right]} \quad [3.26]$$

Las líneas de presión constante  $P = cte$ , tienen la pendiente

$$-\frac{a_x}{a_z + g}$$

y son paralelas a la superficie libre. La intercepción en  $z$  de la superficie libre es

$$\frac{P_o}{\left[ 1 + \frac{a_z}{g} \right]}$$

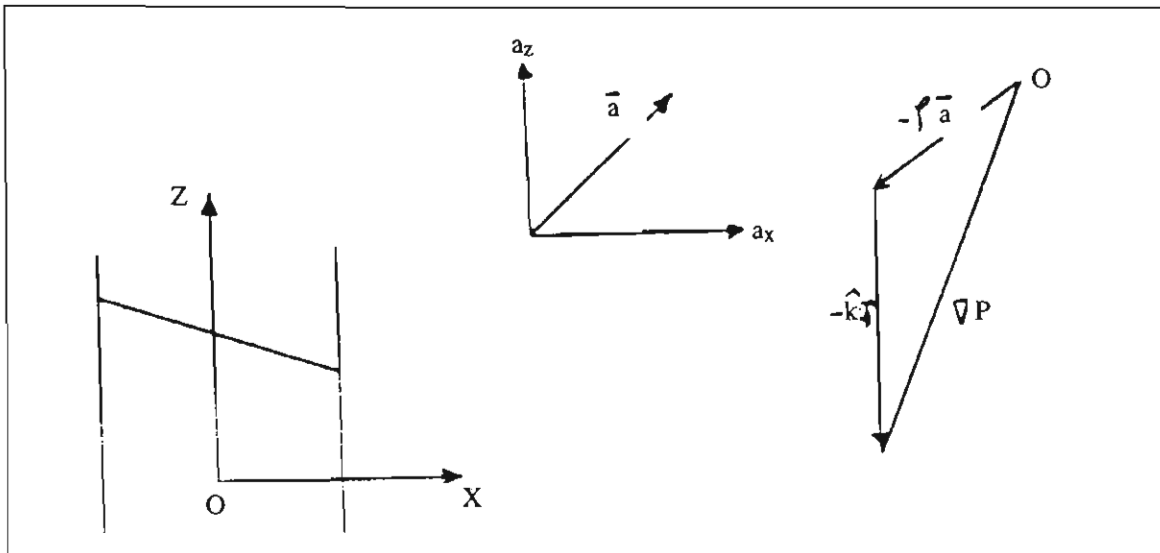
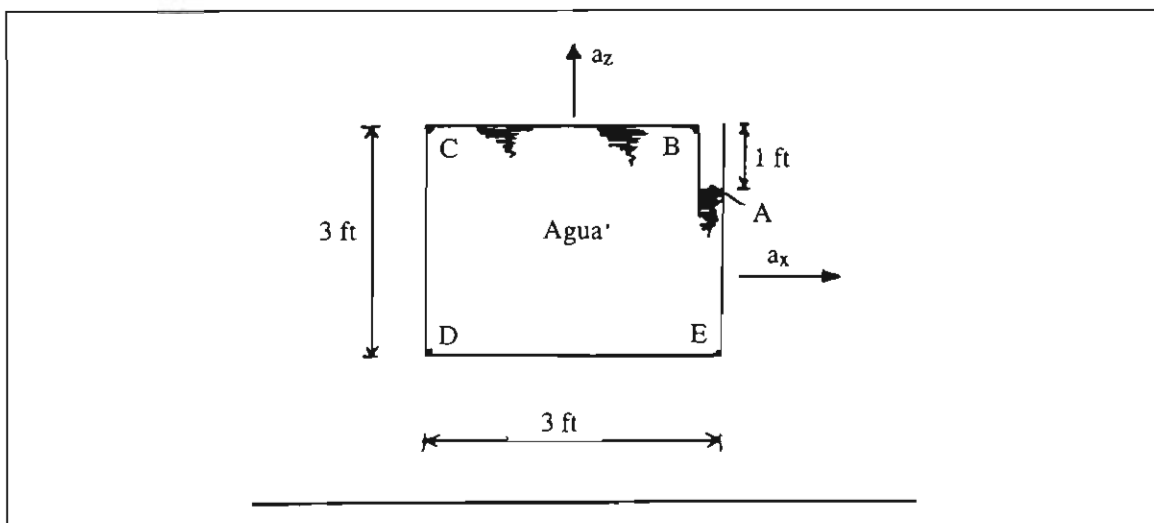


Figura. 3.16 Aceleración lineal uniforme.

**Problema 3.10**

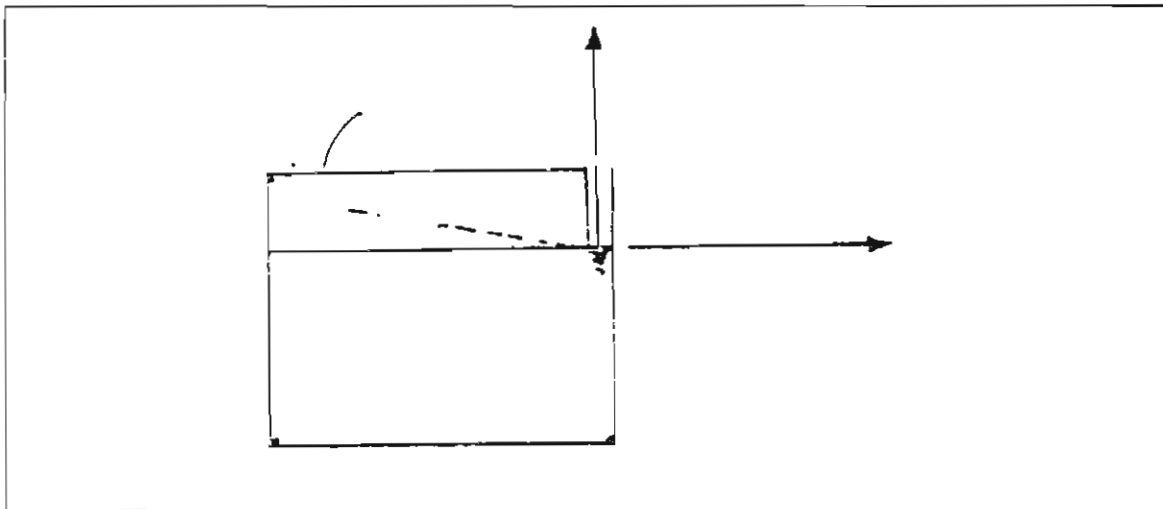
En la figura  $a_z = 8.05 \frac{ft}{s^2}$ ,  $a_x = 16.1 \frac{ft}{s^2}$ . Encuentre la superficie libre imaginaria y la presión en B, C, D y E.



Solución:

Para resolver este problema, es necesario conocer el punto que no cambia su presión, cuando está fijo y cuando es acelerado. Observando la figura, el punto que nunca cambia su presión es el punto A, el cual está abierto a la atmósfera, por lo tanto ahí estará el sistema de coordenadas.





La superficie libre imaginaria tiene una pendiente igual a

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{a_x}{a_z + g}$$

y pasa por el punto A.

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{8.05}{16.1 + 32.2} = -0.166$$

$$\theta = 9.46^\circ$$

Para conocer la presión en los puntos aplicamos la ecuación

$$P = P_o - \gamma \frac{a_x}{g} x - \gamma \left( 1 + \frac{a_z}{g} \right) z \quad [3.25]$$

Las coordenadas de los puntos son : B (0,1), C(-3,1), D (-3,-2), E (0,-2).

La presión  $P_o$  es la atmosférica, por lo tanto

$$P_B = -62.4 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} x \frac{8.05 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}}{32.2 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}} (0 \text{ ft}) - 62.4 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} \left( 1 + \frac{16.1}{32.2} \right) (1 \text{ ft})$$

$$P_B = -15.6 (0) - 93.6 (1)$$

$$P_B = -93.6 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^2}$$

La presión es de vacío, ya que se encuentra por encima de la superficie libre imaginaria.

Esta presión también es de vacío, el punto *C* se encuentra también por encima de la superficie libre imaginaria.

$$P_C = -15.6 (-3) - 93.6 \quad (1)$$

$$P_C = -46.8 \frac{lb}{ft^2}$$

$$P_D = -15.6 (-3) - 93.6 (-2)$$

$$P_D = 234.0 \frac{lb}{ft^2}$$

$$P_E = -15.6 (0) - 93.6 (-2)$$

$$P_E = 187.2 \frac{lb}{ft^2}$$

### 3.8.2 Aceleración angular uniforme respecto a un eje vertical

La rotación de un fluido que se mueve como un sólido respecto a un eje se denomina de vórtice forzado. Cada partícula del fluido tiene la misma velocidad angular. Cuando un líquido en un recipiente es rotado en torno a un eje vertical a velocidad angular constante, se mueve como un sólido después de cierto intervalo de tiempo. No existen esfuerzos cortantes en el líquido, y la única aceleración que ocurre se dirige radialmente hacia el eje de rotación, (figura 3.17).

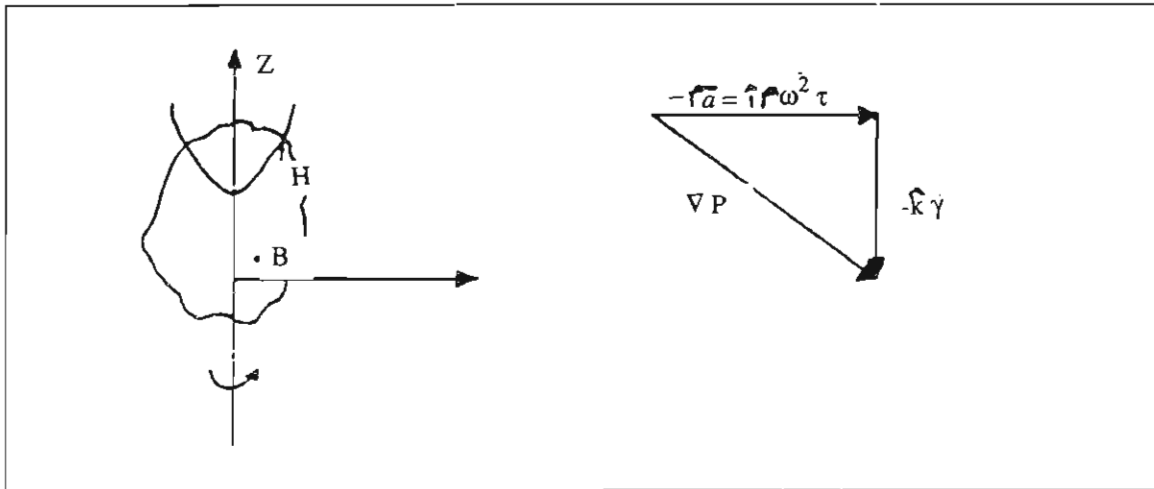


Figura. 3.17 Aceleración angular uniforme

De la ecuación 3.3

$$\nabla P = -\hat{k}y - \rho \vec{a}$$

Para una velocidad angular constante  $\omega$ , cualquier partícula del fluido  $B$  tiene una aceleración  $\omega^2 r$  dirigida radialmente hacia adentro, ya que  $\vec{a} = -\hat{i} \omega^2 r$ . La suma vectorial de  $-\hat{k}y - \rho \vec{a}$  genera  $\nabla P$ , el gradiente de presión. Esto es

$$\hat{i} \frac{\partial P}{\partial r} + \hat{j} \frac{\partial P}{\partial y} + \hat{k}y + \hat{i} \rho \omega^2 r$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\rho}{g} \omega^2 r; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho y$$

Ya que  $P$  es una función de  $z$  y  $r$  solamente, la diferencial total es

$$dP = \frac{\partial P}{\partial z} dz + \frac{\partial P}{\partial r} dr$$

sustituyendo

$$dP = -\rho y dz + \frac{\rho}{g} \omega^2 r dr$$

Para un líquido, se obtiene

$$P = \frac{\rho}{g} \omega^2 \frac{r^2}{2} - \rho y z + c$$

donde la constante de integración  $c$  es igual a  $P_0$  si  $r = 0$  y  $z = 0$ , entonces

$$P = P_0 + \frac{\rho \omega^2 r^2}{2g} - \rho y z \quad [3.27]$$

Cuando el plano horizontal para el cual se selecciona  $P = 0$  es  $z = 0$ , y además la ecuación 3.27 se divide entre  $y$ , se tiene

$$h = \frac{P}{\rho y} = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \quad [3.28]$$

que indica que la profundidad vertical varía con el cuadrado del radio. Las superficies de igual presión son paraboloides de revolución.

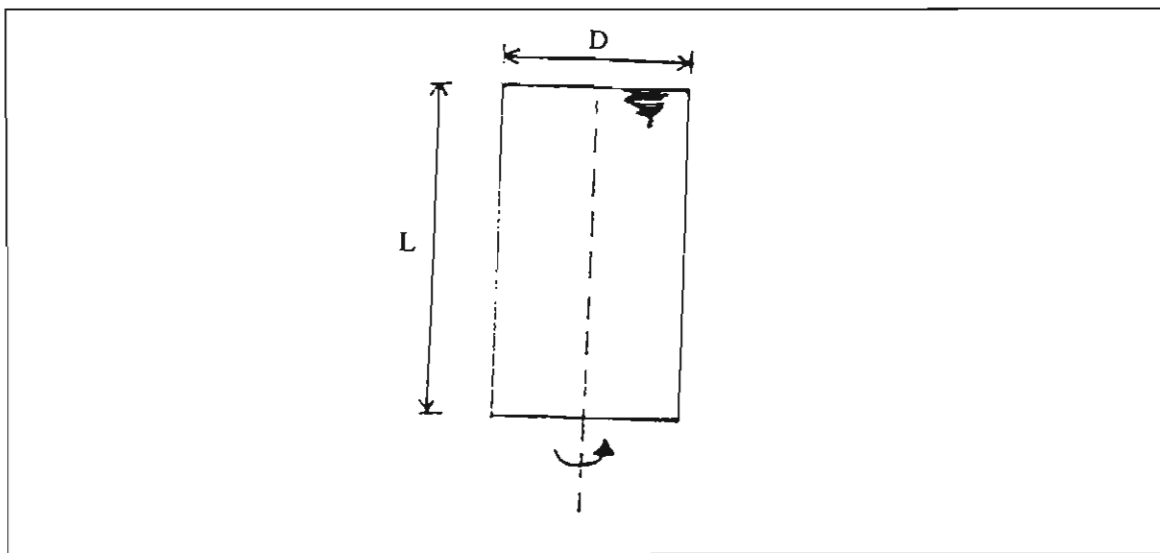
Para un cilindro circular que rota en torno a su eje, la elevación del líquido de su cima a la pared del cilindro se describe mediante la ecuación 3.28. Ya que un paraboloide de revolución tiene un volumen

igual a la mitad de su cilindro que la circunscribe, el volumen del líquido arriba del plano horizontal es igual a

$$v = \frac{\pi \omega^2 r^3}{4g}$$

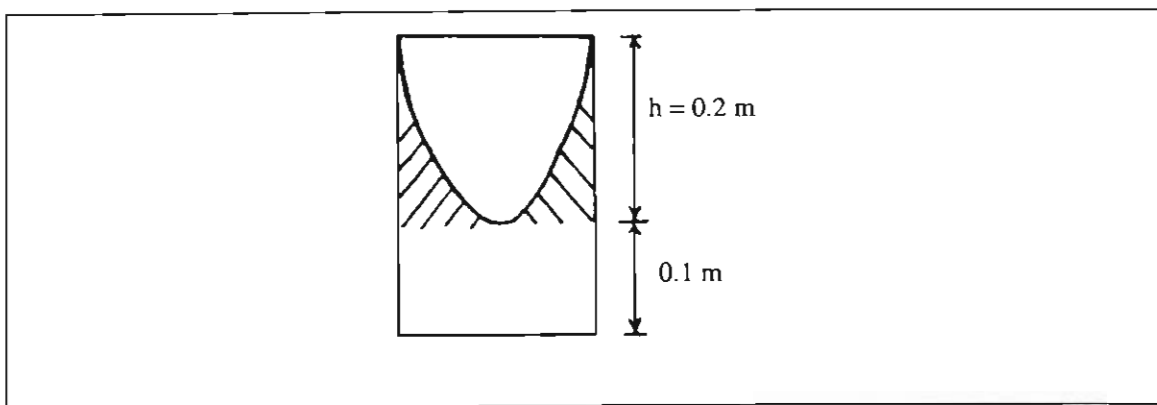
**Problema 3.11**

Un cilindro de 15 cm de diámetro y 30 cm de altura está lleno de agua. Si se le gira alrededor de su eje central en movimiento como sólido rígido ¿cuál debe ser la velocidad angular para que se derrame la tercera parte del agua?



Solución:

Cuando el cilindro se encuentra girando a tal velocidad angular que se ha derramado la tercera parte del fluido, presenta la siguiente configuración:



Si el volumen de líquido que tiene el paraboloides de revolución es igual a un tercio del volumen inicial, y el volumen contenido en la parte baja del recipiente también es de un tercio, entonces el volumen de fluido que se ha derramado es igual al tercio faltante. Puesto que el volumen de un paraboloides de revolución es igual a la mitad del volumen del cilindro que lo contiene, entonces

$$h = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

$$\omega = \left[ \frac{2gh}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

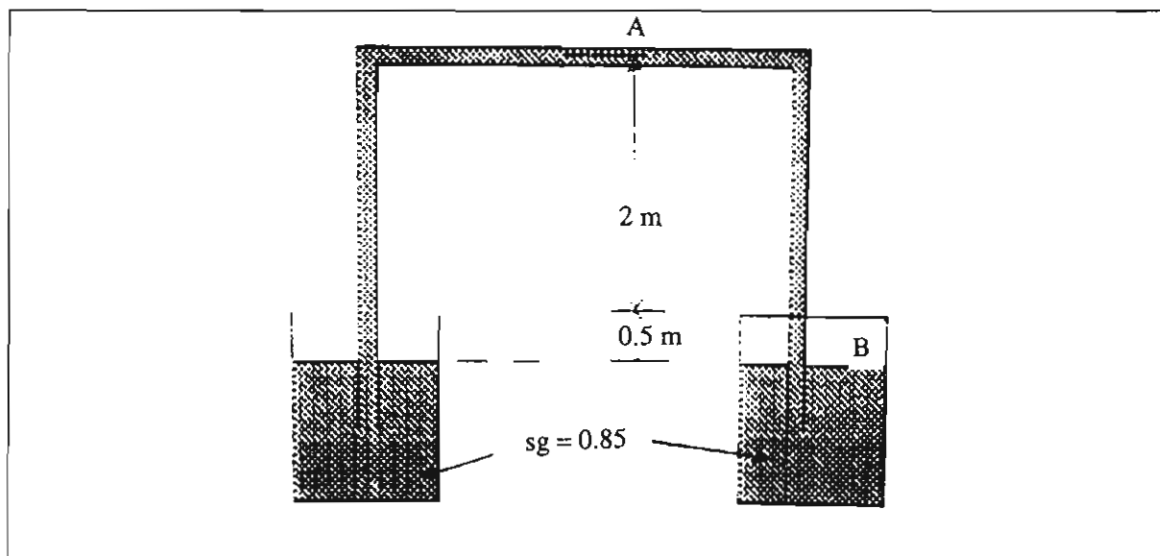
$$\omega = \left[ \frac{2 \times 9.8 \frac{m}{s^2} \times 0.2 m}{(0.075)^2 m^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega = 26.4 \frac{1}{s}$$

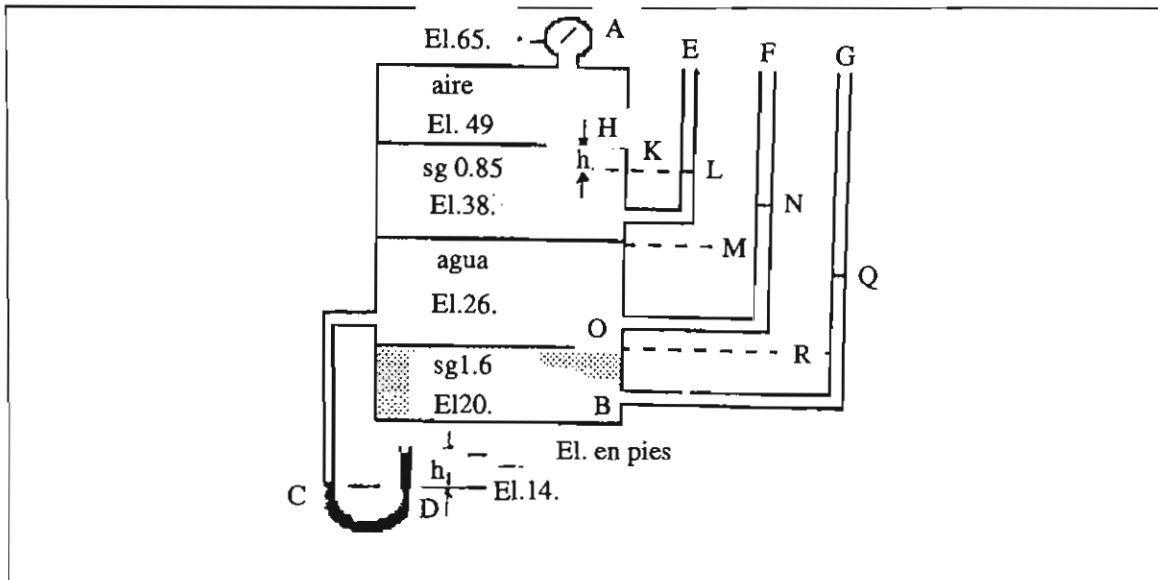
### Problemas propuestos

3.1 La presión absoluta de un gas es de 42.5 psia y la presión atmosférica es de 840 mbar. Hallar la presión manométrica en: a) libras por pulgada cuadrada; b) kilopascales y c) milibares.

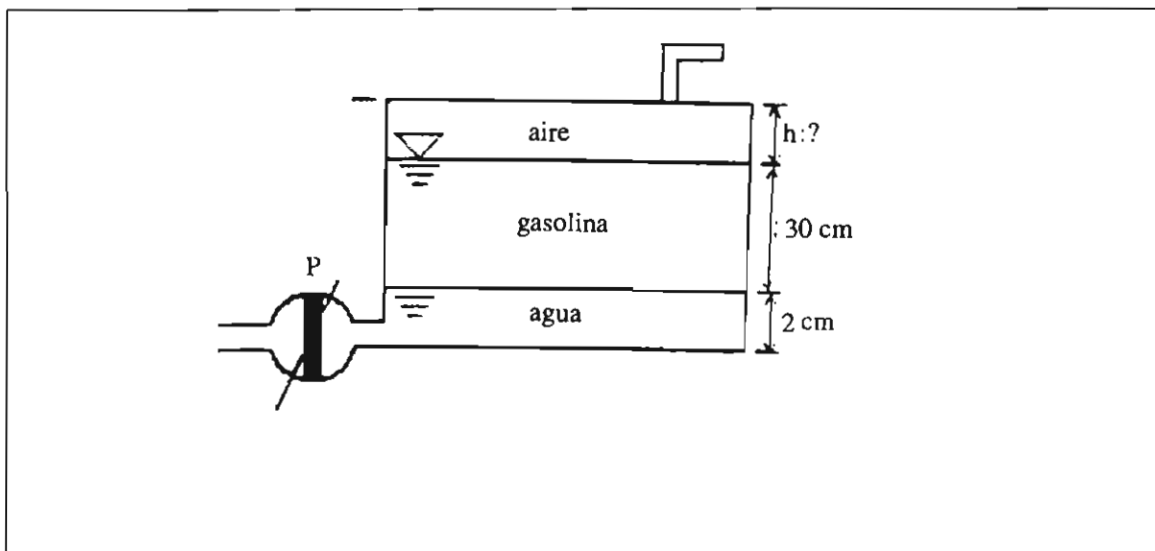
3.2 El tubo de la figura está lleno de aceite. Determinar la presión en A y en B en metros de agua.



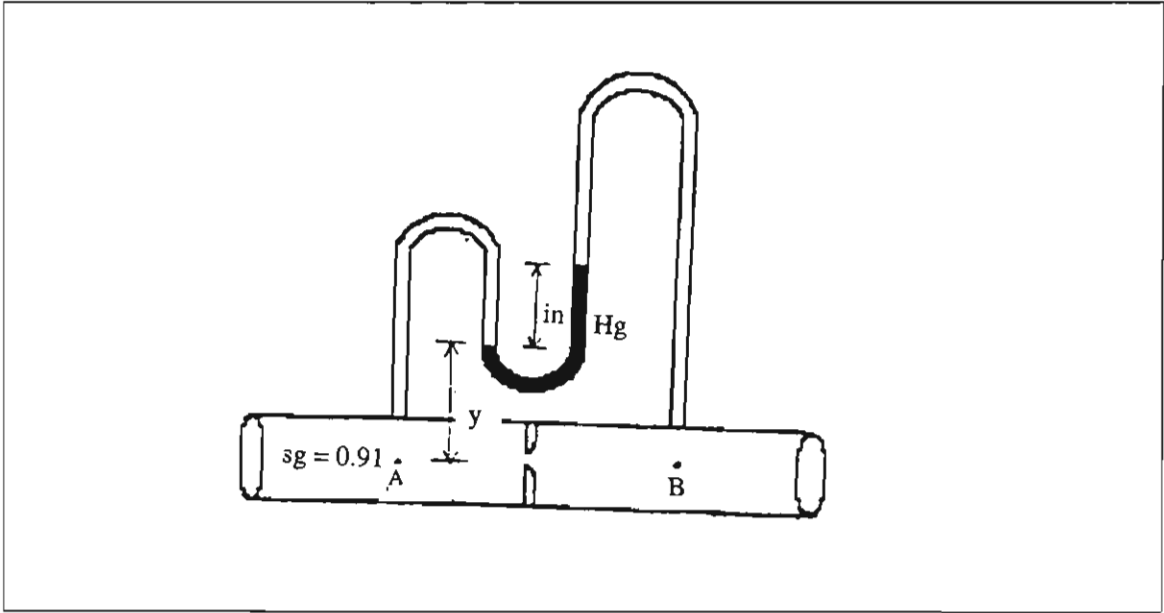
3.3 El manómetro A de la figura marca una lectura de  $-2.5 \text{ psi}$ . Determinar a) la elevación del liquido en los piezómetros E, F y G y b) la deflexión del mercurio en el manómetro en U. Despreciar el peso del aire.



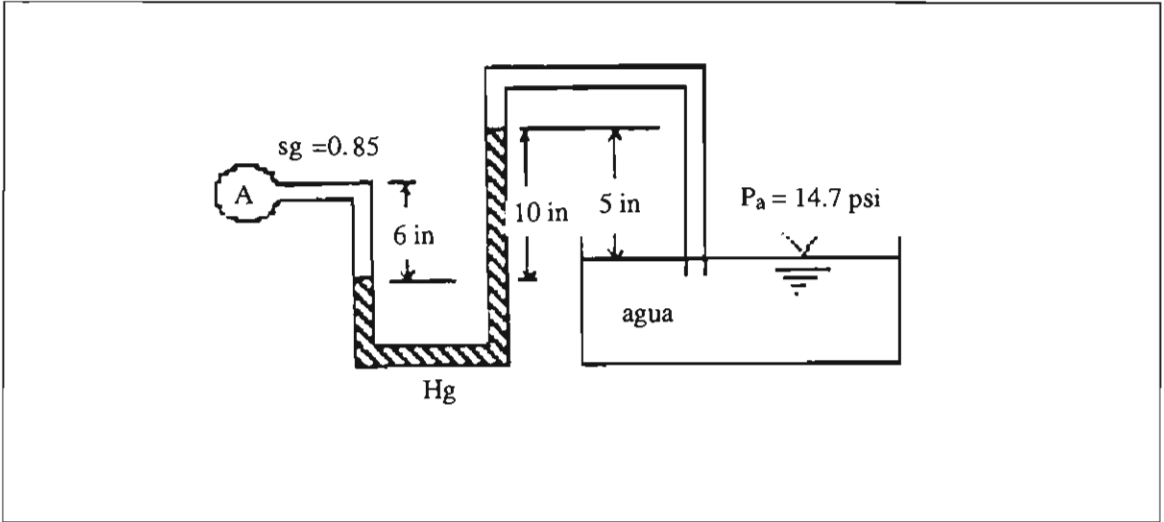
3.4 La lectura del indicador de gasolina del tanque de un automóvil es proporcional a la presión manométrica del fondo del tanque, como se muestra en la figura. Si el tanque tiene  $30 \text{ cm}$  de profundidad y accidentalmente tiene  $2 \text{ cm}$  de agua, además de gasolina, ¿cuántos centímetros de aire quedan en la porción superior si el indicador señala erróneamente que el tanque está lleno? Considerar que  $\gamma_{\text{gasolina}} = 6670 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$  y  $\gamma_{\text{aire}} = 11.8 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$



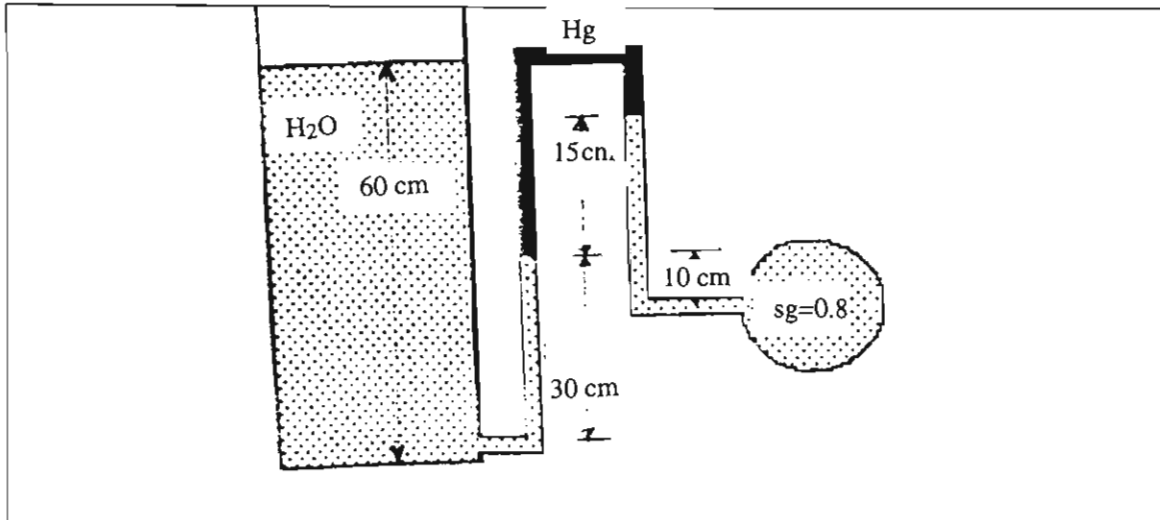
3.5 Un manómetro diferencial está conectado a una tubería, como se muestra en la figura. Calcular la diferencia de presión entre los puntos A y B.



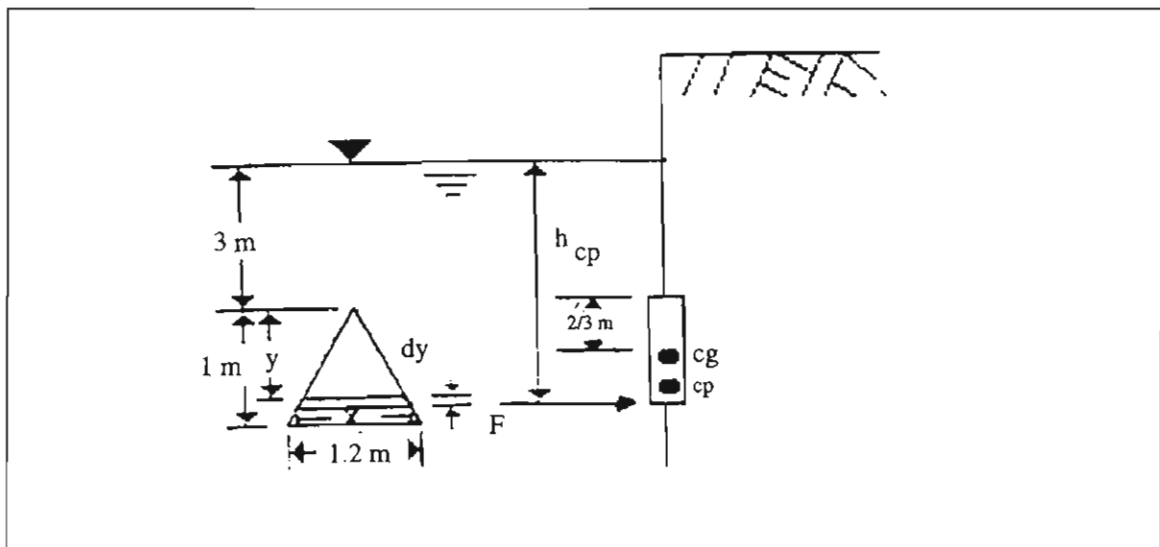
3.6 El sistema de la figura opera a 20° C. Calcular la presión absoluta en el punto A.



3.7 Para el arreglo mostrado en la figura calcular la presión absoluta en el punto A, considerando que la presión atmosférica es de 101.3 kPa.

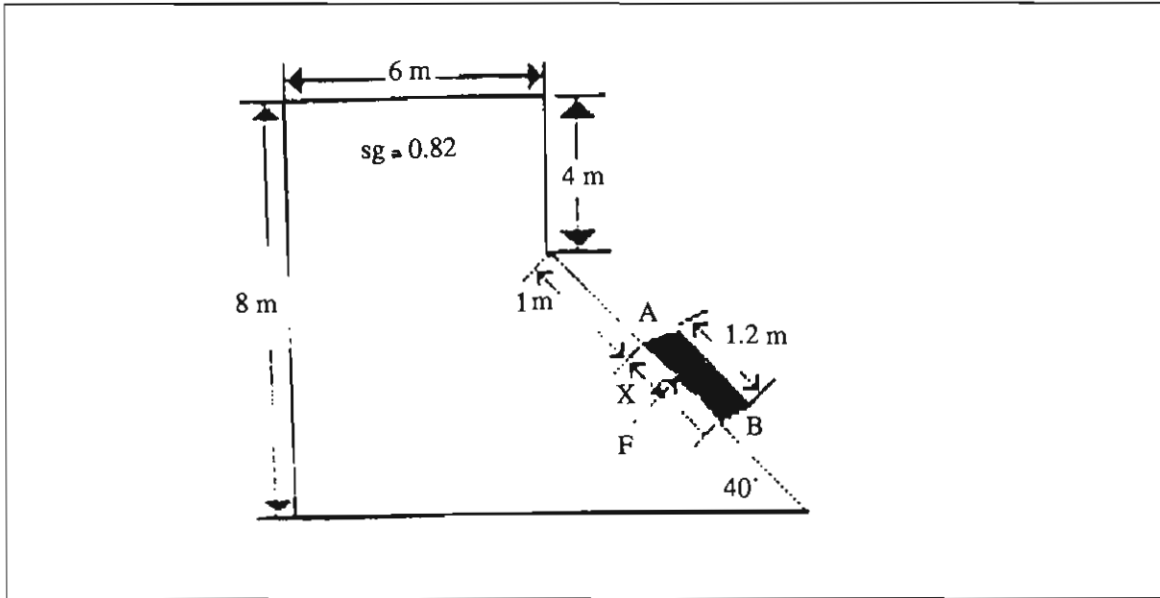


3.8 Una compuerta vertical triangular, sumergida en agua, se muestra en la figura. Determinar la fuerza total resultante que actúa sobre la compuerta y la localización del centro de presión.

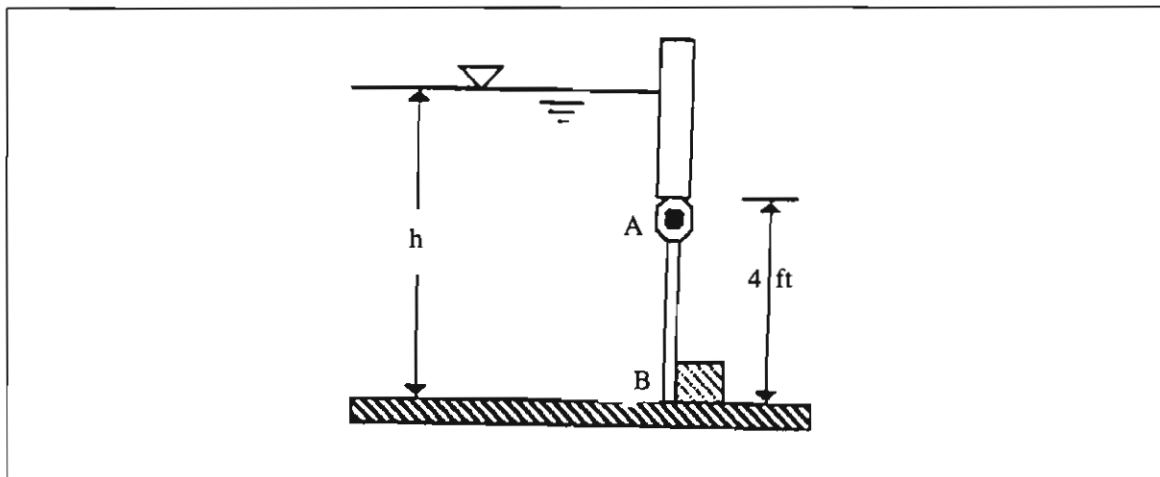




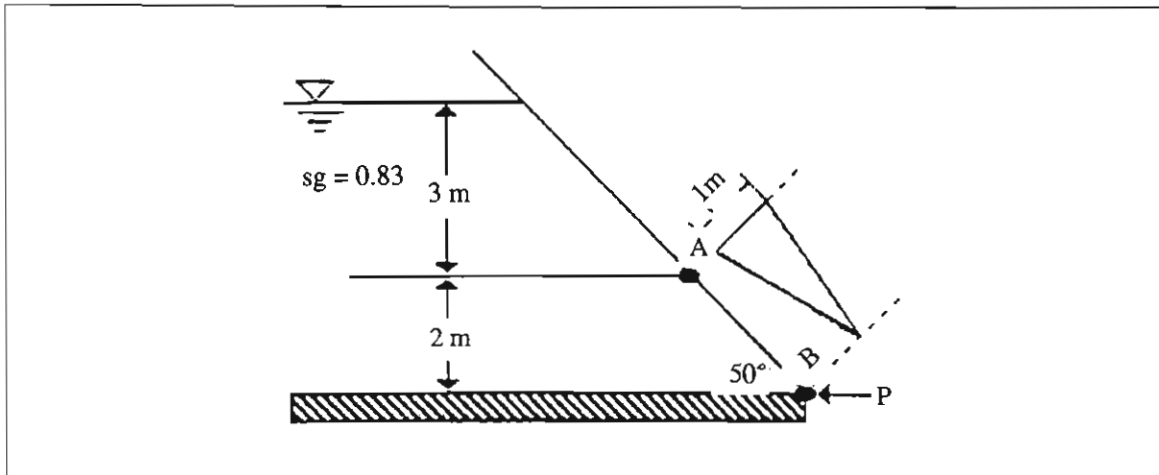
**3.9** La compuerta  $AB$  de la figura tiene  $1.2\text{ m}$  de longitud y  $0.8\text{ m}$  de ancho. Calcular la fuerza de presión  $F$  y la distancia  $X$  del centro de presión.



**3.10** La compuerta  $AB$  de la figura tiene  $6\text{ ft}$  de ancho, está abisagrada en  $A$  y se apoya en el punto  $B$ . Calcular la fuerza sobre el apoyo  $B$  y la reacción en  $A$  si la profundidad  $h$  de agua es de  $10\text{ ft}$ .

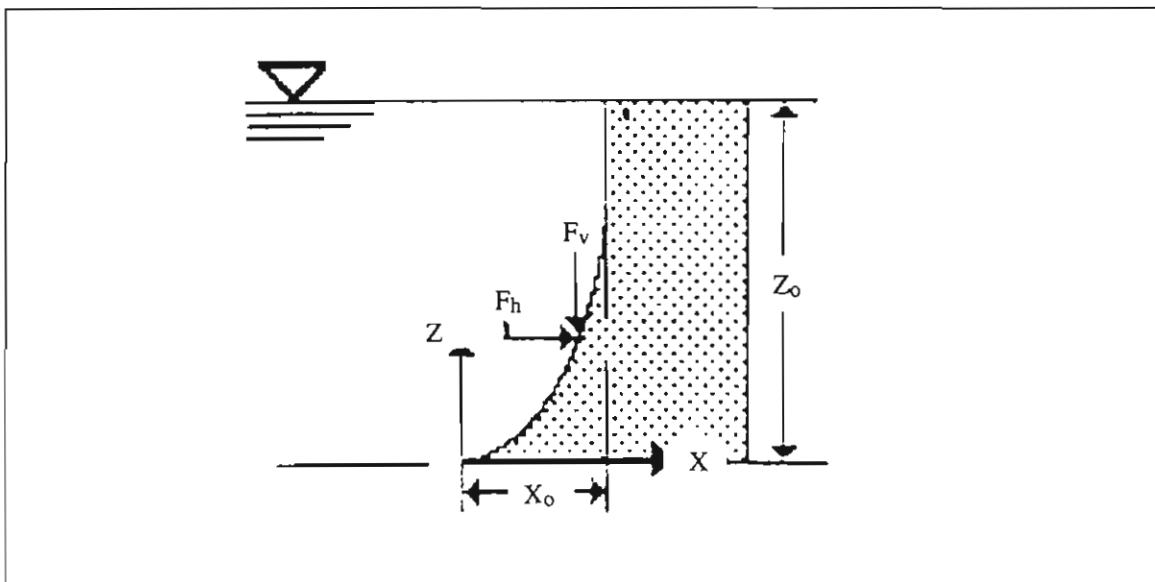


3.11 La compuerta AB de la figura tiene forma de triángulo isósceles y esta abisagrada en A. Despreciando su peso, calcular la fuerza horizontal  $P$  que debe actuar sobre el punto B para conservar el equilibrio.



3.12 La presa representada en la figura tiene la forma parabólica, descrita por  $z = z_0 \left( \frac{x}{x_0} \right)^2$ . Calcular las componentes de la fuerza que soporta la presa y el punto sobre el cual actúan. El ancho de la presa es de 50 ft.

$$x_0 = 10 \text{ ft} \quad z_0 = 24 \text{ ft}$$





**CAPITULO 4**  
**CAMPO DE FLUJO Y VOLUMEN**  
**DE CONTROL**



#### 4.1 Sistema.

Un sistema se define como una cantidad dada de materia de identidad fija, separada de su entorno (todo lo que rodea al sistema exteriormente) por una frontera o contorno. Las leyes de la mecánica rigen las interacciones entre el sistema y su entorno.

#### 4.2 Leyes de la mecánica.

Primero, el sistema es una cantidad fija de masa que designamos con  $m$ . Así, la masa del sistema se conserva y no cambia. Esta ley de la mecánica tiene una expresión muy simple denominada *conservación de la masa*.

$$m_{\text{ii}} = \text{cte.} \quad [4.1]$$

o bien

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

Segundo, si el entorno ejerce una fuerza resultante  $\vec{F}$  sobre el sistema, la segunda ley de Newton expresa que la masa comenzará a acelerarse.

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m \vec{V}) \quad [4.2]$$

Esta ley en mecánica de fluidos se denomina ley de la conservación de la cantidad de movimiento o, alternativamente, ecuación de la cantidad de movimiento. Esta es una ley vectorial que implica tres ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} F_x &= ma_x \\ F_y &= ma_y \\ F_z &= ma_z \end{aligned}$$

Tercero, si el entorno ejerce un momento resultante  $\vec{M}$  respecto al centro de masa del sistema, habrá un efecto de rotación

$$\vec{M} = \frac{d\vec{H}}{dt} \quad [4.3]$$

donde  $\vec{H} = \Sigma (\vec{r} \times \vec{V}) dm$  es el momento cinético o momento de la cantidad de movimiento del sistema respecto a su centro de masa. Esta ecuación vectorial implica también tres ecuaciones escalares de la forma

$$M_x = \frac{dH_x}{dt}$$

Cuarto, si se le comunica un calor  $dQ$  al sistema o éste ejerce un trabajo  $dW$  sobre su entorno, la energía del sistema debe cambiar en un  $dE$  de acuerdo con la ecuación de conservación de la energía, o primera ley de la termodinámica.

$$dQ - dW = dE \quad [4.4]$$

o bien,

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

Quinto, la segunda ley de la termodinámica relaciona los cambios de entropía  $dS$  con el calor añadido  $dQ$  y la temperatura absoluta  $T$

$$ds \geq \frac{dQ}{T} \quad [4.5]$$

### 4.3 Volumen de control

Un volumen de control se refiere a una región en el espacio y es útil en el análisis de situaciones donde ocurre flujo dentro y fuera del espacio. La frontera de un volumen de control es su superficie de control. El tamaño y la forma del volumen de control son totalmente arbitrarios, pero con frecuencia se hacen coincidir con fronteras sólidas en partes; en otras se dibujan normales a las direcciones de flujo para simplificar su análisis. Al volumen de control también se le denomina sistema abierto.

Existen tres tipos de volúmenes de control, a saber: fijos, móviles y deformables. En la figura 4.1 se tiene los tres tipos de volumen de control.

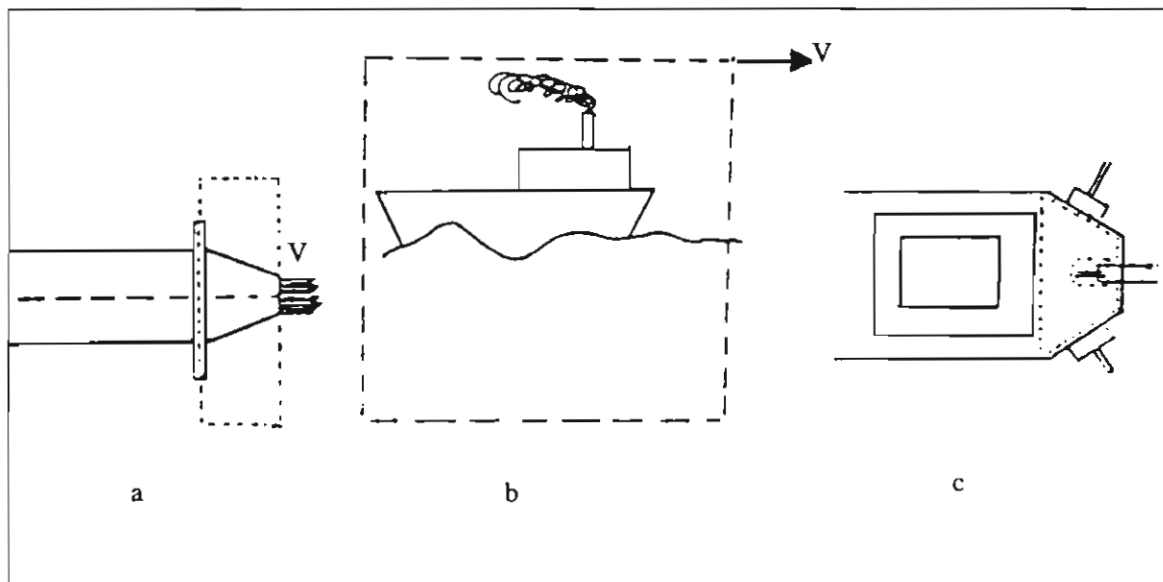


Figura 4.1 Tipos de volumen de control: a) fijo; b) móvil; c) deformable.

En la figura 4.1.a, el volumen de control es fijo, este volumen de control resalta los esfuerzos de los tornillos de sujeción, reacciones que forman parte de las fuerzas aplicadas en la ecuación de cantidad de movimiento.

En la figura 4.1.b, el volumen de control es móvil, el interés se centra en el barco, no en el océano, de forma que el volumen de control se mueve con el barco a la velocidad de éste. El volumen de control tiene volumen fijo, pero hay que tener en cuenta el movimiento relativo entre el agua y el barco.

La figura 4.1.c muestra un volumen de control deformable. Ha de tomarse en cuenta la variación del movimiento relativo en el contorno, y también deberá entrar en el análisis el cambio de forma del volumen de control.

#### 4.4 Línea de corriente

Una línea de corriente es una línea continua trazada a través del fluido en forma tal, que tiene la dirección del vector de velocidad en cada punto. No puede haber flujo a través de una línea de corriente. Ya que una partícula se mueve en la dirección de la línea de corriente en cualquier instante, su desplazamiento  $\delta s$  con componentes  $\delta x$ ,  $\delta y$  y  $\delta z$  tiene la dirección del vector de velocidad  $\vec{q}$  con componentes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente. Entonces la ecuación

$$\frac{\delta x}{u} = \frac{\delta y}{v} = \frac{\delta z}{w}$$

establece que los componentes correspondientes son proporcionales y por tanto  $\delta s$  y  $\vec{q}$  tienen la misma dirección.

Expresando los desplazamientos en forma diferencial

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad [4.6]$$

se obtienen las ecuaciones diferenciales de una línea de corriente. Estas ecuaciones son dos ecuaciones independientes; cualquier línea continua que las satisfaga es una línea de corriente.

Un tubo de corriente es el tubo formado por todas las líneas de corriente que pasan a través de una pequeña curva cerrada, no puede haber flujo a través de sus paredes, porque el vector de velocidad no tiene componente normal a la superficie del tubo.

#### 4.5 Propiedades intensivas, extensivas y específicas

Las propiedades relacionadas con la masa total del sistema se denominan propiedades extensivas y usualmente se representan con letras mayúsculas, por ejemplo: la masa, el peso, la cantidad de movimiento, el volumen, la energía, entre otras.

Las propiedades que son independientes de la cantidad de fluido se denominan intensivas, y a menudo se designan por letras minúsculas, por ejemplo: la presión, la densidad, la temperatura.

Para cada una de las variables extensivas, puede introducirse mediante medidas relativas, la correspondiente propiedad intensiva, al dividir las por la unidad de masa. Con esto se obtiene la propiedad específica, por ejemplo: el volumen específico, la energía específica, etc. y se designan por letras minúsculas.



#### 4.6 Operador matemático de transformación del volumen de control

Al convertir el análisis de sistemas en análisis de volúmenes de control debemos utilizar las matemáticas para aplicar las leyes básicas a regiones específicas en lugar de masas concretas. Esta conversión se consigue mediante el llamado teorema del transporte de Reynolds. Examinando las leyes básicas (ecuaciones 4.1, 4.2, 4.3, 4.4) vemos que todas se refieren a derivadas temporales de propiedades fluidas  $m$ ,  $V$ ,  $H$  y  $E$ . Por lo tanto, lo que necesitamos es relacionar la derivada temporal de una propiedad del sistema con la variación de dicha propiedad dentro de una región concreta.

La figura 4.2 muestra un volumen de control fijo cualquiera por el que pasa un flujo con configuración arbitraria. La única complicación es que hay zonas de entrada y salidas variables a lo largo de la superficie de control. En general, cada elemento diferencial de área  $dA$  tendrá una velocidad diferente  $V$  que formará un ángulo  $\theta$  también distinto con el vector local normal a  $dA$ . Ciertas áreas elementales tendrán flujos volumétricos de entrada  $(V A \cos \theta)_{ent} dt$ , y otros tendrán flujos de salida  $(V A \cos \theta)_{sal} dt$ .

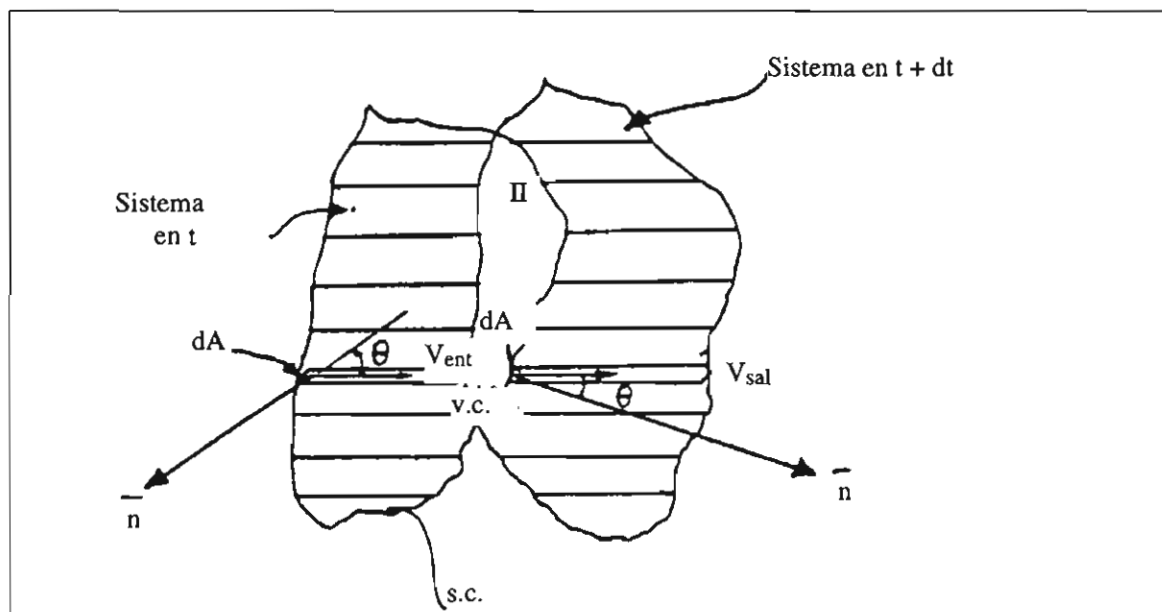


Figura 4.2 Sistema con volumen de control.

Sea  $B$  una propiedad cualquiera del fluido, y sea  $\beta = \frac{dB}{dm}$  el valor intensivo o cantidad  $B$  por unidad de masa de una pequeña porción de fluido. La cantidad total de  $B$  en el volumen de control es

$$B_{v.c.} = \int_{v.c.} \beta \rho dv$$

donde  $\rho dv$  es la masa de un elemento diferencial de fluido. Queremos relacionar las variaciones de  $B_{v.c.}$  con las variaciones de  $B$  en el sistema que coincide en el instante  $t$  con el volumen de control. La derivada temporal de  $B_{v.c.}$  está definida por la expresión

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (B_{v.c.}) &= \frac{1}{dt} B_{v.c.} (t + dt) - \frac{1}{dt} B_{v.c.} (t) \\ \frac{d}{dt} (B_{v.c.}) &= \frac{1}{dt} [B (t + dt) - (\beta \rho dV)_{sal} + (\beta \rho dV)_{ent}] - \frac{1}{dt} [B (t)] \\ \frac{d}{dt} (B_{v.c.}) &= \frac{1}{dt} [B (t + dt) - B (t)] - (\beta \rho A V)_{sal} + (\beta \rho A V)_{ent} \end{aligned} \quad [4.7]$$

El primer término del segundo miembro es la variación temporal de  $B$  dentro del sistema en el instante que ocupa el volumen de control. Reagrupando la ecuación 4.7 obtenemos la ecuación de conversión deseada para relacionar las variaciones de cualquier propiedad de  $B$  de un sistema concreto en movimiento,

$$\frac{d}{dt} (B_{sv}) = \frac{d}{dt} \int_{s.c.} \beta \rho dv + \int_{s.c.} \beta \rho V_n dA_{sal} - \int_{s.c.} \beta \rho V_n dA_{ent} \quad [4.8]$$

Esta expresión es el teorema de transporte de Reynolds para un volumen de control fijo arbitrario, en la cual  $V_n$  es la velocidad normal al área considerada.

Esta ecuación expresa el resultado esencial de que la derivada temporal del sistema es igual a la variación dentro del volumen de control más el flujo neto a través de la superficie de control.

La forma general de esta ecuación es:

$$\frac{d}{dt} (B_{sv}) = \frac{d}{dt} \int_{v.c.} \beta \rho dv + \int_{s.c.} \beta \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad [4.9]$$

El significado físico de esta ecuación y de cada uno de sus términos es:

$\frac{d}{dt} (B_{sv})$  Es la rapidez de crecimiento de la propiedad extensiva  $B$  contenida en el sistema.

$\frac{d}{dt} \int_{v.c.} \beta \rho dv$  Es la rapidez de crecimiento de la propiedad extensiva  $B$  contenida en el volumen de control,

en la cual:

–  $\beta$  es la propiedad extensiva  $B$  por unidad de masa;

–  $\rho dv$  es un elemento de masa dentro del volumen de control;

–  $\int_{v.c.} \beta \rho dv$  es la cantidad total de la propiedad  $B$  contenida en el volumen de control.

$\int_{s.c.} \beta \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$  Es el flujo neto de la propiedad extensiva  $B$  que pasa a través de la superficie de control, en la cual:

–  $\rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$  es el flujo másico a través del elemento de área ;

–  $\beta \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$  es el flujo de la propiedad  $B$  a través del elemento diferencial de área  $dA$ .



**CAPITULO 5**  
**CONSERVACION DE LA MASA Y**  
**LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO**



## 5.1 La ecuación de conservación de la masa

La ecuación de continuidad se basa en el principio de conservación de la masa aplicado al movimiento de fluidos. En otras palabras, la ecuación de continuidad establece que la masa que sale de una región del espacio, como por ejemplo un volumen de control, menos el gasto que entra en la región, es igual al gasto con que se está incrementando la masa de fluido en la región considerada.

Sustituyendo la ecuación 4.1 en la ecuación 4.9 se obtiene

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad [4.1]$$

$$B = m$$

$$B = \frac{m}{m} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} = 0 &= \frac{d}{dt} \int_{s.c.} \rho \, dv = - \frac{d}{dt} \int_{v.c.} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dA \\ \frac{dm}{dt} = 0 &= \frac{d}{dt} \int_{v.c.} \rho \, dv + \int_{s.c.} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA \end{aligned} \quad [5.1]$$

Esta es la forma general de la ecuación de continuidad y establece que el flujo neto de masa a través de la superficie de control es igual a la rapidez de crecimiento de la masa dentro del volumen de control.

Si el flujo es permanente, entonces el miembro del lado derecho de la ecuación 5.1 es cero por lo tanto se obtiene:

$$\int_{s.c.} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA = 0 \quad [5.2]$$

la cual indica que el flujo neto a través de la superficie de control es igual a cero, o bien en una forma más simple:

Flujo saliente = flujo entrante.

Si el fluido que se está manejando es incompresible, se obtiene

$$\int_{s.c.} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA = 0 \quad [5.3]$$

Si las entradas y salidas son unidimensionales se tiene

$$\begin{aligned} \Sigma (V_i A_i)_{sal} &= \Sigma (V_i A_i)_{ent} \\ \Sigma Q_{sal} &= \Sigma Q_{ent} \end{aligned} \quad [5.4]$$

donde  $Q_i = V_i A_i$  es el flujo volumétrico o caudal que atraviesa la sección. Si la sección transversal no es unidimensional, debemos integrar

$$Q = \int_{s.c.} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA \quad [5.5]$$

y con esta ecuación se define la velocidad media,  $v_m$ , que multiplicada por el área de la sección nos da el flujo volumétrico.

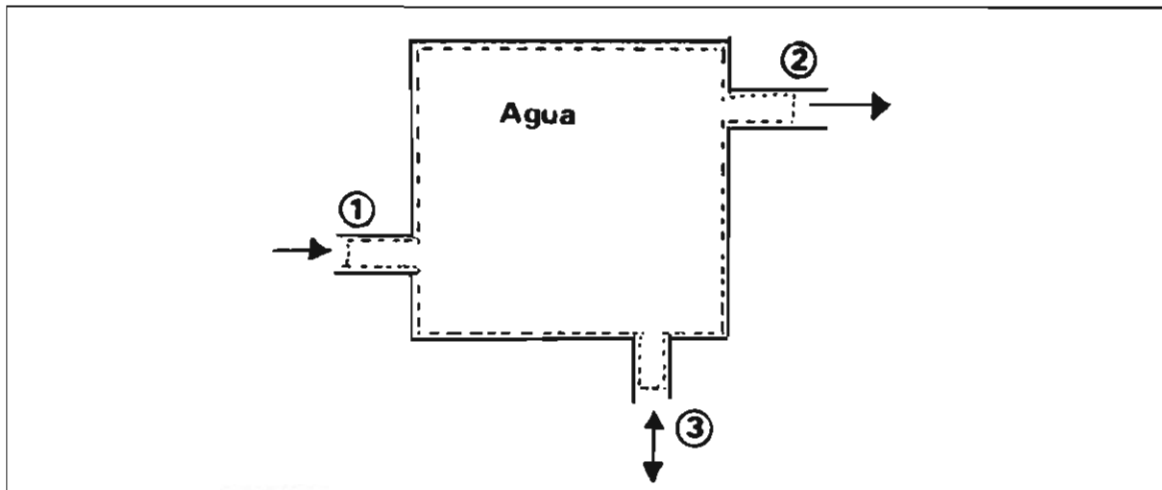
$$v_m = \frac{1}{A} \int_{s.c.} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \quad [5.6]$$

Si la densidad varía a través de la sección, se puede definir una densidad media de la misma manera

$$\rho_m = \frac{1}{A} \int \rho dA \quad [5.7]$$

### Problema 5.1

Un flujo estacionario de agua circula por el depósito de la figura. La sección 1 tiene un diámetro de 3 in y un flujo de  $1 \frac{ft^3}{s}$ . La sección 2 tiene un diámetro de 2 in y una velocidad media de salida de  $30 \frac{ft}{s}$ . Calcular la velocidad y el flujo volumétrico por la sección 3 si  $D = 1$  in ¿Es este flujo de entrada o de salida?



*Solución:*

Para determinar la velocidad y el flujo volumétrico que pasa por la sección 3 y definir si el flujo entra o sale del recipiente, aplicaremos la ecuación de conservación de la masa. Primero seleccionaremos el volumen de control, el cual está indicado en la figura de arriba con línea punteada. La ecuación a utilizar es

$$\int_{s.c.} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \frac{d}{dt} \int_{v.c.} \rho dv$$

Como el flujo es permanente o estacionario y además incompresible, entonces la ecuación es

$$\int_{s.c.} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = 0$$

Al aplicar esta ecuación al volumen de control seleccionado se obtiene

$$\int_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1) dA_1 + \int_2 (\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2) dA_2 + \int_3 (\vec{v}_3 \cdot \vec{n}_3) dA_3 = 0$$

en la cual

$$\vec{v}_1 = v_1 \hat{i}; \vec{n}_1 = -\hat{i}$$

$$\vec{v}_2 = v_2 \hat{j}; \vec{n}_2 = -\hat{i}$$

$$\vec{v}_3 = v_3 \hat{k}; \vec{n}_3 = -\hat{i}$$

suponiendo que el flujo sale de la sección 3.

Sustituyendo

$$\int_1 (v_1 \hat{i} \cdot (-\hat{i})) dA_1 + \int_2 (v_2 \hat{j} \cdot (-\hat{i})) dA_2 + \int_3 (-v_3 \hat{j}) \cdot (-\hat{j}) dA_3 = 0$$

Al integrar se obtiene

$$-v_1 A_1 + v_2 A_2 + v_3 A_3 = 0$$

de donde

$$V_3 = \frac{V_1 A_1 - V_2 A_2}{A_3}$$

sustituyendo valores

$$V_3 = \frac{1 \frac{ft^3}{s} - 30 \frac{ft}{s} \times \frac{\pi}{4} \left( \frac{2}{12} \right)^2 ft^2}{\frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{12} \right)^2 ft}$$

$$V_3 = 63.44 \frac{ft}{s}$$

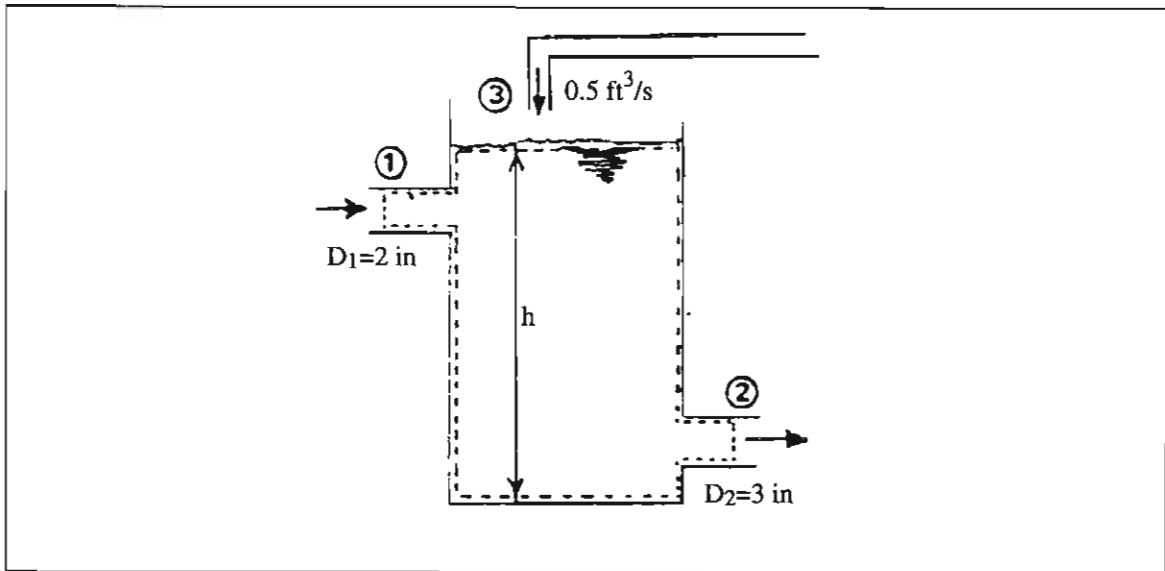
$$Q_3 = V_3 A_3 = 63.44 \frac{ft}{s} \times \frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{12} \right)^2 ft^2 = 0.345 \frac{ft^3}{s}$$

La suposición de que el flujo sale es correcta por el signo positivo que se obtiene.

### Problema 5.2

Calcular la variación de altura del depósito  $\frac{dh}{dt}$  de la figura si  $v_1 = 10 \frac{ft}{s}$ ,  $Q_3 = 0.5 \frac{ft^3}{s}$ ,  $v_2 = 12 \frac{ft}{s}$  y el diámetro del depósito es de 30 in.





Solución:

Para determinar la variación de la altura con respecto al tiempo  $\frac{dh}{dt}$ , dentro del depósito, consideremos el volumen de control indicado en la figura y se aplica la ecuación de conservación de la masa.

$$\int_{s.c.} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \frac{d}{dt} \int_{v.c.} \rho dv$$

El flujo atraviesa en tres secciones al volumen de control, por lo tanto, la ecuación es

$$\int_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1) dA_1 + \int_2 (\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2) dA_2 + \int_3 (\vec{v}_3 \cdot \vec{n}_3) dA_3 = - \frac{d}{dt} (\rho A_D h)$$

donde  $A_D$  es el área transversal del depósito, y como el fluido es incompresible, entonces el lado derecho de la ecuación es

$$- \frac{d}{dt} (\rho A_D h) = - \rho A_D \frac{dh}{dt}$$

donde  $\frac{dh}{dt}$  es la variación de la altura. Integrando el lado izquierdo de la ecuación

$$- \rho V_1 A_1 + \rho V_2 A_2 - \rho V_3 A_3 = - \rho A_D \frac{dh}{dt}$$

sustituyendo valores

$$\frac{dh}{dt} = \frac{V_1 A_1 - V_2 A_2 + V_3 A_3}{A_D}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{10 \frac{ft}{s} (0.22 ft^3) - 12 \frac{ft}{s} (0.05 ft^3) + 0.5 \frac{ft^3}{s}}{\frac{\pi (30)^2}{4} ft^2}$$

$$\frac{dh}{dt} = 0.0244 \frac{ft}{s}$$

El hecho de que  $\frac{dh}{dt}$  sea positivo significa que la altura  $h$  crece conforme avanza el tiempo, es decir el tanque se está llenando para las condiciones indicadas.

## 5.2 Fuerzas externas

Las fuerzas externas que actúan sobre un volumen de control pueden ser de dos tipos, fuerzas másicas y fuerzas de superficie.

Las fuerzas másicas son debidas a campos externos, por ejemplo gravitatorios, magnéticos o eléctricos, que actúan sobre toda la masa de volumen elemental. En este libro, las únicas fuerzas másicas que consideraremos son las gravitatorias.

Las fuerzas de superficie son debidas a los esfuerzos en las caras de la superficie de control. Estos esfuerzos son de dos tipos, de presión y viscosos que aparecen en el movimiento con gradientes de velocidad.

## 5.3 Ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento lineal

En la segunda ley de Newton la propiedad que se deriva es la cantidad de movimiento

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d}{dt} (m\vec{V})$$

Aplicando el teorema de transporte de Reynolds se tiene

$$B = m \vec{V}$$

$$B = \frac{m \vec{V}}{m} = \vec{V}$$

$$\frac{d}{dt} (m \vec{V})_{v.c.} = \Sigma \vec{F} = \frac{d}{dt} \int_{v.c.} \vec{V} \rho \, dv + \int_{s.c.} \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dA \quad [5.8]$$

Se debe hacer especial énfasis en los siguientes puntos que conciernen a esta relación.

– El término  $\vec{V}$  es la velocidad del fluido respecto a un sistema de coordenadas inercial (sin aceleración); en otro caso, la ley de Newton debe ser modificada para incluir los términos de aceleración no inerciales.

– El término  $\Sigma \vec{F}$  es el vector suma de todas las fuerzas que actúan sobre el volumen de control considerado como un cuerpo libre; o sea, incluye las fuerzas de superficie ejercidas por todos los fluidos y sólidos cortados por la superficie de control, más todas las fuerzas de volumen (gravitatorias, electro-magnéticas) que actúan sobre las masas contenidas en el volumen de control.

– La ecuación completa es una relación vectorial, ambas integrales son vectores debido al término  $\vec{V}$

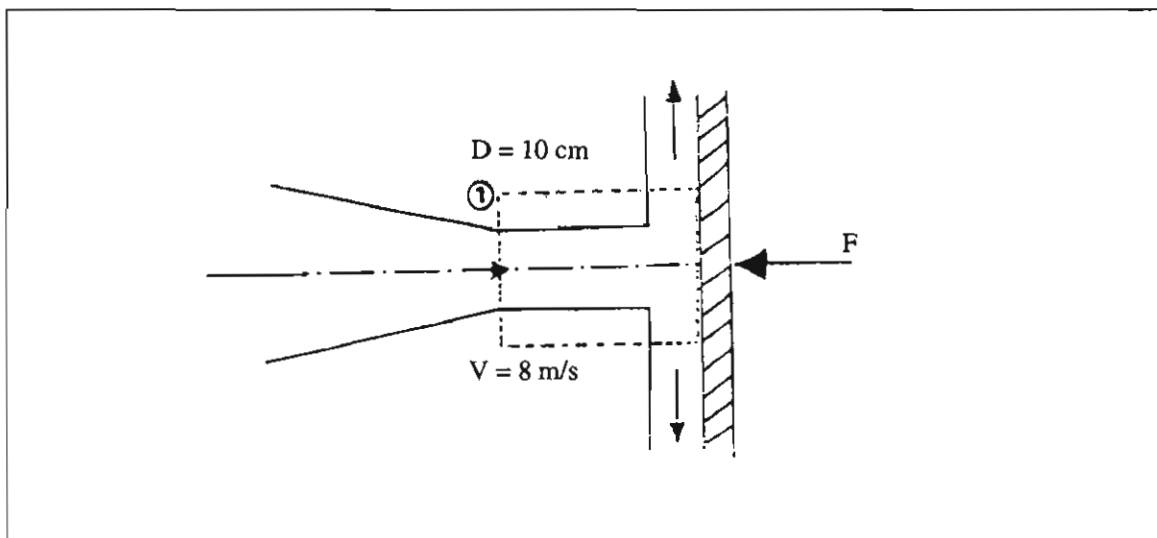
de los integrandos. La ecuación tiene, pues, tres componentes; si sólo queremos la componente  $x$ , por ejemplo, la ecuación se reduce a:

$$\Sigma F_x = \frac{d}{dt} \int_{v.c.} u \rho \, dv + \int_{s.c.} u \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dA \quad [5.9]$$

y, análogamente para,  $\Sigma F_x$ ,  $\Sigma F_z$  se sustituirán  $v$  y  $w$ , respectivamente. Es muy común no tomar en cuenta que la ecuación 5.8 es vectorial, y es la fuente de errores más usual en el análisis con volúmenes de control.

### Problema 5.3

El chorro de agua de la figura incide normal a una placa. Despreciando efectos de gravedad y fricción; calcular la fuerza  $F$  necesaria para mantener fija la placa.



Solución:

En la figura del problema seleccionaremos el volumen de control, el cual es indicado con la línea punteada. El chorro de agua entra al volumen de control y las salidas del flujo son en el sentido vertical.

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento es

$$\Sigma F_x = \frac{d}{dt} \int_{s.c.} \vec{V} \rho \, dv + \int_{s.c.} \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dA$$

Si se aplica la ecuación de la conservación de la masa se encuentra que el flujo es permanente, con lo cual la ecuación se reduce a

$$\Sigma F = \int_{s.c.} \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dA$$

Esta ecuación sólo la aplicaremos en el eje horizontal, ya que la fuerza que se pide está en dicha dirección, y la única fuerza externa es justamente la indicada, por lo tanto

$$-F = \int_{s.c.} u \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

En el eje horizontal, la superficie de control sólo es atravesada por el chorro en la entrada, con lo que se tendrá

$$-F = u_1 \rho (V_1 A_1 \cos 180^\circ)$$

puesto que  $u_1 = V_1$

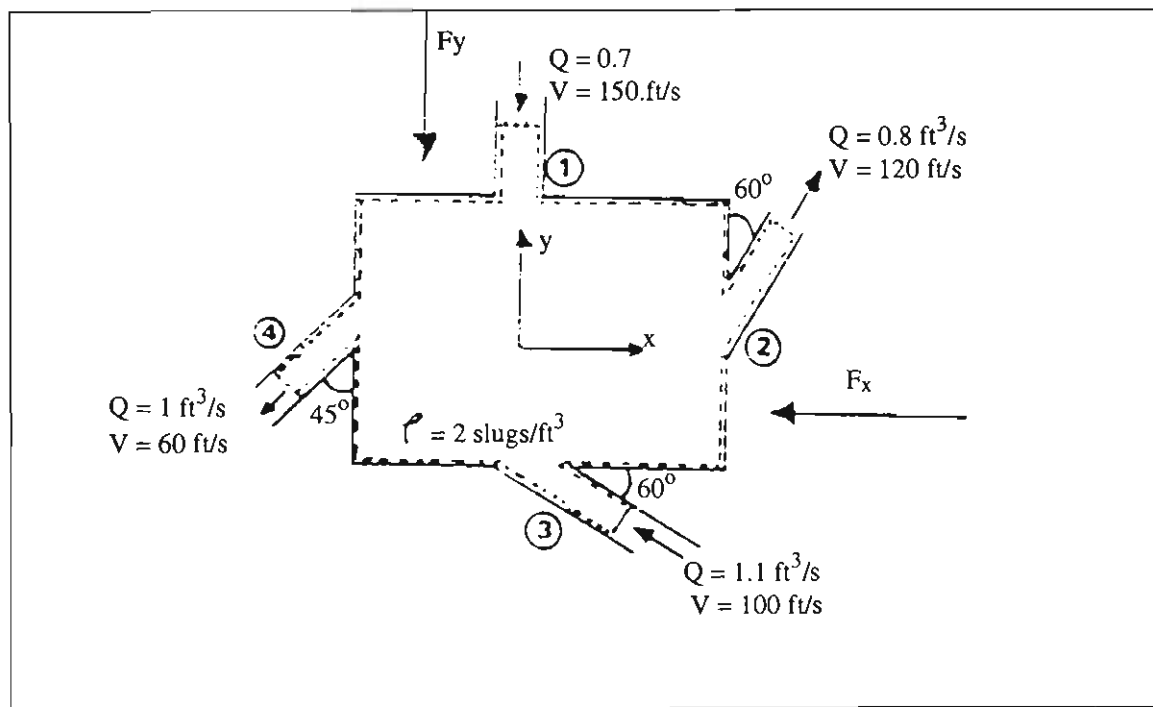
$$-F = V_1^2 \rho A_1$$

sustituyendo valores

$$F = \left(8 \frac{m}{s}\right)^2 \times 1000 \frac{kg}{m^3} \times \frac{\pi}{4} (0.1)^2 m^2$$

$$F = 504.6 N$$

Este es el valor de la fuerza que se necesita para mantener la placa fija cuando incide de ella un chorro con las características señaladas.



### Problema 5.4

¿Qué componentes de la fuerza  $F$  y  $F$  se requiere para mantener estacionaria la caja negra de la figura?

*Solución:*

El volumen de control seleccionado es el marcado con la línea punteada en la figura y las secciones donde el flujo corta al volumen de control se indican con un número.

Para determinar el valor de las fuerzas que actúan sobre la caja negra, necesarias para mantenerla fija, se aplica la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento.

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d}{dt} \int_{v.c.} \vec{V} \rho \, dv + \int_{s.c.} \vec{V} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA$$

Al aplicar la ecuación de conservación de la masa al volumen de control seleccionado, se encuentra

$$-\frac{d}{dt} \int \rho \, dv = \int \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA$$

Para un flujo incompresible

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \int dv &= \int (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA \\ -\frac{d}{dt} \int dv &= \int_1 (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA + \int_2 (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA + \int_3 (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA + \int_4 (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA \\ \frac{d}{dt} &= V_1 A_1 \cos 180^\circ + V_2 A_2 \cos 0^\circ + V_3 A_3 \cos 180^\circ + V_4 A_4 \cos 0^\circ \\ -\frac{d}{dt} \int dv &= -Q_1 + Q_2 - Q_3 + Q_4 \end{aligned}$$

sustituyendo valores

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \int dv &= -0.7 \frac{ft^3}{s} + 0.8 \frac{ft^3}{s} - 1.1 \frac{ft^3}{s} + 1 \frac{ft^3}{s} \\ \frac{d}{dt} \int dv &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto el flujo es permanente, entonces la ecuación \* se transforma en

$$\Sigma F = \int_{s.c.} \vec{v} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA$$

Para el eje  $x$ , con  $F$  como única fuerza externa, se obtiene

$$-F_x = \int_1 u \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA + \int_2 u \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA + \int_3 u \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA + \int_4 u \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA$$

donde

$$\begin{aligned}
 u_1 &= v_1 \cos 270^\circ = 0 \\
 u_2 &= v_2 \cos 30^\circ \\
 u_3 &= v_3 \cos 120^\circ \\
 u_4 &= v_4 \cos 225^\circ \\
 -F_x &= \rho (Q_2 V_2 \cos 30^\circ - Q_3 V_3 \cos 120^\circ + Q_4 V_4 \cos 225^\circ)
 \end{aligned}$$

sustituyendo valores

$$\begin{aligned}
 -F_x &= 2 \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} (0.8 \frac{\text{ft}^3}{\text{s}} \times \cos 30^\circ - 1.1 \frac{\text{ft}^3}{\text{s}} - 100 \frac{\text{ft}^3}{\text{s}} \times \cos 120^\circ + \\
 &1 \frac{\text{ft}^3}{\text{s}} \times 60 \frac{\text{ft}^3}{\text{s}} \times \cos 225^\circ) \\
 F_x &= -191.4 \text{ lb}
 \end{aligned}$$

El signo negativo indica que la fuerza que se aplica para mantener la caja negra estacionaria, se dirige hacia la derecha.

Para el eje y, la única fuerza externa es  $F_y$ , con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned}
 -F_y &= v_1 \rho (V_1 A_1) \text{ sen } 180^\circ + v_2 \rho (V_2 A_2) \text{ sen } 0^\circ + \\
 &v_3 \rho (V_3 A_3) \text{ sen } 180^\circ + v_4 \rho (V_4 A_4) \text{ sen } 0^\circ \\
 -F_y &= \rho (-V_1 Q_1 + V_2 Q_2 - V_3 Q_3 + V_4 Q_4)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 v_1 &= V_1 \text{ sen } 270^\circ \\
 v_2 &= V_2 \text{ sen } 30^\circ \\
 v_3 &= V_3 \text{ sen } 120^\circ \\
 v_4 &= V_4 \text{ sen } 225^\circ \\
 -F_y &= \rho (-Q_1 V_1 \text{ sen } 270^\circ + Q_2 V_2 \text{ sen } 30^\circ - Q_3 V_3 \text{ sen } 120^\circ + Q_4 V_4 \text{ sen } 225^\circ)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo valores

$$\begin{aligned}
 -F_y &= 2 \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} (-0.7 \frac{\text{ft}^3}{\text{s}} \times 150 \frac{\text{ft}}{\text{s}} \text{ sen } 270^\circ + 0.8 \frac{\text{ft}^3}{\text{s}} \times \text{ sen } 30^\circ - \\
 &1.1 \frac{\text{ft}^3}{\text{s}} - 100 \frac{\text{ft}^3}{\text{s}} \times \text{ sen } 120^\circ + 1 \frac{\text{ft}^3}{\text{s}} \times 60 \frac{\text{ft}^3}{\text{s}} \text{ sen } 225^\circ) \\
 F_y &= -30.6 \text{ lb}
 \end{aligned}$$

El signo negativo indica que la fuerza  $F_y$  necesaria para mantener la caja negra estacionaria, debe ser aplicada hacia arriba.

### 5.3.1 Resultante de las fuerzas de presión sobre una superficie de control cerrada

Las fuerzas de superficie sobre un volumen de control son debidas a (1) fuerzas que aparecen en el corte

de cuerpos sólidos que penetran a través de la superficie de control, y (2) fuerzas debidas a la presión y a la viscosidad en el fluido del contorno. El cálculo de la fuerza de presión está dado por

$$\vec{F}_{pres} = \int_{s.c.} P (-\vec{n}) dA \quad [5.10]$$

El signo negativo es debido a que el vector normal del área es siempre hacia fuera. Si la presión es igual sobre toda la superficie, entonces la resultante es nula.

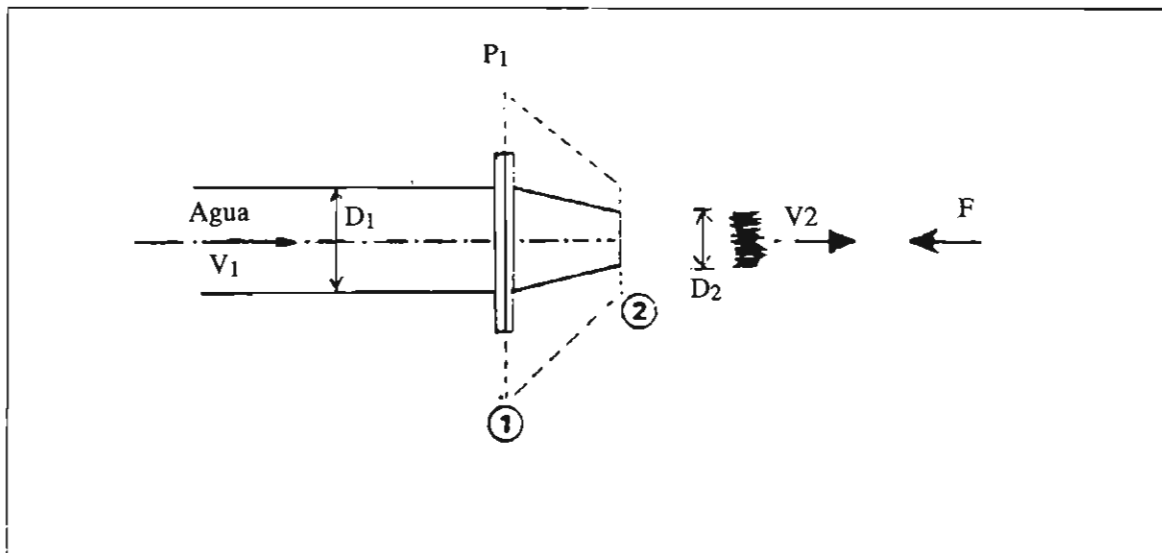
### Problema 5.5

La tobera horizontal de la figura tiene  $D = 8 \text{ in}$  y  $D = 4 \text{ in}$ . La presión de entrada es  $P_1 = 50 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$  y la velocidad de salida  $v_2 = 72 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$ . Calcular la fuerza que soportan los tornillos. Suponga flujo estacionario incompresible.

*Solución:*

Para obtener la solución de este problema, el volumen de control deberá pasar por los tornillos, tal y como se indica en la figura con la línea punteada. El flujo cruza la superficie de control en 1 y 2. Al aplicar la ecuación de conservación de la masa, se obtiene que el flujo es permanente. Por lo tanto la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento es

$$\Sigma F = \int_{s.c.} \vec{v} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA$$



Las fuerzas externas son

$$\Sigma F = -F + \int_1 P (-\vec{n}) dA$$

$$\Sigma F = -F + P_1 A_1$$

y el flujo neto a través de la superficie de control es

$$\begin{aligned} \int_{s.c.} \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA &= \int_1 u \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA + \int_2 u \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \\ &= u_1 \rho V_1 A_1 \cos 180^\circ + u_2 \rho V_2 A_2 \cos 0^\circ \end{aligned}$$

como

$$Q_1 = Q_2; u_1 = V_1 \text{ y } u_2 = V_2$$

$$\int_{s.c.} \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \rho Q (V_2 - V_1)$$

sustituyendo en la ecuación de cantidad de movimiento.

$$-F + P_1 A_1 = \rho Q (V_2 - V_1)$$

$$F = P_1 A_1 - \rho Q (V_2 - V_1)$$

$$F = P_1 A_1 - \rho Q (V_2 - V_1)$$

$$F = 50 \frac{lb}{in^2} \times 0.785 \times (8)^2 in^2 - 1.94 \frac{slug}{ft^3} \times 72 \frac{ft}{s} \times$$

$$0.785 \left( \frac{4}{12} \right)^2 ft^2 \times \left( 72 \frac{ft}{s} - 18 \frac{ft}{s} \right)$$

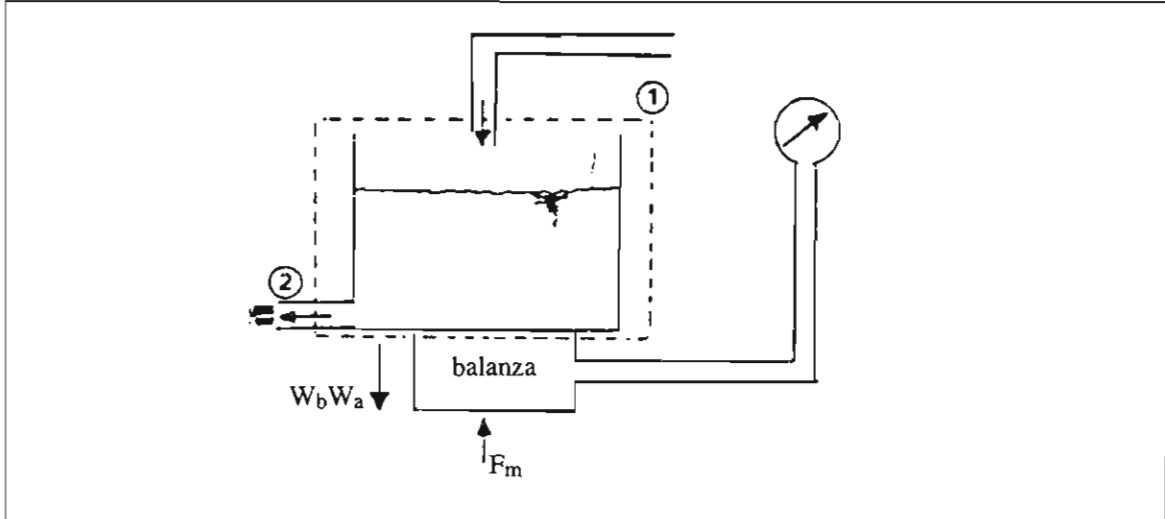
$$F = 1854.1 lb$$

Este es el valor de la fuerza que deben soportar los tornillos que unen la tobera con la tubería.



### Problema 5.6

El depósito de la figura pesa 300 lb en vacío y contiene 25 ft de agua. Los conductos de entrada y salida son idénticos.  $D = D = 2$  in, y ambos flujos son de  $0.3 \frac{ft^3}{s}$ . ¿Qué peso indicará la balanza?



El volumen de control seleccionado se indica con la línea punteada, y al aplicar a él la ecuación de conservación de la masa se encuentra que el flujo es permanente. Las fuerzas que actúan sobre dicho volumen son el peso de la balanza,  $w_b$ ; el peso del volumen de agua dentro del depósito,  $w_a$  y la fuerza que indica la balanza,  $F_m$ . Empleando la ecuación de cantidad de movimiento, considerando tan sólo el eje vertical, encontraremos el valor deseado.

$$\Sigma F_{av} = \int_{s.c.} \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

$$F_m - w_a - w_b = \int_1 \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA + \int_2 \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

$$F_m - w_a - w_b - v_1 \rho V_1 A_1 \cos 180^\circ + v_2 \rho V_2 A_2 \cos 0^\circ$$

$$F_m = w_a + w_b - v_1 V_1 A_1 + v_2 \rho V_2 A_2$$

$$v_1 = V_2 \text{ sen } 270^\circ = -V_2$$

$$v_2 = V_2 \text{ sen } 180^\circ = 0$$

$$F_m = w_a + w_b + \rho V_1 Q$$

$$w_a = \gamma v_a$$

$$w_a = 62.4 \frac{lb}{ft^3} \times 25 ft^3 = 1560 lb$$

sustituyendo valores

$$F_m = 1560 lb + 300 lb + 1.93 \frac{slug}{ft^3} \times 0.3 \frac{ft^3}{s} \times \frac{0.3 \frac{ft^3}{s}}{0.785 \left(\frac{2}{12}\right)^2 ft^2}$$

$$F_m = 1868 \text{ lb}$$

Analizando este resultado se encuentra que la variación de la cantidad de movimiento del fluido nos proporciona un valor de 8 lb adicionales, las cuales son registradas por la balanza.

### 5.3.2 Alabes fijos y móviles

La teoría de turbomáquinas se basa en las relaciones entre chorros y álabes. La mecánica de transferencia de trabajo y energía de chorros de fluidos a álabes en movimiento se estudia como una aplicación de los principios de cantidad de movimiento. Cuando un chorro libre golpea un álabe liso que es curvo, como en la figura 5.1 el chorro se desvía, cambia su cantidad de movimiento y se ejerce una fuerza sobre el álabe.

Se supone que el chorro fluye contra el álabe en dirección tangencial sin choque y, más aún, se desprecia la resistencia de fricción existente entre ellos. También se considera que a lo largo del álabe la velocidad del chorro es uniforme y que se mantiene la presión constante. En este caso (figura 5.1)

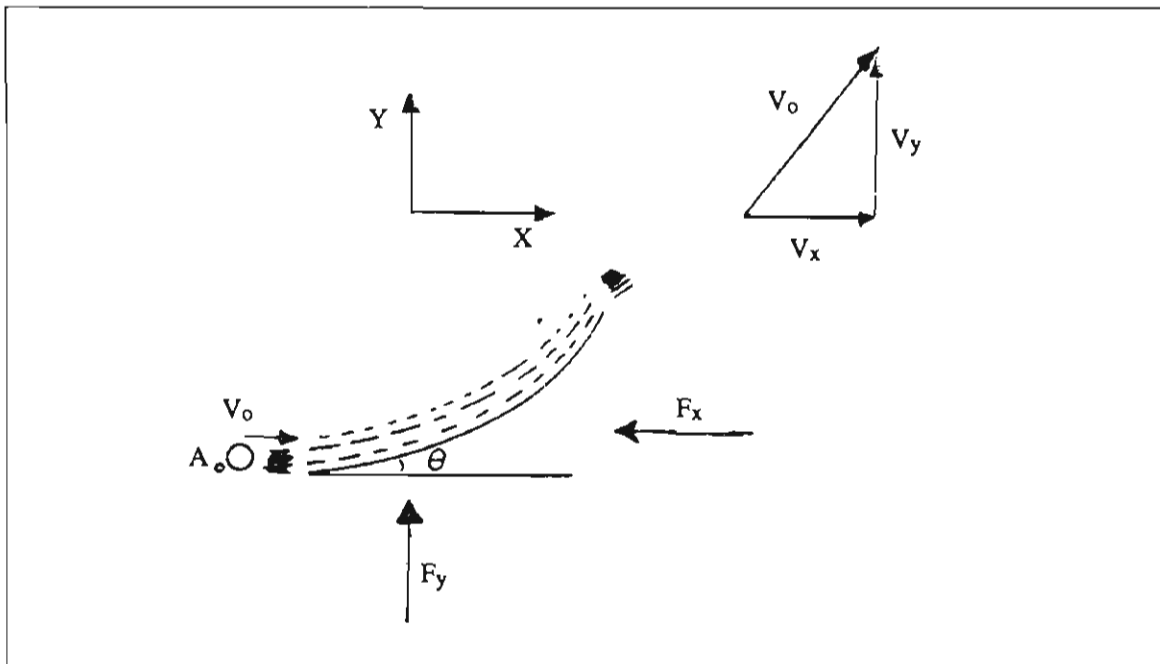


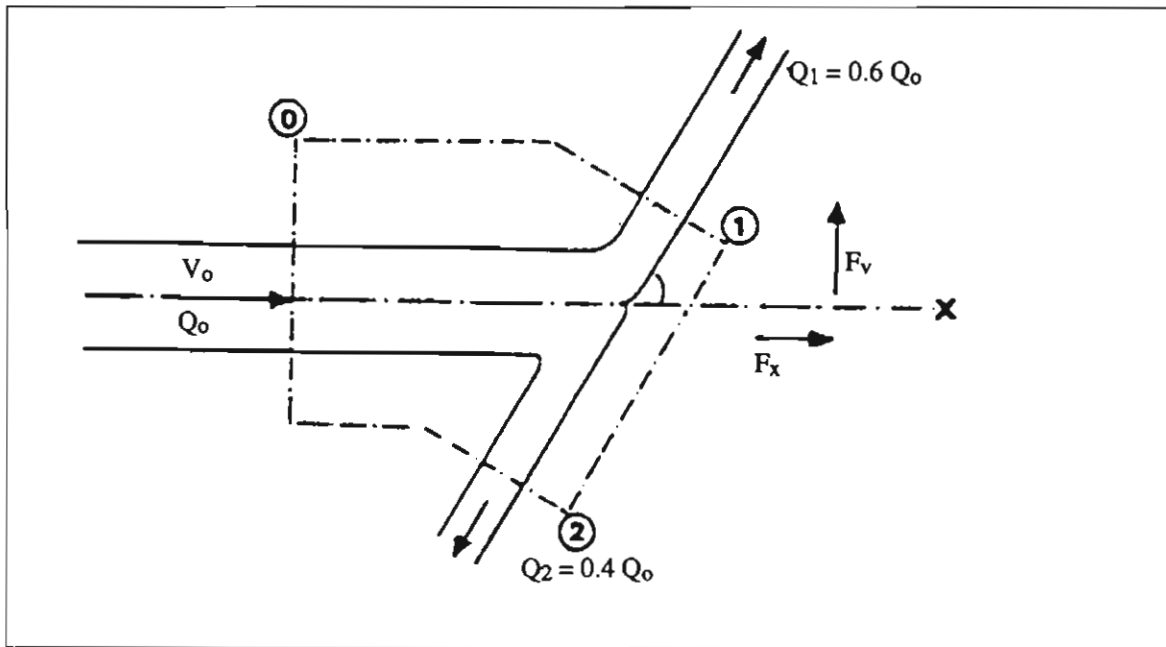
Figura 5.1 Chorro de fluido incidiendo sobre un álabe fijo.

$$F_y = \rho V_0 \sin \theta V_0 A_0$$

$$-F_x = \rho V_0^2 A_0 (\cos \theta - 1)$$

### Problema 5.7

Calcúlese las componentes de fuerza  $F_x$  y  $F_y$  necesarias para sostener el álabe estacionario de la figura si  $Q = 80 \frac{L}{s}$ ,  $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$ ,  $V_0 = 120 \frac{m}{s}$ .



Solución:

En la figura del problema se selecciona el volumen de control, trazado con línea punteada, el flujo cruza la superficie de control en las secciones 0, 1 y 2. Al aplicar la ecuación de conservación de la masa se encuentra que el flujo es permanente, por lo tanto, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento es

$$\Sigma F = \int_{s.c.} \vec{v} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA$$

Para el eje x, con  $F$  como única fuerza externa se tiene

$$F_x = \int_0 \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA + \int_1 \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA + \int_2 \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

$$F_x = u_0 \rho (V_0 A_0) \cos 180^\circ + u_1 \rho (V_1 A_1) \cos 0^\circ + u_2 \rho (V_2 A_2) \cos 0^\circ$$

$$u_0 = V_0$$

$$u_1 = V_1 \cos 60^\circ$$

$$u_2 = V_2 \cos 240^\circ$$

$$F_x = \rho (-Q_0 V_0 + Q_1 V_1 \cos 60^\circ + Q_2 V_2 \cos 240^\circ)$$

$$Q_1 = 0.6 Q_0$$

$$V_1 A_1 = 0.6 V_0 A_0$$

$$\text{si } A_1 = A_2$$

$$V_1 = 0.6 V_0 \text{ y}$$

$$V_2 = 0.4 V_0$$

Sustituyendo estos valores

$$\begin{aligned}
 F_x &= \rho (-Q_0 V_0 + Q_0 (0.6)^2 V_0 \cos 60^\circ + Q_0 (0.4)^2 V_0 \cos 240^\circ) \\
 F_x &= \rho Q_0 V_0 (-1 + 0.36 \cos 60^\circ + 0.16 \cos 240^\circ) \\
 -F_x &= 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0.08 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \times 120 \frac{\text{m}}{\text{s}} (-1 + 0.36 \cos 60^\circ + 0.16 \cos 240^\circ) \\
 F_x &= -8640 \text{ lb}
 \end{aligned}$$

El signo negativo indica que la fuerza debe ser aplicada en el sentido opuesto al marcado en la figura. Para el caso del eje y, se tiene

$$\begin{aligned}
 \Sigma F_y = F_y &= \int_0 \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA + \int_1 \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA + \int_2 \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \\
 F_y &= -V_0 \rho V_0 A_0 + V_1 \rho V_1 A_1 + V_2 \rho V_2 A_2
 \end{aligned}$$

En esta ecuación:

$$\begin{aligned}
 V_0 &= V_0 \text{ sen } 90^\circ \\
 V_1 &= V_1 \text{ sen } 60^\circ \\
 V_2 &= V_2 \text{ sen } 240^\circ \\
 F_y &= -V_0 \rho Q_0 \text{ sen } 90^\circ + V_1 \rho Q_1 \text{ sen } 60^\circ + V_2 \rho Q_2 \text{ sen } 240^\circ \\
 Q_1 &= 0.6 Q_0 \text{ y } Q_2 = 0.4 Q_0 \\
 F_y &= \rho Q_0 V_0 (0.36 \text{ sen } 60^\circ + 0.16 \text{ sen } 240^\circ)
 \end{aligned}$$

sustituyendo valores

$$\begin{aligned}
 F_y &= 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0.80 \text{ m}^3/\text{s} + 120 \frac{\text{m}}{\text{s}} (0.36 \text{ sen } 60^\circ + 0.16 \text{ sen } 240^\circ) \\
 F_y &= 1663 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Al aplicar  $F_x = 8640 \text{ N} \leftarrow$  y  $F_y = 1663 \text{ N} \uparrow$ , aseguramos que el álabe no se moverá cuando incida sobre él un chorro con las características indicadas en el problema.

La turbomaquinaria utiliza las fuerzas resultantes de acción sobre álabes en movimiento. Ningún trabajo puede realizarse sobre o por un fluido que fluye sobre un álabe fijo. Cuando se pueden desplazar los álabes, se puede realizar trabajo ya sea sobre el álabe o sobre el fluido. En la figura 5.2 se muestra un álabe en movimiento con el fluido deslizándose tangencialmente sobre él. Las fuerzas ejercidas sobre el fluido por el álabe se indican por  $F_x$  y  $F_y$ .

Para analizar el flujo, el problema se reduce a un régimen permanente por superposición de la velocidad del álabe  $u$  a la izquierda en álabe y fluido. La velocidad relativa  $V_r = V_0 - u$ , no cambia de magnitud al pasar por el álabe.

Para un sólo álabe se tiene

$$F_x = \rho (V_0 - u)^2 A_0 (1 - \cos \theta)$$

$$F_y = \rho (V_0 - u)^2 A_0 \text{ sen } \theta$$

Para una serie de álabes se obtiene

$$F_x = \rho Q_0 (V_0 - u) (1 - \cos \theta)$$

$$F_y = \rho Q_0 (V_0 - u) \text{ sen } \theta$$

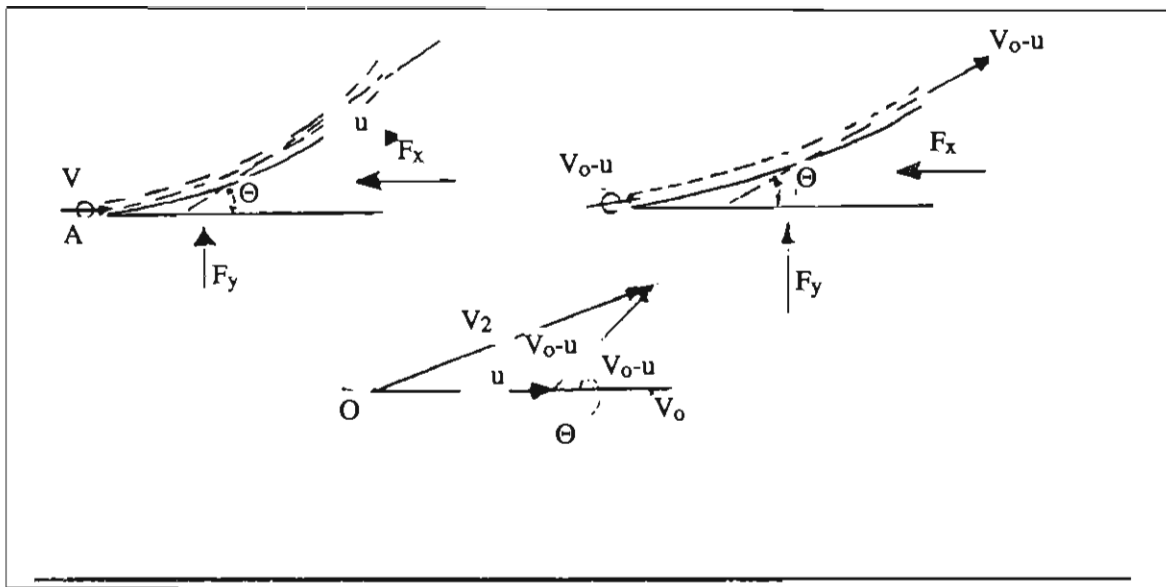
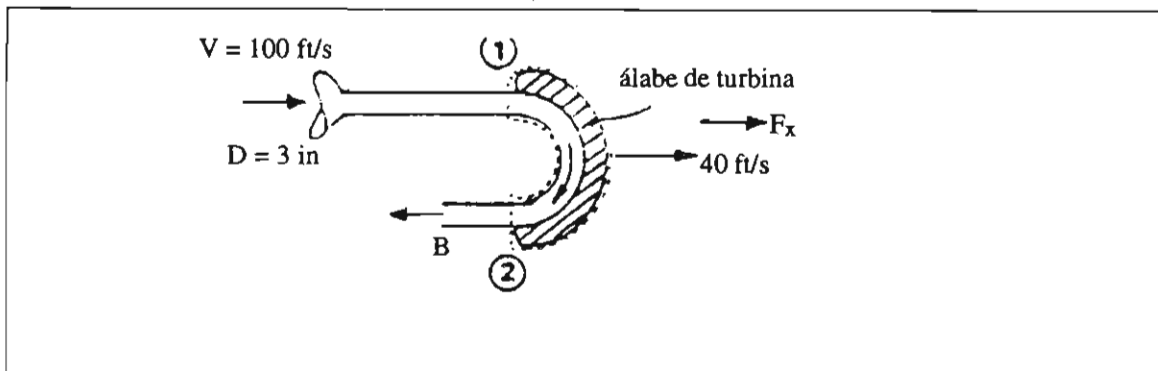


Figura 5.2 Alabe en movimiento con velocidad  $u$  y el chorro tiene velocidad  $V_o$

### Problema 5.8

Un chorro de agua empuja una cuchara de  $180^\circ$  de una turbina, a  $40 \frac{ft}{s}$  hacia la derecha. Calcular: a) la fuerza ejercida sobre la cuchara y b) la potencia suministrada.



Solucion:

Para determinar la fuerza que ejerce el chorro de agua sobre la cuchara, se aplica la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento al volumen de control indicado con línea punteada en la figura.

Como el flujo es permanente, se tiene

$$\Sigma F = \int_{s.c.} \vec{v} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA$$

En este caso sólo se tiene variaciones en el eje  $x$ , en el cual

$$F_x = \int_1 \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA + \int_2 \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

$$F_x = u_1 \rho (V_1 A_1) + u_2 \rho (V_2 A_2)$$

$$F_x = 2 \rho (V - u)^2 A_0$$

sustituyendo valores

$$F_x = 2 \times 1.94 \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} \times \left( 100 \frac{\text{ft}}{\text{s}} - 40 \frac{\text{ft}}{\text{s}} \right)^2 \times 0.785 \left( \frac{3}{12} \right)^2 \text{ft}^2$$

$$F_x = 685.30 \text{ lb}$$

Esta es la fuerza que ejerce el chorro de agua sobre la cuchara.

Para determinar la potencia que se comunica se multiplica el valor de la fuerza por el desplazamiento de la cuchara, esto es

$$P = F_x u$$

$$P = 685.3 \text{ lb} \times 40 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

$$P = 2784 \frac{\text{lb} \cdot \text{ft}}{\text{s}} \times \frac{1 \text{ H.P.}}{550 \frac{\text{lb} \cdot \text{ft}}{\text{s}}}$$

$$P = 49.84 \text{ H.P.}$$

que es el valor de la potencia.

#### 5.4 Ecuación de Euler y ecuación de Bernoulli

El estudio del flujo sin fricción a través de un tubo de corriente infinitesimal, como el de la figura 5.3, nos proporciona una relación muy utilizada entre presión, velocidad y altura.

Suponemos que el área  $A$  es lo suficientemente pequeña para que las propiedades  $\rho$ ,  $V$ , y  $P$  se puedan considerar uniformes en la sección.

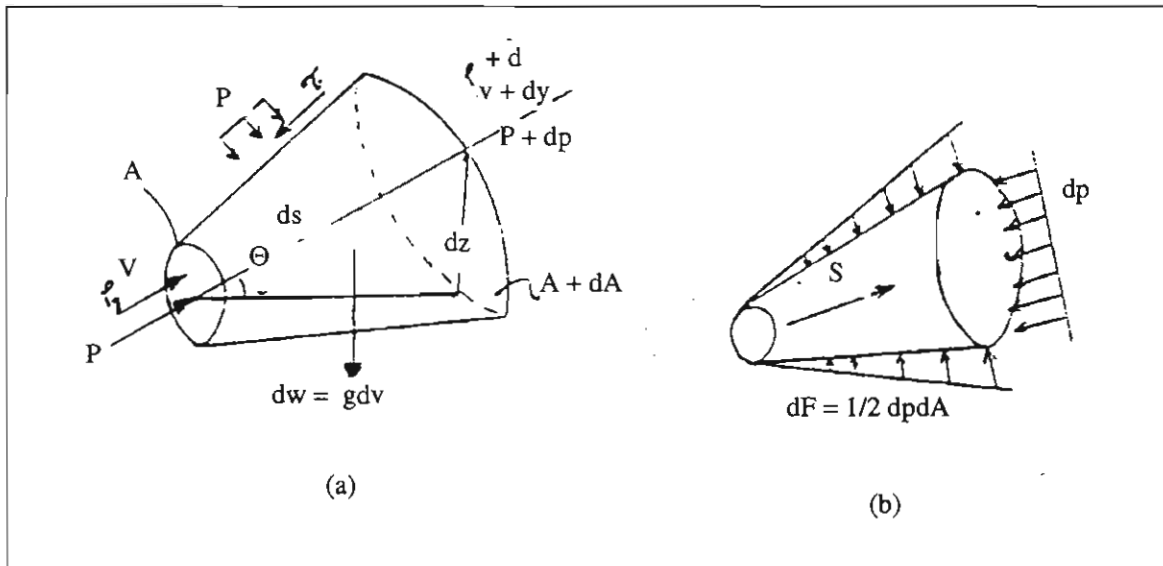
Las propiedades  $\rho$ ,  $V$ ,  $p$  y  $A$  pueden variar gradualmente en la dirección de la corriente  $s$ . El tubo de corriente está inclinado un ángulo arbitrario  $\theta$ , de forma que la variación de altura entre secciones es  $dA = ds \text{ sen } \theta$ . La fricción inevitable en las paredes del tubo de corriente, aquí se está despreciando. La ecuación de conservación de la masa en este volumen de control infinitesimal es

$$\frac{d}{dt} \int_{v.c.} \rho dv = \int_{s.c.} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

$$\frac{d}{dt} \int_{v.c.} \rho dv + m_{sal} - m_{tra} = 0$$

o bien,

$$\frac{d\rho}{dt} dv + dm = 0$$



**Figura 5.3** Flujo sin fricción a lo largo de un tubo de corriente.  
a) Fuerzas y flujos; b) Resultante de las fuerzas de presión.

donde el volumen es

$$dv \approx A ds$$

Sustituyendo en la ecuación anterior

$$dm = d(\rho A \vec{V}) = -\frac{d\rho}{dt} A ds$$

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en la dirección de la corriente es

$$\Sigma F_s = \frac{d}{dt} \int_{s.c.} V_s dm + \int_{s.c.} V_s dm$$

Las fuerzas externas al sistema son debidas a la presión y a la gravedad. El término de gravedad es la componente del peso en la dirección de la corriente, que es negativo.

$$dF_{grav} = -dw \text{ sen } \theta \approx -\rho g A ds \text{ sen } \theta \approx -\rho g A dz$$

La fuerza de presión es igual

$$dF_{pres} \approx \frac{1}{2} dP dA - dP (A + dA) \approx A dP$$

Para la rapidez de crecimiento de la cantidad de movimiento en el volumen de control, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_{v.c.} V dm = \frac{d}{dt} (\rho V A ds) \approx \frac{d}{dt} (\rho V) A ds$$

Para el flujo neto es

$$\int_{s.c.} V dm \approx (V + dV) (m + dm) - V m \approx m dV + V dm$$

En todas las ecuaciones anteriores se desprecian los términos de segundo orden de magnitud. Sustituyendo, se obtiene

$$-A dP - \rho g A dz = \frac{d}{dt} (\rho V) A ds + m dV + V dm$$

para el primer término del lado derecho, se tiene

$$\frac{d}{dt} (\rho V) = \rho \frac{dV}{dt} + V \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} + V \frac{-dm}{A ds}$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores y sustituyendo

$$-A dP - \rho g A dz = \frac{dV}{dt} \rho A ds + \rho A V dV$$

dividiendo entre  $\rho A$  y reagrupando

$$\frac{dV}{dt} ds + \frac{dP}{\rho} + V dV + g dz = 0$$

Esta es la ecuación de Euler para flujo no permanente sin fricción a lo largo de una línea de corriente. Es una ecuación diferencial que puede ser integrada entre dos puntos a lo largo de la misma.

Para un flujo permanente y además incompresible se obtiene

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2) + g (z_2 - z_1) = 0 \quad [5.11]$$

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + g z_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + g z_2 = cte.$$

que es la ecuación de Bernoulli para flujo permanente incompresible y sin fricción a lo largo de una línea de corriente.

También se acostumbra escribirla como

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 = cte. \quad [5.12]$$

Cada término de la ecuación 5.11 tiene dimensiones de  $\left(\frac{L}{t}\right)^2$  o unidades de energía por unidad de masa, y la ecuación 5.12 tiene unidades de energía por unidad de peso.



Cada término de la ecuación de Bernoulli se puede interpretar como una forma de energía:

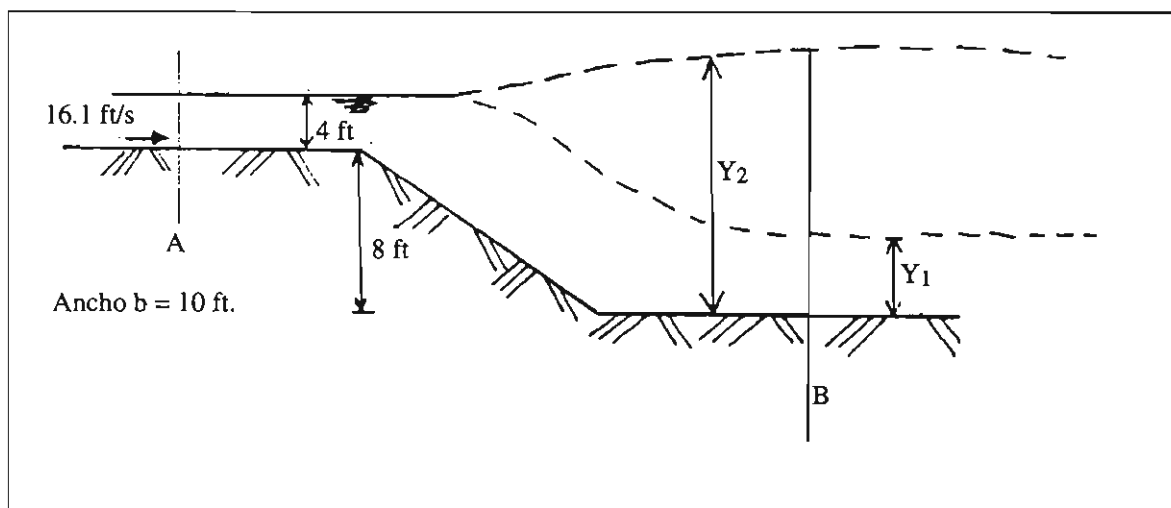
$\frac{P}{\gamma}$  es la energía de flujo o el trabajo de flujo;

$\frac{v^2}{2g}$  es la energía cinética; y

$z$  es la energía potencial.

### Problema 5.9

Por un canal, como el que se muestra en la figura, fluye agua. Despreciando las pérdidas, determínense las dos profundidades posibles de flujo  $y_1$ ,  $y_2$ .



Solución:

Quando el flujo pasa por la sección A, la velocidad media del mismo tiene un valor constante de  $16.1 \frac{ft}{s}$ , pero cuando pasa por la sección B (localizada 8 ft más abajo que la sección A) pueden ocurrir dos cosas, que el tirante tenga el valor  $y_1$ , o bien  $y_2$ . Para determinar el valor de este tirante, se aplica la ecuación de Bernoulli entre las secciones A y B a una línea de corriente, esto es

$$\frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B = cte.$$

Las presiones son iguales a la presión atmosférica. Puesto que el canal es abierto a la atmósfera la incógnita es el valor de  $z_B$ , que puede tener los valores de  $y_1$  o  $y_2$ .

$$z_B = z_A + \frac{V_A^2 - V_B^2}{2g}$$

Aplicando la ecuación de continuidad

$$\begin{aligned}
 Q_A &= Q_B \\
 V_A A_A &= V_B A_B \\
 V_A h_A b &= V_B h_B b \\
 V_B &= V_A \frac{h_A}{h_B}
 \end{aligned}$$

sustituyendo este valor

$$z_B = z_A + \frac{V_A^2}{2g} - \frac{V_A^2}{2g} \left( \frac{h_A}{h_B} \right)^2$$

como  $z_B = h_B$ , entonces

$$\begin{aligned}
 h_B^3 - z_A h_B^2 - \frac{V_A^2}{2g} h_B^2 + \frac{V_A^2}{2g} h_A^2 &= 0 \\
 h_B^3 - h_B^2 \left( z_A + \frac{V_A^2}{2g} \right) + \frac{V_A^2}{2g} h_A^2 &= 0
 \end{aligned}$$

sustituyendo los valores numéricos

$$\begin{aligned}
 h_B^3 - h_B^2 \left( 12 + \frac{(16.1)^2}{2 \times 32.2} \right) + \frac{(16.1)^2}{2 \times 32.2} \times (4)^2 &= 0 \\
 h_B^3 - 16.025 h_B^2 + 64.4 &= 0
 \end{aligned}$$

resolviendo la ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned}
 h_{B1} &= 2.15 \text{ ft} = y_1 \\
 h_{B2} &= 15.7 \text{ ft} = y_2
 \end{aligned}$$

Estos son los dos posibles tirantes que tendrá el fluido en el canal. La otra raíz de la ecuación resulta ser negativa

### Problema 5.10

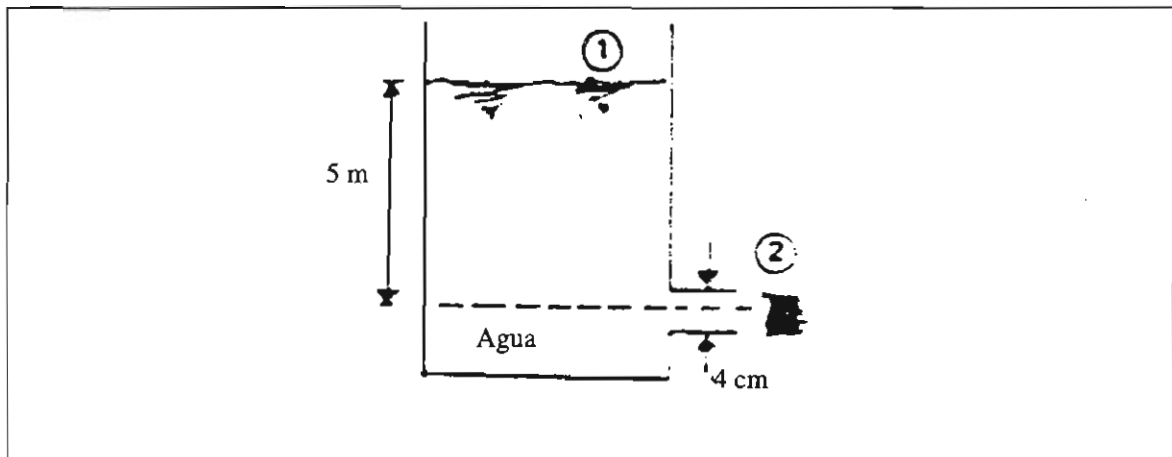
Despreciando todas las pérdidas, determínese la descarga de la figura.

Para determinar la descarga del recipiente, se aplica la ecuación de Bernoulli entre los puntos de una línea de corriente, por ejemplo los puntos 1 y 2 indicados en la figura. De esta forma se tiene

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

Las presiones son iguales a la presión atmosférica, la velocidad en el punto 1 se considera tan pequeña que se desprecia, por lo tanto

$$\frac{V_2^2}{2g} = z_1 - z_2$$



$$V_2 = \left(2g(z_1 - z_2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Esta ecuación es conocida con el nombre de ecuación de Torricelli, y nos sirve para determinar la velocidad con la que sale un fluido de un recipiente sin pérdidas. Sustituyendo valores

$$V_2 = \sqrt{2 \times 9.8 \frac{m}{s^2} \times 5m}$$

$$V_2 = 9.9 \frac{m}{s}$$

Al multiplicar este valor por el área se obtiene el caudal

$$Q = 9.9 \frac{m}{s} \times 0.785 (0.04)^2 m^2$$

$$Q = 0.012 \frac{m^3}{s}$$

Este es el gasto de agua que sale del recipiente con las condiciones indicadas.

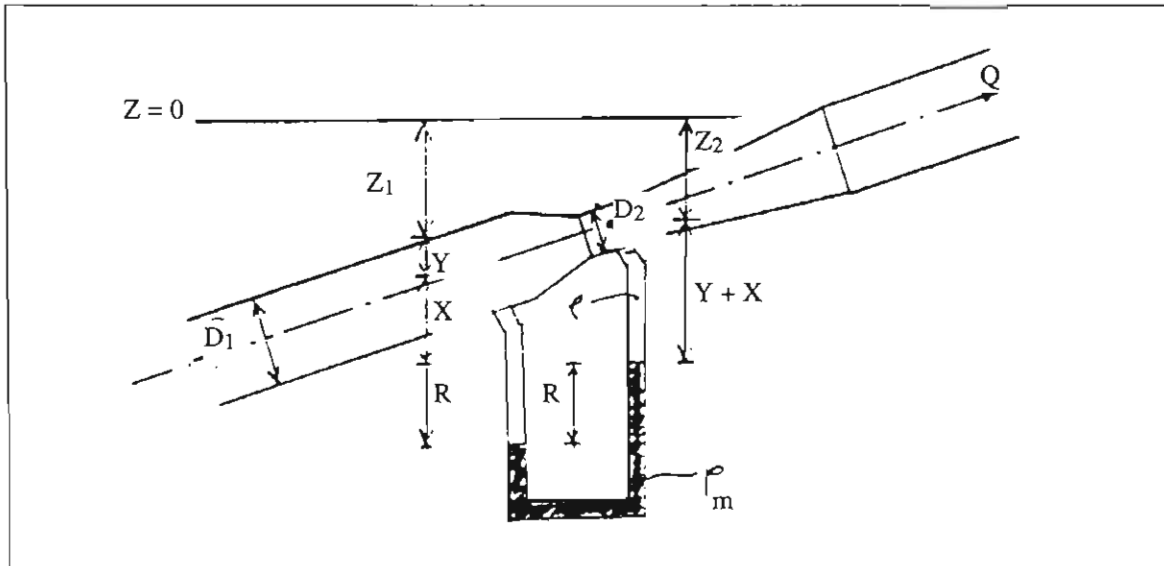
### Problema 5.11

Para el medidor venturi y la instalación de manómetro de la figura, deduzca una expresión que relacione la velocidad de flujo de volumen con la lectura del manómetro.

Solución:

Para encontrar la relación entre el flujo volumétrico y la lectura proporcionada por el manómetro es necesario aplicar la ecuación de Bernoulli entre dos puntos de una línea de corriente, por ejemplo el 1 y 2. Observe que la localización de los puntos coincide con las tomas del manómetro diferencial, de tal forma que

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$



$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + z_1 - z_2 \quad [*]$$

Por la ecuación de continuidad

$$Q_1 = Q_2$$

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$V_1 = V_2 \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2$$

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2 - V_2^2 \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^4}{2g}$$

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2 \left( 1 - \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^4 \right)}{2g} \quad [**]$$

Del manómetro diferencial

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = R \left( \frac{\rho_m}{\rho} - 1 \right) - y \quad [***]$$

sustituyendo (\*\*) y (\*\*\*) en (\*)

$$\frac{V_2^2}{2g} \left( 1 - \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^4 \right) = R \left( \frac{\rho_m}{\rho} - 1 \right) - y + z_1 - z_2$$

Pero  $z_1 = z_2 + y$ , entonces

$$V_2^2 = \frac{\left[ R \left( \frac{\rho_m}{\rho} - 1 \right) - y + z_2 + y - z_2 \right] 2g}{1 - \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^4}$$

$$V_2 = \left[ \frac{2gR \left( \frac{\rho_m}{\rho} - 1 \right)}{1 - \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

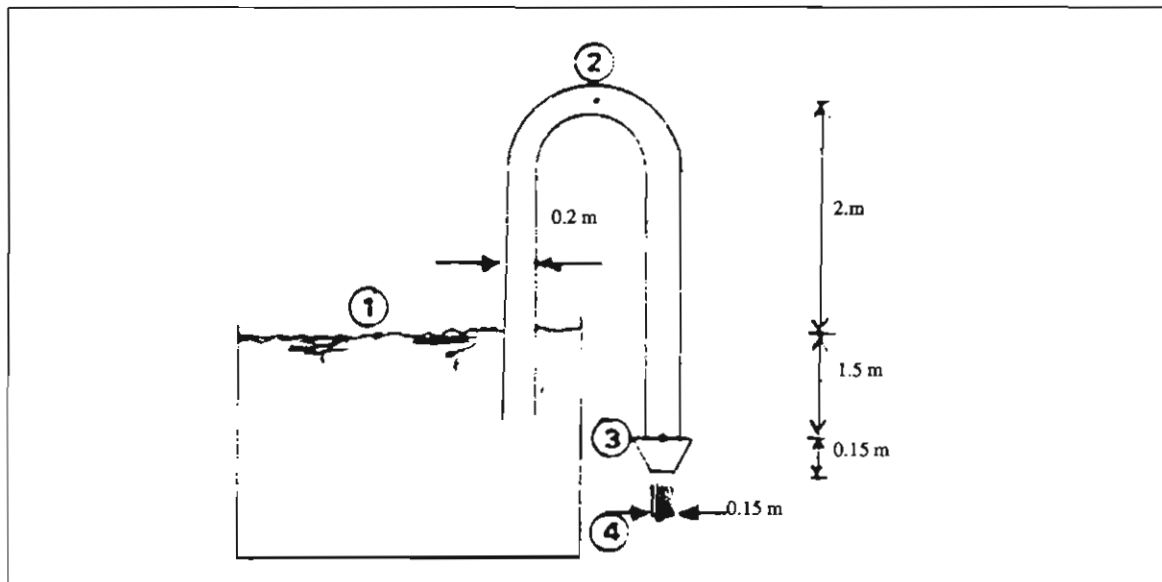
como  $Q = VA$ , se obtiene

$$Q = A_2 \left[ \frac{2gR \left( \frac{\rho_m}{\rho} - 1 \right)}{1 - \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Esta relación indica que el valor del caudal depende de la lectura  $R$  del manómetro diferencial; de los diámetros del medidor y de los fluidos que se manejan.

### Problema 5.12

El sifón de la figura tiene un boquilla de 150 mm de largo, fija a la sección 3, reduciendo el diámetro a 150 mm. Despreciando las pérdidas, calcúlese la descarga y la presión en las secciones 2 y 3.



Solución:

Para determinar la descarga del sifón se aplica la ecuación de Bernoulli, para una línea de corriente entre los puntos 1 y 4, obteniéndose

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_4}{\gamma} + \frac{V_4^2}{2g} + z_4$$

La presión en los dos puntos es la misma, igual a la atmosférica. La velocidad del punto 1 es muy pequeña y por lo tanto despreciable. Si el punto 4 es el nivel de referencia, entonces  $z_4 = 0$ . Al aplicar estas consideraciones, se tiene

$$\frac{V_4^2}{2g} = z_1$$

Despejando a  $V_4$

$$V_4 = \sqrt{2gz_1}$$

Sustituyendo valores

$$V_4 = \sqrt{2 \times 9.8 \frac{m}{s} \times 1.65 m}$$

$$V_4 = 5.69 \frac{m}{s}$$

$$Q = 5.69 \frac{m}{s} \times 0.785 (0.15)^2 m^2$$

$$Q = 0.100 \frac{m^3}{s}$$

Este es el caudal que pasa a través del sifón con las condiciones indicadas.

Para determinar la presión del punto 2, aplicamos la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2.

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

La presión en 1 es la atmosférica, la eliminamos y entonces la presión en 2 será manométrica.  $V_1$  se elimina por tener un valor muy pequeño. Ahora  $z_1$  es nuestro nivel de referencia, lo que hace que  $z_1 = 0$ .

$$\frac{P_2}{\gamma} = -z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$P_2 = -\gamma \left( z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \right)$$

Por la ecuación de continuidad, se tiene

$$V_2 = \frac{Q}{A_2}$$

$$V_2 = \frac{0.1 \frac{m^3}{s}}{0.785 (0.2)^2 m^2} = 3.18 \frac{m}{s}$$

Por lo tanto

$$P_2 = -9800 \frac{N}{m^3} \left( 2 m + \frac{(3.18)^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \times 9.8 \frac{m}{s^2}} \right)$$

$$P_2 = -24654 \frac{N}{m^2}$$

Esta es la presión en el punto más alto del sifón y como se aprecia es una presión de vacío. Para la presión en el punto 3, aplicamos Bernoulli entre 2 y 3.

$$\frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 = \frac{P_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3$$

$$\frac{P_3}{\gamma} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 - z_3 + \frac{V_2^2 - V_3^2}{2g}$$

Pero  $V_2 = V_3$

$$P_3 = P_2 + \gamma(z_2 - z_3)$$

$$P_3 = -24654 \frac{N}{m^2} + 9800 \frac{N}{m^3} \times 3.5 m$$

$$P_3 = 9645 \frac{N}{m^2}$$

Este es el valor de la presión en el punto considerado. Como se observa la presión en el interior del sifón varía de acuerdo al punto que se está analizando, el valor más bajo de presión se localiza en el punto más alto del mismo.

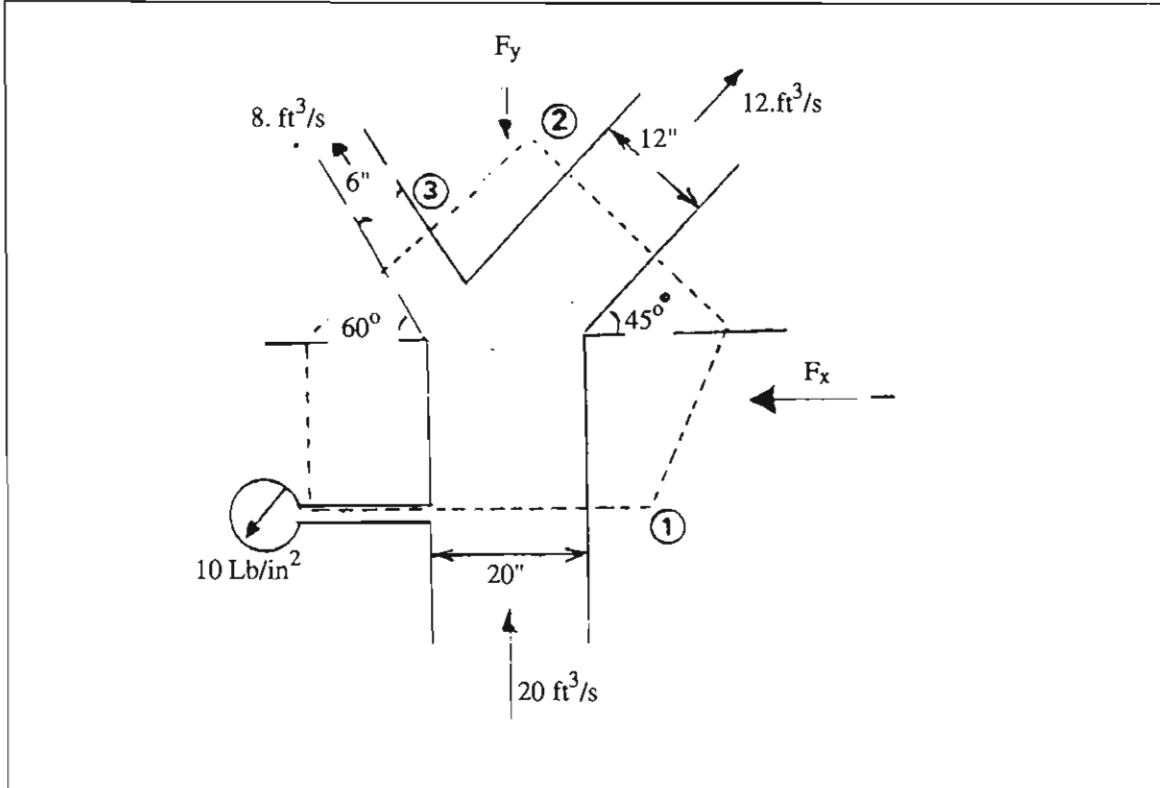
### Problema 5.13

Despreciando las pérdidas, determínese las componentes  $x$  y  $y$  necesarias para mantener la  $Y$  de la figura en su lugar. El plano de la  $Y$  es horizontal.

Solución:

Seleccionamos el volumen de control indicado en la figura con línea punteada. Al aplicar la ecuación de

continuidad a éste se encuentra que el flujo es permanente. Para encontrar el valor de las fuerzas que actúan en la Y aplicamos la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.



Para el eje x se tiene

$$\Sigma F_{ix} = \int_{s.c.} \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

$$-F_x + \int_1 P (-\vec{n}) dA + \int_2 P (-\vec{n}) dA + \int_3 P (-\vec{n}) dA =$$

$$\int_1 \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{i}) dA + \int_2 \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA + \int_3 \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

$$-F_x + P_1 A_1 \cos 90^\circ - P_2 A_2 \cos 45^\circ - P_3 A_3 \cos 120^\circ =$$

$$-u_1 \rho V_1 + u_2 \rho V_2 A_2 + u_3 \rho V_3 A_3$$

$$-F_x = -P_1 A_1 \cos 90^\circ + P_2 A_2 \cos 45^\circ + P_3 A_3 \cos 120^\circ +$$

$$\rho (-u_1 Q_1 + u_2 Q_2 + u_3 Q_3)$$

Para el eje y

$$-F_y = -P_1 A_1 \text{sen } 90^\circ + P_2 A_2 \text{sen } 45^\circ + P_3 A_3 \text{sen } 120^\circ +$$

$$\rho (-v_1 Q_1 + v_2 Q_2 + v_3 Q_3)$$



Las velocidades se obtiene por la ecuación de continuidad

La presión en 2 y 3 la encontramos por la ecuación de Bernoulli, aplicada entre 1 y 2.

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$V_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{20 \frac{ft^3}{s}}{0.785 \left(\frac{18}{12}\right)^2 ft^2} = 11.32 \frac{ft}{s}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{12 \frac{ft^3}{s}}{0.785 \left(\frac{12}{12}\right)^2 ft^2} = 15.29 \frac{ft}{s}$$

$$V_3 = \frac{Q_3}{A_3} = \frac{12 \frac{ft^3}{s}}{0.785 \left(\frac{6}{12}\right)^2 ft^2} = 40.76 \frac{ft}{s}$$

$$P_2 = \gamma \left( \frac{P_1}{\gamma} + V_1^2 - \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \right)$$

$$P_2 = 63.4 \frac{lb}{ft^3} \left( \frac{1440 \frac{lb}{ft^2}}{62.4 \frac{lb}{ft^3}} + \frac{(11.32)^2 - (15.29)^2 \frac{ft^2}{s^2}}{2 \times 32.2 \frac{ft}{s^2}} \right)$$

$$P_2 = 1337.6 \frac{lb}{ft^2}$$

Aplicando Bernoulli entre 1 y 3

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3$$

$$P_3 = \gamma \left( \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2 - V_3^2}{2g} \right)$$

$$P_3 = 62.4 \frac{lb}{ft^3} \left( \frac{1440 \frac{lb}{ft^2}}{62.4 \frac{lb}{ft^3}} + \frac{(11.32)^2 - (40.76)^2 \frac{ft^2}{s^2}}{2 \times 32.2 \frac{ft}{s^2}} \right)$$

$$P_3 = -45.62 \frac{lb}{ft^2}$$

Sustituyendo los valores encontrados, se tiene

$$\begin{aligned}
 -F_x &= -1440 \times 1.766 \cos 90^\circ + 1337.64 \times 0.785 \cos 45^\circ + \\
 &(-) 45.62 \times 0.35 \times \cos 120^\circ + 1.94 (-11.32 \cos 90^\circ \times 20 + \\
 &15.29 \times \cos 45^\circ \times 12 + 40.76 \times \cos 120^\circ \times 8) \\
 -F_x &= 685.9 \text{ lb} \\
 F_x &= -685.9 \text{ lb}
 \end{aligned}$$

La fuerza es hacia la derecha por el signo del resultado.  
Para el eje y se tiene

$$\begin{aligned}
 -F_y &= -1440 \times 1.766 \sin 90^\circ + 1337.64 \times 0.785 \sin 45^\circ + \\
 &(-) 45.62 \times 0.35 \times \sin 120^\circ + 1.94 (-11.32 \sin 90^\circ \times 20 + \\
 &15.29 \times \sin 45^\circ \times 12 + 40.76 \times \sin 120^\circ \times 8) - 1814.37 \\
 -F_y &= -1454.05 \text{ lb} \\
 F_y &= 1454.05 \text{ lb}
 \end{aligned}$$

La fuerza es hacia abajo. Los valores obtenidos son necesarios para que la Y no se mueva cuando ocurra el flujo indicado.

### 5.5 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento angular

La ecuación general de la cantidad de movimiento lineal a régimen no permanente aplicada a un volumen de control, ecuación 5.8, es

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d}{dt} \int_{v.c.} \vec{V} \rho \, dV + \int_{s.c.} \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dA$$

El momento de una fuerza  $\vec{F}$  alrededor de un punto O (figura 5.4) está dado por

$$M = \vec{r} \times \vec{F}$$

es el producto cruz o vectorial de  $\vec{F}$  y el vector de posición  $\vec{r}$  de un punto en la línea de acción del vector desde O.

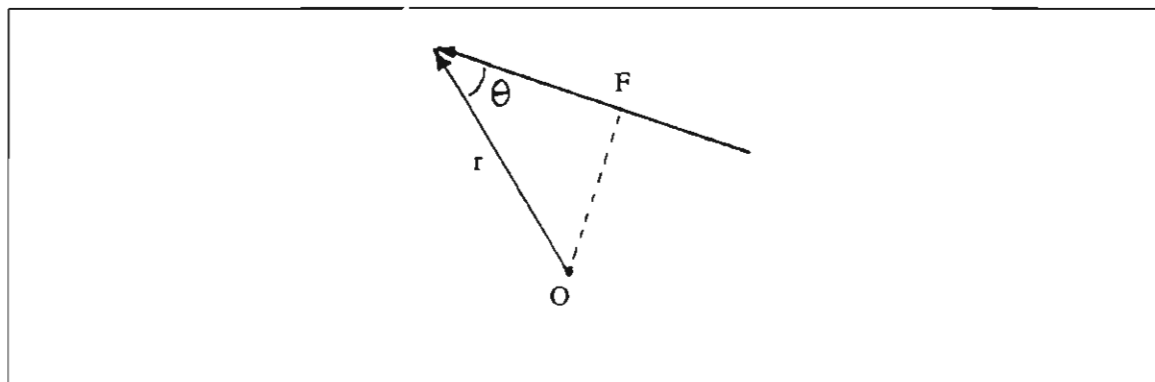


Figura 5.4 Representación del momento de un vector.

El producto vectorial de dos vectores es un vector perpendicular al plano definido por los dos vectores y con magnitud

$$\vec{F} \cdot \vec{r} \sin \theta$$

que es el producto de  $\vec{F}$  y la distancia más corta de 0 a la línea de acción de  $\vec{F}$ . El sentido del vector final sigue la regla de la mano derecha.

Para la ecuación de teorema de Reynolds con  $B = \vec{r} \times \vec{V}_m$  y  $\beta = \vec{r} \times \vec{V}$ , se obtiene la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento angular.

$$\vec{r} \times \Sigma \vec{F} = \frac{d}{dt} \int_{v.c.} \vec{r} \times \vec{V} dv + \int_{s.c.} \vec{r} \times \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad [5.12]$$

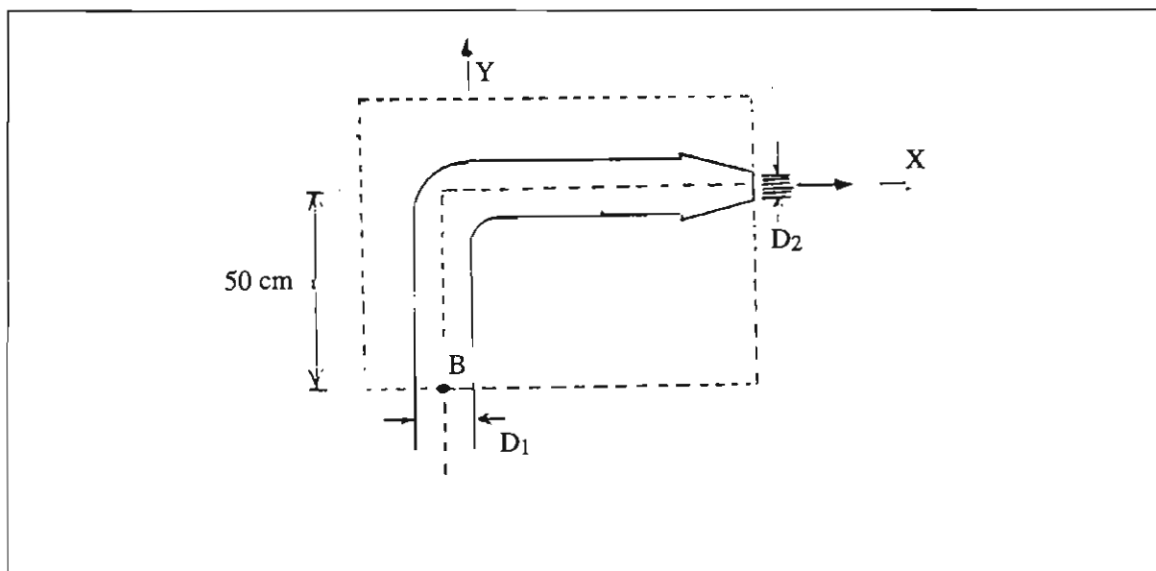
El lado izquierdo de la ecuación es el momento de torsión ejercido por cualesquiera fuerzas en el Volumen de control, y los términos del lado derecho representan la rapidez de cambio del momento de la cantidad de movimiento dentro del volumen de control más el flujo de momento de cantidad de movimiento a través de la superficie de control.

#### Problema 5.14

Un flujo de agua de  $0.3 \frac{m^3}{s}$  circula por el codo y la tobera de la figura, donde  $D_1 = 30 \text{ cm}$  y  $D_2 = 15 \text{ cm}$ . Calcular el momento que respecto al punto B ejerce el fluido sobre el codo.

Solución:

El codo está colocado horizontalmente. Para determinar el momento torsor que ejerce el fluido al pasar por el codo y salir por la tobera se aplica el teorema del momento cinético. Se selecciona el volumen de control indicado con línea punteada en la figura.



La ecuación de conservación de la masa nos dice que el flujo es permanente, por lo tanto,

$$\vec{M} = \int_{s.c.} \vec{r}_x \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

entonces

$$\vec{M} = \int_1 \vec{r}_x \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA + \int_2 \vec{r}_x \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \vec{V}_1 \rho (-V_1 A_1) + \vec{r}_2 \vec{V}_2 \rho (V_2 A_2)$$

con respecto al punto B

$$\vec{r}_1 = 0$$

$$\vec{V}_1 = V_1 \hat{j}$$

$$\vec{r}_2 = 0.5 \hat{j}$$

Por la ecuación de continuidad

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.3 \frac{m^3}{s}}{0.785 (0.15)^2 m^2} = 17 \frac{m}{s}$$

$$\vec{V}_2 = 17 \hat{i}$$

Por lo tanto

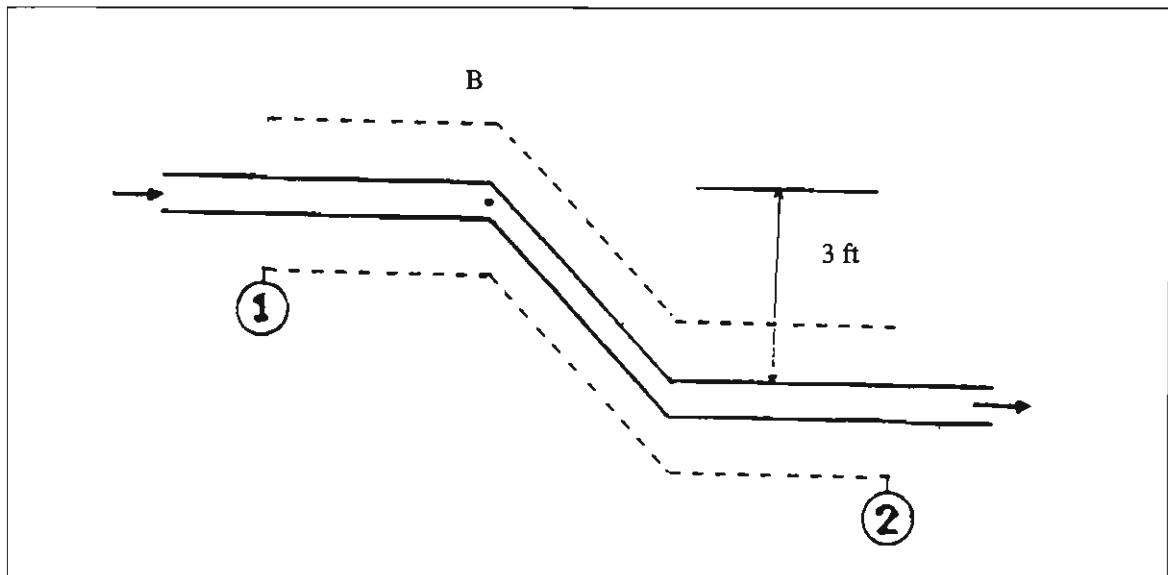
$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r}_2 \vec{V}_2 \rho Q \\ \vec{M} &= 0.5 \hat{j} m \times 17 \hat{i} \frac{m}{s} \times 1000 \frac{Kg}{m^3} \times 0.3 \frac{m^3}{s} \\ \vec{M} &= -2550 \hat{k} N \cdot m \end{aligned}$$

El signo negativo y el vector k indica que el momento es en sentido contrario a las manecillas del reloj y como consecuencia sale del papel hacia usted.

### Problema 5.15

Un flujo de  $0.15 \frac{ft^3}{s}$  circula por un doble codo como el de la figura. El diámetro es de 1 in en los tres tramos. La presión en la entrada es de  $25 \frac{lb}{in^2}$  y en el punto 2 es de  $10 \frac{lb}{in^2}$ . Calcular el momento que respecto al punto B ejerce el fluido sobre el codo.

Solución:



La ecuación de continuidad aplicada al volumen de control indicado en la figura muestra que el flujo es permanente. La velocidad de 1 pasa por el punto B al igual que la fuerza de presión, entonces el brazo de palanca es igual a cero, como consecuencia solo la velocidad y la presión de 2 tienen algún efecto sobre B. Al aplicar la ecuación de momento de la cantidad de movimiento se obtiene

$$\vec{r}_x \Sigma \vec{F} = \int_{s.c.} \vec{r}_x \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

$$\vec{M}_B + \vec{r}_1 x (\overline{P_1 A_1}) + \vec{r}_2 x (-\overline{P_2 A_2}) = \vec{r}_1 x \vec{V}_1 \rho Q + \vec{r}_2 x \vec{V}_2 \rho Q$$

Como  $\vec{r}_1 = 0$

El signo positivo indica que el momento es con el sentido de las manecillas del reloj y el vector  $\hat{k}$  indica que va hacia adentro del papel.

$$\vec{M}_B = \vec{r}_2 x (\overline{P_2 A_2}) + \vec{r}_2 x \vec{V}_2 \rho Q$$

$$\vec{r}_2 = -3 \hat{j}$$

$$\vec{V}_2 = 27.5 \hat{i}$$

$$\overline{P_2 A_2} = 7.85 \hat{i}$$

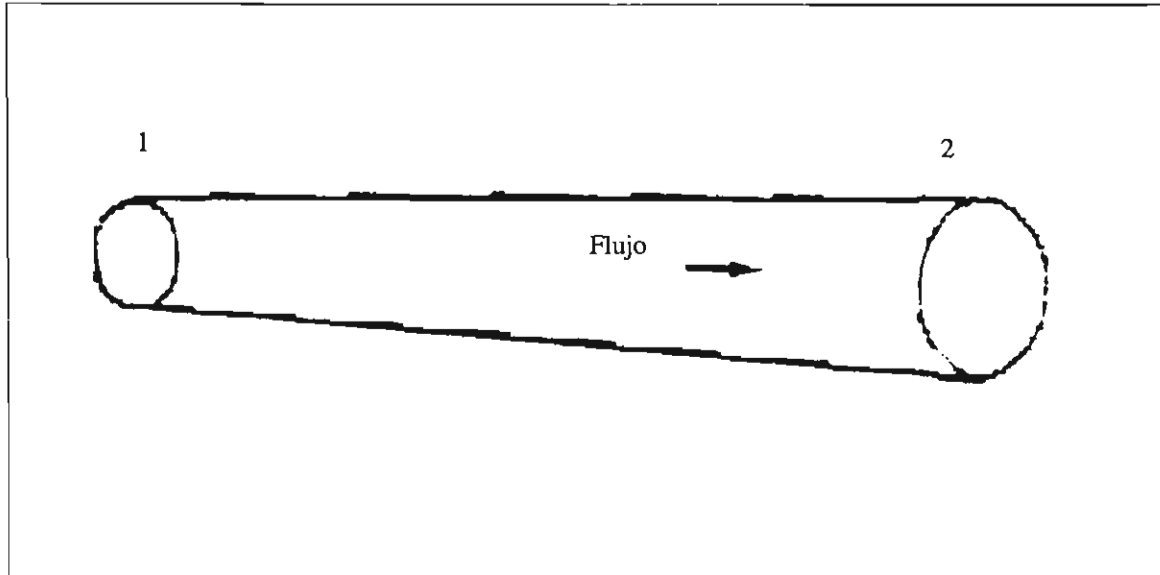
$$\vec{M}_B = -3 \hat{j} x 7.85 \hat{i} + (-3 \hat{j} x 27.5 \hat{i}) (1.94) (0.15)$$

$$\vec{M}_B = 47.55 \hat{k} \text{ lb-ft}$$

### Problemas propuestos

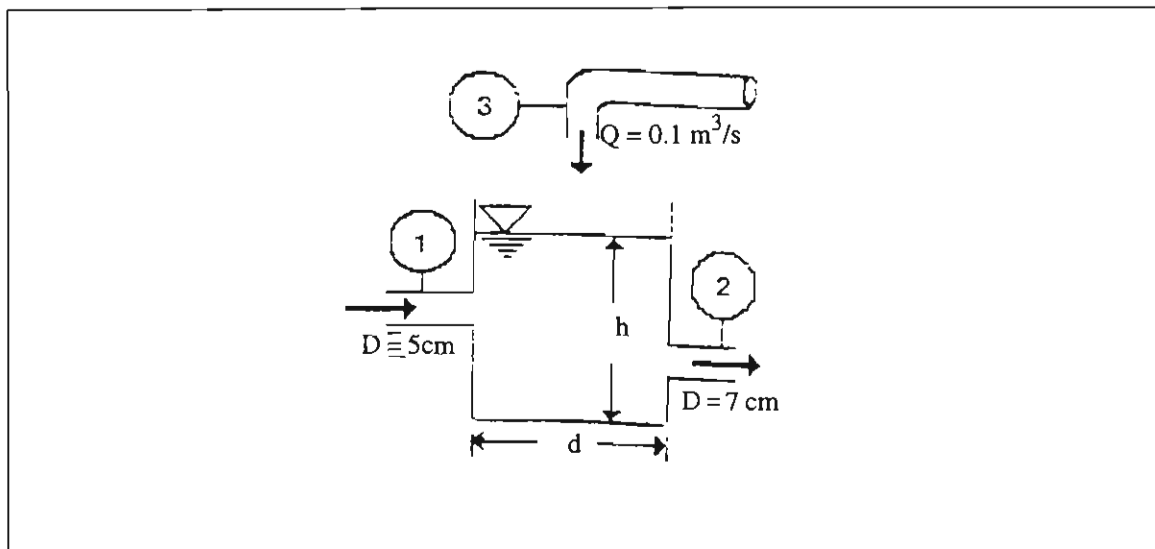
5.1 Suponer que la tubería mostrada en la figura tiene diámetros interior de 12 in y exterior de 18 in, en las secciones 1 y 2, respectivamente. Si fluye agua por el conducto a una velocidad de  $16.6 \frac{ft}{s}$  en la sección

2, hallar: a) la velocidad en la sección 1; b) el gasto volumétrico en la sección 1; c) el gasto volumétrico en la sección 2 y d) el gasto másico.

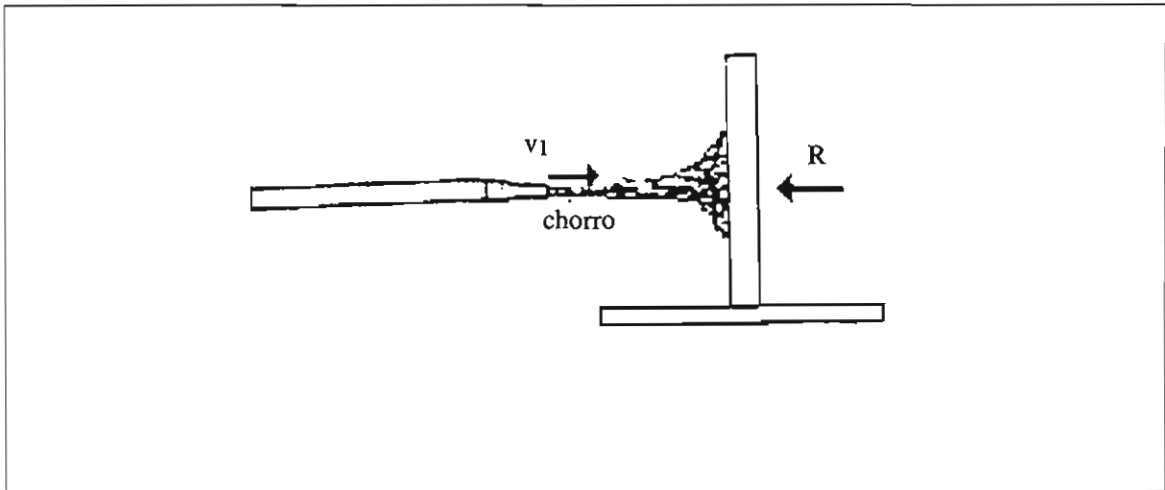


5.2 Un gas fluye a través de un conducto de sección cuadrada de  $0.1\text{ m}$  de lado. Si la velocidad del gas en un punto es  $7.55\frac{\text{m}}{\text{s}}$  de y su densidad es  $1.09\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  hallar el gasto másico y la densidad del gas cuando el conducto aumenta su sección a  $0.25\text{ m}$  por lado y la velocidad del gas es de

5.3 El tanque de agua de la figura se llena a través de la sección 1 con una velocidad  $V_1 = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}$  y a través de la sección 3 con  $Q_3 = 0.01\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ . Si el nivel  $h$  del agua es constante, determinar la velocidad de salida  $v_2$ .



5.4 Una manguera con boquilla descarga un chorro de agua horizontal sobre una placa vertical, como se muestra en la figura. El gasto de agua es  $0.025 \frac{m^3}{s}$  y el diámetro de salida es de  $30 \text{ mm}$ . Hallar la fuerza horizontal necesaria para mantener la placa en su lugar.



5.5 La boquilla horizontal de la figura tiene diámetros  $D_1 = 8 \text{ in}$  y  $D_2 = 4 \text{ in}$ . La presión de entrada es  $p_1 = 50 \text{ psia}$  y  $v_2 = 72 \frac{ft}{s}$  es la velocidad de salida. Calcular la fuerza que soportan los tornillos de la brida al sostener la boquilla. Suponer flujo permanente e incompresible.

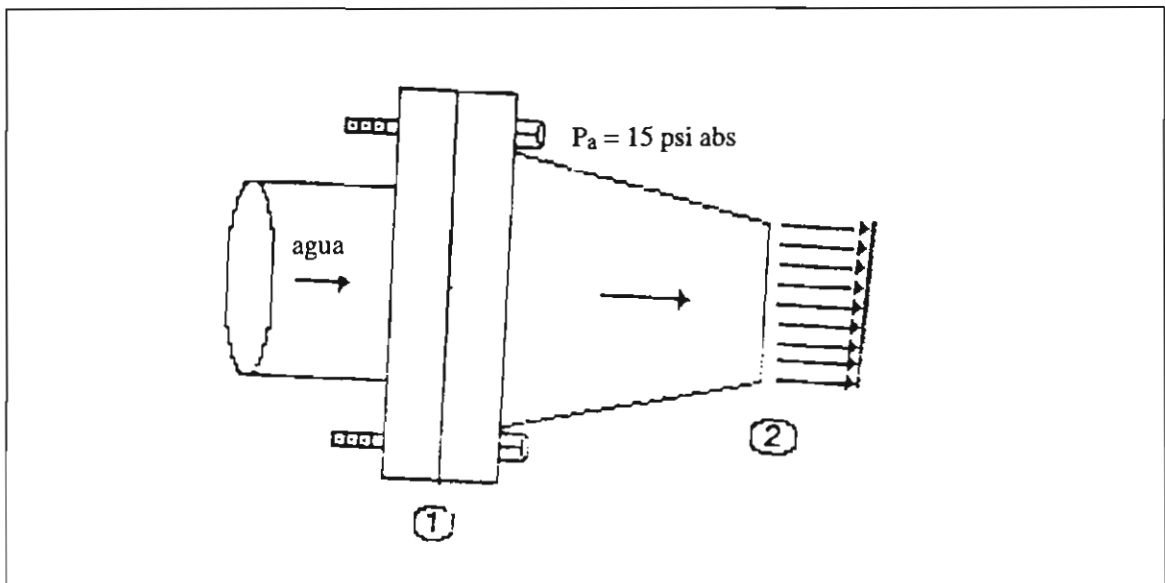
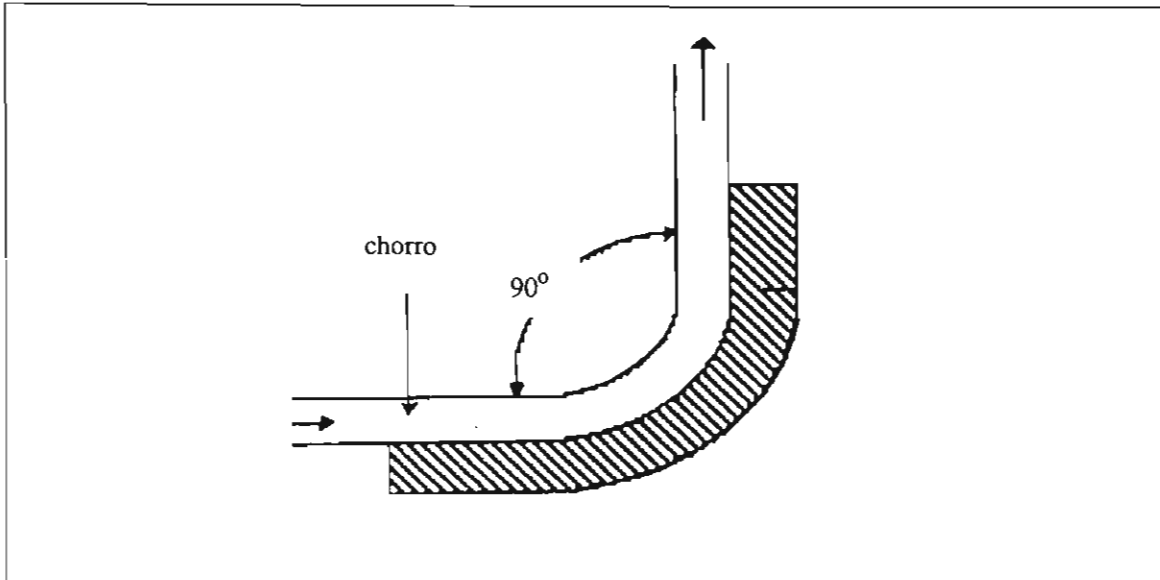


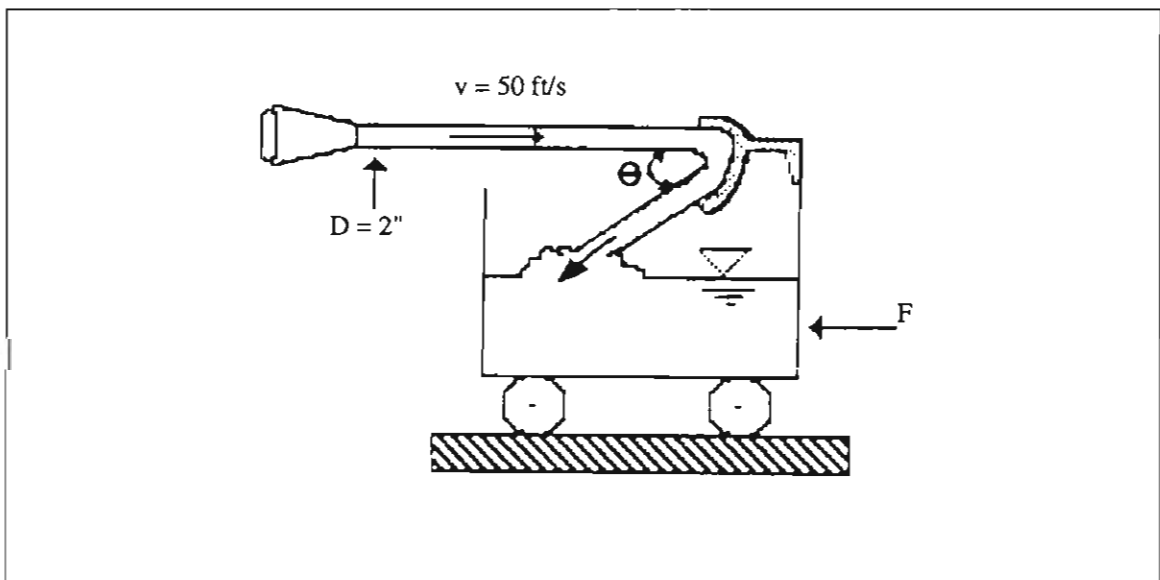
Figura del problema 5.5

5.6 Un chorro de agua que fluye libremente en la atmósfera es desviado por un perfil curvo, como se

muestra en la figura. Si el chorro tiene un diámetro de  $1.5 \text{ in}$  y una velocidad de  $25.5 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$ , ¿cuál es la fuerza requerida para mantener el perfil en su lugar?

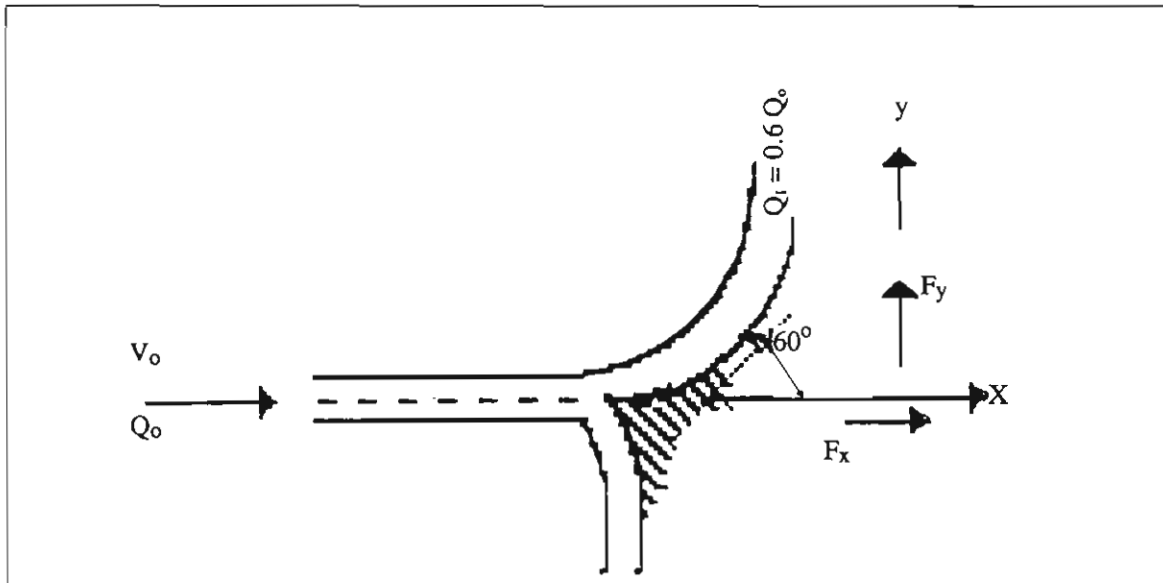


5.7 Un álabe con una deflexión de  $\theta = 90^\circ$  se monta sobre un tanque de agua, como se muestra en la figura, y recibe el golpe de un chorro de agua de  $2 \text{ in}$  de diámetro y  $50 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$  de velocidad, el cual cae sobre el tanque sin derramarse. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza  $F$  requerida para mantener el tanque estacionario?

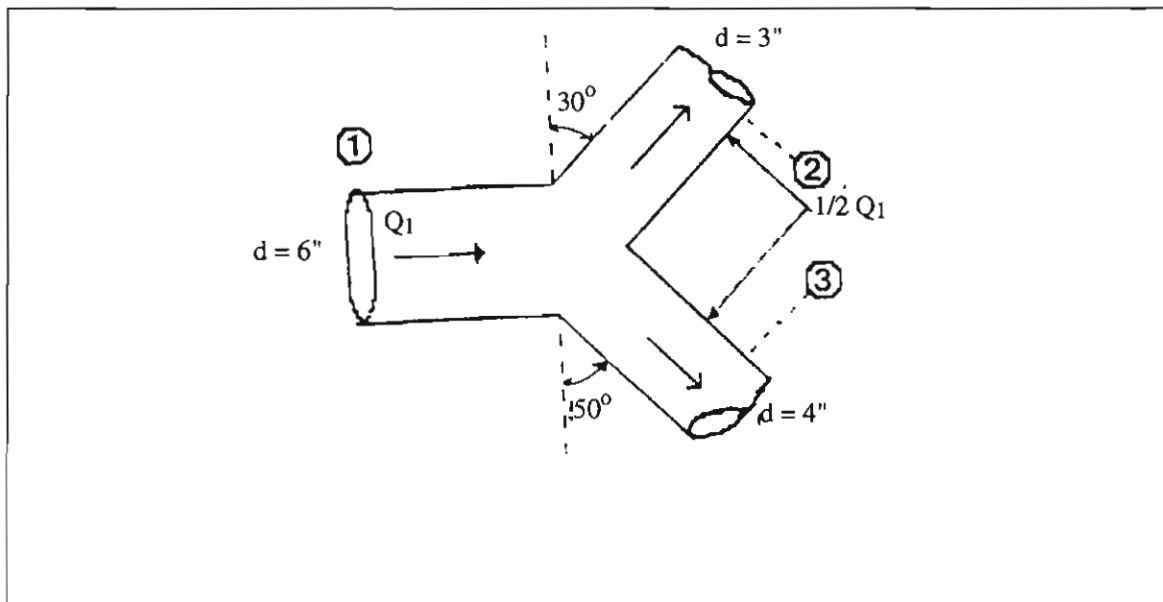




5.8 Si el alabe de la figura se mueve en la dirección de  $x$ , para  $u = 40 \frac{ft}{s}$ ,  $Q_0 = 2 \frac{ft^3}{s}$ ,  $\rho = 1.935 \frac{slug}{ft^3}$ , y  $V_0 = 120 \frac{ft}{s}$ , ¿cuáles son las componentes de la fuerza resultante?

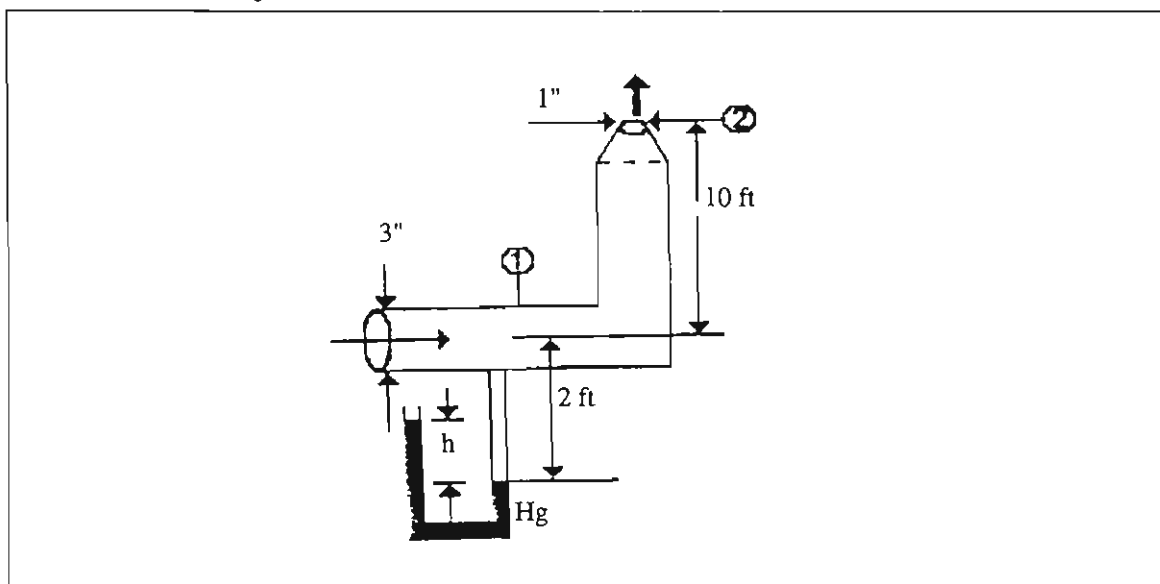


5.9 Un chorro de agua con un área de  $3 \text{ in}^2$  y  $200 \frac{ft}{s}$  de velocidad, golpea un álabe que lo desvía  $180^\circ$ , sin pérdidas por fricción. Hallar la fuerza ejercida si el alabe se mueve: a) en la misma dirección que el chorro con una velocidad de  $80 \frac{ft}{s}$ ; b) en la dirección opuesta al chorro con una velocidad de  $80 \frac{ft}{s}$ .

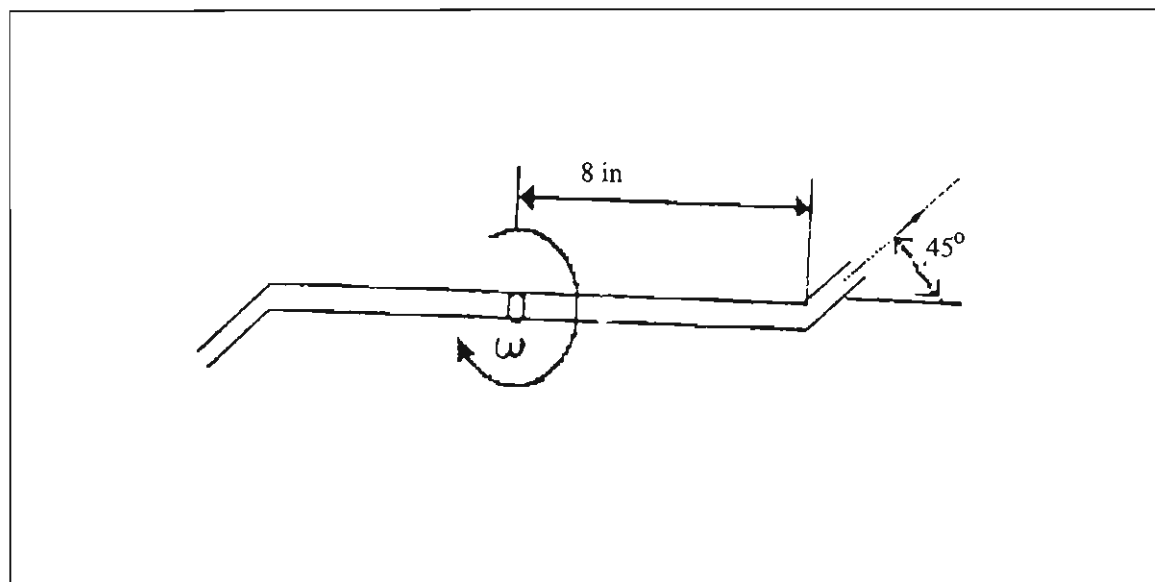


5.10 Una tubería en "y", como la que se muestra en la figura, divide la corriente en dos flujos iguales. En la sección 1,  $Q_1 = 4 \frac{ft^3}{s}$  y  $p_1 = 20 \text{ psig}$ . Despreciando las pérdidas, calcule las presiones  $p_2$  y  $p_3$ .

5.11 Si se desprecian las pérdidas del sistema mostrado en la figura ¿cuál será la lectura del manómetro de mercurio, si  $v_1 = 2 \frac{ft}{s}$ .



5.12 El rociador de agua simétrico de la figura tiene una descarga total de  $14 \text{ gpm}$  y no tiene fricción. Determinar su velocidad angular, si el diámetro de la punta de la boquilla es de  $0.25 \text{ in}$ .



5.13 En la figura, para un impulsor de bomba centrífuga que descarga de agua. ¿Qué par torsor se debe ejercer sobre el impulsor?



**CAPITULO 6**  
**CONSERVACION DE LA ENERGIA**



Aplicando el teorema de transporte de Reynolds a la primera ley de la termodinámica, la variable  $B$  es ahora la energía  $E$ , y la energía por unidad de masa es

$$\beta = \frac{dE}{dm} = e. \text{ Por lo tanto la ecuación se escribe como}$$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{s.c.} e \rho \, dv + \int_{s.c.} e \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dA \quad [6.1]$$

Cabe recordar que  $Q$  positivo es el calor comunicado al sistema y que  $W$  positivo significa el trabajo realizado por el sistema.

La energía del sistema por unidad de masa, puede ser de varios tipos:

$$e = e_{\text{interna}} + e_{\text{cinética}} + e_{\text{potencial}} + e_{\text{otros}} \quad [6.2]$$

donde  $e_{\text{otros}}$  se refiere a cambios de posición, de composición química, reacciones nucleares y efectos electrostáticos y magnéticos. Aquí se desprecia este término y se consideran sólo los tres primeros, con  $z$  definida como la energía potencial:

$$e = U + \frac{1}{2} V^2 + g z \quad [6.3]$$

El término de calor se puede dividir en tres efectos: conducción, convección y radiación, y su estudio es muy amplio, pero en este libro, calor y trabajo no se analizarán en detalle.

Utilizando por conveniencia el punto encima para indicar derivada temporal, dividimos el término de trabajo en tres partes:

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \dot{W}_{\text{motor}} + \dot{W}_{\text{presión}} - \dot{W}_{\text{esfuerzos viscosos}} \\ \dot{W} &= \dot{W}_s + \dot{W}_p + \dot{W}_v \end{aligned} \quad [6.4]$$

El trabajo de las fuerzas gravitatorias se incluye como la energía potencial; y otros tipos, como los debidos a las fuerzas electromagnéticas, se excluyen de este análisis. El trabajo de las partes móviles, que se llamarán de motor, es la porción suministrada por una máquina (bomba, ventilador) cuyo eje atraviesa la superficie de control hacia el interior del volumen de control. El trabajo de las fuerzas de presión sólo se produce en la superficie. En el interior del volumen de control aparecen fuerzas iguales y opuestas las cuales se anulan. El trabajo de las fuerzas de presión sobre un elemento de área  $dA$  es igual a la fuerza elemental por la componente normal de la velocidad hacia el volumen de control.

$$d\dot{W}_p = -(P \, dA) \vec{V}_{n, \text{ent}} = P (-\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dA \quad [6.5]$$

El trabajo total, por unidad de tiempo, es la integral sobre la superficie de control.

$$\dot{W}_p = \int_{s.c.} P (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dA \quad [6.6]$$

El trabajo de deformación debido a los esfuerzos viscosos, sólo cuenta en la superficie (ya que los

esfuerzos del interior se cancelan), y consiste en el producto de cada esfuerzo viscoso (uno normal y dos tangenciales) por la componente respectiva de la velocidad.

$$\begin{aligned} d\dot{W}_v &= -T \cdot \vec{V} dA \\ \dot{W}_v &= - \int_{s.c.} T \cdot \vec{V} dA \end{aligned} \quad [6.7]$$

donde  $T$  es el vector esfuerzo sobre el elemento de área  $dA$ . Este término puede ser nulo o despreciable en ciertos tipos particulares de superficie de control, por ejemplo:

a) Superficie sólida. En aquellas partes de la superficie de control que sean paredes sólidas fijas,  $V = 0$  por la condición de no deslizamiento, por lo tanto  $\dot{W}_v = 0$  idénticamente.

b) Superficie de una máquina. En este caso, el esfuerzo viscoso es una contribución de la máquina y por ello lo incluimos en el término  $\dot{W}_s$ .

c) Entrada o salida. En una entrada o salida, el flujo es aproximadamente normal al elemento de área  $dA$ ; por ello, la única contribución procede del esfuerzo viscoso normal  $T_n \cdot V_n dA$ . Como los esfuerzos viscosos normales son muy pequeños, es habitual despreciar el trabajo de los esfuerzos viscosos en las entradas y salidas del volumen de control.

d) Superficie de corriente. Si la superficie de control es una superficie de corriente, como la capa límite, los términos viscosos pueden ser calculados y retenidos sobre la superficie de corriente si son apreciables.

El resultado global de la exposición anterior indica que el término de trabajo de la ecuación 6.1 consiste de

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \int_{s.c.} P (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA - \int_{s.c.} (T \cdot V)_{s.s.} dA$$

donde el subíndice s.s. indica superficie de corriente. Al sustituir en la ecuación 6.1 se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \dot{W}_s - (\dot{W}_v)_{s.s.} &= \frac{d}{dt} \int_{v.c.} e \rho dv + \\ &+ \int_{s.c.} \left( e + \frac{P}{\rho} \right) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \end{aligned} \quad [6.8]$$

Sustituyendo el valor de  $e$  de la ecuación 6.3, y ahora aparece la entalpía definida como  $\hat{h} = \hat{u} + \frac{P}{\rho}$ . La forma final de la ecuación de la energía para un volumen de control es

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_v &= \frac{d}{dt} \int_{v.c.} \left( \hat{u} + \frac{1}{2} V^2 + g z \right) \rho dv + \\ &+ \int_{s.c.} \left( h + \frac{1}{2} V^2 + g z \right) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \end{aligned} \quad [6.9]$$

o bien

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_v = \frac{d}{dt} \int \left( \hat{u} + \frac{1}{2} V^2 + g z \right) \rho \quad [6.10]$$

$$\int_{s.c.} \left( -\frac{P}{\rho} + u + \frac{1}{2} V^2 + g z \right) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

### 6.1 Ecuación de energía para un flujo permanente

La ecuación de energía para un flujo permanente, despreciando el trabajo de las fuerzas viscosas, se presenta como

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \int_{s.c.} \left( \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g z + \hat{u} \right) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad [6.11]$$

o bien

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \int_{s.c.} \left( \frac{V^2}{2} + g z + \hat{h} \right) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad [6.12]$$

Estas ecuaciones son más simples que la 6.10, porque en su aplicación no se incluye la masa del fluido dentro del volumen de control, ellas sólo hacen referencia a la velocidad de transferencia de calor y a la inercia a través de la superficie de control, más la rapidez con la que el sistema realiza trabajo sobre sus alrededores. También se ha eliminado el trabajo de las fuerzas viscosas que, como ya se dijo, se puede despreciar.

Si el volumen de control seleccionado tiene una entrada y una salida, supuestas unidimensionales, la ecuación 6.12 se reduce a una relación muy usada en ingeniería, si 1 es la entrada y 2 es la salida, se obtiene

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = -\dot{m}_1 \left( \hat{h}_1 + \frac{1}{2} V_1^2 + g z_1 \right) + \dot{m}_2 \left( \hat{h}_2 + \frac{1}{2} V_2^2 + g z_2 \right) \quad [6.13]$$

pero, por la ecuación de continuidad,  $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$  reagrupando

$$\hat{h}_1 + \frac{1}{2} V_1^2 + g z_1 = \left( \hat{h}_2 + \frac{1}{2} V_2^2 + g z_2 \right) - q + w_s \quad [6.14]$$

donde  $q = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$  es el calor comunicado al fluido por unidad de masa.  $w_s = \frac{\dot{W}_s}{\dot{m}}$  es el trabajo realizado por el fluido por unidad de masa. Esta ecuación de energía dice que la entalpía de remanso,  $H_1 = \left( \hat{h}_1 + \frac{1}{2} V_1^2 + g z_1 \right)$  difiere del valor  $H_2$  sólo si hay transferencia de calor o trabajo de motor entre las secciones 1 y 2. Si se divide entre  $g$ , cada término es una altura (puesto que la ecuación 6.14 tiene unidades de energía), o carga, que es la forma utilizada en ingeniería. Colocando el valor de  $h$ , se obtiene:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{\hat{U}_1}{g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\hat{U}_2}{g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_s - h_q \quad [6.15]$$

donde  $h_s = \frac{w_s}{g}$ ;  $h_q = \frac{q}{g}$  son las variaciones de trabajo de partes móviles y de transferencia de calor.

De esta ecuación



$$\frac{\hat{u}_2 - \hat{u}_1 - q}{g} = \frac{\hat{u}_2}{g} - \frac{\hat{u}_1}{g} - h_q = \Delta h_{\text{perdidas}} + \Delta h_{\text{rev}} \quad [6.16]$$

Las variaciones reversibles de carga se deben a la transferencia de calor gradual o al intercambio entre energía mecánica e interna durante procesos de expansión o compresión. Esto ocurre en problemas de dinámica de gases. Las pérdidas irreversibles tienen lugar en los flujos reales como resultado de la disipación viscosa que convierte la energía mecánica en energía interna no recuperable y en transferencia de calor. Al término  $\Delta h$  de las pérdidas se le identificará como  $h_f$  para señalar que son las pérdidas por fricción. La segunda ley de la termodinámica impone que  $h_f$  siempre sea positiva en un flujo real. Con esto la ecuación de energía queda como

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_s + h_f \quad [6.17]$$

## 6.2 Diagrama de energía

En la figura 6.1 se muestran algunos efectos que se presentan en flujos con transferencia de trabajo y fricción.

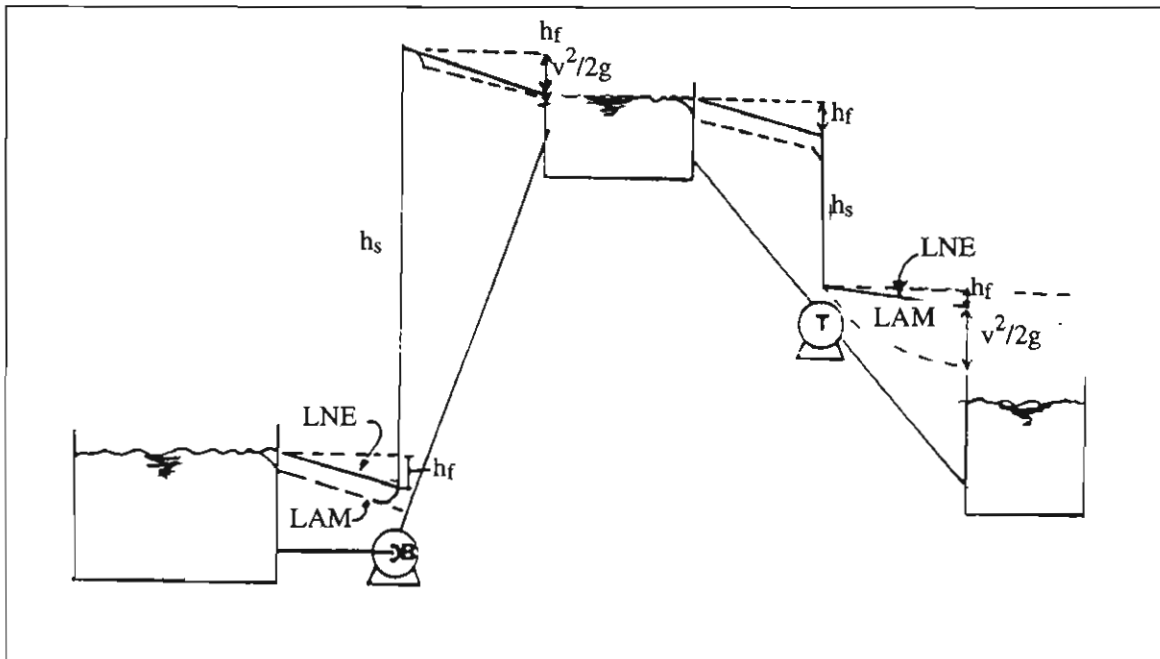


Figura 6.1 Representación gráfica de la energía.

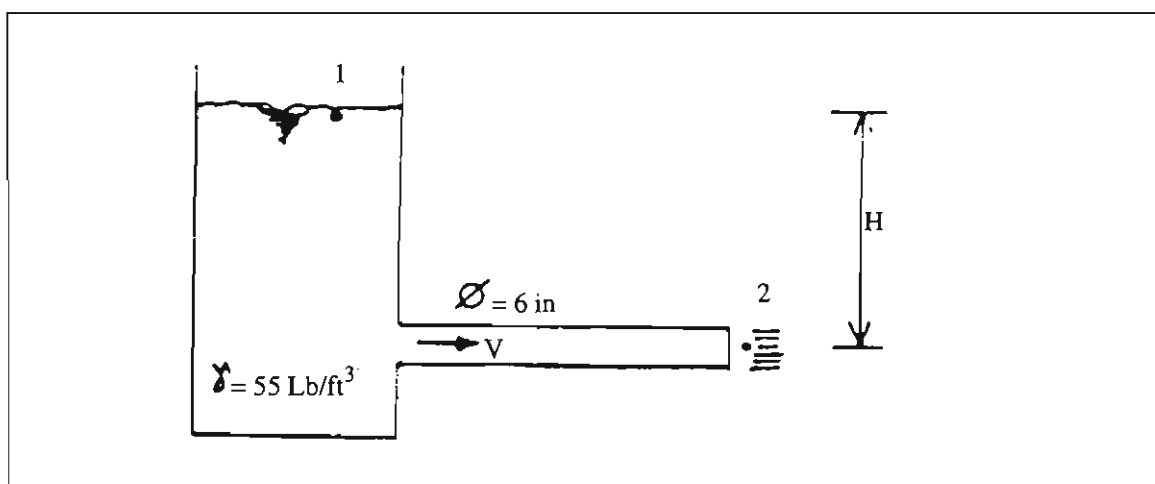
La línea del nivel energético (LNE) es determinada por la constante de Bernoulli, es decir, por la energía potencial más la energía cinética más la energía de flujo. Esta LNE comienza a la altura del fluido en el depósito y desciende lentamente a lo largo del primer conducto debido a la fricción  $h_f$ . La línea de altura motriz (LAM) está representada por el valor de la energía de flujo dentro de los conductos. En el primer tramo, desciende con la misma pendiente, puesto que la velocidad permanece constante. La LNE se eleva bruscamente al pasar la bomba en una cantidad  $h_s$ , correspondiente a la potencia comunicada por la bomba.

Hay un aumento en la presión, que se refleja en la LAM. Ambas líneas descienden en el segundo tramo y la LAM queda al nivel de la superficie libre del fluido puesto que la presión es igual a la atmosférica.

Las LNE y LAM caen bruscamente a través de la turbina en una cantidad  $h$ , que corresponde a la potencia extraída por la turbina. El flujo descarga finalmente a la atmósfera. La LNE muestra un ligero descenso debido a la fricción mientras que la LAM descende hasta la presión atmosférica, es decir, termina exactamente a la altura de la tubería de salida.

### Problema 6.1

Las pérdidas en la figura, para  $H = 25 \text{ ft}$  son de  $3 \frac{V^2}{2g}$ . ¿Cuánto vale la descarga?



Solución:

Para determinar el gasto que sale del depósito, es necesario conocer la velocidad de salida del fluido, esto es,

$$Q = VA$$

Aplicando la ecuación de conservación de la energía entre los puntos 1 y 2, se tiene

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{f_s} + h_t$$

Como no hay trabajo de flecha,  $h_t = 0$ ; la velocidad del punto 1 es despreciable, lo que hace que  $V_1 = 0$ ; y la presión en los puntos 1 y 2 es igual a la presión atmosférica, con lo que se obtiene

$$z_1 - z_2 = \frac{V_2^2}{2g} + h_{f_s}$$

$$z_1 - z_2 = \frac{V_1^2}{2g} + 3 \frac{V_2^2}{2g}$$

$$z_1 - z_2 = 4 \frac{V_2^2}{2g}$$

Despejando a la velocidad

$$V_2 = \left[ \frac{2g(z_1 - z_2)}{4} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{g(z_1 - z_2)}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

sustituyendo valores con  $z_2 = 0$

Aplicando la ecuación del caudal

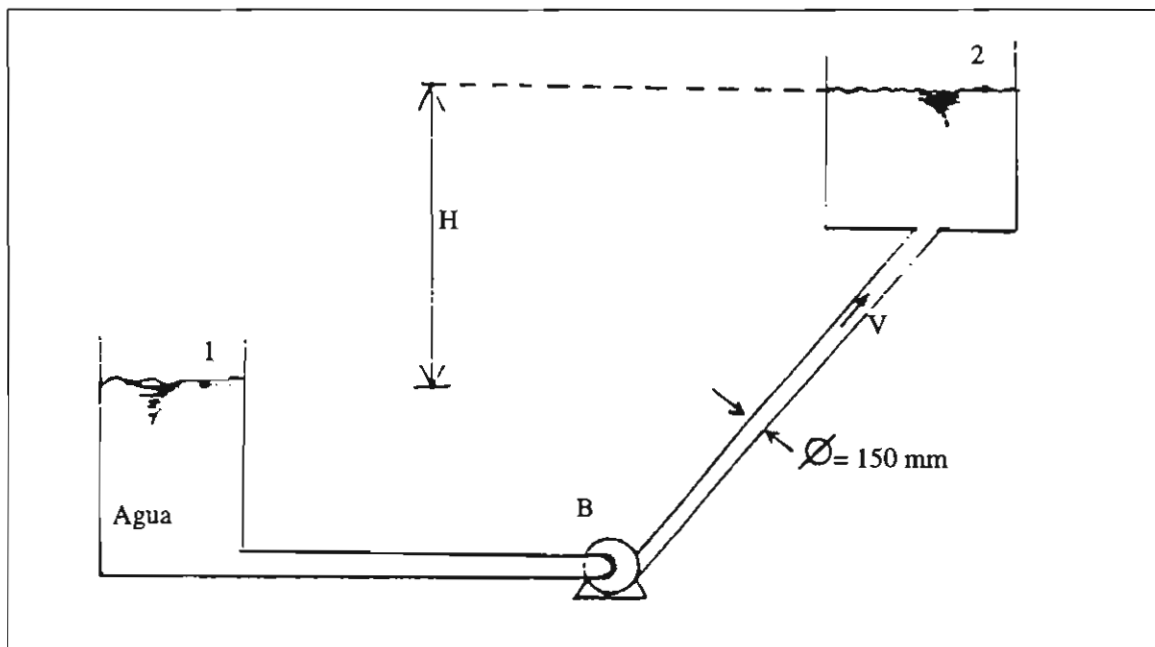
$$V_2 = \left[ \frac{32.2 \frac{ft}{s^2} \times 25 ft}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$V_2 = 20.0 \frac{ft}{s}$$

$$Q = 20.0 \frac{ft}{s} \times 0.785 \left( \frac{6}{12} \right)^2 ft^2$$

$$Q = 3.94 \frac{ft^3}{s}$$

Este es el valor del caudal que sale por el depósito con las pérdidas consideradas.



### Problema 6.2

Determinese la potencia del eje para una bomba de 80 por ciento de eficiencia, para descargar a  $30 \frac{L}{s}$  a través del sistema de la figura. Las pérdidas del sistema excluyendo las de la bomba, son  $12 \frac{V^2}{2g}$  y  $H = 6 m$ .

Solución:

Para determinar la potencia en el eje de una bomba se utiliza la ecuación

$$P = \frac{\gamma Q H_s}{\eta}$$

en donde  $H_s$  es el trabajo de flecha que se obtiene al aplicar la ecuación de conservación de la energía entre los puntos 1 y 2 localizados en los recipientes de succión y descarga respectivamente, esto es:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 - h_{f_s} + h_r$$

Las presiones  $P_1$  y  $P_2$  son iguales a la presión atmosférica; las velocidades  $V_1$  y  $V_2$  de los puntos considerados son tan pequeñas que se desprecian; la diferencia de niveles  $z_1 - z_2$  es igual a la altura  $H$ , por lo tanto se obtiene:

$$\begin{aligned} H_s &= z_1 - z_2 - h_{f_s} \\ H_s &= -H - h_{f_s} \\ H_s &= -(H + h_{f_s}) \end{aligned}$$

El signo negativo indica que se realiza trabajo sobre el sistema, que en este caso es el fluido que se está bombeando. Sustituyendo valores resulta:

$$H_s = - \left( 16 m + 12 \frac{V^2}{2g} \right)$$

De la ecuación de caudal

$$Q = VA; \quad V = \frac{Q}{A}$$

Por lo tanto:

$$V = \frac{0.030 \frac{m^3}{s}}{0.785 (0.15)^2 m^2}$$

$$V = 1.7 \frac{m}{s}$$

$$H_s = - \left( 16 m + \frac{12 (1.7)^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \times 9.8 \frac{m}{s^2}} \right)$$

$$H_s = - 17.77 m$$

Con este valor de  $H$  se obtiene la potencia

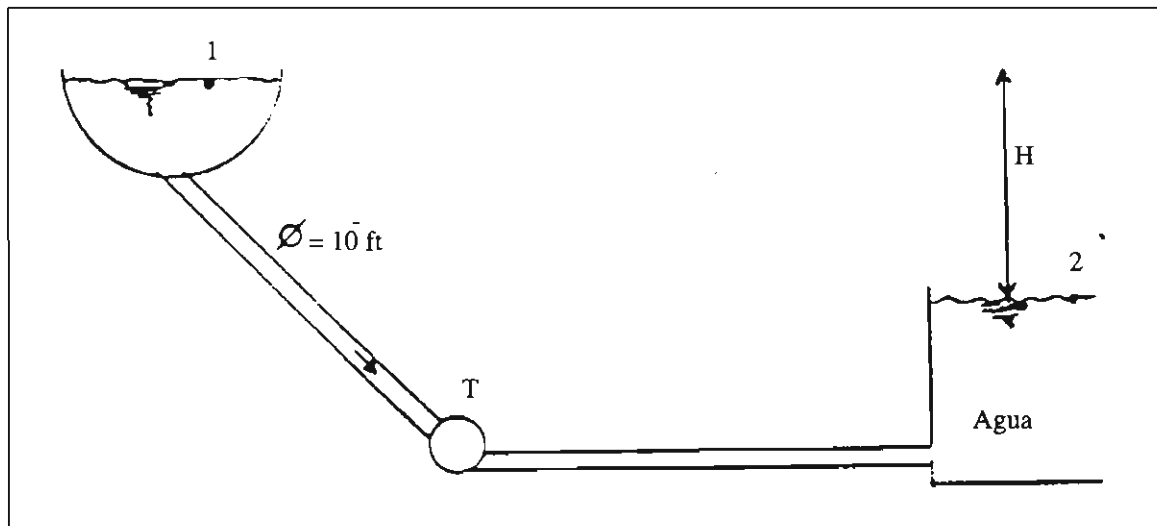
$$p = \frac{9800 \frac{N}{m^3} \times 0.03 \frac{m^3}{s} \times 17.77 m}{0.8}$$

$$p = 6530 \text{ Watts}$$

Esta es la potencia que necesita la bomba en el eje para bombear el gasto y la carga que se indican en el problema.

### Problema 6.3

Si la eficiencia del sistema y turbina de la figura es del 80 por ciento, ¿qué potencia se produce para  $H = 200 \text{ ft}$  y  $Q = 1000 \frac{ft^3}{s}$ ?



Solución:

En el caso de una turbina, la potencia se determina por:

$$p = \gamma Q H, \eta$$

El trabajo de flecha  $H_s$  de la turbina, se determina al aplicar la ecuación de conservación de la energía entre los puntos 1 y 2 de las superficies libres del fluido, tal como se indica en la figura, esto es:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{f_s} + h_r$$

Como los recipientes están abiertos a la atmósfera, entonces las presiones en 1 y 2 son iguales a la presión atmosférica; las velocidades  $V_1$  y  $V_2$  son tan pequeñas que se desprecian; como las pérdidas del sistema ya están incluidas en la eficiencia, se tiene:

$$H_s = z_1 - z_2 = H$$

sustituyendo

$$H_s = 200 \text{ ft}$$

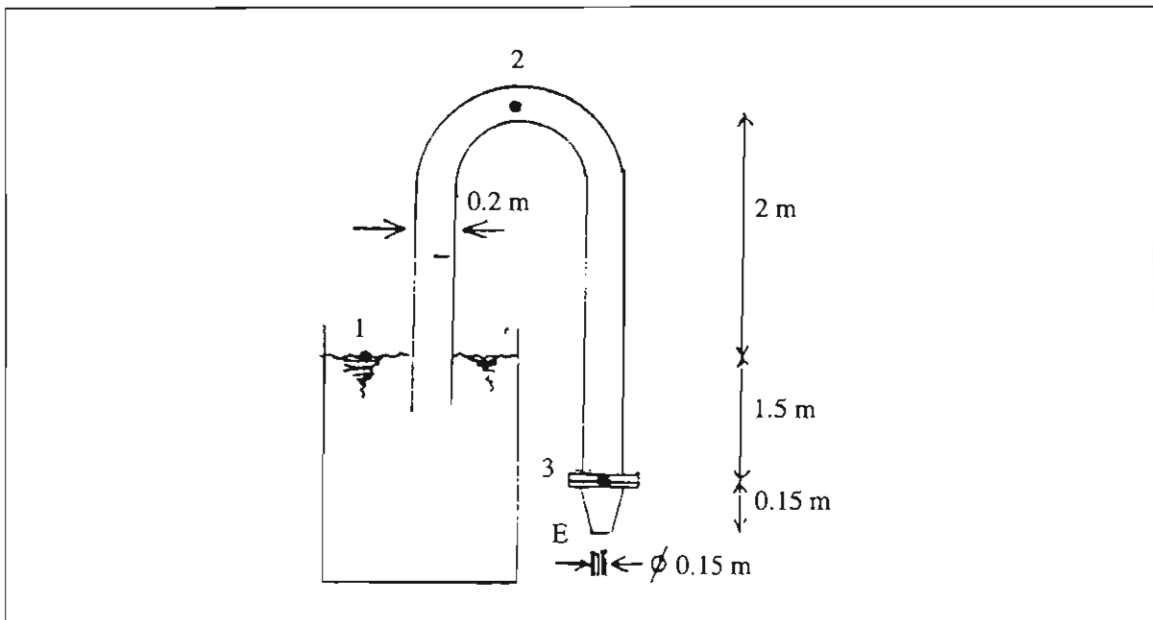
La potencia será:

$$p = 62.4 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} \times 1000 \frac{\text{ft}^3}{\text{s}} \times 200 \text{ ft} \times 0.8$$

$$p = 9984000 \frac{\text{lb} \cdot \text{ft}}{\text{s}} \times \left( \frac{1 \text{ HP}}{550 \frac{\text{lb} \cdot \text{ft}}{\text{s}}} \right)$$

$$p = 18152 \text{ HP}$$

Esta es la potencia que generará la turbina con las condiciones indicadas



#### Problema 6.4

Para el sifón de la figura, las pérdidas de 1 a 2 son  $1.7 \frac{V_2^2}{2g}$ ; de 2 a 3 de  $0.9 \frac{V_2^2}{2g}$ ; y a través de la boquilla  $0.06 \frac{V_E^2}{2g}$  donde  $V_E$  es la velocidad de salida, calcúlese la descarga y la presión en las secciones 2 y 3.

Solución:

Para determinar el gasto que pasa a través del sifón, es necesario aplicar la ecuación de conservación de la energía entre los puntos 1 y E,

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_E}{\gamma} + \frac{V_E^2}{2g} + z_E + h_{f_w} + h_s$$

La presión en el punto 1 y en el punto E es igual a la presión atmosférica; la velocidad del punto 1 es tan pequeña que se desprecia; no existe trabajo de flecha; las pérdidas por fricción son iguales a la suma de las pérdidas parciales que se tienen en el sistema, por esto

$$z_1 = z_E + \frac{V_E^2}{2g} + 1.7 \frac{V_E^2}{2g} + 0.9 \frac{V_2^2}{2g} + 0.06 \frac{V_E^2}{2g}$$
$$z_1 - z_E = 1.06 \frac{V_E^2}{2g} + 2.6 \frac{V_2^2}{2g}$$

Por la ecuación de continuidad

$$Q_1 = Q_E$$
$$V_2 A_2 = V_E A_E$$
$$V_2 = V_E \frac{A_E}{A_2}$$

sustituyendo este valor

$$z_1 - z_E = 1.06 \frac{V_E^2}{2g} + 2.6 \left( \frac{A_E}{A_2} \right)^2 \frac{V_E^2}{2g}$$
$$z_1 - z_E = \left( 1.06 + 2.6 \left( \frac{A_E}{A_2} \right)^2 \right) \frac{V_E^2}{2g}$$

Despejando el valor de velocidad de salida se tiene

$$V_E = \left( \frac{(z_1 - z_E) 2g}{1.06 + 2.6 \left( \frac{A_E}{A_2} \right)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

sustituyendo los valores

$$V_E = \left( \frac{1.65 \text{ m} \times 2 \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1.06 + 2.6 \left( \frac{0.15}{0.2} \right)^4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$V = 4.14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Este valor multiplicado por el área de salida proporciona el caudal que se está manejando:

$$Q = V_E A_E$$

$$Q = 4.14 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.785 (0.15)^2$$

$$Q = 0.073 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Para determinar la presión en el punto 2, se aplica la ecuación de energía entre 1 y 2, o bien, entre 2 y E, siempre en la dirección del flujo; el resultado que se obtenga debe ser el mismo, con la única diferencia de que las pérdidas por fricción deberán ser distintas, ya que solamente se consideran las que estén entre los puntos señalados, es decir:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{f_{1-2}} + h_s$$

Con las simplificaciones del caso anterior, se tiene:

Por la ecuación de continuidad  
Sustituyendo valores

$$\frac{P_2}{\gamma} = z_1 - z_2 - \frac{V_2^2}{2g} - 1.7 \frac{V_2^2}{2g}$$

$$P_2 = \gamma \left( z_1 - z_2 - 2.7 \frac{V_2^2}{2g} \right)$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2}$$

$$V_2 = \frac{0.073 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{0.785 (0.2)^2 \text{ m}^2}$$



$$P_2 = 9800 \frac{N}{m^3} \left( -2 \text{ m} - \frac{2.7 \times (2.32)^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \times 9.8 \frac{m}{s^2}} \right)$$

$$P_2 = -26896 \frac{N}{m^2}$$

En el sifón siempre el punto más alto tendrá la presión negativa más baja, y se deberá tener cuidado que esta presión sea mayor que la presión de vaporización del fluido que se está manejando, de lo contrario se presentaría el fenómeno de cavitación, con lo cual se interrumpiría el flujo.

Para la presión del punto 3 se procede de manera semejante, aplicando la ecuación de conservación de energía entre los puntos 1 y 3, 2 y 3, o bien entre 3 y E, el resultado deberá ser el mismo en cualquiera de los tres casos.

$$\frac{P_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3 = \frac{P_E}{\gamma} + \frac{V_E^2}{2g} + z_E + h_{f_{3-E}}$$

Con las simplificaciones adecuadas, se obtiene:

$$P_3 = \gamma \left( z_E - z_3 + \frac{V_E^2}{2g} - \frac{V_3^2}{2g} + 0.06 \frac{V_E^2}{2g} \right)$$

$$P_3 = \gamma \left( z_E - z_3 + 1.06 \frac{V_3^2}{2g} \right)$$

Sustituyendo valores:

$$P_3 = 9800 \frac{N}{m^3} \left( -0.15 \text{ m} + 1.06 \frac{(4.14)^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \times 9.8 \frac{m}{s^2}} - \frac{(2.32)^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \times 9.8 \frac{m}{s^2}} \right)$$

$$P_3 = 4923 \frac{N}{m^2}$$

### 6.3 Presiones estática, dinámica y de estancamiento

Como la determinación de la velocidad en cierto número de puntos de una sección transversal permite evaluar la descarga, la medición de la velocidad es una fase importante al medir el flujo. La velocidad se determina midiendo el tiempo que requiere una partícula determinada para viajar una distancia conocida. El desarrollo de esta técnica ha evolucionado hasta el grado en que es posible estudiar el flujo en regiones sumamente pequeñas, donde la introducción de un instrumento para medir la velocidad alteraría el flujo normal, el cual posiblemente desaparecería. Se debe contar con una zona de observación (transparente) y con ayuda de potentes luces, con un microscopio de alta resolución y una cámara de cine de alta velocidad es posible fotografiar las impurezas más pequeñas del fluido. Al examinar la película se determina la velocidad de las partículas y por consiguiente la velocidad del fluido en una región pequeña.

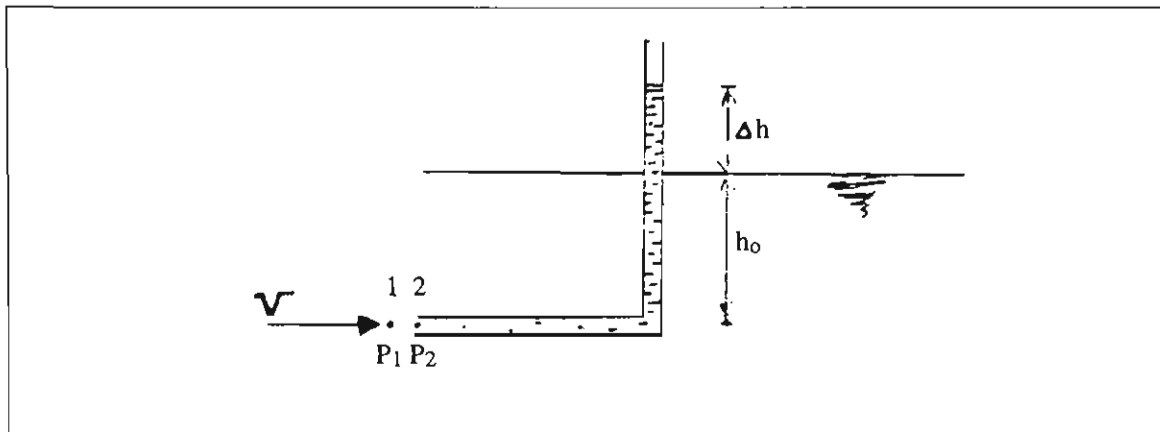


Figura 6.2 Tubo de Pitot

Sin embargo, el dispositivo normalmente no mide en forma directa la velocidad sino una cantidad medible que puede relacionarse con aquella. El tubo Pitot opera bajo este principio y es uno de los métodos más precisos para medir la velocidad.

La figura 6.2 muestra un tubo de vidrio con un dobléz a 90°, el cual se usa para medir la velocidad en un canal abierto. La abertura del tubo se coloca corriente arriba, de modo que el fluido fluye en ella hasta que la presión del tubo aumenta lo suficiente como para resistir el impacto de la velocidad contra él. Enfrente de la abertura, el fluido está en reposo. La línea de corriente que pasa a través del punto 1, conduce al punto 2, que es el punto de “estancamiento”, donde el fluido está en reposo y a partir del cual se divide y circula alrededor del tubo. La presión en 2 se determina mediante la columna del líquido en el tubo. Al aplicar la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2, se tiene:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} = \frac{P_2}{\gamma} = h_0 + \Delta h$$

dado que ambos puntos tienen la misma elevación. Como  $\frac{P_1}{\gamma} = h_0$  la ecuación se reduce a:

$$\frac{V^2}{2g} = \Delta h$$

o bien,

$$V = \sqrt{2g \Delta h} \quad [6.18]$$

El tubo de Pitot mide la presión de estancamiento conocida también como “presión total”. La presión total está compuesta por dos partes, la presión estática  $h_0$  y la presión dinámica  $\Delta h$ , expresada en función de la longitud de una columna del fluido en movimiento. La presión dinámica se relaciona con la carga de velocidad mediante la ecuación 6.18.

Si se combinan las mediciones de presión estática y total, es decir, si se mide cada una de ellas y se conectan a los extremos de un manómetro diferencial, se obtiene la carga de presión dinámica. La figura 6.3 muestra este arreglo.

Al aplicar la ecuación de Bernoulli entre 1 y 2, se tiene:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} = \frac{P_2}{\gamma}$$

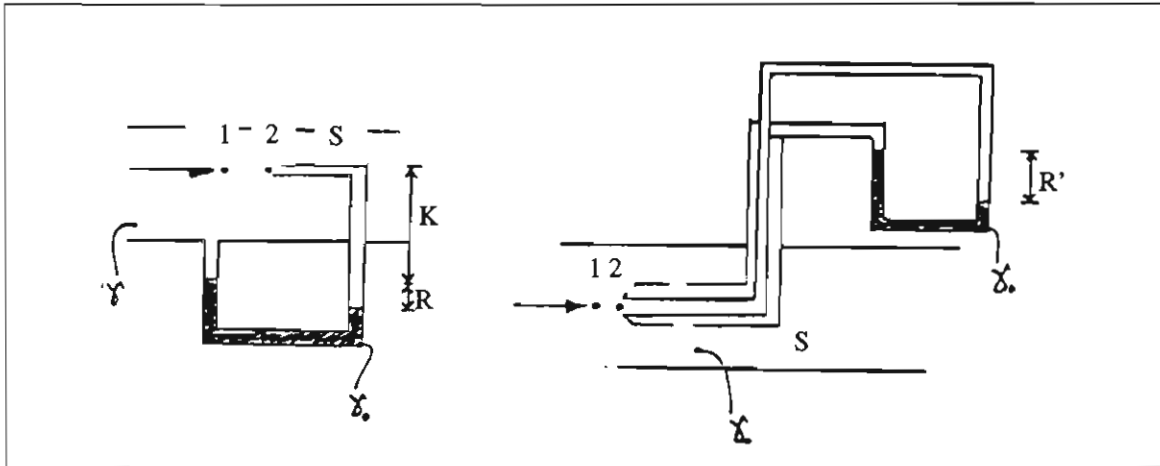


Figura 6.3 Tubo de Prandtl

La ecuación para el manómetro es:

$$\frac{P_2 - P_1}{\gamma} = R' \left( \frac{\gamma_0}{\gamma} - 1 \right)$$

Al sustituir en la ecuación de Bernoulli y despejar a  $V$  se obtiene:

$$V = \sqrt{2 g R' \left( \frac{\gamma_0}{\gamma} - 1 \right)} \quad [6.19]$$

El tubo estático y el tubo de Pitot pueden formar un tubo Pitot estático (figura 6.2 b). El resultado para la velocidad es el mismo, pero la incertidumbre en la medición de la presión estática necesita de la aplicación de un coeficiente de corrección,  $C$ .

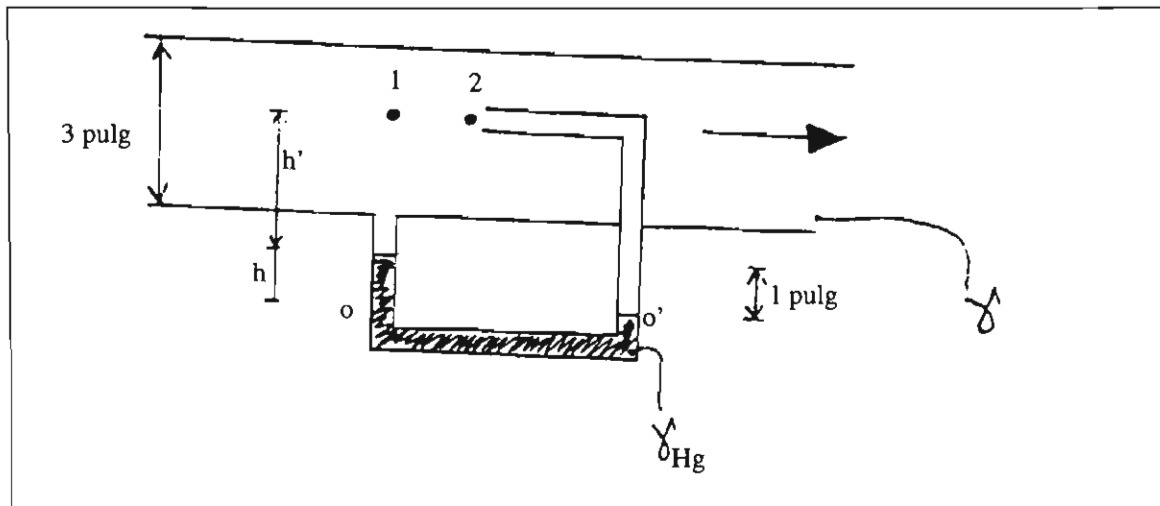
$$V = C \sqrt{2 g R' \left( \frac{\gamma_0}{\gamma} - 1 \right)} \quad [6.20]$$

El tubo de Prandtl, es un tubo especial de Pitot estático con nariz redondeada; se ha diseñado de modo que las perturbaciones debidas a la nariz y al brazo se cancelan y resulta  $C = 1$  en la ecuación 6.20.

$$V = \sqrt{2 g R' \left( \frac{\gamma_0}{\gamma} - 1 \right)} \quad [6.21]$$

### Problema 6.5

El fluido manométrico de la figura es mercurio. Despreciando las pérdidas calcule el flujo en pies cúbicos por segundo que pasa por la tubería si el fluido es: a) agua,  $62.4 \frac{lb}{ft^3}$ ; b) aire,  $0.076 \frac{lb}{ft^3}$ .



Solución:

Para determinar el flujo del fluido que pasa por la sección considerada, es necesario conocer la velocidad en la misma; al aplicar la ecuación de energía entre los puntos 1 y 2 sin pérdidas y sin trabajo de flecha, se tendría la ecuación de Bernoulli, de esta forma:

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

Los dos puntos se encuentran a la misma elevación; la velocidad en 2 es igual a cero por ser un punto de estancamiento, por lo tanto:

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2 - P_1}{\gamma}$$

La diferencia de presiones se obtiene del manómetro diferencial, la presión en 0 y 0' debe ser la misma, de tal modo que:

$$P_0 = P_{0'}$$

$$\gamma_{Hg} h + \gamma h' + P_1 = \gamma(h + h') + P_2$$

$$P_2 - P_1 = \gamma_{Hg} h + \gamma h' - \gamma(h + h')$$

$$P_2 - P_1 = \gamma_{Hg} h - \gamma h$$

$$\frac{P_2 - P_1}{\gamma} = \frac{h}{\gamma} (\gamma_{Hg} - \gamma)$$

$$\frac{P_2 - P_1}{\gamma} = h \left( \frac{\gamma_{Hg}}{\gamma} - 1 \right)$$

Sustituyendo este valor se encuentra la ecuación deseada.

$$V_1 = \left[ 2g h \left( \frac{\gamma_{Hg}}{\gamma} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Sustituyendo valores, se tiene:

a) agua

$$V_1 = \left[ 2 \times 32.2 \frac{ft}{s^2} \times \frac{1}{12} ft \left( \frac{847 \frac{lb}{ft^3}}{62.4 \frac{lb}{ft^3}} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$V_1 = 8.21 \frac{ft}{s}$$

Por lo tanto el caudal es:

$$Q = 8.21 \frac{ft}{s} \times 0.785 \times \left( \frac{3}{12} \right)^2 ft^2$$

$$Q = 0.403 \frac{ft^3}{s}$$

b) aire

$$V_1 = 244.55 \frac{ft}{s}$$

$$Q = 244.55 \frac{ft}{s} \times 0.785 \times \left( \frac{3}{12} \right)^2 ft^2$$

$$Q = 12.0 \frac{ft^3}{s}$$

Como puede notarse, la diferencia en el peso específico entre los fluidos utilizados es muy grande, esto hace que el caudal que pasa por la tubería para una misma presión diferencial, proporcione una diferencia bastante notoria en el caudal.

#### 6.4 Flujo laminar y turbulento

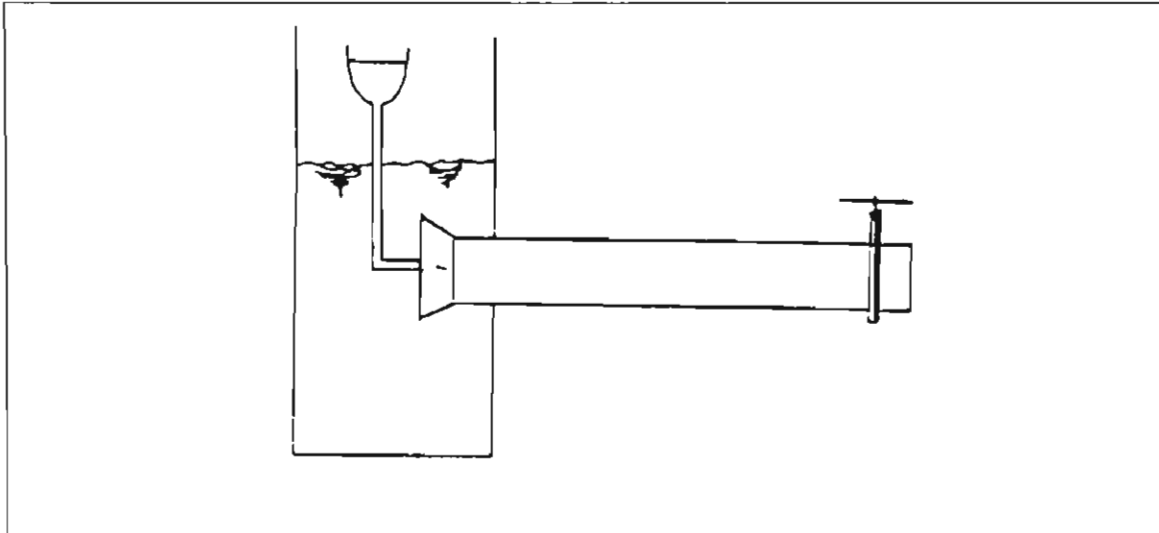
El flujo laminar se define como el movimiento del fluido en capas o láminas, mediante el deslizamiento suave de una capa sobre otra adyacente con sólo un intercambio molecular de cantidad de movimiento.

En el flujo turbulento las partículas se mueven en forma errática, con un intercambio de cantidad de movimiento transversal muy violento. La naturaleza del flujo, laminar o turbulento, y su posición sobre una escala que indica la importancia relativa de las tendencias de turbulento a laminar, son indicadas por el número de Reynolds, el cual se expresa mediante:

$$Re = \frac{VL\rho}{\mu} = \frac{VL}{\nu} \quad [6.22]$$

Para determinar el significado del grupo adimensional, Reynolds llevó a cabo sus experimentos sobre el flujo de agua en tubos de vidrio (figura 6.4.). Se montó un tubo de vidrio horizontalmente con un extremo en un tanque y con una válvula en el opuesto. Se fijó una entrada acampanada lisa al extremo corriente

arriba, con un inyector de tinta arreglado de tal manera que se pudiera alimentar una corriente fina de tinta en cualquier punto frente a la boca acampanada. Reynolds obtuvo varios  $Re$ , encontrando que para  $Re < 2000$  la tinta no se disolvía y para  $Re > 4000$  la tinta se perdía en el flujo.



**Figura 6.4** Aparato de Reynolds.

En el intervalo de 2000 a 4000 existe la transición de flujo laminar a turbulento. En mecánica de fluidos es común considerar al flujo turbulento cuando el número de Reynolds es mayor de 2000.

### 6.5 Flujo laminar en tuberías

Para el flujo laminar incompresible a régimen permanente a través de un tubo circular, se toma como cuerpo libre una envolvente cilíndrica infinitesimal (figura 6.5). La ecuación de movimiento se aplica en la dirección  $l$ , con aceleración cero.

De la figura:

$$2 \pi r \delta r P - \left( 2 \pi r \delta r P + 2 \pi r \delta r \frac{dP}{dl} \delta l \right) +$$

$$2 \pi r \delta l T - \left[ 2 \pi r \delta l T + \frac{d}{dr} (2 \pi r \delta l T) \delta r \right] +$$

$$y 2 \pi r \delta r \delta l \text{ sen } \theta = 0$$

Al sustituir en  $\text{sen } \theta$  por  $-\frac{dh}{dl}$  y dividir entre el volumen del cuerpo libre  $2 \pi r \delta r \delta l$ , tenemos

$$\frac{d}{dl} (P + \gamma h) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (T r) = 0$$

Al multiplicar por  $r \delta r$  e integrando con respecto a  $r$ , se tiene.

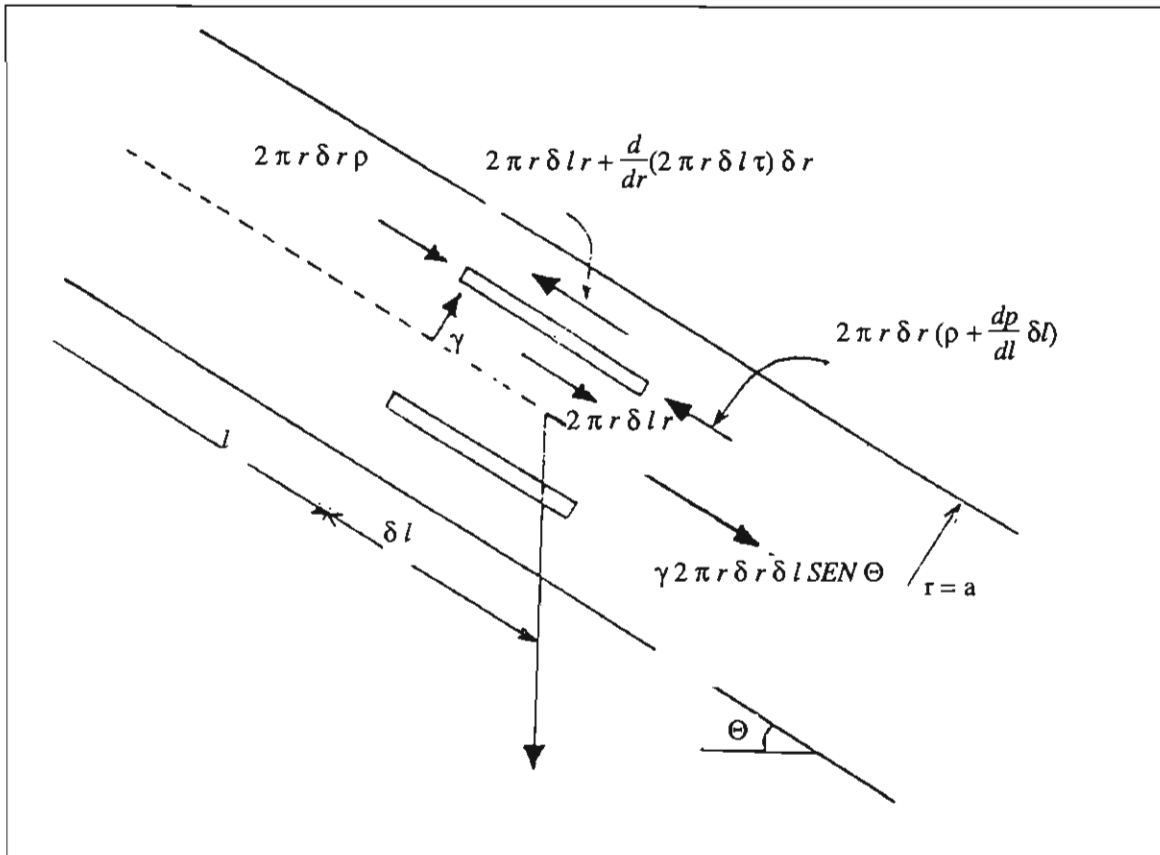


Figura 6.5 Diagrama de cuerpo libre de un elemento de envoltura cilíndrica para flujo laminar en un tubo circular inclinado.

$$\frac{r^2}{2} \frac{d}{dl} (P + \gamma h) + T r = A$$

donde  $A$  es la constante de integración para un tubo circular. Esta ecuación se satisface cuando  $r = 0$ ; luego  $A = 0$  para este caso.

Al sustituir

$$T = -\mu \frac{du}{dr}$$

se tiene:

$$du = \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dl} (P + \gamma h) r dr - \frac{A}{\mu} \frac{dr}{r}$$

Al integrar otra vez resulta:

$$u = \frac{r^2}{4\mu} \frac{d}{dl} (P + \gamma h) - \frac{A}{\mu} \ln r + B \quad [6.23]$$

Para un tubo circular, la ecuación 6.23, con  $A = 0$  y  $u = 0$ , para  $r = a$ , obtenemos:

$$u = -\frac{a^2 - r^2}{4\mu} \frac{d}{dl} (P + \gamma h) \quad [6.24]$$

La velocidad máxima  $u_{\max}$  en  $r = 0$  es:

$$u_{\max} = -\frac{a^2}{4\mu} \frac{d}{dl} (P + \gamma h) \quad [6.25]$$

Como la distribución de velocidades es un paraboloide de revolución, su volumen es la mitad del cilindro circunscrito; por lo tanto, la velocidad media es la mitad de la velocidad máxima.

$$u = -\frac{a^2}{8\mu} \frac{d}{dl} (P + \gamma h) \quad [6.26]$$

Para un tubo horizontal,  $h = cte$ ; escribiendo la caída de presión  $\Delta P$  en la longitud  $L$  se tiene:

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{dP}{dl}$$

y sustituyendo el diámetro  $D$  se encuentra

$$Q = \frac{\Delta P \pi D^4}{128 \mu L} \quad [6.27]$$

Para la velocidad media:

$$u = \frac{\Delta P D^2}{32 \mu L}$$

La caída de presión, que representa las pérdidas por unidad de volumen, es:

$$\Delta P = \frac{128 \mu L Q}{\pi D^4} \quad [6.28]$$

Las pérdidas varían directamente con la viscosidad, la descarga y la longitud e inversamente con la cuarta potencia del diámetro. Esta ecuación se conoce con el nombre de Hagen-Poiseuille.

### Problema 6.6

Por un tubo horizontal de de  $\frac{3}{8}$  in diámetro fluye glicerina a  $100^\circ \text{F}$  con una caída de presión por unidad de longitud de  $5 \frac{\text{psi}}{\text{ft}}$ . Encuentre la descarga y el número de Reynolds.



Solución:

Por su naturaleza física, la glicerina es un fluido con una viscosidad absoluta muy grande por lo que al fluir presenta un comportamiento laminar, por ello para resolver el problema se aplicará la ecuación de Hagen-Poiseuille.

$$\Delta P = \frac{128 \mu L Q}{\pi D^4}$$

Despejando al caudal, que es la incógnita, se tiene:

$$Q = \frac{\pi \Delta P D^4}{128 \mu L}$$

La viscosidad del fluido a la temperatura de 100 °F la obtenemos de las tablas (Apéndice A):

$$\mu = 4 \times 10^{-3} \frac{lb \cdot s}{ft^2}$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$Q = \frac{\pi \times 5 \frac{lb}{in^2 \cdot ft} \times \left(\frac{3}{8}\right)^4 in^4 \times \left(\frac{11 ft}{12 in}\right)^2}{128 \times 4 \times 10^{-3} \frac{lb \cdot s}{ft^2}}$$

$$Q = 0.0042 \frac{ft^3}{s}$$

Este es el caudal de glicerina que está fluyendo por la tubería y permite la caída de presión por unidad de longitud especificada.

Para determinar el número de Reynolds se utiliza:

$$Re = \frac{VD}{\nu}$$

donde la viscosidad cinemática se obtiene de tablas (Apéndice A), para este caso:  $\nu = 1.4 \times 10^{-3} \frac{ft^2}{s}$

La velocidad se obtiene de la ecuación de continuidad.

$$V = \frac{Q}{A}$$

$$V = \frac{0.0042 \frac{ft^3}{s}}{0.785 \left(\frac{3}{12 \times 8}\right)^2 ft^2}$$

$$V = 5.48 \frac{ft}{s}$$

Sustituyendo valores se encuentra:

$$Re = \frac{5.48 \frac{ft}{s} \times \left( \frac{3}{8 \times 12} \right) ft}{1.4 \times 10^{-3} \frac{ft^2}{s}}$$
$$Re = 122.32$$

Este resultado muestra que el flujo es, como se había supuesto, laminar.

### Problema 6.7

¿Cuál es el número de Reynolds para el flujo de  $0.3 \frac{m^3}{s}$  de aceite con  $\delta = 0.86$  y  $\mu = 0.025 \frac{N \cdot s}{m^2}$  a través de un tubo cuyo diámetro es de  $450 \text{ mm}$ ?

Solución:

La respuesta de este problema es bastante sencilla, puesto que sólo se requiere determinar el número de Reynolds, para lo cual se emplea:

$$Re = \frac{VD\rho}{\mu}$$

La velocidad es igual a la relación entre el caudal y el área, o sea

$$V = \frac{Q}{A}$$

La densidad del fluido se obtiene de la multiplicación de la gravedad relativa del fluido por la densidad del agua,

$$\rho = \delta \rho_{H_2O}$$

Sustituyendo

$$Re = \frac{Q D \delta \rho_{H_2O}}{0.785 D^2 \mu}$$
$$Re = \frac{0.3 \frac{m^3}{s} \times 0.86 \times 1000 \frac{kg}{m^3}}{0.785 \times (0.45)^2 m^2 \times 0.025 \frac{N \cdot s}{m^2}}$$
$$Re = 29214$$

Este resultado muestra que el flujo es turbulento, por tener un valor mayor de 2000.

## 6.6 Flujo turbulento en tuberías

Para un fluido incompresible a flujo permanente por un tubo, las pérdidas se determinan por medio de la ecuación de Darcy-Weisbach.

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad [6.29]$$

Generalmente se adopta para cálculos de flujo en los tubos.  $h_f$  es la pérdida de carga en la longitud del tubo  $L$ , con diámetro interior  $D$  y una velocidad promedio  $V$ .  $h_f$  tiene dimensiones de longitud y se tiene unidades de  $\frac{N \cdot m}{N}$ . El valor correcto para las pérdidas se ajusta mediante el factor de fricción  $f$ , que es adimensional. Todas las cantidades en la ecuación 6.29, excepto  $f$  se pueden medir experimentalmente.

La experimentación muestra que lo siguiente es cierto en flujo turbulento:

1. La pérdida de carga varía directamente con la longitud del tubo.
2. La pérdida de carga varía aproximadamente con el cuadrado de la velocidad.
3. La pérdida de carga varía casi inversamente con el diámetro.
4. La pérdida de carga depende de la rugosidad en la superficie de la pared interior del tubo.
5. La pérdida de carga depende de las propiedades de densidad y viscosidad del fluido.
6. La pérdida de carga es independiente de la presión.

El factor de fricción  $f$  debe seleccionarse de manera que la ecuación 6.29 produzca correctamente la pérdida de carga, por lo que  $f$  no puede ser una constante sino que depende de la velocidad  $V$ , del diámetro  $D$ , de la densidad  $\rho$ , de la viscosidad  $\mu$  y de ciertas características de rugosidad para la pared representada por  $\epsilon$ . En forma funcional, esto es:

$$f = F ( V, D, \rho, \mu, \epsilon )$$

Como  $f$  es un factor adimensional, debe depender de la agrupación de estas cantidades en parámetros adimensionales, los cuales son:

$$f = F \left( \frac{VD\rho}{\mu}, \frac{\epsilon}{D} \right) \quad [6.30]$$

La representación gráfica de esta relación es el diagrama de Moody, que se encuentra en el apéndice A, al final de este libro. En este diagrama, la línea recta marca el flujo laminar y su ecuación es:

$$f = \frac{64}{Re} \quad [6.31]$$

Hay una zona de transición indicada con un  $Re$  entre 2000 y 4000.

## 6.7 Problemas de tuberías

### 6.7.1. Problemas simples de tuberías

Por problemas simples de tubería se hace referencia a tubos o tuberías en donde la fricción del tubo es la única pérdida. Existen seis variables que intervienen en este tipo de problemas:  $Q$ ,  $L$ ,  $D$ ,  $h_f$ ,  $v$ ,  $\epsilon$ . En general, la longitud, la viscosidad, la rugosidad absoluta de la tubería se conocen o se pueden determinar.

Los problemas simples de tubería se pueden dividir en tres tipos:

Tipos	Datos	Incognita
I	$Q, L, D, \nu, \epsilon$	$h_f$
II	$h_f, L, D, \nu, \epsilon$	$Q$
III	$Q, L, h_f, \nu, \epsilon$	$D$

En caso se utilizan la ecuación de Darcy-Weisbach, la ecuación de continuidad y el diagrama de Moody, para encontrar la cantidad desconocida. La solución del problema tipo I es sencilla, ya que se conocen las variables y sólo es necesario determinar las pérdidas por fricción a través de la tubería, como podrá observarse en el ejemplo siguiente

### Problema 6.8

Se va a bombear agua a 20 ° C en un 1 km de tubo de acero de 200 mm de diámetro a la velocidad de 60  $\frac{L}{s}$ . Calcúlese la pérdida de carga y la potencia requerida.

*Solución*

Para determinar la pérdida de carga que existe en esta tubería se utiliza la ecuación de Darcy-Weisbach.

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

El factor de fricción se determina del tipo de flujo que se tenga, es decir, laminar o turbulento. Por lo tanto, es necesario saber el número de Reynolds del flujo

$$Re = \frac{VD}{\nu}$$

La velocidad se obtiene de

$$V = \frac{Q}{A}$$

$$V = \frac{0.06 \frac{m^3}{s}}{0.785 (0.2)^2 m^2}$$

$$V = 1.91 \frac{m}{s}$$

La viscosidad cinemática del fluido se obtiene de las tablas, así se encuentra para el agua a 20 ° C un valor de  $\nu = 1.007 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ . Sustituyendo:

El flujo es turbulento, por lo tanto  $f$  es una función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa, que tiene un valor de

$$Re = \frac{1.91 \frac{m}{s} \times 0.2 m}{1.007 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}}$$

$$Re = 3.79 \times 10^5$$

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.07 mm}{200 mm}$$

$$\frac{\epsilon}{D} = 0.00035$$

La magnitud de la rugosidad absoluta  $\epsilon$  del acero se obtiene del recuadro que tiene el diagrama de Moody, proporcionado al final de este libro. Se promedian los valores proporcionados para obtener 0.07 mm.

Con estos valores de  $Re$  y  $\frac{\epsilon}{D}$  se encuentra en el diagrama de Moody un valor de  $f = 0.017$ . Sustituyendo:

$$h_f = 0.017 \times \frac{1000 m}{0.20 m} \times \frac{(1.91)^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \times 9.8 \frac{m}{s^2}}$$

$$h_f = 15.82 m$$

Para encontrar la potencia que es necesario suministrar al fluido para vencer esas pérdidas, se aplica:

$$p = \gamma Q h_f$$

Al sustituir los valores se obtiene:

$$p = 9800 \frac{N}{m^3} \times 0.060 \frac{m^3}{s} \times 15.82 m$$

$$p = 9302 \text{ Watts}$$

Para el problema tipo II,  $V$  y  $f$  son desconocidas, la ecuación de Darcy-Weisbach y el diagrama de Moody deben utilizarse simultáneamente para encontrar sus valores. Ya que  $\frac{\epsilon}{D}$  es conocido, se puede suponer un valor de  $f$  por inspección del diagrama de Moody. La sustitución de esta  $f$  de prueba en la ecuación Darcy-Weisbach produce un valor tentativo de  $V$ , del cual se calcula un número de Reynolds inicial. Con éste encuentra un valor de  $f$  mejorado en el diagrama de Moody. Cuando se ha encontrado un  $f$  correcto a dos cifras significativas, la  $V$  correspondiente es la cantidad buscada;  $Q$  se determina multiplicando ésta por el área.

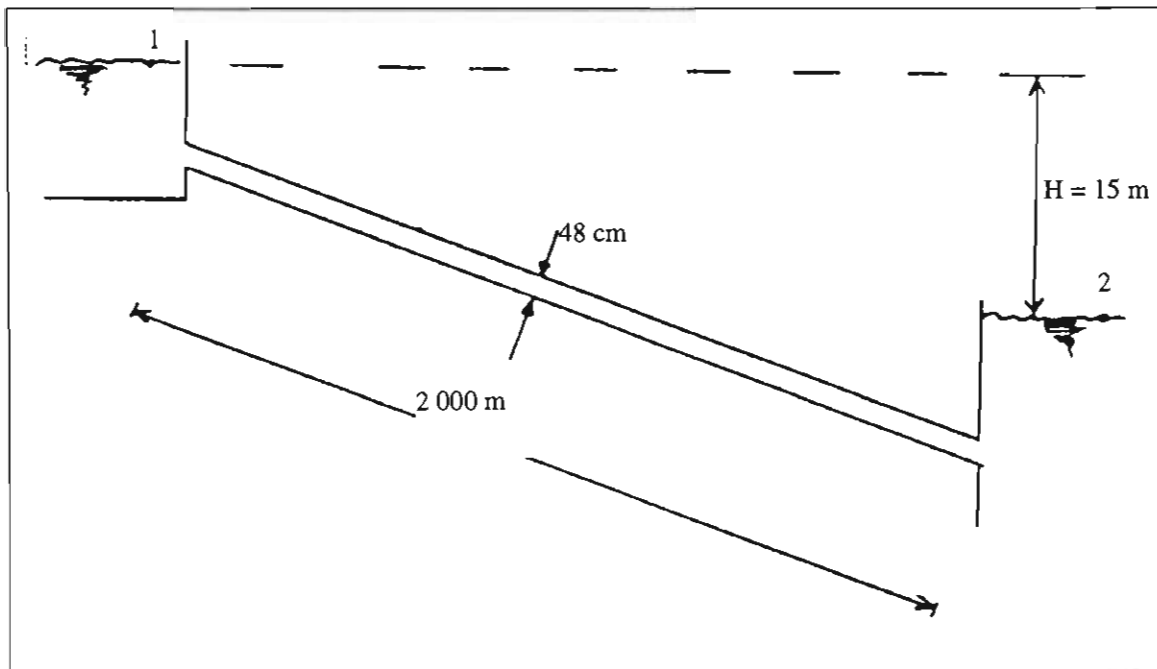
### Problema 6.9

Una línea de agua que conecta dos depósitos a 20 °C tiene 2000 m de tubería de acero de 48 cm de

diámetro, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el valor del gasto cuando las diferencias de altura entre las superficies libres del fluido en los depósitos es de 15 m?

Solución:

Este problema es del tipo II, puesto que la velocidad y el factor de fricción son desconocidos, por lo que se tendrá que resolver con el procedimiento descrito en el párrafo anterior. Aplicando la ecuación de energía entre los puntos 1 y 2, se obtiene:



$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{f_s} + H,$$

Las presiones son iguales a la atmosférica; las velocidades  $V_1$  y  $V_2$  son tan pequeñas que se desprecian; no existe trabajo de flecha, por lo que la ecuación se reduce a

$$h_f = z_1 - z_2 = 15 \text{ m}$$

De la ecuación de Darcy-Weisbach

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}; \quad V = \left[ \frac{2gDh_f}{fL} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Sustituyendo valores

$$V = \left[ \frac{2 \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0.48 \text{ m} \times 15 \text{ m}}{f \times 2000 \text{ m}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$V = \left[ \frac{0.070 \frac{m^2}{s^2}}{f} \right]^{\frac{1}{2}} \quad [A]$$

El número de Reynolds se calcula de:

$$Re = \frac{VD}{\nu}$$

$$Re = \frac{V \times 0.48 \text{ m}}{1.007 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}}$$

$$Re = 4.76 \times 10^5 V \quad [B]$$

La rugosidad relativa es:

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.07 \text{ mm}}{480 \text{ mm}}$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = 0.000145 \quad [C]$$

La solución será de la siguiente forma:

- Se supone un valor inicial de  $f$  y se sustituye en la ecuación (A)
- Con el valor que se obtenga de la velocidad, se sustituye en la ecuación (B)
- Con los valores de las ecuaciones (B) y (C) se encuentra en el diagrama de Moody un nuevo valor de  $f$ .
- Este valor de  $f$  se sustituye en (A) y se realiza de nueva cuenta todo el procedimiento. Cuando  $f$  no varíe en dos cifras significativas, ese será el valor de la velocidad con la que está escurriendo el flujo. Supongamos  $f = 0.015$  (puede ser cualquier otro valor)

De la ecuación (A),  $V = 2.16 \frac{m}{s}$

De la ecuación (B),  $Re = 1.01 \times 10^6$

Con (B) y (C) en el diagrama de Moody se obtiene  $f = 0.0135$ , y con este valor:

$$V = 2.28 \frac{m}{s}$$

$$Re = 1.07 \times 10^6$$

$$f = 0.0135$$

El valor  $f$  se repite, por lo tanto, la velocidad será de  $2.28 \frac{m}{s}$ , con este valor se obtiene el gasto

$$Q = VA = 2.28 + \frac{m}{s} \times 0.785 (0.48)^2 m^2$$

$$Q = 0.412 \frac{m^3}{s}$$

Este es el caudal que va a fluir por la tubería con las condiciones impuestas en el problema.

En el problema del tipo III, donde se desconoce  $D$ , hay tres incógnitas en la ecuación de Darcy-Weisbach,  $f$ ,  $V$ ,  $D$ ; dos en la ecuación de continuidad,  $V$ ,  $D$ , y tres en la ecuación del número de Reynolds  $V$ ,  $D$  y  $Re$ . La rugosidad relativa es también una incógnita. El uso de la ecuación de continuidad para eliminar la velocidad en la ecuación de Darcy-Weisbach y en la expresión para  $Re$ , simplifica el problema. Por lo tanto, la ecuación de Darcy-Weisbach se convierte en:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{2g \left( D^2 \frac{\pi}{4} \right)^2}$$

$$D^5 = \frac{8 L Q^2}{h_f g \pi^2 f} \quad [6.32]$$

y el número de Reynolds es

$$Re = \frac{V D}{\nu}$$

$$Re = \frac{4 Q}{\pi \nu D} \quad [6.33]$$

La solución se lleva a cabo por el siguiente procedimiento:

1. Suponer un valor de  $f$
2. Resolver la ecuación 6.32 para  $D$ .
3. Resolver la ecuación 6.33 para  $Re$ .
4. Encontrar la rugosidad relativa  $\frac{\epsilon}{D}$ .
5. Con  $Re$  y  $\frac{\epsilon}{D}$ , buscar un nuevo valor de  $f$  en el diagrama de Moody.
6. Utilizar el nuevo valor de  $f$ , y repetir el procedimiento.
7. Cuando el valor de  $f$  no cambia en las dos primeras cifras significativas, todas las ecuaciones se satisfacen y el problema queda resuelto.

### Problema 6.10

¿Qué medida de tubo de acero comercial se necesita para transportar  $200 \frac{L}{s}$  de agua a  $20^\circ C$  a una distancia de  $5 \text{ km}$  con una pérdida de carga de  $4 \text{ m}$ ?

Solución:

Para encontrar la respuesta a este problema, a partir de las ecuaciones 6.32 y 6.33, se aplica el procedimiento propuesto anteriormente.

$$D^5 = \frac{8 L Q^2}{h_f g \pi^2 f}$$



$$D = \left[ \frac{8 \times 5000 \text{ m} \times (0.02)^2 \text{ m} \frac{2}{\text{s}^2}}{4 \text{ m} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times (3.1416)^2} f \right]^{\frac{1}{5}}$$

$$D = [4.135 f]^{\frac{1}{5}}$$

$$Re = \frac{4 Q}{\pi v D}$$

$$Re = \frac{4 \times 0.2 \text{ m}^3}{3.1416 \times 1.007 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \times D}$$

$$Re = \frac{2.528 \times 10^5}{D} \quad [**]$$

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.07 \text{ mm}}{D \text{ mm}} \quad [***]$$

a. Primera iteración:  $f = 0.016$  (supuesto)

de (\*)  $D = 0.58 \text{ m}$

de (\*\*)  $Re = 4.35 \times 10^4$

de (\*\*\*)  $\frac{\epsilon}{D} = 0.00012$ .

Del diagrama de Moody  $f = 0.015$

b) Segunda iteración:  $f = 0.015$

de (\*)  $D = 0.573 \text{ m}$

de (\*\*)  $Re = 4.4 \times 10^4$

de (\*\*\*)  $\frac{\epsilon}{D} = 0.00012$ .

Del diagrama de Moody  $f = 0.014$

c) Tercera iteración  $f = 0.014$

de (\*)  $D = 0.565 \text{ m}$

de (\*\*)  $Re = 4.47 \times 10^4$

de (\*\*\*)  $\frac{\epsilon}{D} = 0.000123$

Del diagrama de Moody  $f = 0.014$

Por lo tanto el diámetro de la tubería que satisface las condiciones dadas en el problema es de  $0.565 \text{ m}$ .

## 6.7.2 Pérdidas menores

Las pérdidas que ocurren en tuberías debido a dobleces, codos, juntas, válvulas, y otras piezas especiales, se llaman pérdidas menores. Este es un nombre inadecuado porque en muchas situaciones son más importantes que las pérdidas debidas a la fricción en el tubo, pero el nombre es convencional. En casi todos los casos la pérdida menor se determina por experimentación.

Las pérdidas menores totales se pueden calcular por dos métodos: el método del coeficiente de pérdida y el de la longitud equivalente del accesorio.

#### 6.7.2.1 Método del coeficiente de pérdida.

Las pérdidas por fricción de los accesorios se determinan por medio de la ecuación:

$$h_f = K \frac{V^2}{2g} \quad [6.34]$$

donde  $K$  es un coeficiente que se obtiene por medio de la experimentación.

Estos datos experimentales ofrecen un intervalo amplio de variación en los coeficientes para accesorios especiales, que depende del tamaño y del fabricante. Los valores más aceptados son:

Accesorio	K
Válvula de globo (completamente abierta)	10
Válvula de ángulo (completamente abierta)	5
Válvula de retención (completamente abierta)	2.5
Válvula de compuerta (completamente abierta)	0.19
Conexión en T estándar	1.2
Codo estándar	0.9
Codo de radio medio	0.75
Codo de radio largo	0.60
Codo en U	2.2
Entrada cuadrada	0.5
Entrada redondeada	0.01 - 0.05
Entrada más allá de la pared	0.8 - 1.0

#### 6.7.2.2 Método de longitud equivalente.

Las pérdidas menores se pueden expresar en términos de la longitud equivalente,  $L_e$ , de tubería con la misma pérdida de carga en  $\frac{N \cdot m}{N}$ , para la misma descarga; así:

$$f \frac{L_e}{D} \frac{V^2}{2g} = K \frac{V^2}{2g}$$

donde  $K$  puede referirse a una pérdida de carga o a la suma de varias pérdidas. Al despejar a  $L_e$  se obtiene:

$$L_e = \frac{K D}{f} \quad [6.35]$$

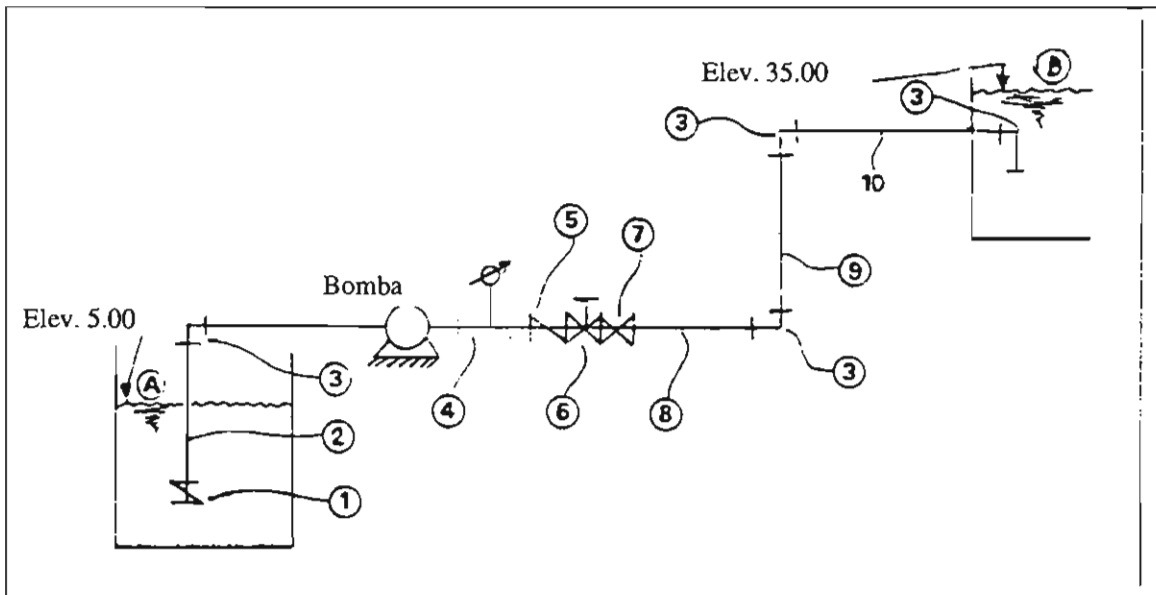
Por lo tanto, la ecuación de Darcy-Weisbach queda como

$$h_f = f \frac{(L + L_e)}{D} \frac{V^2}{2g} \quad [6.36]$$

Un diagrama para obtener la longitud equivalente se puede encontrar en el Apéndice A de este libro.

**Problema 6.11**

Determinar la potencia de la bomba cuya eficiencia es del 80 %; el fluido es agua a 20 ° C, las tuberías son de acero de 20 cm de diámetro interno y el caudal es de  $90 \frac{L}{s}$ . Resolver el problema por el método de longitudes equivalentes.



1	Válvula de pie	6	Válvula de compuerta
2	Tubería de 5 m de longitud	7	Válvula de globo
3	Codo a 90° radio largo	8	Carrete de 2 m de longitud
4	Te" de paso directo	9	Tubería de 25 m de longitud
5	Válvula de retención	10	Tubería de 10 m de longitud

Solución:

La potencia de la bomba se encuentra de la ecuación:

$$P = \frac{\gamma Q H_s}{\eta}$$

donde  $H_s$  es el trabajo de flecha, que aparece en la ecuación de energía, aplicada entre los puntos A y B de la figura.

$$\frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B + h_{f,s} + H_s$$

Las presiones en A y B son iguales a la atmosférica y las velocidades de los puntos A y B son tan pequeñas que se desprecian, obteniéndose:

$$H_s = z_A - z_B - h_{f_{\text{total}}}$$

Al término  $z_A - z_B$  se le conoce con el nombre de carga *estática de bombeo*. El término de pérdidas por fricción entre A y B está compuesto por las pérdidas primarias y las secundarias, y se le conoce como *pérdida de carga de bombeo*. El término  $H_s$  representa la *carga dinámica total*.

a) Pérdidas primarias

$$h_{f_{\text{prim}}} = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

como  $f = F\left(Re, \frac{\epsilon}{D}\right)$  primero se determina el número de Reynolds.

$$Re = \frac{VD}{\nu}; \quad V = \frac{Q}{A}$$

y la rugosidad relativa es

$$V = \frac{0.09 \frac{m^3}{s}}{0.785 (0.2)^2 m^2}$$

$$V = 2.86 \frac{m}{s}$$

$$Re = \frac{2.86 \frac{m}{s} \times 0.2 m}{1.007 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}}$$

$$Re = 5.68 \times 10^5$$

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.07 mm}{200 mm}$$

$$\frac{\epsilon}{D} = 0.00035$$

Con estos dos valores se obtiene del diagrama de Moody el factor de fricción  $f = 0.0166$ . Para la longitud del tubo, se sumarán todos los tramos rectos de tubería.

$$L = L_2 + L_8 + L_9 + L_{10}$$

Sustituyendo:

$$L = 5 m + 2 m + 25 m + 10 m$$

$$L = 42 m$$

Por lo tanto, las pérdidas primarias se evalúan en:

b) Pérdidas secundarias

$$h_{A-B_p} = 0.0166 \times \frac{42 \text{ m}}{0.02 \text{ m}} \times \frac{\left(2.86 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$H_{A-B_p} = 1.45 \text{ m}$$

Para evaluar las pérdidas secundarias se utilizará el método de longitudes equivalentes, para lo cual se necesita el diagrama correspondiente del Apéndice.

El diagrama se utiliza así:

1. Localizar el accesorio del que desea conocer la longitud equivalente en la recta del lado izquierdo del diagrama.
2. Encontrar el diámetro del accesorio en la recta del lado derecho.
3. Unir los dos puntos por una línea recta.
4. Leer el valor de la longitud equivalente en la recta central del diagrama, en el punto donde es cortado por la línea del paso 3.

Las longitudes equivalentes son

$$L_e = L_{e_1} + L_{e_2} + L_{e_3} + L_{e_4} + L_{e_5} + L_{e_6}$$

$$L_e = 17.5 + (4.5) 4 + 4.5 + 17.5 + 1.4 + 70.0$$

$$L_e = 128.9 \text{ m}$$

Por lo tanto la pérdida de carga es

Las pérdidas por fricción son

$$h_{A-B} = h_{A-B_p} + h_{A-B_f}$$

$$h_{A-B_f} = 0.0166 \times \frac{128.9 \text{ m}}{0.02 \text{ m}} \times \frac{\left(2.86 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$h_{A-B_f} = 4.46 \text{ m}$$

$$h_{A-B} = 1.45 \text{ m} + 4.46 \text{ m}$$

$$h_{A-B} = 5.91 \text{ M}$$

El trabajo de la flecha es

$$H_s = -30 \text{ m} - 5.91 \text{ m}$$

$$H_s = -35.91 \text{ m}$$

El signo negativo indica que se realiza trabajo sobre el sistema. Por lo tanto:

$$p = \frac{9800 \frac{N}{m^3} \times 0.090 \frac{m^3}{s} \times 35.91 m}{0.8}$$

$$p = 39590 \text{ Watts}$$

Esta es la potencia que se necesita suministrar en el eje de la bomba para que cumpla con las condiciones impuestas por el enunciado

### 6.7.3 Tuberías en serie.

Cuando dos o más tuberías de diferente tamaño o rugosidad se conectan de modo que el fluido pase por una y a continuación por la otra, se dice que las tuberías están conectadas en serie. En la figura 6.6 se ilustra un problema típico de tuberías en serie; se desea saber la carga para que fluya un cierto caudal o bien el caso contrario, se desea saber la descarga para una cierta carga.

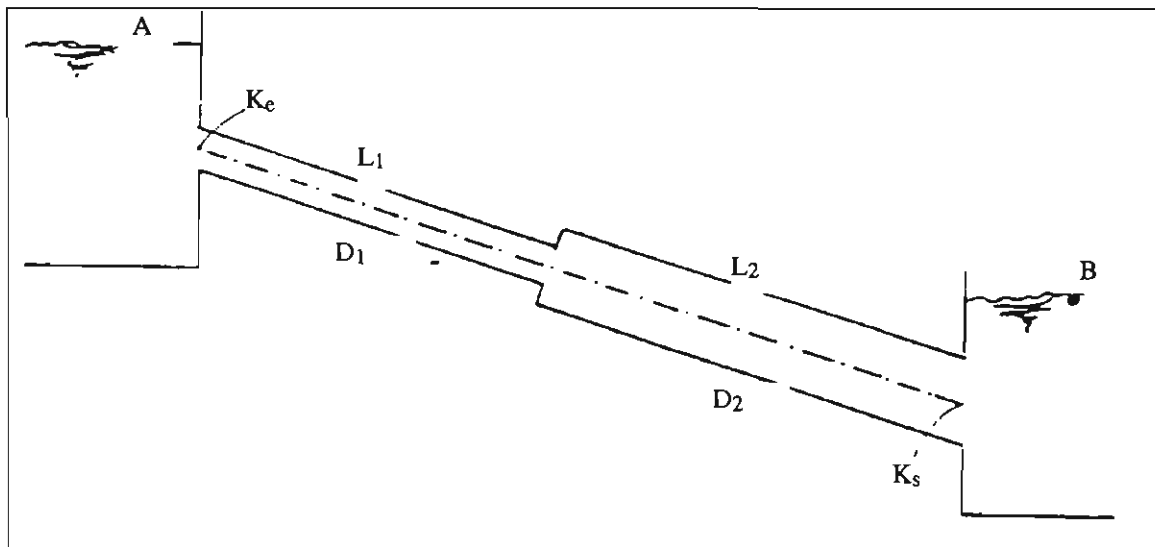


Figura 6.6 Tuberías en serie

Utilizando la ecuación de energía entre A y B, despreciando las pérdidas secundarias, se tiene:

$$\frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B + h_f + H_f$$

Con  $z_B$  como nivel de referencia:

$$z_A = h_f + H_f$$

$$H = f_1 \frac{L_1}{D} \frac{V_1^2}{2g} + f_2 \frac{L_2}{D^2} \frac{V_2^2}{2g}$$

Aplicando la ecuación de continuidad:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$V_2 = \frac{V_1 D_1^2}{D_2^2}$$

Sustituyendo:

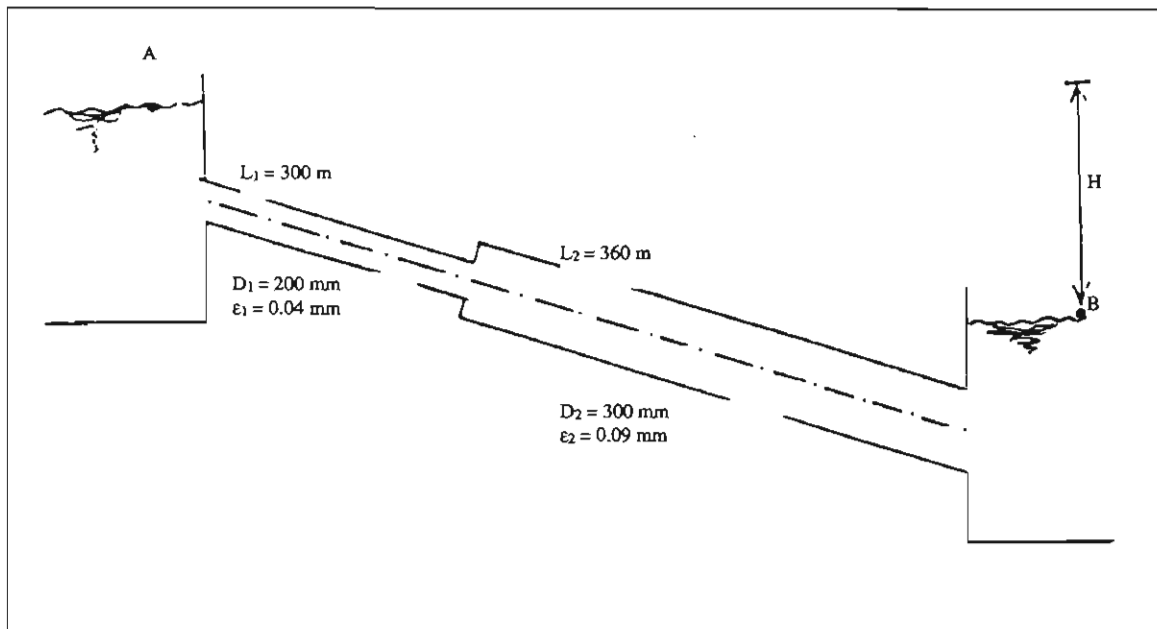
$$H = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + f_2 \frac{L_2}{D_2^2} \frac{V_1^2 D_1^4}{2g D_2^4}$$

$$H = \frac{V_1^2}{2g} \left( f_1 \frac{L_1}{D_1} + f_2 \frac{L_2}{D_2^2} \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^4 \right) \quad [6.37]$$

Con esta ecuación se resuelve el problema, dependiendo de la incógnita.

### Problema 6.12

Determinése la descarga para el sistema de la figura cuando  $H = 10 \text{ m}$



Solución:

Para determinar el gasto que pasa a través del sistema de tuberías en serie de la figura, es necesario conocer la velocidad en alguna de las tuberías. Si se aplica la ecuación de energía entre los puntos  $A$  y  $B$  se obtiene la ecuación 6.37, tal como se desarrolló anteriormente. Con esta ecuación se obtendrá la velocidad en la tubería 1 y al multiplicarla por el área se conocerá el gasto que pasa por ellas. Por lo tanto:

$$H = \frac{V_1^2}{2g} \left( f_1 \frac{L_1}{D_1} + f_2 \frac{L_2}{D_2^2} \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^4 \right)$$

Despejando a  $V_1$

$$V_1 = \left[ \frac{2 g H}{\left( f_1 \frac{L_1}{D_1} + f_2 \frac{L_2}{D_2} \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^4 \right)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Sustituyendo los valores conocidos

$$V_1 = \left[ \frac{2 \times 9.8 \frac{m}{s^2} \times 10 m}{\left( f_1 \frac{300 m}{0.2 m} + f_2 \frac{360 m}{0.3 m} \left( \frac{0.2 m}{0.3 m} \right)^4 \right)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$V_1 = \left[ \frac{196}{150 f_1 + 237 f_2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Para resolver esta ecuación, se procederá de la siguiente manera.

1. Suponer un valor de  $f_1$  y  $f_2$  (pueden ser diferentes).
2. Calcular  $V_1$ .
3. Determinar el número de Reynolds en las dos tuberías.
4. Calcular el valor de la rugosidad relativa.
5. Obtener los valores de  $f_1$  y  $f_2$  en el diagrama de Moody con los datos de los puntos 3 y 4.
6. Proceder de nueva cuenta hasta que  $f_1$  y  $f_2$  no varíen en dos de sus cifras significativas.

Número de Reynolds

$$Re_1 = \frac{V_1 D_1}{\nu}$$

$$Re_1 = \frac{V_1 \times 0.2 m}{1.007 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}}$$

$$Re_1 = 1.98 \times 10^5 V_1$$

$$Re_2 = \frac{V_2 \times 0.3 m}{1.007 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}}$$

$$Re_2 = 2.98 \times 10^5 V_2$$

Las rugosidades relativas son:

$$\frac{\epsilon_1}{D_1} = \frac{0.04 mm}{200 mm}$$



$$\frac{\epsilon_1}{D_1} = 0.0002$$

$$\frac{\epsilon_2}{D_2} = \frac{0.04 \text{ mm}}{300 \text{ mm}}$$

$$\frac{\epsilon_2}{D_2} = 0.0003$$

De la ecuación de continuidad

$$V_2 = V_1 \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2$$

$$V_2 = V_1 \left( \frac{0.2}{0.3} \right)^2$$

$$V_2 = 0.44 V_1$$

Para mayor comodidad se hará la siguiente tabla con los valores de  $\frac{\epsilon_1}{D_1}$  y  $\frac{\epsilon_2}{D_2}$

$f_1$	$f_2$	$V_1$	$V_2 = 0.44$	$Re_1 = 1.9$	$Re_2 = 2.9$
0.015 supuesto	0.016 supuesto	2.73	1.212	$5.4 \times 10^5$	$3.61 \times 10^5$
0.016 Moody	0.0167 Moody	2.64	1.17	$5.2 \times 10^5$	$3.5 \times 10^5$
0.0154 Moody	0.0168 Moody	2.69	1.19	$5.3 \times 10^5$	$3.5 \times 10^5$
0.0154 Moody	0.0168 Moody	2.69	1.19		

Por lo tanto el caudal será

$$Q = 0.785 (0.2)^2 m^2 \times 2.69 \frac{m}{s}$$

$$Q = 0.084 \frac{m^3}{s}$$

Este es el caudal que pasa de un recipiente al otro cuando la carga y las tuberías son como las indicadas.

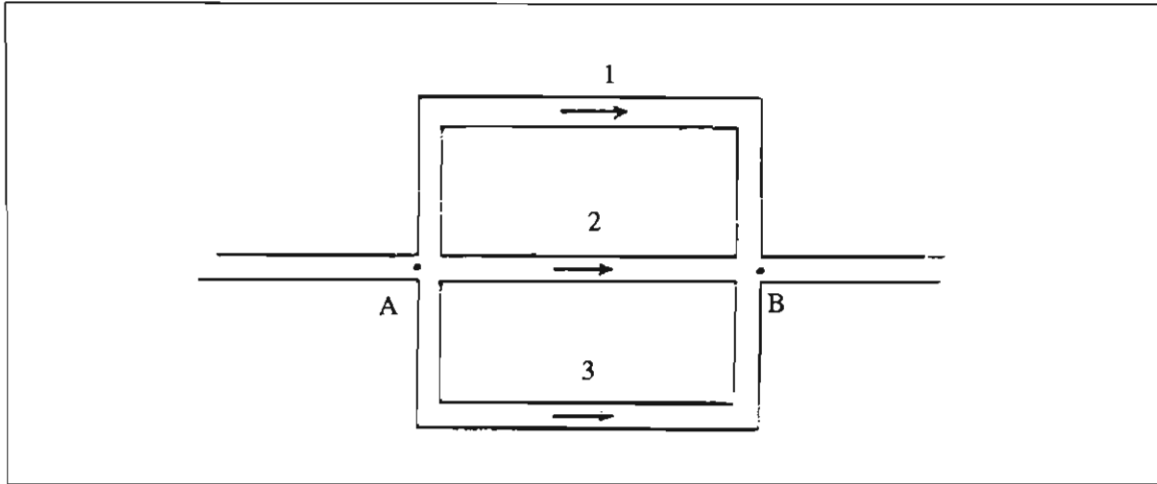
#### 6.7.4 Tuberías en paralelo

Una combinación de dos o más tuberías conectadas de modo que el flujo se divide entre las tuberías y luego se vuelve a unir, como se muestra en la figura 6.7, recibe el nombre de sistema de tuberías en paralelo. En éste las pérdidas de carga deben ser iguales en todas las tuberías y el caudal es dividido entre las tuberías que participan en el sistema. Esto es:

$$h_{f1} = h_{f2} = h_{f3} \quad [6.38]$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad [6.39]$$

Para este tipo de problemas también existen dos casos: si se conoce la altura de la línea de altura motriz en A y en B, se calcula la descarga, o bien, si se conoce la descarga, se calculan la distribución de flujo y la pérdida de carga; el tamaño de las tuberías, la rugosidad y las propiedades del fluido son datos conocidos.



**Figura 6.7** Tuberías en paralelo

En primer caso se calcula la descarga como en los problemas simples de tuberías.

El segundo caso es más complejo por el desconocimiento de la pérdida de carga y de la descarga para las tuberías. El procedimiento de solución es el siguiente:

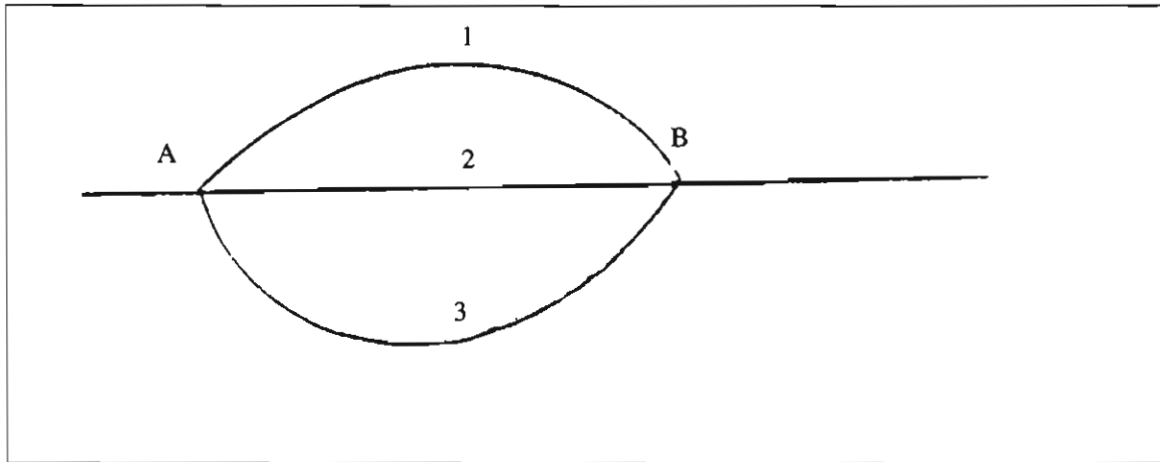
1. Suponer una descarga  $Q'$ , en la tubería 1.
2. Calcular  $h'_{f1}$ , con el dato anterior.
3. Calcular  $Q'_2$  y  $Q'_3$  usando  $h'_{f1}$ .
4. Para las tres descargas con pérdida de carga común, suponer que el  $Q$  dado se distribuye en las tuberías en la misma proporción que  $Q'_1$ ,  $Q'_2$  y  $Q'_3$ . Por lo tanto:

$$Q_1 = \frac{Q'_1}{\Sigma Q'_i} \times Q; \quad Q_2 = \frac{Q'_2}{\Sigma Q'_i} \times Q; \quad Q_3 = \frac{Q'_3}{\Sigma Q'_i} \times Q.$$

5. Comprobar la validez de estas descargas mediante el cálculo de  $h_{f1}$ ,  $h_{f2}$  y  $h_{f3}$  para los  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$  calculados.

### Problema 6.13

Tres tuberías se conectan en paralelo,  $L_1 = 40 \text{ m}$ ,  $L_2 = 50 \text{ m}$ ,  $L_3 = 70 \text{ m}$ ,  $D_1 = 0.1 \text{ m}$ ,  $D_2 = 0.15 \text{ m}$  y  $D_3 = 0.2 \text{ m}$  para un flujo total de  $100 \text{ L/s}$  de agua a  $20^\circ \text{C}$ . ¿Cuál es la distribución de caudales? Las tuberías son de acero.



Solución:

Este problema de tuberías en paralelo, es del segundo tipo, por lo tanto, se seguirá el procedimiento indicado anteriormente.

I. Primera iteración

Se supone  $Q'_1 = 40 \frac{L}{s}$

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$V = \frac{0.04 \frac{m^3}{s}}{0.785 (0.1)^2 m^2}$$

$$V = 5.1 \frac{m}{s}$$

$$Re = \frac{5.1 \frac{m}{s} \times 0.1 m}{1.001 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s}}$$

$$Re = 5 \times 10^5$$

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.07 mm}{100 mm}$$

$$\frac{\epsilon}{D} = 0.0007$$

Del diagrama de Moody

$$h_f = 0.0189 \times \frac{6.0 \text{ m}}{0.1 \text{ m}} \times \frac{\left(5.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$h_f = 15.1 \text{ m}$$

Cálculo de  $Q'_2$

$$V_2 = \left( \frac{2g D h_f}{f L} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$V_2 = \left( \frac{2 \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0.15 \text{ m} \times 15.1 \text{ m}}{f \times 60 \text{ m}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$V_2 = \left( \frac{0.74}{f} \right)^{\frac{1}{2}}$$

f	v	R <sub>s</sub>	$\frac{\epsilon}{D}$
0.016	6.8	$1.01 \times 10_6$ (287) 5474 9	0.00046
0.017	6.59		
0.017	6.59		

$$Q'_2 = 6.59 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.785 (0.15)^2 \text{ m}^2$$

$$Q'_2 = 0.116 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Cálculo de  $Q'_3$

$$V_3 = \left( \frac{2 \times 4.8 \times 0.2 \times 15.1}{f \times 70} \right)$$

$$V_3 = \left( \frac{0.8456}{f} \right)^{\frac{1}{2}}$$

f	V <sub>3</sub>	R <sub>s</sub>	$\frac{\epsilon}{D}$
0.16	7.27		0.00035
0.0159	7.27		

$$Q'_3 = 7.27 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.785 (0.2)^2 \text{ m}^2$$

$$Q_3' = 0.228 \frac{m^3}{s}$$

$$\Sigma Q' = Q_1' + Q_2' + Q_3'$$

$$\Sigma Q' = (0.04 + 0.016 + 0.228) \frac{m^3}{s}$$

$$\Sigma Q' = 0.384 \frac{m^3}{s}$$

II. Segunda iteración.

Cálculo de  $Q_1'$

$$Q_1'' = \frac{0.04}{0.384} \times 0.1$$

$$Q_1'' = 0.010 \frac{m^3}{s}$$

$$v_1 = 1.27 \frac{m}{s}$$

$$Re = 1.26 \times 10^5$$

$$\frac{\epsilon}{D} = 0.0007$$

$$f = 0.02$$

$$h_f = 0.02 \times \frac{60 m}{0.1 m} \times \frac{(1.27)^2 \frac{m^2}{s}}{2 \times 4.9 m^2}$$

$$h_f = 1 m$$

$$V_2 = \left( \frac{2 \times 9.8 \frac{m}{s} \times 0.15 m \times 1 m}{f \times 60 m} \right)$$

$$V_2 = \left( \frac{0.049}{f} \right)^{\frac{1}{2}}$$

f	$V_2$	$Re$	$\frac{\epsilon}{D}$
0.015	$1.8 \frac{m}{s}$	$2.68 \times 10^5$	0.00046
0.0182	$1.64 \frac{m}{s}$	$2.44 \times 10^5$	
0.0183	$1.63 \frac{m}{s}$		

$$Q'_2 = 1.63 \frac{m}{s} \times 0.785 (0.15)^2 m^2$$

$$Q'_2 = 0.28 \frac{m^3}{s}$$

Calculo de  $Q'_3$

$$V_3 = \left( \frac{2 \times 9.8 \frac{m}{s} \times 0.2 m \times 1 m}{f \times 70 m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$V_3 = \left( \frac{0.056}{f} \right)^{\frac{1}{2}}$$

f	V <sub>3</sub>	R <sub>3</sub>	$\frac{\epsilon}{\rho}$
0.015	1.96	3.89 x 10 <sup>5</sup>	0.00035
0.017	1.81	3.59 x 10 <sup>5</sup>	
0.0171	1.81		

$$Q'_3 = 1.81 \frac{m}{s} \times 0.785 (0.2)^2 m^2$$

$$Q'_3 = 0.56 \frac{m^3}{s}$$

$$\Sigma Q' = (0.010 + 0.028 + 0.056) \frac{m^3}{s}$$

$$\Sigma Q' = 0.094 \frac{m^3}{s}$$

Hasta aquí existe un error de 6 litros por lo tanto la nueva distribución será:

$$Q''_1 = \frac{0.01}{0.094} \times 0.1$$

$$Q''_1 = 0.0106 \frac{m^3}{s}$$

$$Q''_2 = \frac{0.028}{0.094} \times 0.1$$

$$Q''_2 = 0.0297 \frac{m^3}{s}$$

$$Q''_3 = \frac{0.056}{0.094} \times 0.1$$

$$Q''_3 = 0.0595 \frac{m^3}{s}$$

Estos son los caudales que circulan por el sistema de tuberías en paralelo. La comprobación es que:  
 $h_{f_1} = h_{f_2} = h_{f_3}$

### Problemas Propuestos

6.1 Una tubería de 100 mm de diámetro conecta la succión de una bomba a un tanque con aceite ( $\delta = 0.85$ ) para elevar un gasto  $0.03 \frac{m^3}{s}$  de como se muestra en la figura.

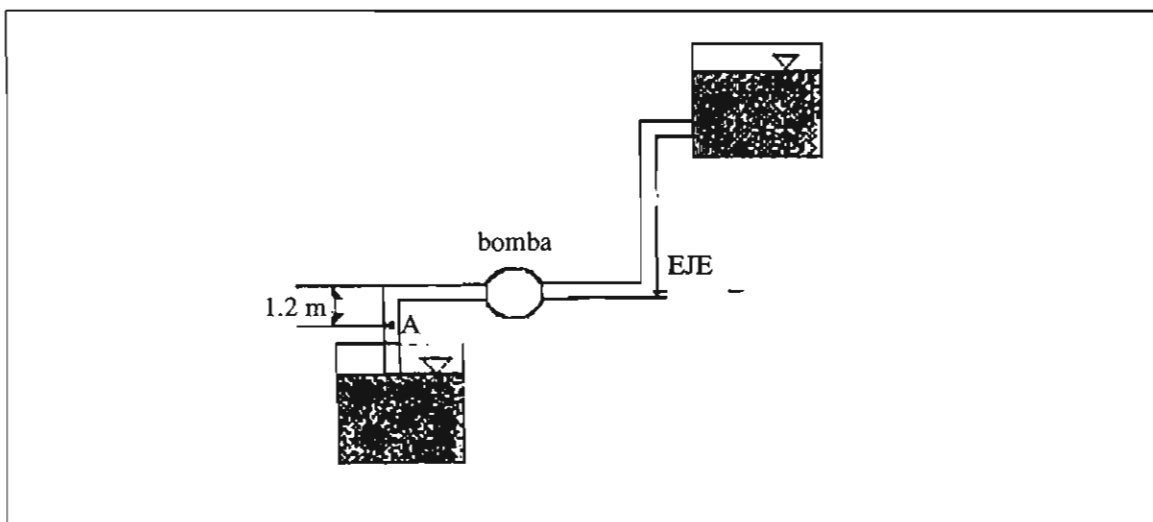


Figura del problema 6.1

6.2 Con un sifón de 50 mm de diámetro se extrae aceite ( $\delta = 0.85$ ) de un tanque, como se muestra en la figura. Si la pérdida de carga entre los puntos 1 y 2 es de 1.5 m y entre los puntos 2 y 3 es de 2.4 m, hallar la descarga de aceite del sifón y la presión en el punto 2.

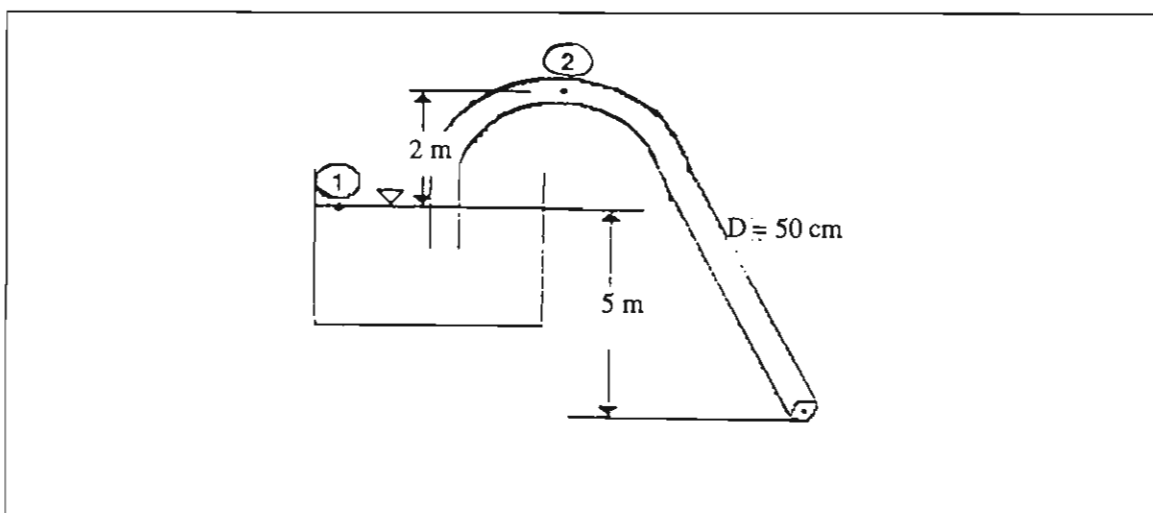


Figura del problema 6.2

- 6.3 Una tubería conduce agua de un tanque a otro, cuya superficie libre está  $12\text{ m}$  por debajo de la superficie libre del primero. Determinar las pérdidas si la descarga es de  $0.6 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$
- 6.4 Calcular el diámetro de una tubería con rugosidad  $\epsilon = 0.0006\text{ ft}$  que se necesita e agua a  $60^\circ\text{ F}$  con una pérdida de carga de  $1\text{ ft}$  por cada  $1000\text{ ft}$  de tubería.
- 6.5 Una tubería vieja de  $2\text{ m}$  de diámetro tiene una rugosidad de  $\epsilon = 30\text{ mm}$ . Si se le aplica un recubrimiento de  $12\text{ mm}$  de espesor, su rugosidad se reducirá a  $\epsilon = 1\text{ mm}$ . ¿Cuál será el ahorro anual en costos de bombeo por kilómetro de tubería si se bombean  $6 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$  de agua a  $20^\circ\text{ C}$ ? La eficiencia de la bomba es  $80\%$  y el costo de la energía eléctrica es de 4 pesos por kilowatt-hora.
- 6.6 ¿Cuál debe ser el diámetro de una tubería de acero fundido necesaria para transportar  $400 \frac{\text{L}}{\text{s}}$  de agua a  $25^\circ\text{ C}$  a  $1\text{ km}$  de distancia si la pérdida total de carga es de  $2\text{ m}$ ?
- 6.7 ¿Cuál es el número de Reynolds para el flujo de  $0.3 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$  de aceite ( $\delta = 0.86$ ,  $\mu = 0.025 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$ ) a través de un tubo de  $450\text{ mm}$  de diámetro?
- 6.8 Calcular el gasto de agua que fluye por las tuberías en serie de la figura.

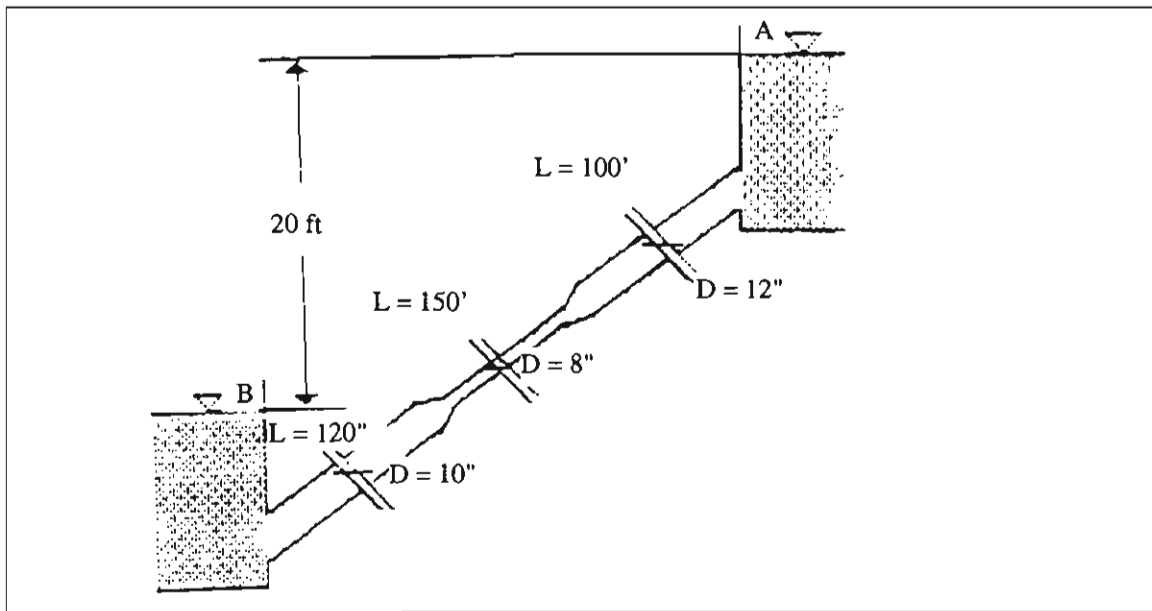


Figura del problema 6.8

- 6.9 Calcular el flujo volumétrico del sistema de la figura, si el diámetro de la tubería es de  $4\text{ in}$ , la longitud total de la tubería es  $500\text{ ft}$ , el factor de fricción  $f = 0.037$  y la rugosidad  $\epsilon = 0.003\text{ ft}$ .



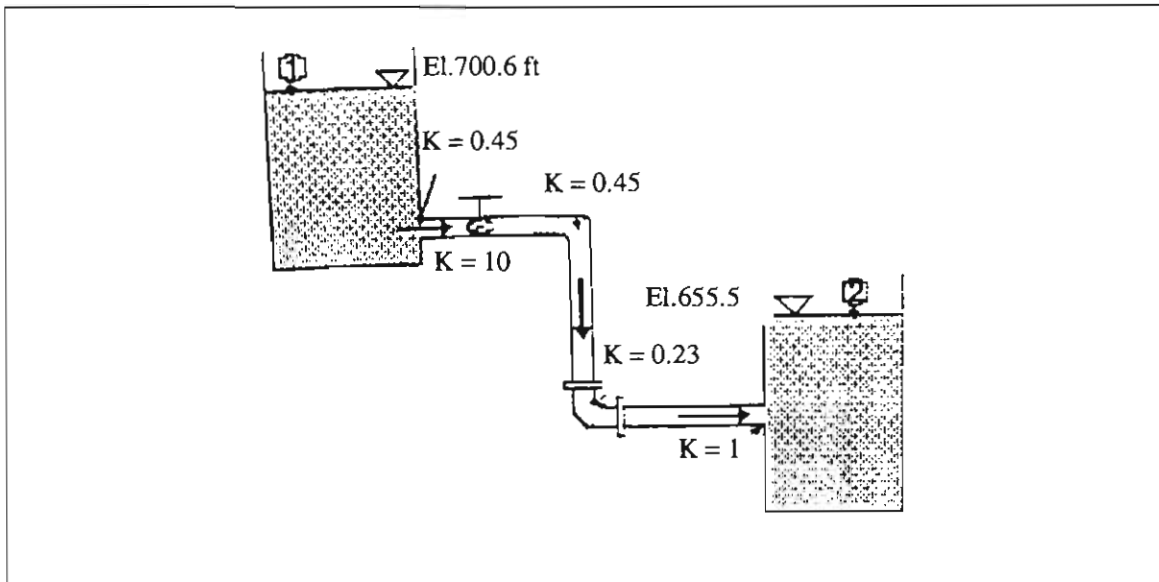
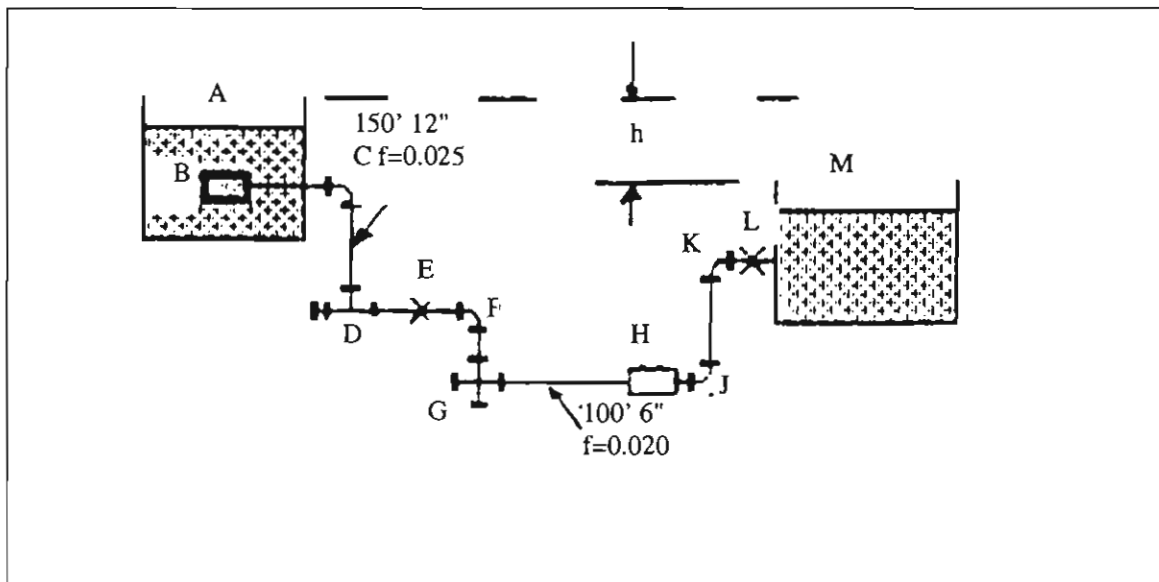


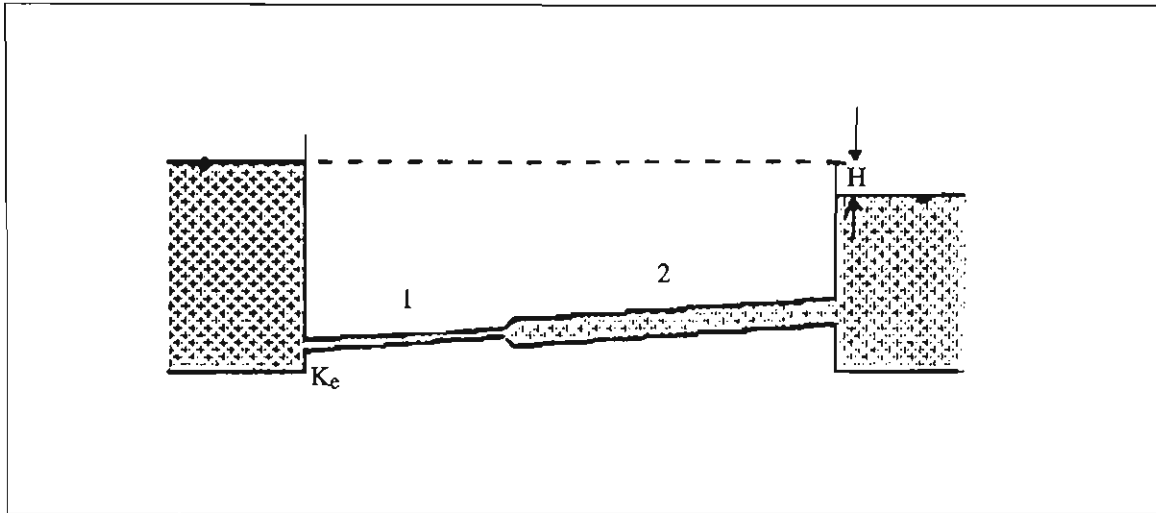
Figura del problema 6.9

6.10 Convertir el sistema de la figura en una tubería equivalente de 6 pulgadas de diámetro.  
Figura del problema 6.10



6.11 En la figura  $K_c = 0.5$ ,  $L_1 = 300 \text{ m}$ ,  $D_1 = 600 \text{ mm}$ ,  $\epsilon_1 = 2 \text{ mm}$ ,  $L_2 = 240 \text{ m}$ ,  $D_2 = 1 \text{ m}$ ,  $\epsilon_2 =$  Determinar la descarga del sistema.

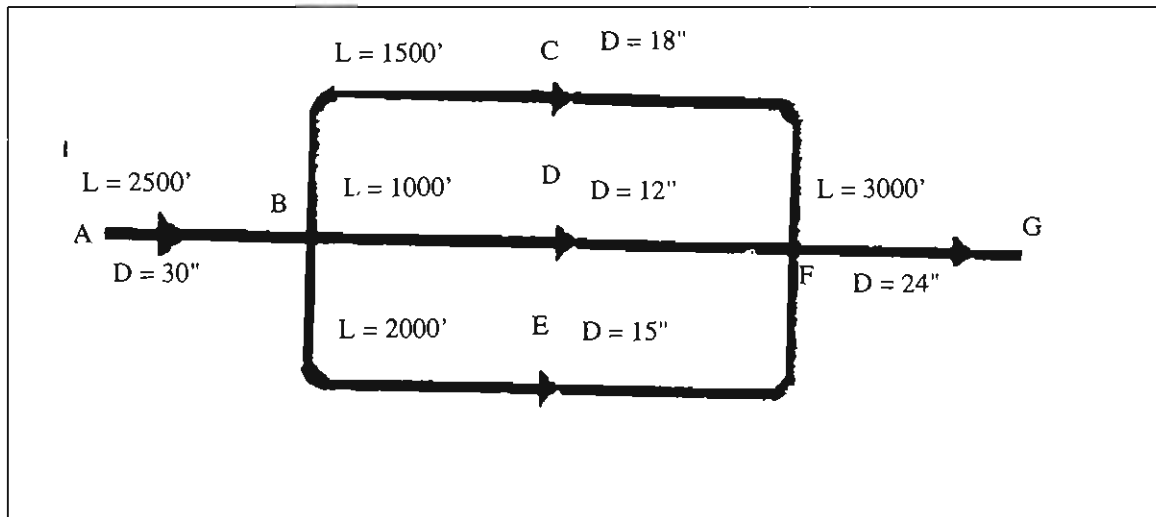
Figura del problema 6.11



**6.12** Dos tuberías en serie tiene, respectivamente, 100 *ft* de longitud y 1 *in* de diámetro ( $\epsilon = 0.000005 \text{ ft}$ ) y 500 *ft* de longitud y 6 *in* de diámetro ( $\epsilon = 0.0008 \text{ ft}$ ) con una pérdida total de carga de carga de 25 *ft*, transportan agua a 60° F. Calcular el gasto.

**6.13** La figura muestra un sistema de tuberías en paralelo. Las cargas en los puntos A y E son 70 *m* y 46 *m*, respectivamente. Calcular el gasto a través de cada rama, considerando  $c = 120$ .

Figura del problema 13



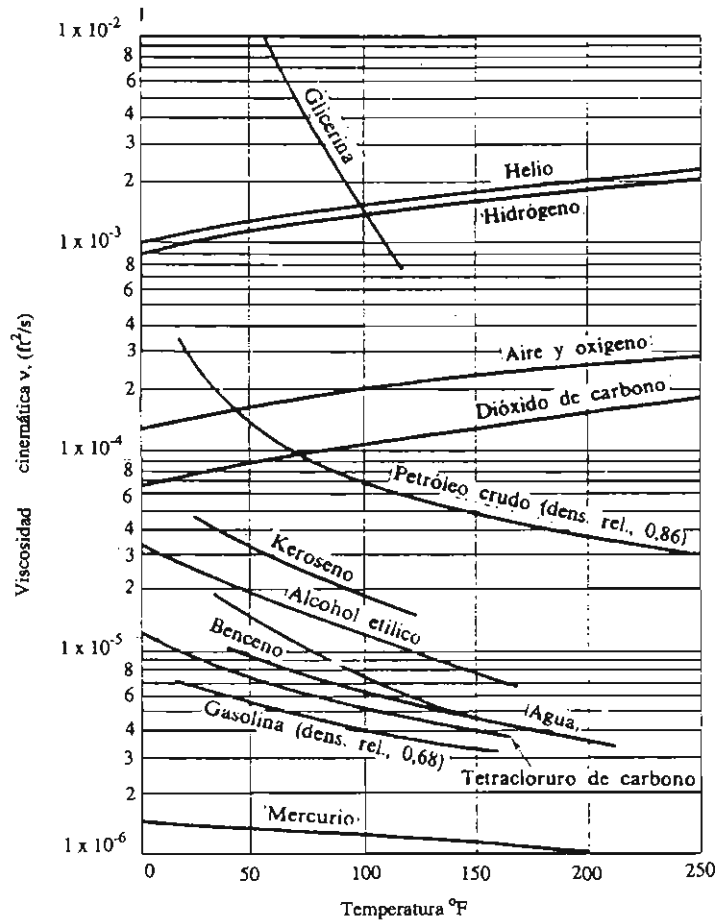
6.14 La descarga de agua en el sistema de tuberías de concreto de la figura es de  $15.0 \frac{ft^3}{s}$ . Calcular la pérdida de carga entre el punto *A* y el punto *G*.

# **APENDICE A**

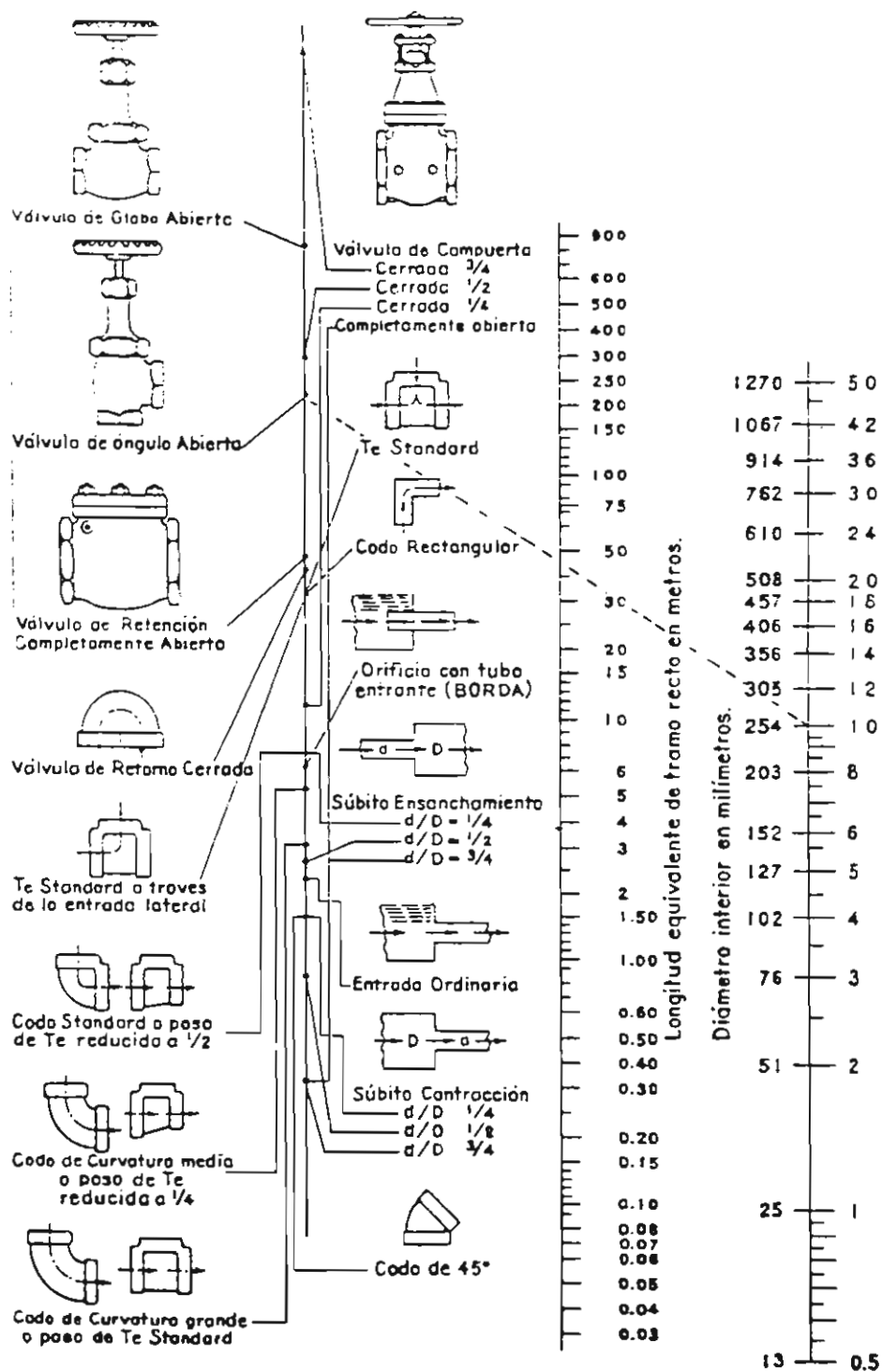


Propiedades de los Líquidos más comunes a 1 ATM y 20 °

LIQUIDO	$\rho$ $\left[\frac{\text{slugs}}{\text{ft}^3}\right]$	$\mu$ $\left[\frac{\text{lb} \cdot \text{s}}{\text{ft}^2 \times 10^5}\right]$	$\sigma$ $\left[\frac{\text{lb}}{\text{ft}}\right]$	$\beta \hat{c}$ $\left[\frac{\text{lb}_f}{\text{m}^2} \times 10^{-6}\right]$
Amoníaco	1.18	0.46	0.00146	
Benceno	1.71	1.36	0.00198	153
Tetracloruro de Carbono	3.09	2.02	0.00185	140
Etanol	1.53	2.51	0.00156	130
Gasolina	1.32	0.61		
Glicerina	2.45	3110	0.00434	630
Keroseno	1.56	4.0	0.0019	
Mercurio	23.6	3.25	0.0352	3800
Metanol	1.53	1.25	0.00155	120
Aceite SAE 10	1.78	170	0.0025	190
Aceite SAE 30	1.78	535	0.0024	200
Agua	1.94	2.09	0.0050	317
Agua de Mar	1.99	2.23	0.0050	330



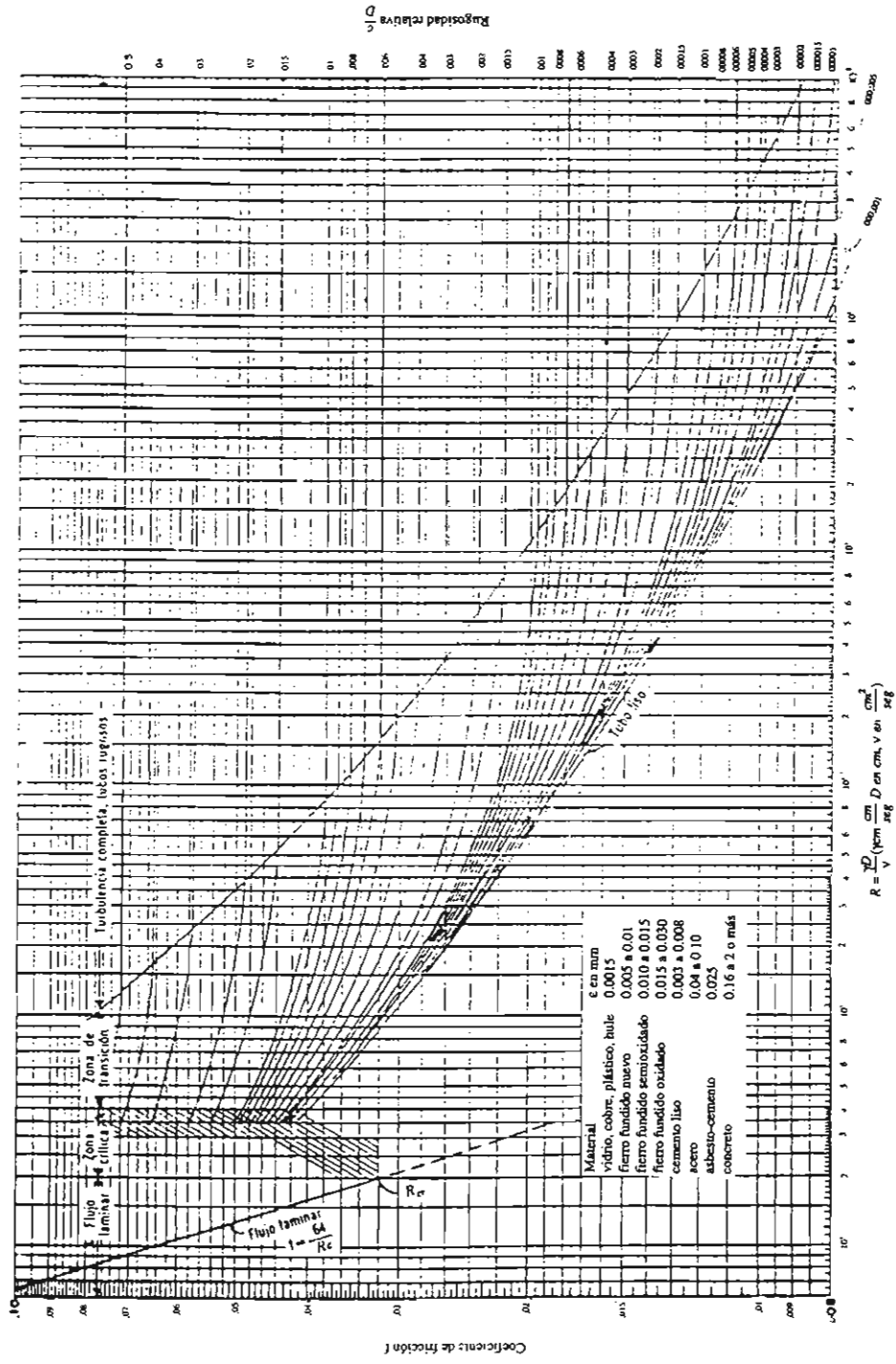
Viscosidad cinemática de los fluidos más corrientes a 1 ATM



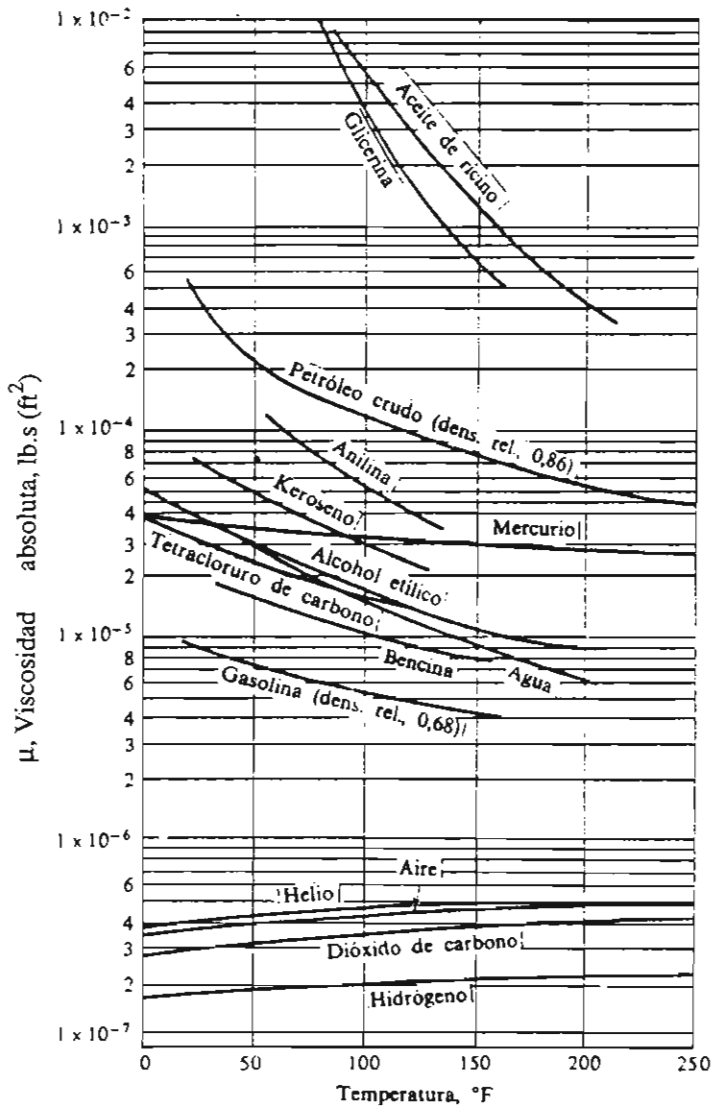
Pérdida de carga en conexiones

Diámetro interior en Pulgadas.





**Coeficiente de fricción para cualquier tipo y tamaño de Tubo; diagrama universal de Moody**



Viscosidad absoluta de los fluidos más corrientes a 1 ATM

Solución a los Problemas Propuestos

1.1  $\sigma = 0.006 \frac{lb}{ft}$

1.2  $F = 0.0183 N$

1.3  $h = 0.385 in$

1.4  $\beta_c = 1.872 \times 10^6 \frac{kN}{m^3}$

1.5  $W = 29.3 lb$  de agua

1.6 4.11 %

1.7 a)  $\Delta V_s = -0.0000341 \frac{m^3}{Kg}$

b)  $V_s = 0.000942 \frac{m^3}{Kg}$

c)  $\gamma_2 = 10414 \frac{N}{m^3}$

1.8  $P_2 = 6220 \frac{lb}{in^2}$

1.9 a) para  $y = 0, 1, 2, y 3 \frac{dv}{dy} = 15 s^{-1}$ ;  $\tau = 0.015 \frac{lb}{ft^2}$

b) para  $y = 0 \frac{dv}{dy} = 30 s^{-1}$ ;  $\tau = 0.03 \frac{lb}{ft^2}$

$y = 1 \frac{dv}{dy} = 20 s^{-1}$ ;  $\tau = 0.02 \frac{lb}{ft^2}$

$y = 2 \frac{dv}{dy} = 10 s^{-1}$ ;  $\tau = 0.01 \frac{lb}{ft^2}$

$y = 3 \frac{dv}{dy} = 0$ ;  $\tau = 0 \frac{lb}{ft^2}$

1.10  $\mu = 0.0049 \frac{lb s}{ft^2}$

1.11  $\mu = 1.35 \times 10^{-4}$

1.12 a)  $Q = 1416$

b)  $\dot{m} = 20.7$

2.1  $f\left(\frac{\Delta h}{1}, \frac{\mu d}{Q \rho}, \frac{Q^3 \rho^5 g}{\mu^5}\right) = 0$

2.2  $D = 0.151 \text{ m}$

2.3  $Q = 0.5554 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$

2.4  $v_m = 2.71 \times 10^{-8} -$

No existe un

2.5  $V_m = 8000 \text{ mph}$

3.1 a)  $p = 30.3 \frac{-}{p}$

b)  $p = 209 \text{ KPa}$

c)  $p = 2091 \text{ mP}$

3.2  $P_a = -2.125 \text{ m H}_2\text{O}$

$P_b = -0.425 \text{ m H}_2\text{O}$

3.3 a) elevación en E = 40.7 pies

elevación en F = 39.93 pies

elevación en G = 34.71 pies

b)  $h = 1.91 \text{ ft}$

3.4  $h = 0.94 \text{ cm}$

3.5  $P_a - P_b = 264 \text{ lb/ft}^2$

3.6  $P_a = 2 \pi \text{ lpsia}$

3.7  $P_a = 86.22 \text{ kP}$

**3.8**  $F = 21.54 \text{ kN}$

$$h_{cp} = 3.68 \text{ m}$$

**3.9**  $F = 38.75 \text{ kN}$

$$X = 0.615 \text{ m}$$

**3.10**  $B = 6\,490 \text{ lb}$

$$A = 5\,490 \text{ lb}$$

**3.11**  $P = 18.47 \text{ kN}$

**3.13**  $F_b = 898\,600$

$$F_v = 499\,200$$

$$X = 5.43 \text{ ft}$$

$$Z = 7.07 \text{ ft}$$

**5.1** a)  $v_1 = 37.3 \text{ ft/s}$

b)  $Q_1 = 29.3 \text{ ft}^3/\text{s}$

c)  $Q_2 = 29.3 \text{ ft}^3/\text{s}$

d)  $\dot{m} = 56.8 \text{ slugs/s}$

**5.2**  $\dot{m} = 0.0823 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$

$$\rho_2 = 0.652 \text{ kg/m}^3$$

**5.3**  $v_2 = 4.64 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

**5.4**  $F = 884 \text{ N}$  hacia la izquierda

**5.5** 1,101 lb

**5.6**  $F = 21.49 \text{ lb}$ , a  $45^\circ$

**5.7**  $F = 106 \text{ lb}$

**5.8**  $F_x = -185.8 \text{ lb}$

$$F_y = 35.75 \text{ lb}$$

**5.9** a)  $F = 1\,164 \text{ lb}$

b)  $F = 6\,337 \text{ lb}$

**5.10**  $P_2 = 11.6 \text{ psig}$

$$P_3 = 19.3 \text{ psig}$$

**5.11**  $h = 1.25 \text{ ft}$

**5.12**  $\omega = 463 \text{ rpm}$

**5.13**  $t = 96 \text{ N.m}$

## **Bibliografía**

- Streeter, V.L.; Wylie, B. *Mecánica de los fluidos*, McGraw Hill, 1987.
- Shames, H. *La Mecánica de los fluidos*, McGraw Hill, 1967.
- White, F.M. *Mecánica de fluidos*, McGraw Hill, 1979.
- Hansen, A.G. *Mecánica de fluidos*, Limusa, 1979.
- Mironer, A. *Engineering Fluid Mechanics*, McGraw Hill, 1979.
- Daughtery, R.L., Francini, J.B. *Fluid Mechanics with engineering applications*, McGraw Hill, 1977.
- Roberson, J.A.; Crouse, C.T. *Mecánica de fluidos* 2a. edición, Editorial Interamericana, 1985.
- Fox, R.W.; MacDonald A.T. *Introducción a la Mecánica de fluidos* 2a. Edición, Editorial Interamericana, 1986.

*Mecánica de Fluidos.* Se terminó de imprimir en el mes de enero de 1993 en Grupo Editorial Eón, S.A. de C.V. La edición consta de 1,000 ejemplares.





*MECANICA DE FLUIDOS.* El comportamiento de los fluidos (líquidos y gases) y los efectos que producen en las diversas superficies, es el tema central de este libro. Distinguir los fluidos por sus propiedades mecánicas: densidad, peso, gravedad, compresibilidad, dilatación –entre otras–, y conocer los principios de las teorías de la semejanza, las ecuaciones de hidrostática y conservación de la masa, energía y cantidad de movimiento, determinación de las pérdidas de energía en conductos cerrados y comprender las características de una bomba de instalación sencilla, son algunos de los temas que a nivel introductorio se abordan.

Los temas tratados y los ejercicios propuestos son presentados de manera accesible y gráfica y están diseñados para aprender a resolver problemas relacionados con el manejo, conducción, almacenamiento y conservación de líquidos y fluidos.

Este libro es una herramienta sumamente útil para estudiantes e ingenieros interesados en el tema.

Libro de Texto

---