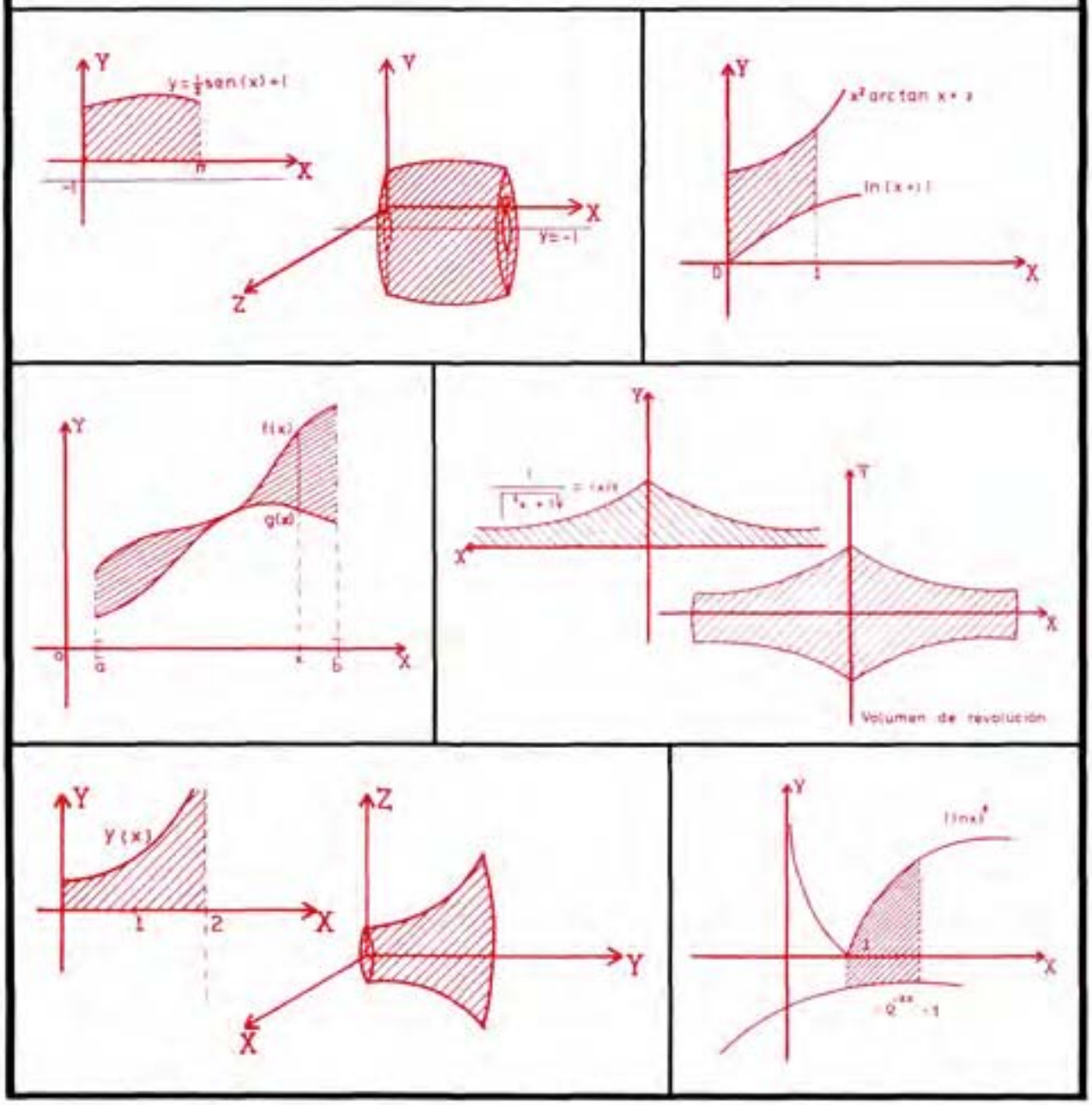
Problemario de cálculo diferencial e integral Parte II

Alfonso C. Becerril Espinosa



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

UNIDAD AZCAPOTZALCO División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Departamento de Ciencias Básicas

Casa abierta al tiempo

Problemario de cálculo diferencial e integral

parte II

Problemario de cálculo diferencial e integral

Parte II

Alfonso C. Becerril Espinosa

Casa abierta al tiempo

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS

Diseño de Portada y Edición
Modesto Serrano R

Av. San Pablo 180, Azcapotzalco, D.F. C.P 02200

6a. impresión, 1995

Hecho en México
Printed in Mexico

A

JULIA ESPINOSA ESPINOSA (MADRE)

Y

FRANCISCA ESPINOSA RUIZ (TIA)

(q.e.p.d.)

AGRADECIMIENTOS.

Hago un profundo agradecimiento a Jaime Grabinsky Steider que siendo Jefe del Departamento de Ciencias Básicas me ofreció todo el apoyo y más importante, estimulo para que diera inicio a esta serie de problemarios de cálculo.

No puedo dejar de reconocer a Carlos Zubieta, como Jefe del Area de Matemática Educativa, su constante preocupación y colaboración para la buena marcha de este proyecto.

Han sido importantes las revisiones y sugerencias que Raúl Amezcua aportó para mejorar el texto.

Consejos y amable compañía de Viney Badel han coadyuvado al estado de ánimo requerido para un desempeño productivo.

La supervisión de Carlos Ulín Jiménez contribuyó a mejorar la edición de este problemario.

El eficiente mecanografiado de Teresa Rangel y la siempre diligente asistencia de Norma Caballero han permitido ver la conclusión de este trabajo.

Finalmente, agradezco la meticulosa labor de los dibujos realizados por Sergio Guerra Aguayo y la participación profesional de la Comisión editorial de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería.

EL AUTOR
ALFONSO C. BECERRIL E.

I N D I C E

INTRODUCCION

LA IDEA ESENCIAL EN ESTE PROBLEMARIO ES MOSTRAR A BASE DE EJEMPLOS COMO SE APLICAN METODOS O FORMULAS PARA CALCULAR LA DERIVADA O INTEGRAL DE FUNCIONES.

EN CADA SECCION DE ESTE PROBLEMARIO SE DA UNA BREVE INTRODUCCION ACERCA DEL MÉTODO DE FORMULA A EMPLEAR PARA EL CALCU¿O DE LA DERIVADA O INTEGRAL DE UNA FUNCION. SE DEBE TOMAR EN CUENTA QUE SE SUPONEN CONOCIDAS, LAS FORMULAS DE DERIVADA, INTEGRAL E IDENTIDADES DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS, LOGARITMICAS, HIPERBOLICAS Y SUS INVERSAS.

AL FINAL DE CADA SECCION SE PRESENTAN PROBLEMAS A RESOLVER, CUYAS SOLUCIONES, CON BOSQUEJO DE SU OBTENCION EN ALCUNOS CASOS, SE DAN AL FINAL DEL PROBLEMARIO.

D E R I V A D A

1 P O R

R E G L A D E L A C A D E N A

Regla de la Cadena

Sabemos que la regla de la cadena es la derivada de una composición de funciones, y la derivada de dicha composición de funciones es el producto de las derivadas de esas funciones:

Así que:

Si $h(x)$

$x \longrightarrow y = h(x)$ *es función derivable*

y $g(x)$

$y \longrightarrow z = g(y)$ *es función derivable*

son funciones las cuales se pueden "componer", es decir, aplicar a $y = h(x)$ *la función* g*, entonces para los* x *para los cuales se puede hacer dicha composición*

$$z = (g_o h)\ (x) = g(h(x)) = g(y)$$

se tiene que la derivada con respecto a x *es, por la regla de la cadena*

$$\frac{dz(x)}{dx} = \frac{dg(h(x))}{dh} \cdot \frac{dy(x)}{dx}$$

$$= g'(h(x)0.h'(x)$$

es decir

$$\frac{dgoh(x)}{dx} = g'(hx)).h'(x)$$

NOTA: *1: Para cuestiones prácticas, la regla de la Cadena o derivada de -- una composición de funciones la podemos interpretar como: derivada - 1º la función de "afuera" y multiplicandola por la derivada de la función de "más adentro". Cada una derivandose y evaluandose con respecto a su variable o argumento, así*

Si $y = h(x)$

y $z = g(x)$

entonces la función composición

$$g(y) = goh(x) = g(h(x))$$

tiene derivada

$$\frac{dg(h)}{dx} = g'(h(x))\ h'(x) \qquad (1)$$

En particular, si $y(x)$ es función derivable en x y g es la función

$$g(y) = y^n, \text{ entonces}$$

La composición de dichas funciones, $y(x)$ seguida de g

$$(goy)(x) = g(y(x)) = y^n(x) \text{ ----------(2)}$$

es derivable en x, de modo que por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{dy^n(x)}{dx} = \frac{dgoy(x)}{dx}$$

$$= \frac{dg(y)}{dy} \cdot \frac{dy(x)}{dx}$$

$$= \frac{d}{dy} y^n \cdot \frac{dy(x)}{dx}$$

$$= ny^{n-1} . y'(x) \text{ ----------(3)}$$

O brevemente

$$\frac{dy^n(x)}{dx} = ny^{n-1}(x) . y'(x) \text{ ----------(4)}$$

NOTA: 2. *A veces se tiene la composición de tres o más funciones, por lo -- que la derivada de la composición de esas funciones es igual al -- producto de las derivadas de cada una de esas funciones, evaluadas cada una con respecto a su variable o argumentos.*

EJEMPLO: *Derivar la función*

$$H(x) = [\cos x]^4$$

SOLUCION: *H (x) es composición de las funciones*

$$t(x) = \cos x$$

$$y(t) = t^4$$

entonces, como

$$H(x) = y \circ t(x),$$

Por la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{dH(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\, y \circ t(x)$$

$$= \frac{dy(t)}{dt} \cdot \frac{dt(x)}{dx}$$

$$= \frac{d}{dt}\, t^4 \cdot \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= 4\, t^3 \cdot (-\operatorname{sen} x),$$

Sustituyendo en función de x, la derivada queda

$$\frac{dH(x)}{dx} = (-4\ \operatorname{sex})(\cos x)^3.$$

OBSERVACION: *este resultado puede obtenerse en forma casi inmediata, si se sigue la nota 1.*

EJEMPLO: *Derivar la función*

$$f(x) = sen(4x^{3/2})$$

SOLUCION: *f(x) es composición de las funciones*

$$f(x) = 4x^{3/2}$$

$$g(x) = seny$$

entonces, como

$$f(x) = g \circ y\ (x)$$

Por la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{df\ (x)}{dx} = \frac{d}{dx}\ g \circ y\ (x)$$

$$= \frac{dg\ (y)}{dy} \cdot \frac{dy\ (x)}{dx}$$

$$= cosy\ .\ (4\ \frac{3}{2}\ x^{\frac{1}{2}}\ ).$$

Sustituyendo en función de x, la derivada queda

$$\frac{df\ (x)}{dx} = 6x^{\frac{1}{2}}\ cos(4x^{3/2}).$$

EJEMPLO: *Derivar la función*

$$l(w) = \arctan(\operatorname{sen} w)$$

SOLUCION: *$l(w)$ es composición de las funciones*

$$h(w) = \operatorname{sen} w$$

$$f(h) = \arctan h$$

ENTONCES, COMO

$$l(w) = f \circ h(w)$$

POR LA REGLA DE LA CADENA, TENEMOS

$$\frac{dl(w)}{dw} = \frac{d}{dw} f \circ h(w)$$

$$= \frac{df(h)}{dh} \cdot \frac{dh(w)}{dw}$$

$$= \frac{d(\arctan h)}{dh} \cdot \frac{d}{dw} \operatorname{sen} w$$

$$= \frac{1}{1 + h^2(w)} \cdot \cos w$$

SUSTITUYENDO EN FUNCION DE W, LA DERIVADA QUEDA

$$\frac{dl(w)}{dw} = \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2(w)} \cdot \cos w$$

EJEMPLO: *Derivar la función*

$$T(x) = \tan(4x^3 + 2x^2)$$

SOLUCION: *T (x) es composición de las funciones*

$$y(x) = 4x^3 + 2x^2$$

$$z(y) = \tan y$$

ENTONCES, COMO

$$T(x) = z \circ y(x).$$

POR LA REGLA DE LA CADENA, TENEMOS

$$\frac{dt(x)}{dx} = \frac{d}{dx} z \circ y(x)$$

$$= \frac{d}{dy}(\tan y) . \frac{d}{dx}(4x^3 + 2x^2)$$

$$= \sec^2 y . (12x^2 + 4x)$$

SUSTITUYENDO EN FUNCION DE X, LA DERIVADA QUEDA

$$\frac{d}{dx} \tan(4x^3 + 4x^2) = (12x^2 + 4x) \sec^2(4x^3 + 2x^2)$$

EJEMPLO; *Derivar la función*

$$G(y) = [e^{3y} + \cos \frac{1}{y}]^{3/8}$$

SOLUCION: *G(y) es composición de las funciones*

$$h(y) = e^{3y} + \cos \frac{1}{y}$$

$$f(h) = h^{3/8}$$

ENTONCES, COMO

$$G(y) = f \circ h\ (y).$$

POR LA REGLA DE LA CADENA, TENEMOS

$$\frac{dG\ (y)}{dy} = \frac{d}{dy}\ f \circ h\ (y)$$

$$= \frac{d}{dh}\ f(h)\ .\ \frac{dh\ (y)}{dy}$$

$$= \frac{d}{dh}\ (h^{3/8})\ .\ \frac{d}{dy}\ (e^{3y} + \cos \frac{1}{y})$$

$$= \frac{3}{8}\ h^{-5/8}\ (3e^{3y} + \frac{1}{y^2}\ \text{sen}\ \frac{1}{y})$$

$$= \frac{3}{8}\ (e^{3y} + \cos \frac{1}{y})^{-5/8}(3e^{3y} + \frac{1}{y^2}\ \text{sen}\ \frac{1}{y})$$

OBSERVACION: *EN ESTE EJEMPLO* e^{3y} *y* $\cos \frac{1}{y}$ *SON COMPOSICIONES DE FUNCIONES. POR LO QUE TAMBIEN SE LES APLICO LA REGLA DE LA CADENA.*

EJEMPLO: *Derivar la función*

$$H(x) = \text{arcsen}\,\frac{1}{x} + \arctan x^2.$$

SOLUCION: *arcsen* $\frac{1}{x}$ *es composición de las funciones*

$$y(x) = \frac{1}{x} \text{ ---------- (1)}$$

$$z(y) = \text{arcsen}\, y \text{ ---------- (2)}$$

TAMBIEN, arctan x^2 *ES COMPOSICION DE LAS FUNCIONES*

$$w(x) = x^2 \text{ ---------- (3)}$$

$$m(w) = \arctan w \text{ ---------- (4)}$$

ENTONCES.

$$H(x) = z \circ y(x) + m \circ w(x) \text{ ---------- (5)}$$

ASI, LA DERIVADA DE H(x) AL EMPLEAR (5) ES:

$$\frac{dH(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\, z \circ y\,(x) + \frac{d}{dx}\, m \circ w(x)$$

$$= \frac{dz(y)}{dy} \cdot \frac{dy(x)}{dx} + \frac{dm(w)}{dw} \cdot \frac{dw(x)}{dx}$$

$$= \frac{d\ \text{arcsen}\ y}{dy} \cdot \frac{d\frac{1}{x}}{dx} + \frac{d\ \arctan\ w}{dw} \cdot \frac{dx^2}{dx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1 + w^2}\,(2x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{1}{x})^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1 + (x^2)}\ 2x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^4 - x^2}} + \frac{2x}{1 + x^4}$$

EJEMPLO: *Encontrar la ecuación de la recta tangente a la grafica de la función.*

$$g(x) = (-1 + \cos 4x)^3$$

En el punto $P = (\frac{\pi}{8}, -1)$.

SOLUCION: *Sabemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función $F(x)$ en un punto $Q = (xo, F(xo))$ esta dada por la ecuación.*

$$R_T = F(xo) + F'(xo)(x - xo).$$

COMO LA DERIVADA DE LA FUNCION g ES:

$$g'(x) = 3(-1 + \cos 4x)^2((-\operatorname{sen} 4x)4),$$

ENTONCES

$$g'(\frac{\pi}{8}) = 3(-1 + \cos \frac{\pi}{2})^2((-\operatorname{sen} \frac{\pi}{2})4)$$

$$= -12.$$

ASI LA ECUACION DE LA RECTA TANGENTE A LA GRAFICA DE LA FUNCION $g(x)$ EN EL PUNTO $P = (-\frac{\pi}{8}, -1)$ ES:

$$R_T(x) = -1 + (-12)(x - \frac{\pi}{8})$$

$$R_T(x) = -12x + \frac{3}{2}\pi - 1.$$

EJEMPLO: *Determine los puntos sobre la gráfica de la función.*

$$y(x) = \text{arcsen } 3x.$$

En los cuales la recta tangente es paralela a la recta que pasa por los puntos $A = (2,-3)$, $B = (4,7)$.

SOLUCION: *La ecuación de la recta que pasa por los puntos* A *y* B *es fácil de obtener y esta es:*

$$R(x) = 5x - 13$$

COMO LA DERIVADA DE UNA FUNCION NOS DA LA PENDIENTE M_T *DE LA RECTA TANGENTE* R_T *A LA CURVA, ENTONCES TENEMOS.*

$$M_t = \frac{d}{dx} \text{arcsen } 3x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot 3$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

COMO LAS RECTAS $R_1(x)$ *Y* $R_T(x)$ *DEBEN SER PARALELAS ENTONCES SUS PENDIENTES DEBEN SER IGUALES, ASI TENEMOS.*

$$\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} = 5$$

$$\frac{3}{5} = \sqrt{1-9x^2}$$

$$\frac{9}{25} = 1 - 9x^2$$

$$9x^2 = 1 - \frac{9}{25}$$

$$= \frac{16}{25}$$

$$x^2 = \frac{16}{9.25}$$

$$x = \pm \frac{4}{15}$$

POR TANTO $\quad x_1 = \frac{4}{15}$ y $x_2 = -\frac{4}{15}$

SON LAS ABSCISAS CORRESPONDIENTES A LOS PUNTOS DONDE SUS RECTAS TANGENTES SON PARALELAS A LA RECTA $R_1(x)$. Y LAS ORDENADAS DE LOS PUNTOS DE TANGENCIA SE OBTIENEN SUSTITUYENDO LOS VALORES DE x_1, x_2 EN LA y arcsen $3x$ ASI TENEMOS.

$$y(\frac{4}{15}) = \text{arcsen } 3(\frac{4}{15})$$

$$= \text{arcsen } \frac{4}{5} \qquad (\frac{4}{15})$$

$$y(-\frac{4}{15}) = \text{arcsen } 3(-\frac{4}{5})$$

$$= \text{arcsen } (-\frac{4}{5})$$

POR LO TANTO LOS PUNTOS SOBRE LA GRAFICA DE LA FUNCION - - -
$y(x) = \text{arcsen } 3x$ EN LOS CUALES LA RECTA TANGENTE ES PARALELA -
A LA RECTA QUE PASA POR LOS PUNTOS A y B SON:

$$P = \left(-\frac{4}{15} , \text{arcsen} \left(-\frac{4}{5}\right)\right)$$

$$Q = \left(\frac{4}{15} , \text{arcsen} \left(\frac{4}{5}\right)\right) .$$

DERIVADA DE FUNCIONES TRASCENDENTES POR EL METODO DE LA REGLA DE LA CADENA.

I *Usando regla de la cadena, calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones.*

1) $G(w) = \operatorname{sen}(w^2)$

2) $H(x) = \arctan(2x + 1)$

3) $T(x) = \operatorname{sen}(\arctan x)$

4) $K(x) = \dfrac{\cos(x^2 + 1)}{\operatorname{sen}(3x)}$

5) $G(x) = \tan(e^x)$

6) $G(w) = e^{2\cos w}$

7) $H(t) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} 2t)$

8) $H(x) = \cot(e^{2x})$

9) $H(t) = \sec(e^{3t})$

10) $F(t) = \csc e^{2t}$

11) $F(x) = e^{2\tan x^2}$

12) $F(w) = \cos(w + 1)^2$

13) $H(t) = \tan e^t + \cosh e^{2t}$

14) $W(x) = \arctan e^{x^2} + \operatorname{arcsen} 3x^2$

15) $Z(x) = \arccos e^{7x^2} + e^{\arctan x^2}$

16) $F(x) = \operatorname{sen}(9 + \sqrt{x})$

17) $H(z) = \arctan(z^3 + z)$

18) $W(x) = [\arccos \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}]^2$

19) $G(x) = e^{\operatorname{sen} x^2 + \frac{1}{\arctan \sqrt{x}}}$

20) $W(x) = [\ln(\operatorname{arcsen} e^x)]^2$

II Demuestre que la derivada de una función par es una función impar, y que la derivada de una función impar, es una función par.

III Hallar $y''(o)$ si $y(x) = \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})$

IV Hallar $y''(o)$ si $y(x) = \operatorname{sen}(x + e^{x^2})$

V Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función - $y(x) = 50x - \tan 2x$, en el punto $P = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{25}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$

VI Sea $Y(x) = A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x$. Determinar valores de A y B que satisfagan las condiciones $Y(o) = 4$, $Y'(o) = -3$.

VII Derivar la función $F(x) = \int \begin{matrix} \ln(3x + 1) \\ \operatorname{sen}(t + 2)dt, \text{ para } x \geqq 1. \end{matrix}$

VIII Sea $(t) = A\, e^{3(1-t)} + B\operatorname{sen} 5t$. Determinar valores de A y B que satisfagan las condiciones $Y(o) = 5$, $Y'(o) = 10$.

IX Derivar la función $F(x) = \tan(e^{\operatorname{arcsen} x})$.

X Comprobar que la tercera derivada de la función $Y(x) = x^2 \ln x$ - satisface la ecuación $xy''' = 2$.

XI Comprobar que la función $y(x) = \arccos \frac{1}{x^2}$ junto con su derivada satisfacen la ecuación $x^3(\operatorname{sen} y(x)).\ y'(x) = 2$.

Sugerencia: Aplicar la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$.

XII Comprobar que la función $y(x) = e^{\frac{1}{x}}$ junto con su primera y segunda derivada satisfacen la ecuación:

$$x^3 \; y''(x) + xy'(x) - 2y(x) = 0.$$

XIII Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función.

$$y(x) = 2x + \ln x^2.$$

que sea perpendicular a la recta cuya ecuación es:

$$y(x) = \frac{5}{6} - \frac{1}{3}x.$$

M E T O D O

2 D E

D E R I V A D A L O G A R I T M I C A

DERIVADA LOGARITMICA

La función logaritmo también es util para calcular derivadas de funciones. El logaritmo junto con sus propiedades contribuyen a disminuir la "problemática" del cálculo de la derivada de muchas funciones, algunas de las cuales son del tipo.

$$[h(x)]^{g(x)} \quad \text{donde } h(x) > 0. \qquad (A)$$

Al aplicar logaritmo a la función en (A), obtenemos

$$\ln[h(x)]^{g(x)} = g(x)\ln[h(x)] \text{ ----------} (1)$$

Al derivar ambos miembros de (1) obtenemos

$$\frac{[[h(x)]^{g(x)}]^{1}}{[h(x)]^{g(x)}} = g(x)\left[\frac{h'(x)}{h(x)}\right] + \ln[h(x)].\ g'(x)$$

así que la derivada de la función en (A) es:

$$([h(x)]^{g(x)})^{1} = [h(x)]^{g(x)}\left[g(x).\ \frac{h'(x)}{h(x)} + \ln[h(x)]g'(x)\right] \qquad (2)$$

(A) es un caso particular de el siguiente hecho:

si tenemos una función.

$$x \longrightarrow \phi(x) \text{ positiva y le aplicamos}$$

la función logaritmo

$$\Phi(x) \xrightarrow{\ln = \log} \ln\Phi(x)$$

entonces tenemos una composición de funciones

$$x \xrightarrow{\Phi} \Phi(x) \xrightarrow{\ln} \ln(\Phi(x)),$$

y por la regla de la cadena tenemos que su derivada es:

$$\frac{d}{dx}\ln(\Phi(x) = \frac{d}{d}\ln(\Phi).\ \frac{d\Phi(x)}{dx}$$

$$= \frac{1}{\Phi(x)} \cdot \Phi'(x)$$

luego entonces

$$\Phi'(x) = \Phi(x)\frac{d}{dx}[\ln\Phi(x)] \text{ ----------(B)}$$

lo cual es una "fórmula para calcular la derivada de la función $\Phi(x)$. Dicha formula es conocida como derivada logarítmica de $\Phi(x)$.

Los siguientes ejemplos son de interés para observar la forma de aplicar el - logaritmo para el cálculo de la derivada.

EJEMPLO: *Derivar la función*

$$f(x) = x^{x^2} \text{ ----------(1)}$$

SOLUCION: *Aplicando logaritmo natural a ambos lados de (1) tenemos.*

$$\ln f(x) = \ln x^{x^2} = x^2 \ln x \text{ ----------(2)}$$

derivando ambos lados de (2) respecto de x, tenemos

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = x^2\frac{d}{dx}\ln x + \ln x\frac{d}{dx}x^2$$

$$= x^2\frac{1}{x} + \ln x \quad 2x$$

$$= x + 2x\ln x$$

Así tenemos

$$f'(x) = f(x)'[x + 2x\ln x]$$

es decir

$$\frac{dx^{x^2}}{dx} = x^{x^2}[x + 2x\ln x]$$

EJEMPLO: *Derivar la función*

$$h(x) = \frac{x^3 \arctan x}{x^x \operatorname{arc\,sen} x} \text{ ----------(1)}$$

SOLUCION: *Aplicando ln a ambos lados de (1) tenemos*

$$\ln h(x) = \ln \left[\frac{x^3 \arctan x}{x^x \arctan x} \right]$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \qquad = \ln (x^3 \arctan x) - \ln(x^x \operatorname{arcsen} x)$$

$$\ln(a.b) = \ln a + \ln b \qquad = \ln x^3 + \ln \arctan x - \ln x^x - \ln \operatorname{arcsen} x$$

$$\ln x^r = r \ln x \qquad = 3\ln x + \ln \arctan x - x\ln x - \ln(\operatorname{arcsen} x) \text{--(2)}$$

derivando ambos lados de (2) respecto de x, tenemos

$$\left(\begin{matrix}\text{se usa regla}\\ \text{de la cadena}\end{matrix}\right) \frac{h'(x)}{h(x)} = 3\,\frac{1}{x} + \frac{1}{\arctan x}\,\frac{1}{1+x^2} - x\,\frac{1}{x} - \ln x - \frac{1}{\operatorname{arcsen} x\sqrt{1-x^2}}$$

así tenemos

$$h'(x) = h(x)\left[\frac{3}{x} + \frac{1}{\arctan x\,(1+x^2)} - 1 - \ln x - \frac{1}{(\operatorname{arcsen} x)(\sqrt{1-x^2})}\right]$$

es decir

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3 \arctan x}{x^x \operatorname{arcsen} x}\right] = \left[\frac{x^3 \arctan x}{x^x \operatorname{arcsen} x}\right]\left[\frac{3}{x} + \frac{}{\arctan x\,(1+x^2)} - 1 - \ln x - \frac{1}{(\operatorname{arcsen} x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

EJEMPLO: *Derivar la función*

$$S(x) = x^{\arctan x} + (\arctan x)^{x} \qquad (1)$$

SOLUCION: *Como $S(x)$ es suma de funciones, entonces su derivada es -- igual a la suma de las derivadas de las funciones que intervienen en la suma, así tenemos.*

$$\frac{dS(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\, x^{\arctan x} + \frac{d}{dx}\,(\arctan x)^{x} \text{ ----------(2)}$$

Por derivada logaritmica tenemos

$$\frac{d}{dx}\, x^{\arctan} = x^{\arctan x}\left[\arctan x.\ \frac{1}{x} + \ln x\ \frac{1}{1+x^2}\right] \text{ ----------(3)}$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan x)^{x} = (\arctan x)^{x}\left[x\ \frac{1}{\arctan x}\ \frac{1}{1+x^2} + \ln(\arctan x)\right] \text{ ---(4)}$$

al sustituir (3) y (4) en (1), obtenemos

$$\frac{dS(x)}{dx} = x^{\arctan x}\left[\frac{\arctan x}{x} + \frac{\ln x}{1+x^2}\right],$$

$$+ (\arctan x)^{x}\left[\frac{x}{\arctan x}\ \frac{1}{1+x^2} + \ln(\arctan x)\right]$$

EJEMPLO: *Derivar la función*

$$S(x) = x^{\arctan \ln x} + \int_0^x e^{(\operatorname{sen} t)^2} dt \text{ ----------(1)}$$

SOLUCION: *$S(x)$ es suma de funciones, entonces su derivada es*

$$\frac{dS(x)}{dx} = \frac{d}{dx} x^{\arctan \ln x} + \frac{d}{dx} \int_0^x e^{(\operatorname{sen} t)^2} dt \text{ ----------(2)}$$

el primer sumando de (2) lo derivamos empleando derivada logarítmica y regla de la cadena, quedando.

$$\frac{d}{dx} x^{\arctan \ln x} = [x^{\arctan \ln x}] \left[\frac{\arctan \ln x}{x} + \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}\right] \text{ ---------(3)}$$

el segundo sumando de (2) lo derivamos empleando el teorema - fundamental del cálculo, así tenemos

$$\frac{d}{dx} \int_0^x e^{(\operatorname{sen} t)^2} dt = e^{(\operatorname{sen} x)^2} \text{ ----------(4)}$$

así, con (3) y (4) tenemos la derivada.

$$\frac{dS(x)}{dx} = x^{\arctan \ln x} \left[\frac{\arctan \ln x}{x} + \frac{\ln x}{1(1+\ln^2 x)}\right] + e^{\operatorname{sen}^2 x}$$

EJEMPLO: *Derivar la función.*

$$f(x) = x^{x^2} \qquad (1)$$

SOLUCION: *Para derivar la función, aplicaremos logaritmo a ambos miem-- bros de (1), con lo cual obtenemos.*

$$\ln f(x) = \ln x^{x^2}$$

$$= x^2 \ln x \text{ ----------} (2)$$

derivando ambos miembros de (2) tenemos.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = x^2 \frac{d}{dx} \ln x + \ln x \frac{dx^2}{dx}$$

$$= x^2 \frac{1}{2} + (\ln x) 2x$$

$$= x + (\ln x) 2x$$

así tenemos

$$f'(x) = f(x) [x + \ln x . 2x]$$

es decir

$$\frac{d}{dx} x^{x^2} = x^{x^2} [x + \ln x . 2x].$$

EJEMPLO: *Derivar la función*

$$g(x) = (\arccos \sqrt{x})^{x} \arctan \sqrt{x} \quad \text{----------} (1)$$

SOLUCION: *Para derivar esta función aplicaremos logaritmo a ambos miembros de (1), tenemos.*

$$\ln g(x) = x\ln(\arccos \sqrt{x}) + \ln\arctan \sqrt{x} \quad \text{----------} (2)$$

derivando ambos miembros de (2) con respecto a x, obtenemos

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = x \frac{1}{\arccos \sqrt{x}} \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \ln(\arccos \sqrt{x})$$

$$+ \frac{1}{\arctan \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{(1+x)} \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{----------} (3)$$

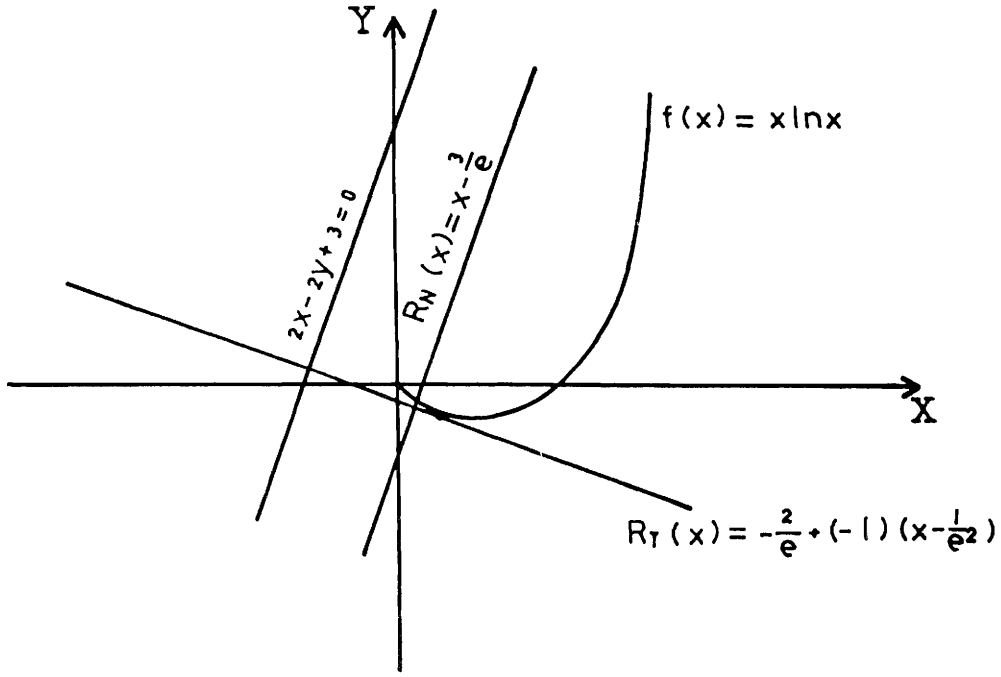
de (3) tenemos que la derivada de g(x) es:

$$\frac{dg(x)}{dx} = g(x) \left[\frac{1}{\arccos \sqrt{x}} \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x}\, 2\sqrt{x}}\right) + \ln(\arccos \sqrt{x})\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\arctan \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right]$$

EJEMPLO: *Trazar la recta normal a la curva* $y = x\ln x$ *que sea paralela a la recta* $2x-2y+3 = 0$.

SOLUCION: *La gráfica de* $y = x\ln x$ *y de la recta* $2x-2y+3 = 0$ *están mostradas en la siguiente figura.*



Como la recta R_N *normal es paralela a la recta* $2x-2y+3 = 0$ *ésta debe tener la misma pendiente, así si* m_N *denota la pendiente de la recta normal, entonces*

$m_N = 1$ *donde 1 es la pendiente de la recta dada.*

Como R_N *es normal a la curva dada y además la derivada de una función nos da la pendiente* m_T *la recta tangente, entonces el producto de las pendientes* m_n, m_T *debe ser 1.*

$$m_N \, m_T = -1$$

pero $m_T = (x\ln x)' = \ln x+1$, entonces,

$$1\,(\ln x+1) = -1$$

$$\ln x = -2$$

$$x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

este valor de x es la abcisa que corresponde al punto de tangencia. que - al sustituirlo en la función $x\ln x$, obtenemos que

$$y(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{e}\ \ln\frac{1}{e}$$

$$= \frac{1}{e}\ (\ln 1-\ln e) = -\frac{2}{e}$$

es el valor de la ordenada del punto de tangencia y por tanto la ecuación - de la recta normal es:

$$R_N(x) = -\frac{2}{e} + 1(x-\frac{1}{e})$$

$$= x - \frac{2}{e} - \frac{1}{e}$$

$R_N(x) = x - \frac{3}{e}$ es la ecuación de la recta normal $R_N(x)$.

EJEMPLO: *Determinar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función.*

$$y(x) = x(\ln x)^x \text{ en } xo. = e.$$

SOLUCION: *Como la ecuación de la recta tangénte a la gráfica de una función $f(x)$ en un punto $Q = (xo, F(xo))$ es dada por la ecuación.*

$$R_t(x) = F(xo) + F'(xo)\ (x-xo).$$

Para nuestro caso, la función

$$y(x) = x(\ln x)^x$$

la derivamos empleando logaritmo, así tenemos

$$\ln y(x) = \ln(x(\ln x)^x)$$

$$= Lnx + \ln(\ln x)^x)$$

$$= \ln x + x\ln(\ln x)$$

Así la derivada es:

$$\frac{y'(x)}{y\ (x)} = \frac{1}{x} + \ln(\ln x) + x\ (\ \frac{1}{\ln x.}\ )\ (\ \frac{1}{x}\ )$$

$$= \frac{1}{x} + \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x.}$$

Evaluación en $xo = e$.

$$\frac{y'(e)}{y\ (e)} = \frac{1}{e} + 1$$

Así:

$$y'(e) = y(e)\ \left(\frac{1}{e} + 1 \right)$$

$$= (e\ (\ln e)^{e})\ \left(\frac{1}{e} + 1 \right)$$

$$= e\left(\frac{1}{e} + 1 \right)$$

$$= 1 + e.$$

Luego entonces, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función - Y(x) en el punto.

$$P = (e,e) \text{ es:}$$

$$R_t(x) = e + (1 + e)\ x - e)$$

$$= (1 + e)\ x - e^2$$

EJEMPLO: *Bosquejar la gráfica de la función $f(x) = X^x$ $(x > 0)$ determinando sus intervalos de crecimiento (o decrecimiento) e intervalos de -- concavidad hacia arriba (0 hacia abajo).*

SOLUCION: *Para derivar la función $f(x) = x^x$, emplearemos logaritmo natu-- ral, así tenemos* $\ln f(x) = \ln x^x = x\ln x$

y la derivada es

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1$$

así

$$f'(x) = f(x)(\ln x+1)$$

$$= x^x(\ln x+1).$$

es la derivada de la función $f(x)$.

Esta derivada es mayor que o cuando $\ln x+1 > 0$

así tenemos $\ln x > -1$

de aquí obtenemos que $x = e^{\ln x}$ $e^{-1} = \frac{1}{e}$,

es decir, $f(x)$ es creciente en el intervalo $\left(\frac{1}{e} ; +\infty\right)$, *y $f(x)$ es decreciente cuando la derivada es menor que cero, esto es, -- cuando* $\ln x+1 < 0$,

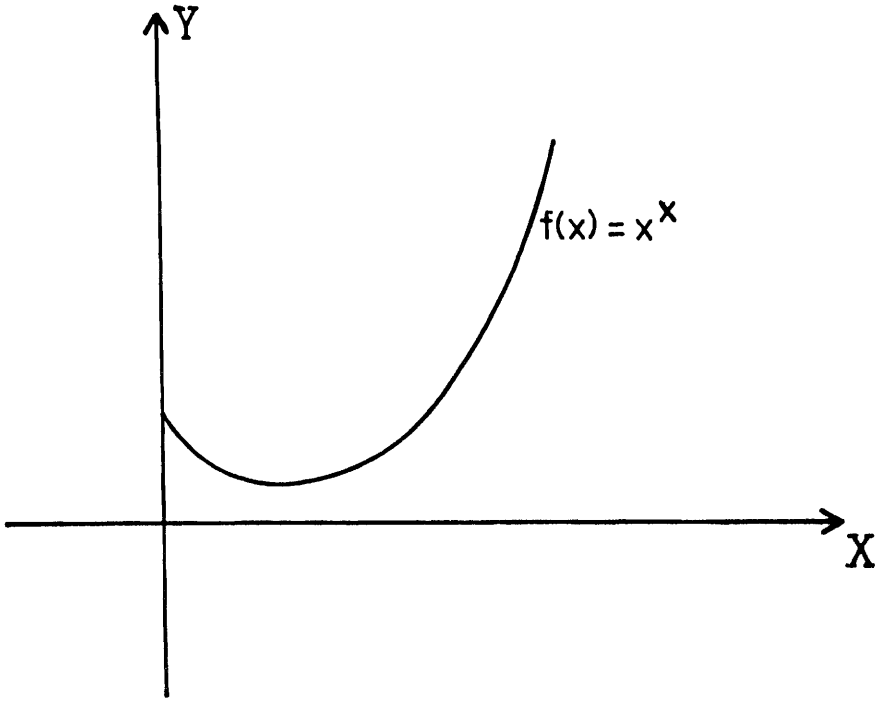
de esto tenemos $\ln x < -1$

$$x = e^{\ln x} < e^{-1} = \frac{1}{e}$$

o sea $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(0; \frac{1}{e})$, la segunda derivada de $f(x)$ es

$$f''(x) = x^{x}(\ln x+1)^2 + x^{x-1}$$

la cual es mayor que cero para todo x $(x > 0)$ entonces $f(x)$ es concava hacia arriba para $x > 0$, y la gráfica es bosquejada a continuación.



DERIVADA DE FUNCIONES TRASCENDENTES POR EL METODO DE DERIVADA LOGARITMICA.

1) *APLICANDO LOGARITMO Y SUS PROPIEDADES, DERIVAR CADA UNA DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES.*

1) $H(x) = X^{2x}$

2) $Z(x) = \dfrac{\ln X^{e}}{X^{e^{x}}}$

3) $F(x) = \arctan x^{8x^2}$

4) $G(w) = W^{\arctan w}$

5) $G(x) = \arccos X^{x}$

6) $F(x) = X^{\operatorname{arcsen} x}$

7) $H(t) = (\operatorname{sen} t^2)\ (t^{t})$

8) $F(z) = e^{z^2}(\operatorname{senh} z^{2z})$

9) $F(y) = \dfrac{y \operatorname{arcsen}(e^{y} + y^2)}{(y+1)^2 \ln (y^2+1)}$

10) $H(z) = \dfrac{[\ln(z^2 + e^{8z})]^{10}}{e^{z^2} \cdot \operatorname{senh} z^{z}}$

11) $F(x) = \dfrac{\ln(e^{x} + x^2) \cdot \ln(x^2 + e)}{\arccos(x+1)}$

12) $G(z) = |e^{3z^2} - 1| \ |\operatorname{sen}(\arctan z^2)|^{z} + z^{z}$

13) $H(x) = \dfrac{x(\arctan 2x)^{2x}}{e^{x}} + x^{e^{x}}$

14) $T(x) = \sqrt{x}\ \operatorname{sen} x + x^{\sqrt{x}}$

15) $F(x) = \dfrac{X - 1}{\sqrt[3]{(2x + 1)}\ \sqrt{(x + 3)^5}}$

16) $G(y) = y^{\ln y} + e^{y^2}$

17) $H(w) = (\ln(3w + 1))^{w} + \operatorname{senh}(3^{w^2} + 2)$

18) $H(x) = (\operatorname{sen} x)^{x} + x^{x}\ .x \neq 0.$

II) BOSQUEJAR LA GRAFICA DE CADA UNA DE LAS SIGUIENTES FUN-- CIONES

a) $h(y) = 3^{y}$, b) $H(z) = (\sqrt{z})^{z}$, $z > 0$

III OBTENGA UNA ECUACION DE LA RECTA TANGENTE A LA GRAFICA DE LA FUNCION

$Y(x) = X^{x + 1}$ en $Xo = 1.$

IV DETERMINAR UNA ECUACION DE LA RECTA TANGENTE A LA GRAFI CA DE LA FUNCION

$Z(x) = (\operatorname{Ln} x)^{x}$ en $Xo = e.$

I N T E G R A C I O N

3 P O R

C A M B I O D E V A R I A B L E

PRIMERA PARTE:

Muchas integrales

$$\int_a^b A(t)\ dt \text{ ----------(1)}$$

no son directas de calcular pero su integrando puede ser descompuesto en la forma.

$$A(t) = f(g(t)).g'(t) \text{ ----------(2)}$$

donde f *y* g' *son funciones continuas, entonces*

$$\int_a^b A(t)\ dt = \int_a^b f(.g.(t))g'(t)dt \text{ ----------(3)}$$

al hacer

$$u = g(t) \quad \text{para} \quad a \leqq t \leqq b \text{ ----------(4)}$$

tenemos

$$du = g'(t)dt \text{ ----------(5)}$$

para $t = a$ *se tiene* $u_a = g(a)$ ----------(6)

y para $t = b$ *se tiene* $u_b = g(b)$ ----------(7)

luego por 4, 5, 6 y 7 tenemos

$$\int_a^b (f.g)(t)g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \text{ ----------(8)}$$

en muchos casos la segunda integral en 8 es más "fácil" de calcular que la integral en 1.

SEGUNDA PARTE:

Si la integral

$$\int_a^b f(x)dx \text{ ----------(1)}$$

resulta "difícil" de calcular, muchas veces es posible que - exista una función uno a uno, sobre y derivable de un intervalo I de extremos α *y* β *en intervalo de extremos - a y b tal que para cada u de I se tenga.*

$$x = \Phi(u) \text{ ----------(2)}$$

$$dx = \Phi'(u)du \text{ ----------(3)}$$

$$a = \Phi(\infty)$$

$$a = \Phi(\beta) \text{ ----------(4)}$$

con lo que al sustituir 2, 3, 4 y 5 en I obtenemos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\Phi(u)).\ \phi\ (u)du \text{ ----------(5)}$$

tal que la última integral de la derecha en 6 es más fácil de calcular que la integral en I.

NOTA: *Las expresiones 4 de la PRIMERA PARTE y 2 de la SEGUNDA PARTE se les conoce como cambio de variable para las integrales en I.*

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 2}\, dx \text{ ----------} (1)$$

SOLUCION: *Esta integral la resolveremos por el método de cambio de variable notamos que*

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 1 + (x^2 + 1)^2 \text{ ----------} (2)$$

Por (2), el integrando se puede expresar de la siguiente manera.

$$\frac{x}{x^4 + 2x^2 + 2} = \frac{x}{1 + (x^2 + 1)^2},$$

Por lo que hacemos el siguiente cambio de variable

$$w = x^2 + 1, \text{ entonces } dw = 2xdx \text{ y } xdx = \frac{1}{2}\, dw (3)$$

$$= \frac{1}{2}\, dw \text{ ----------} (4)$$

Así que al sustituir las "nuevas" expresiones de (3) en (1) e integrando, tenemos

$$\int \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 2}\, dx = \int \frac{x}{1 + (2x^2 + 1)^2}\, dx$$

$$\int \frac{\frac{1}{2}\, dw}{1 + w^2}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{dw}{1 + w}$$

$$= \frac{1}{2} \arctan w + c$$

$$= \frac{1}{2} \arctan(x^2 + 1) + c$$

Es decir $\displaystyle\int \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 2}\, dx = \frac{1}{2} \arctan\,(x^2 + 1) + c$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int \frac{3dx}{2x^2-6x+5} \quad \text{----------} (1)$$

SOLUCION: *Esta integral la resolveremos por el método de cambio de variable. Notemos que, al completar cuadrado, obtenemos la igualdad.*

$$2x^2-6x+5 = \frac{1}{2}\left(1+(2x-3)^2\right) \quad \text{----------} (2)$$

Así que el integrando se puede expresar de la siguiente manera.

$$\frac{3}{2x^2-6x+5} = \frac{6}{1+(2x-3)^2}$$

por lo cual hacemos el siguiente cambio de variable

$$w = 2x-3, \quad \text{entonces} \quad dw = 2dx \quad y \quad dx = \frac{1}{2}dw \quad (3)$$

Así que al sustituir las "nuevas" expresiones de (3) e (1) es - integrando, tenemos.

$$\int \frac{3dx}{2x^2-6x+5} = 6\int \frac{1}{1+(2x-3)^2}dx$$

$$= 6\int \frac{1}{1+w^2}\frac{1}{2}\,dw$$

$$= 3\int \frac{1}{1+w^2}\,dw$$

$$= 3\arctan(2x-3)+c$$

Es decir

$$\int \frac{3dx}{2x^2-6x+5} = 3\arctan(2x-3)+c$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int \frac{3x^2}{1 + x^6}\, dx \text{ ----------} (1)$$

SOLUCION: *Esta integral la resolveremos por el método de cambio de variable hagamos*

$$w = x^3 \text{ entonces } du = 3x^2\, dx \text{ ----------} (2)$$

luego entonces

$$w^2 = x^6 \text{ y } x^2\, dx = \frac{1}{3}\, dw \text{ ----------} (3)$$

sustituyendo (2) y (3) en (1) obtenemos

$$\int \frac{3x^2}{1 + x^6}\, dx = 3 \int \frac{x^2\, dx}{1 + x^6}$$

$$= 3 \int \frac{1/3dw}{1 + w^2}$$

$$= \int \frac{dw}{1 + w^2}$$

$$\arctan w + c$$

$$= \arctan x^3 + c$$

Es decir

$$\int \frac{3x}{1 + x^6}\, dx = \arctan x^3 + c$$

INTEGRAL POR CAMBIO DE VARIABLE

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{Cosxdx}{1 + sen^2x} \quad \text{----------} (1)$$

SOLUCION: *Esta integral la resolveremos mediante el siguiente cambio de variable.*

$$U = senx, \text{ entonces } dU = cosxdx \text{ ---------- } (2)$$

sustituyendo (2) en (1) obtenemos

$$\int_0^{\pi/2} \frac{cosxdx}{1 + sen^2x} = \int \frac{dy}{1 + U^2}$$

$$= arctanU$$

$$= arctan(senx) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= arctan(sen\, \pi/2) - arctan(sen0)$$

$$= arctan1$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int \frac{1 + senx}{cos^2 x}\, dx$$

SOLUCION: *Separando términos en el integrando tenemos*

$$\int \frac{1 + senx}{cos^2\ x}\, dx = \int \frac{1}{cos^2\ x}\, dx + \int \frac{senx}{cos^2 x}\, dx$$

$$= \int sec^2\ x dx + \int cos^{-2}\ x senx dx \text{ ----------(1)}$$

la segunda integral en (1) la podemos resolver por el método de cambio de variable: haciendo.

$$z = cosx \text{ tenemos } dz = -senx dx \text{ ----------(2)}$$

Así que

$$\int cos^{-2}\ x senx dx = -\int z^{-2} dz$$

$$= \frac{-z^{-3}}{-3}$$

$$= \frac{1}{3}\,(cosx)^{-3} \text{ ----------(3)}$$

al sustituir (3) en (1) y realizar la primera integral de (1) obtenemos

$$\int \frac{1 + senx}{cos^2 x} dx = \int \frac{1\ dx}{cos^2 x} + \int \frac{senx}{cos^2 x} dx$$

$$= \int sec^2 x dx + \int cos^{-2} x senx dx$$

$$= tanx + \frac{1}{3cos^3 x}$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int \frac{sen^2\ 2x}{1 + \cos\ 2x}\, dx \quad \text{----------} (1)$$

SOLUCION: *Como*

$$sen^2 2x + \cos^2 2x = 1$$

entonces

$$sen^2\ 2x = 1 - \cos^2\ 2x$$

$$= (1 + \cos\ 2x)(1 - \cos\ 2x)$$

luego

$$\frac{sen^2\ 2x}{1 + \cos\ 2x} = 1 - \cos\ 2x \quad \text{----------} (2)$$

así, por (2), tenemos

$$\int \frac{sen^2\ 2x}{1 + \cos\ 2x}\, dx = \int (1 - \cos\ 2x)dx$$

$$= \int dx - \int \cos\ 2x dx$$

$$= x - \frac{sen\ 2x}{2} + C$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int \frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}^3 2x}\, dx \text{ ----------(1)}$$

SOLUCION: *Esta integral la resolveremos por el método de cambio de variable. Hagamos*

$$w = \operatorname{sen}2x, \text{ entonces } dw = 2\cos 2x dx \text{ -------(2)}$$

sustituyendo (2) en (1), obtenemos

$$\int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}^3 2x}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{dw}{w^3}$$

$$= \frac{1}{2} \int w^{-3}\, dw$$

$$= \frac{1}{2} \frac{w^{-2}}{-2} + c$$

$$= \frac{1}{4} (\operatorname{sen}2x)^{-2} + c$$

Es decir

$$\int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}^3 2x}\, dx = -\frac{1}{4} (\operatorname{sen}2x)^{-2} + c$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int \frac{\sec^2 3x}{(1+\tan 3x)^3}\, dx \quad \text{----------} (1)$$

SOLUCION: *Esta integral la resolveremos por cambio de variable. Hagamos*

$$z = 1+\tan 3x.$$

$$dz = 3\sec^2 3x dx. \quad \text{----------} (2)$$

sustituyendo (2) en (1) tenemos

$$\int \frac{\sec^2 3x}{(1+\tan 3x)^3}\, dx = \int \frac{\frac{1}{3}\, dz}{z^3}$$

$$= \frac{1}{3} \int z^{-3}\, dz$$

$$= \frac{1}{3} \quad \frac{z^{-2}}{-2} + c$$

$$= \frac{1}{6}\, z^{-2} + c$$

$$= -\frac{1}{6}\, (1+\tan 3x)^{-2} + c.$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int \sqrt{\frac{\text{arc sen } 2x}{1-4x^2}}\, dx \text{ ----------(1)}$$

SOLUCION: *Esta integral la resolveremos por el método de cambio de variable tomando en cuenta que.*

$$\frac{d}{dx} \text{ arc sen } 2x = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \; 2$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \text{ ----------(2)}$$

Ello nos conduce a considerar el siguiente cambio de variable

$z =$ arc sen $2x$; *de lo cual obtenemos*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \text{ ----------(3)}$$

Así que al sustituir (3) en (2) tenemos

$$\int \sqrt{\frac{\text{arc sen } 2x}{1-4x^2}}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \sqrt{\text{arc sen } 2x}\; dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{z}\; dZ$$

$$= \frac{1}{3} Z^{3/2} + C$$

$$= \frac{1}{3} (\text{arc sen } 2x)^{3/2} + C.$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int \frac{\ln u}{u}\, du = \text{----------}(1)$$

SOLUCION: *Esta integral la resolveremos por cambio de variable. Notamos que.*

$$\int \frac{\ln u}{u}\, du = \int \ln u \; \frac{du}{u} \text{ ----------}(2)$$

Hagamos el cambio de variable

$$z = \ln u \text{ entonces } dz = \frac{du}{u} \text{ ----------}(3)$$

sustituyendo (3) en (2) tenemos

$$\int \frac{\ln u}{u}\, du = \int \ln u \; \frac{du}{u}$$

$$= \int z \, dz$$

$$= \frac{z^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (\ln u)^2 + c.$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int \frac{(5+\ln x)^4}{x} dx \quad \text{----------} (1)$$

SOLUCION: *Esta integral la resolveremos por cambio de variable. Notamos que*

$$\int \frac{(5+\ln x)^4}{x} dx = \int (5+\ln x)^4 \frac{dx}{x} \quad \text{----------} (2)$$

y que

$$\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x} \text{ , Entonces}$$

Hagamos al cambio de variable

$$Z = 5 + \ln x \text{ entonces } dz = \frac{dx}{x} \quad \text{----------} (3)$$

sustituyendo (3) en (2) tenemos

$$\int \frac{(5+\ln x)^4}{x} dx \quad \int (5+\ln x)^4 \frac{dx}{x}$$

$$= \int z^4 \, dx$$

$$= \frac{z^5}{5} + c$$

$$= \frac{(5+\ln x)^5}{5} + c$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int \frac{1+\tan^2 \ln x}{x}\, dx \text{ ----------} (1)$$

SOLUCION: *Esta integral la resolveremos por cambio de variable. Notamos que.*

$$\int \frac{1+\tan^2 \ln x}{x}\, dx = \int ((1+\tan^2 \ln x)\, \frac{dx}{x} \text{ ----------} (2)$$

y que

$$\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}\, dx$$

Entonces hagamos el cambio de variable

$$w = \ln x, \text{ entonces } dw = \frac{1}{x}\, dx \text{ ----------} (3)$$

sustituyendo (3) en (1), obtenemos

$$\int \frac{1+\tan^2 \ln x}{x}\, dx = \int (1+\tan^2 \ln x)\, \frac{dx}{x}$$

$$= \int (1+\tan^2 w)\, dw$$

$$= \int \sec^2 w\, dw$$

$$= \tan w + c$$

$$= \tan(\ln x) + c$$

INTEGRACION DE FUNCIONES TRASCENDENTES, POR EL METODO DE CAMBIO DE VARIABLE

I) CALCULAR CADA UNO DE LAS SIGUIENTES INTEGRALES

1) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos^2\Theta}\, dx$

2) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x \cos x \, dx$

3) $\displaystyle\int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx$

4) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx$

5) $\displaystyle\int (1 + \sqrt{\operatorname{sen} x})^2 \cos x \, dx$

6) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{(1 + \tan x)}\, dx$

7) $\displaystyle 3\int_0^1 \tan^2 (\tfrac{1}{4}\pi x)\, dx$

8) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{2x}}{1 + e^{4x}}\, dx$

9) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1 + x^2}\, dx$

10) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}\, dx$

11) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

12) $\displaystyle\int \frac{\arctan 2x}{1 + 4x^2}\, dx$

13) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\arccos x}{1 - x^2}}\, dx$

14) $\displaystyle\int \frac{8m^{3/2}}{\sqrt{1 - m^5}}\, dm$

15) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 + e^{4x}}}\, dx$

16) $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{t}}$

17) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{m}\ \ dm}{1+m^3}$ HAGA $X = m^{3/2}$

II) HALLAR UNA FUNCION CUYA DERIVADA dé $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$

III) HALLAR UNA FUNCION CUYA DERIVADA dé $\dfrac{(\arctan x)^2 + (\arctan(x)^{-2}}{1+x^2}.$

I N T E G R A C I O N

4

U S A N D O L O G A R I T M O

USO DE LOGARITMO PARA INTEGRACION

Sabemos que la función logaritmo natural ln (o también log) está dada por la siguiente integral.

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad para \quad x > 0$$

Si $\quad x \xrightarrow{\Phi} \phi \ (x)$

es una función derivable y positiva, entonces podemos obtener la composición de las funciones

$$x \longrightarrow \Phi \ (x) \xrightarrow{\ln} \ln \Phi \ (x)$$

y por la regla de la cadena se tiene la derivada

$$\frac{d}{dx} \ln \Phi \ (x) = \frac{d}{d} \ln\Phi \ (x) \ \frac{d \ \Phi \ (x)}{dx}$$

$$= \frac{1}{\Phi(x)} \ \Phi' \ (x)$$

y de ella la integral

$$\int \frac{\Phi' \ (x)}{\Phi \ (x)} \ dx = \ln \Phi \ (x) + c.$$

que indica que logaritmo se puede usar para integrar funciones.

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int \frac{x^{10}}{1 + x^{11}}\, dx \quad \text{----------} (1)$$

SOLUCION: *Consideremos el cambio de variable*

$$\Phi(x) = 1 + x^{11} \quad \text{----------} (2)$$

luego entonces

$$\Phi'(x) = 11x^{10} \quad \text{----------} (3)$$

$$\frac{1}{11}\, \Phi'(x) = x^{10} \quad \text{----------} (4)$$

así que, al sustituir (2) y (4) en (1), **tenemos**

$$\int \frac{x^{10}}{1 + x^{11}}\, dx = \int \frac{\frac{1}{11}\, \Phi'(x)}{\Phi(x)}\, dx$$

$$= \frac{1}{11} \int \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}\, dx$$

uso de logaritmo para integral

$$= \frac{1}{11} \ln \Phi(x) + c$$

$$= \frac{1}{11} \ln(1 + x^{11}) + c$$

$$= \ln(1 + x^{11})\, \frac{1}{11} + c.$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx \quad \text{----------} (1)$$

SOLUCION: *Consideremos el cambio de variable*

$$\Phi(x) = 1 + \sqrt{x} \quad \text{----------} (2)$$

luego entonces

$$\Phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{----------} (3)$$

$$2 \; \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{----------} (4)$$

así que, al sustituir (2) y (4) en (1), tenemos

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{\Phi(x)} \; 2 \; \Phi'(x) dx$$

$$= 2 \int \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} \, dx$$

uso de logaritmo por integrar

$$= 2 \ln \Phi(x) + c$$

$$= 2 \ln(1 + \sqrt{x}) + c$$

$$= \ln(1 + \sqrt{x})^2 + c.$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$3\int \frac{2x^3 + x}{x^4 + x^2}\,dx \quad \text{----------} (1)$$

SOLUCION: *Consideremos el cambio de variable*

$$\phi(x) = x^4 + x^2 \quad \text{----------} (2)$$

entonces,

$$\phi'(x) = 4x^3 + 2x$$

$$= 2(2x^3 + x) \quad \text{----------} (3)$$

$$\frac{1}{2}\,\phi'(x) = 2x^3 + x \quad \text{----------} (4)$$

así que, sustituyendo (2) y (4) en (1), tenemos

$$3\int \frac{2x^3 + x}{x^4 + x^2}\,dx = 3\int \frac{1}{\phi(x)}\,\frac{1}{2}\,\phi'(x)\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\ln\phi(x) + c.$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^4 + x^2) + c$$

$$= \ln(x^4 + x^2)^{3/2} + c.$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int \tan^3 x dx \quad \text{----------} (1)$$

SOLUCION: *Como*

$$1+\tan^2 x = \sec^2 x \quad \text{entonces} \quad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

además

$$\frac{d\tan x}{dx} = \sec^2 x \quad y \quad \tan x \; x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \text{----------} (2)$$

Emplearemos (2) para calcular la integral en (1), así tenemos

$$\int \tan^3 x dx = \int \tan x \tan^2 x dx$$

$$= \int \tan x \; (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \int \tan x \sec^2 x dx - \tan x dx$$

$$= \int \tan x \frac{d}{dx} \tan x dx - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$$

$$= \frac{\tan^2 x}{2} + \ln \cos x + c.$$

INTEGRACION DE FUNCIONES TRASCENDENTES, USANDO LOGARITMO PARA INTEGRAR.

II CALCULAR CADA UNA DE LAS SIGUIENTES INTEGRALES.

1) $\int \frac{sen\phi}{1 + \cos\phi}\, d\phi$

2) $\int \frac{e^x}{1 + 2e^x}\, dx$

3) $\int \frac{5}{1 + e^{-x}}\, dx$

4) $\int \frac{e^{3x}}{1 + e^{2x}}\, dx$

SUGERENCIA : DIVIDA

5) $\int \frac{1}{x\ln x}\, dx$

6) $\int \frac{dt}{t\log\left(\frac{10}{t}\right)}$

7) $\int \frac{2x^3 + x}{x^4 + x^2}\, dx$

8) $\int \frac{1 / z^2}{1 + 1 / z} = dz.$

9) $\int \cos(\ln x)\, \frac{dx}{x}$

10) $\int \frac{1 + \tan^2 \ln m}{m} \, dm$

12) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}.$

11) $\int \frac{\ln(\ln t)}{t} \, dt$

13) $\int \frac{dx}{x \sqrt{1 - 4\ln x}}$

14) $\int \frac{dx}{x \sqrt{1 - 4\ln^2 x}}$

HAGA $W + \ln x$.

II) HALLAR UNA FUNCION $V(t)$ CUYA SEGUNDA DERIVADA SATISFAGA LA IGUALDAD $v''(t) = \frac{1}{t^2}$, Y QUE DICHA FUNCION SE ANULE EN $t = 1$ Y TOME EL VALOR $1 - \log 2$ EN $t = 2$.

III) HALLAR UNA FUNCION $f(x)$ QUE SATISFAGA LA IGUALDAD

$2\sqrt{x} \; f'(x) = f(x)$ Y LA CONDICION $f(4) = 1$.

I N T E G R A C I O N

5

P O R P A R T E S

INTEGRACION POR PARTES

Otro método de integración llamada integración por partes surge con la necesidad de calcular integrales

$$\int_a^b f(x)dx = \text{----------}(1)$$

que nos son directas de calcular pero su integrando $f(x)$ *puede ser descompuesto como el producto de dos funciones* $u(x)$ *y* $v'(x)$ *para las que* $u'(x)$ *es más "sencilla" que* $u(x)$ *y* $v(x)$ *es "fácil" de calcular de tal manera que* $v(x)\ u'(x)$ *es más fácil de integrar que*

$$f(x) = u(x)\ v'(x) \text{ ----------}(2)$$

El método de integración por partes se puede obtener de observar el siguiente desarrollo, al derivar el producto de dos funciones $u(x)\ v(x)$*, obtenemos*

$$(u(x)v(x))' = u(x)\ v'(x) + v(x)u'(x) \text{ ----------}(3)$$

integrando ambos miembros de 3 se tiene

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b (u(t)v(t)'dt$$

$$= \int_a^b u(t)v'(t)dt + \int_a^b v(t)u'(t)dt \text{ ---}(4)$$

despejando la integral por calcular en 4 se tiene

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(t)u'(t)dt \quad ---(5)$$

la fórmula en(5)es conocida como fórmula de integración por partes y se aplica a integrales cuyo integrando es dado como en(2), para los que la integral del segundo miembro en(5)es más "fácil" de calcular que la integral inicial.

NOTA 1: *Existen integrales para las que (en el proceso para calcularlas) es necesario aplicar dos o más veces el método de integración -- por partes.*

NOTA 2: *Existen integrales en las que después de aplicar el método de integración por partes se vuelve a obtener la integral inicial, salvo por un factor constante de 1 en tal caso se deberán agrupar las integrales para así calcular la integral inicial.*

NOTA 3: *En la aplicación de la fórmula (5) conviene elegir como $v'(x)$ la función de apariencia más "complicada" en la descomposición de $f(x)$. En caso de que la integral del segundo miembro se complique, será conveniente hacer otra descomposición de $f(x)$ para elegir $u(x)$ y $v'(x)$ y así aplicar la fórmula(5). Sin embargo, si esta otra descomposición de $f(x)$ como producto de $u(x)v'(x)$ nos complica la integral del segundo miembro, y si después de hacer todas las posibles descomposiciones de $f(x)$ como producto $u(x)v'(x)$, la integral del segundo miembro de(5)se complica para calcular, más que la primera integral, entonces será necesario emplear otro método para calcular la integral inicial, aunque*

posiblemente en el trąsnscurso de la aplicación de otro método - se tenga que emplear el método de integración por partes.

NOTA 4: *Existen integrales que se pueden resolver por el método de cambio de variable o por el método de integración por partes. Indistintamente.*

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int arctanx\ dx \quad \text{----------} (1)$$

SOLUCION: *Esta integral la resolveremos por la fórmula de integración por partes*

$$\int udu = uv - \int udu \quad \text{----------} (2)$$

hagamos la siguiente elección

$$u = arctanx \quad y \quad dv = dx$$

entonces

$$du = \frac{dx}{1 + x^2}; \quad v = x \quad \text{----------} (3)$$

sustituyendo (3) en (2) obtenemos

$$\int arctanxdx = xarctanx - \int x \frac{1}{1 + x^2} dx$$

$$xarctanx \quad \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + x^2} dx$$

$$= xarctanx - \frac{1}{2} ln(1 + x^2) + c$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int \ln x dx \text{ ----------} (1)$$

SOLUCION: *Esta integral la resolveremos empleando la fórmula de integración por partes.*

$$\int u\, dv = u\, v - \int v du \text{ ----------} (2)$$

hagamos la siguiente elección

$$u = \ln x \quad ; \quad dv = dx$$

entonces

$$du = \frac{1}{x} dx \quad ; \quad u = x \text{ ----------} (3)$$

sustituyendo (3) en (2) obtenemos

$$\int \ln x dx = \ln x\; x - \int x \frac{1}{x} dx$$

$$= x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + c$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx \qquad (1)$$

SOLUCION: *Esta integral la calcularemos empleando la fórmula de integración por partes.*

$$\int u\, dv = u\, v - \int v du \text{ ----------(2)}$$

Hagamos la siguiente elección

$$u = (\ln x)^2 \quad y \quad dv = dx$$

entonces

$$du = 2\ln x \frac{1}{x} dx \quad ; \quad v = x \text{ ----------(3)}$$

Sustituyendo (3) en (2) obtenemos

$$\int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx = (\ln x)^2 x - \int x\, 2\ln x \frac{1}{x} dx$$

$$= (\ln x)^2 x \Big|_1^{e^2} - 2 \Big|_1^{e^2} \ln x dx$$

$$= (\ln x) \quad x \Big|_1^{e^2} - 2(x\ln x - x) \Big|_1^{e^2}$$

$$e^2 4 \quad 2(e^2 \quad 2 \quad e^2 + 1)$$

$$= 2e^2 - 2.$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int \arctan x\,dx \text{ ----------(1)}$$

SOLUCION: *Esta integral la resolveremos por el método de integración por partes. Hagamos la elección.*

$$u = \arctan x; \qquad y \qquad dv = dx$$

luego

$$du = \frac{1}{1+x^2}\,dx; \qquad v = x. \text{ ----------(2)}$$

al sustituir (2) en la fórmula de integración por partes tenemos.

$$\int \arctan x\,dx = \arctan x\; x - \int x.\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x\ ) + c$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int_0^1 x^2 \arctan x dx \text{ ----------(1)}$$

SOLUCION: *Esta integral la resolveremos por el método de integración por partes. Hagamos la elección.*

$$u = \arctan x \quad y \quad dv = x^2 dx$$

entonces

$$du = \frac{1}{1+x^2}dx \quad y \quad v = \frac{x^3}{3} \text{ ----------(2)}$$

Así que al sustituir (2) en la fórmula de integración por partes tenemos

$$\int_0^1 x^2 \arctan x dx = \arctan x \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{1+x^2} dx$$

al dividir x^3 *entre* $1+x^2$

$$= \frac{x^3}{3}\arctan x \Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x dx + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

tenemos $\frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$

$$= \frac{x^3}{3}\arctan x \Big|_0^1 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\arctan 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\ln 2$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\ln 2$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\ln 2$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int x^2 \, sen2xdx \quad \text{----------} (1)$$

SOLUCION: *Esta integral la resolveremos por el método de integración -- por partes. Hagamos la elección.*

$$u_1 = x^2 \quad , \quad dv_1 = sen2xdx$$

luego $\quad du_1 = 2xdx, \quad v_1 = -\dfrac{Cos2x}{2}$ ----------(2)

al sustituir (2) en la fórmula de integración por partes tenemos

$$\int x^2 sen2xdx = x^2\left(-\frac{Cos2x}{2}\right) - \int \left(-\frac{Cos2x}{2}\right)(2xdx)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 cos2x + \int xcos2xdx \quad \text{----------} (3)$$

Simularmente, a la integral en (3) le aplicamos el método - de integración por partes, haciendo la elección

$$u_2 = x \quad ; \quad dv_2 = cos2xdx$$

luego $\quad du_2 = dx \; ; \quad v_2 = \dfrac{1}{2} sen2x$ ----------(4)

al sustituir (4) en la fórmula de integración por partes tenemos

$$\int xcos2xdx = x\frac{1}{2}sen2x - \int \frac{1}{2}cos2xdx$$

$$= \frac{1}{2}xsen2x + \frac{1}{4}cos2x + C \quad \text{----------} (5)$$

Así que, al sustituir (5) en (3), obtenemos

$$\int x^2 \, sen2xdx = -\frac{1}{2}x^2 cos2x + \frac{1}{2}xsen2x + \frac{1}{4}cos2x + C$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2})dx \text{ ----------(1)}$$

SOLUCION: *Esta integral la resolveremos por el método de integración -- por partes. Hagamos la elección.*

$$w = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \quad y \quad dv = dx \text{ ----------(2)}$$

luego $$dw = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \frac{d}{dx}(x + \sqrt{1 + x^2})$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \left(1 + \frac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} 2x\right)$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \left(\frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \text{ ----------(3)}$$

$$V = x \text{ ----------(4)}$$

así que, al sustituir (2), (3) y (4) en la fórmula de integración por partes tenemos:

$$\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2})dx = x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \int x \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx$$

$$= x\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}} dx$$

$$= x\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \frac{1}{2}(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} 2+c$$

$$= x\ln(x + \sqrt{1 + x^2})-(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} + c$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int e^{-5x} \operatorname{sen} dx \text{ ----------} (1)$$

SOLUCION: *Esta integral la resolveremos por el método de integración - por partes. Hagamos la elección.*

$$u_1 = e^{-5x} \quad , \qquad dv_1 = \operatorname{sen} x dx$$

entonces

$$du_1 = -5e^{-5x} dx \ , \qquad v_1 = -\cos x \text{ ---------} (2)$$

sustituyendo (2) en la fórmula de integración por partes - tenemos

$$\int e^{-5x} \operatorname{sen} x dx = x^{-5x}(-\cos x) - \int (-\cos x)(-5e^{-5x}) dx$$

$$= -\cos x \ e^{-5x}_{-5} \int e^{-5x} \cos x dx \text{ ----------} (3)$$

La integral en (3) la resolveremos por el método de integración por partes. Hagamos la elección

$$u_2 = e^{-5x} \quad , \qquad dv_2 = \cos x dx$$

luego $du_2 = -5e^{-5x} dx \ , \qquad v_2 = \operatorname{sen} x \qquad (4)$

sustituyendo (4) en la fórmula de integración por partes tenemos.

$$\int e^{-5x}\operatorname{sen}x\,dx = -\cos x e^{-5x} - 5\left(e^{-5x}\operatorname{sen}x + 5\int e^{-5x}\operatorname{sen}x\,dx\right)$$

$$= -\cos x e^{-5x} - 5e^{-5x}\operatorname{sen}x - 25\int e^{-5x}\operatorname{sen}x\,dx \quad --(6)$$

Agrupando los términos con integral en el miembro izquierdo de (6) y los demás del lado derecho, de ello obtenemos.

$$\int e^{-5x}\operatorname{sen}x = \frac{1}{26}\left(-\cos e^{-5x} - 5e^{-5x}\operatorname{sen}x\right)$$

Nota: Este tipo de integrales se les llama periódicas porque para resolverla hay necesidad de aplicar el método de inte-- gración por partes dos o más veces después de lo cual volvemos a obtener la integral inicial pero con coeficiente diferente de uno y esto permite asociar los términos que tienen esta integral y de ello obtener la integral inicial "calculada".

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int x^2 \ln\left(\frac{5}{x}\right) dx \text{ ----------(1)}$$

SOLUCION: *Por propiedad de los logaritmos tenemos*

$$\ln \frac{5}{x} = \ln 5 - \ln x.$$

así que

$$\int x^2 \ln\left(\frac{5}{x}\right) dx = \int x^2 (\ln 5 - \ln x) dx$$

$$= \int x^2 \ln 5 dx - \int x^2 \ln x dx$$

$$= \ln 5 \frac{x^3}{3} - \int x^2 \ln x dx \text{ ----------(2)}$$

la integral en (2) la resolveremos por partes. Hagamos la siguiente elección.

$$w = \ln x \quad ; \quad dv = x^2 dx$$

luego

$$dw = \frac{1}{x} dx \quad ; \quad v = \frac{x^3}{3} \text{ ----------(3)}$$

al sustituir (3) en la fórmula de integración por partes, se tiene.

$$\int x \ln x dx = \ln x \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + C \text{ ----------} (4)$$

finalmente, al sustituir (4) en (2) obtenemos

$$\int x^2 \ln(\frac{5}{x}) dx = \ln 5 \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \ln x + \frac{1}{9} x^3 + c.$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int x(\arctan x)^2 dx \text{ ----------} (1)$$

SOLUCION: *Esta integral la resolveremos por el método de integración - por partes. Hagamos la elección.*

$$u = (\arctan x)^2 \; ; \qquad y \qquad dv = x dx$$

luego

$$du = 2(\arctan x).\frac{1}{1+x^2}dx; \qquad v = \frac{x^2}{2} \text{---}(2)$$

al sustituir (2) en la fórmula de integración por partes, tenemos.

$$\int x(\arctan x)^2 dx = (\arctan x)^2\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} 2(\arctan x).\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2 - \int \arctan x \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2 - \int \arctan x\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2 - \int \arctan x dx +$$

$$\int \arctan x \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$- \frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2 - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) +$$

$$+ \frac{(\arctan x)^2}{2} + c.$$

EJEMPLO: *Calcular la integral*

$$\int 7^{3x} \operatorname{sen} x\,dx \text{ ----------} (1)$$

SOLUCION: *Esta integral la resolveremos por el método de integración - por partes. Hagamos la elección.*

$$u_1 = 7^{3x}; \qquad dv_1 = \operatorname{sen} x\,dx$$

luego

$$du_1 = 3(\log 7)7^{3x} \quad y \quad v_1 = -\cos x \text{ --------} (2)$$

al sustituir (2) en la fórmula de integración por partes tenemos.

$$\int 7^{3x} \operatorname{sen} x\,dx = -7^{3x}\cos x + 3(\log 7) \int 7^{3x} \cos x\,dx \text{ ---------} (3)$$

La integral del lado derecho en (3) la resolveremos por el - método de integración por partes. Hagamos la elección.

$$u_2 = 7^{3x} \quad ; \qquad du_2 = \cos x\,dx$$

luego

$$du_2 = 3(\log 7)7^{3x}; \qquad v_2 = \operatorname{sen} x \text{ -------} (4)$$

al sustituir (4) en la fórmula de integración por partes tenemos.

$$\int 7^{3x}\cos x\,dx = 7^{3x}\operatorname{sen}x - 3\ln 7 \int 7^{3x}\operatorname{sen}x\,dx \text{ ----------(5)}$$

finalmente, sustituyendo (5) en (3) y agrupando los térmi-- nos de integral y "despejando" la integral tenemos

$$\int 7^{3x}\operatorname{sen}x\,dx = \frac{1}{1+9(\ln 7)}\left[-7^{3x}\cos x + 3\ln 7\; 7^{3x}\operatorname{sen}x \right]$$

INTEGRACION DE FUNCIONES TRASCENDENTES, POR EL METODO DE INTEGRACION POR PARTES.

I) CALCULAR CADA UNA DE LAS SIGUIENTES INTEGRALES.

1) $\int x \ln x^2 \, dx.$

2) $\int x^2 \operatorname{sen} 2x \, dx.$

3) $\int e^{2x} \cos x \, dx.$

4) $\int_0^1 \arctan x \, dx.$

5) $\int x^2 e^x \, dx.$

6) $\int (t \ln t)^2 \, dt.$

7) $\int_1^4 \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx.$ *considere el siguiente agrupamiento*

$\frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \arctan \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ *y luego aplique integración por partes*

8) $\int \operatorname{sen}(\ln x) \, dx.$

9) $\int x \tan^2 x \, dx.$

10) $\int x\sec 2x \tan 2x \, dx.$

11) $\int x\,\mathrm{senh}\, x dx.$

12) $\int e^{x}\cosh x dx.$

13) $\int \mathrm{arcsen}\, 2x dx.$

14) $\int x^{3}\cos(x^{2})dx.$

15) $\int \mathrm{sen}\, \sqrt{x}\, dx.$

16) $\int x\, 2^{3x} dx.$

17) $\int x(\ln x^{5})dx.$

18) $\int x\arctan 3x dx.$

19) $\int \mathrm{sen}(x+1)dx.$

20) $\int \arctan \sqrt{x+1}\, dx.$

21) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^{2}})dx.$

22) $\int x^{3}e^{-x^{2}}dx.$

23) $\int \frac{\cos^{2}x}{e^{x}}\, dx$

24) $\int \frac{\mathrm{sen}x}{e^{-2x}}\, dx$

25) $\int \frac{e^{-5x}}{\sec x}\, dx$

26) $\int \frac{\mathrm{senh}\, 3x}{e^{3x}}\, dx$

27) $\int \frac{\cosh x + \mathrm{senh}\, 2x}{e^{3x}}\, dx$

28) $\int \frac{\arctan x + \mathrm{senh}\, 2x}{e^{x}}\, dx$

29) $\int \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x+1}}\, dx$

30) $\int_{0}^{1} (2^{x}+x^{2})^{2}\, dx.$

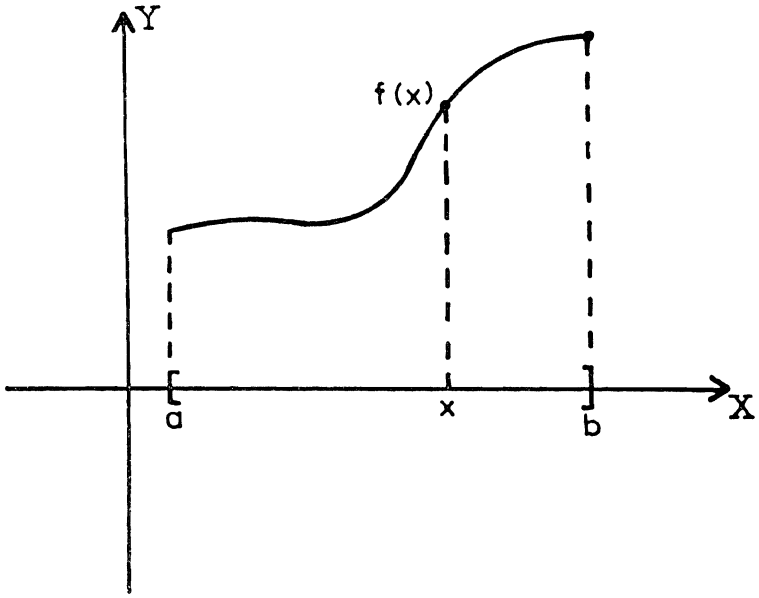
A P L I C A C I O N E S

6

D E L A I N T E G R A L

A) CALCULO DE AREAS DE FIGURAS PLANAS

Considerando que la integral de una función $f(x)$ continua y no negativa sobre un intervalo $(a;b)$ es el área encerrada por la gráfica de la función, el intervalo $[a;b]$ y segmentos de recta que pasan por $x = a$, $x = b$, como se muestra en la siguiente figura.



entonces y si a su vez $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas no negativas definidas sobre el intervalo $[a;b]$ en el que

$$f(x) > g(x) \quad \text{para todo} \quad x \quad \text{de dicho intervalo}$$

tenemos que $h(x) = f(x) - g(x) > 0$ será una función continua no negativa por tanto integral de $h(x)$.

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x)dx$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

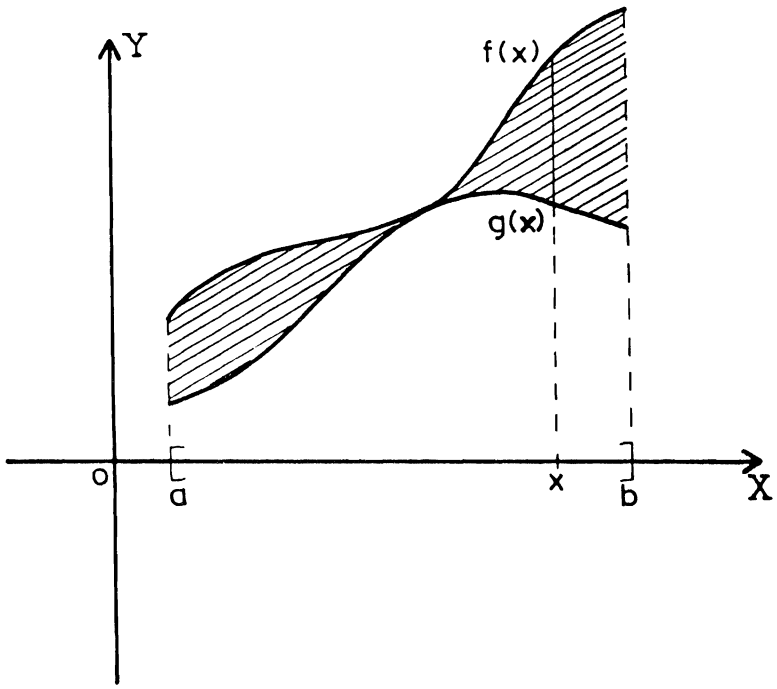
será el área comprendida por las gráficas de las funciones $f(x)$ *y* $g(x)$.

Concretamente tenemos:

Si $f(x)$ *y* $g(x)$ *son funciones continuas no negativas sobre el intervalo* $[a;b]$ *entonces el área* A_g^f *encerrada entre las dos gráficas es:*

$$A_g^f = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

la siguiente figura muestra dos gráficas la de $f(x)$ *y* $g(x)$ *y el área encerrada por ellas, dadas por 2.*



La fórmula 2 es válida aún si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen las -- condiciones:

a) $f(x)$, $g(x)$ *negativas y continuas sobre el intervalo* $[a;b]$

b) $f(x) \geqq g(x)$ *para todo* x *en el intervalo* $[a;b]$

NOTA: Si $f(x)$ *y* $g(x)$ *son continuas y se intersectan en un número de puntos* $\{x_1\ x_2 .., x_n\}$ *entonces el área encerrada entre las gráficas de* $f(x)$ *y* $g(x)$ *es igual a la suma de cada una de las áreas entre las gráficas sobre cada subintervalo* $[a;x_1]$, $[x_1, x_2]$ -- $[x_{n-1}, x_n]$, $[x_n;b]$

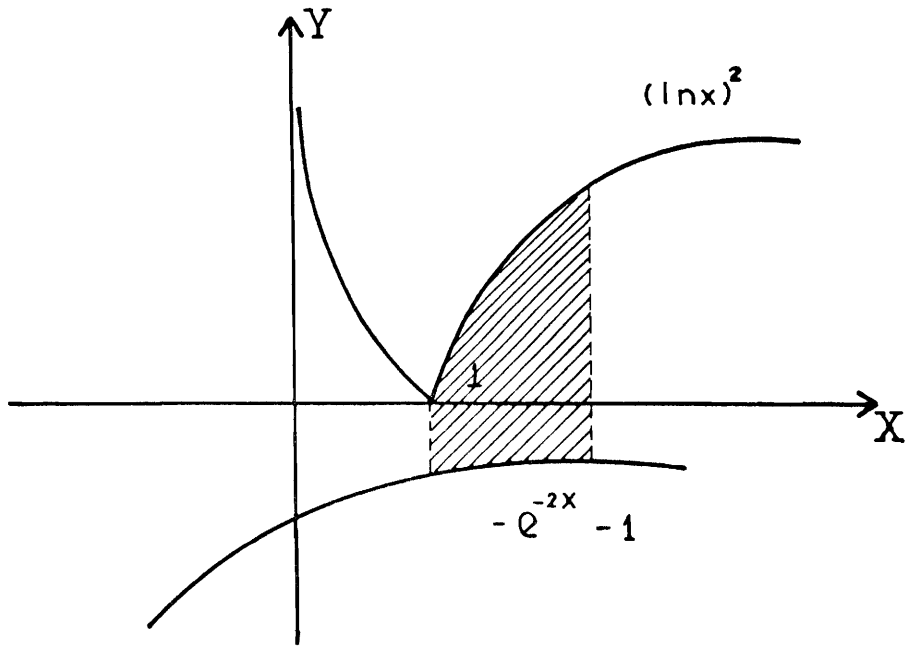
EJEMPLO: *Calcular el área entre las curvas*

$$y_1(x) = (\ln x)^2, \quad y_2(x) = -e^{-2x}-1$$

y las rectas

$$x_1 = 1, \quad x_2 = e^2.$$

SOLUCION: *La gráfica de las curvas es mostrada en la siguiente figura.*



Por tanto el área entre las curvas es:

$$A = \int_1^{e^2} ((\ln x)^2 - (-e^{-2x}-1))\,dx$$

$$= \int_1^{e^2} (\ln x)^2\,dx + \int_1^{e^2} e^{-2x}dx + \int_1^{e^2} dx$$

integración por partes.

$$= x(\ln x)^2 \Big|_1^e - 2(x\ln x - x) \Big|_1^{e^2} - \frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_1^{e^2} + x \Big|_1^{e^2}$$

$$= 2e^2 - 2 - \frac{1}{2} e^{-2e^2} + \frac{1}{2} e^{-2} + e^2 - 1$$

Es decir, el área encerrada por las curvas es:

$$A = 3e^2 - 3 + \frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-2e^2}$$

Nota; Las gráficas de $y_1(x)$, $y_2(x)$ *se pueden obtener empleando los conceptos de derivabilidad.*

EJEMPLO: *Calcular el área encerrada por la curva* $y(x) = \ln x$, *la recta tangente*

$$R_T(x) \text{ a } y_1(x) \text{ en } x = 1 \text{ y la recta } x = e^2.$$

SOLUCION: *La recta tangente* $R_T(x)$ *tiene la forma*

$$R_T(x) = y_1(x_o) + y_1^1(x_o)(x-x_o)$$

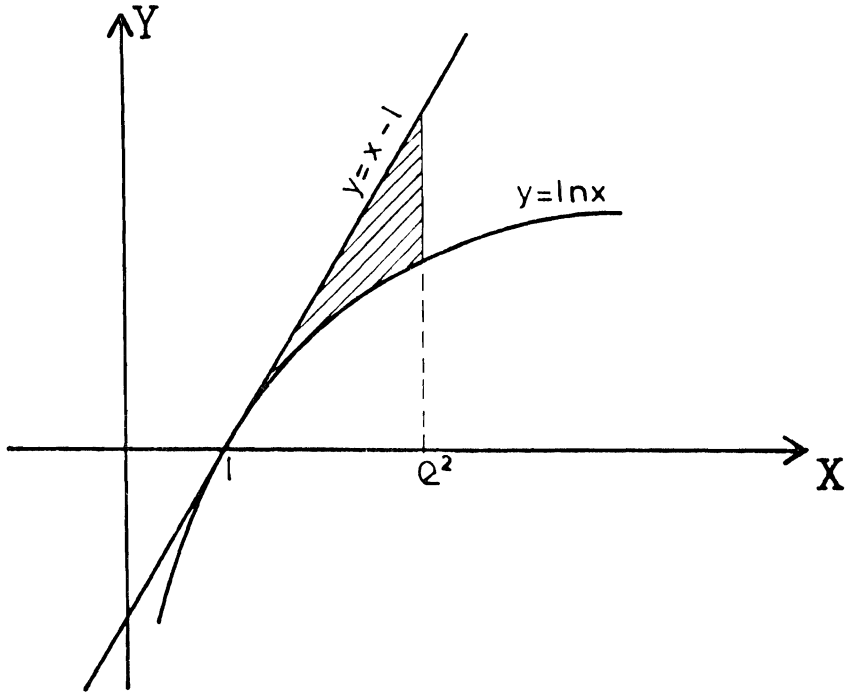
donde x_o *es la abscisa de tangencia, así*

$$y_1^1(x) = \frac{1}{x}; \quad y_1^1(1) = 1; \quad y_1(1) = 0.$$

entonces

$$R_T(x) = 0+1(x-1) = x-1$$

es la ecuación de la recta tangente $R_T(x)$. *La siguiente figura muestra el área encerrada por las curvas.*



Así tenemos que el área es:

$$A = \int_1^{e^2} (x-1-\ln x)dx = \int_1^{e^2} x dx - \int_1^{e^2} dx - \int_1^{e} \ln x dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_1^{e^2} - x\Big|_1^{e^2} - (x\ln x - x)\Big|_1^{e^2}$$

$$= \frac{e^4-1}{2} - (e^2-1) - (2e^2-e^2)+1 = \frac{e^4}{2} - 2e^2 + \frac{3}{2}.$$

EJEMPLO: *Calcular el área encerrada por las curvas*

$f(x) = sen(x - \frac{\pi}{2}) + 1$, *las rectas* $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ *y el eje X.*

SOLUCION: *Observemos que*

$$Sen(x - \frac{\pi}{2}) = senx\cos(-\frac{\pi}{2}) + sen(-\frac{\pi}{2})\cos x.$$

$$= -\cos x.$$

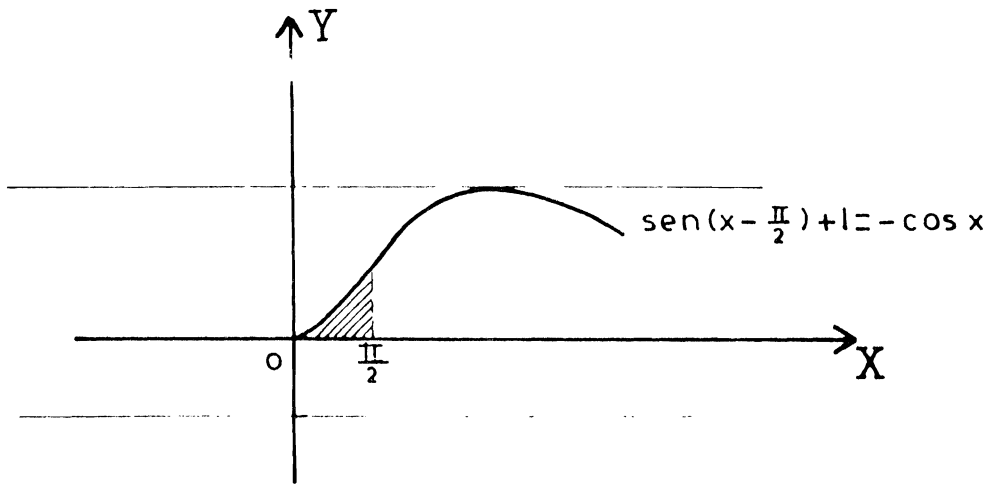
De aquí que, la gráfica de $f(x)$ *es la gráfica de* $-\cos x + 1$ *la cual se obtiene de graficar en la siguiente forma.*

1º *graficar* $\cos x$.

2º *graficar* $-\cos x$.

3º *graficar* $-\cos x+1$.

La gráfica de $-\cos x+1$ *se muestra en la siguiente figura.*



gráfica de $f(x) = -\cos x+1$

Por tanto el área pedida es:

$$A = \int_0^{\pi/2} (-\cos x+1)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx + \int_0^{\pi/2} dx$$

$$= -\operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi/2} + x \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} 0 + \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

Es decir, el valor del área pedida es:

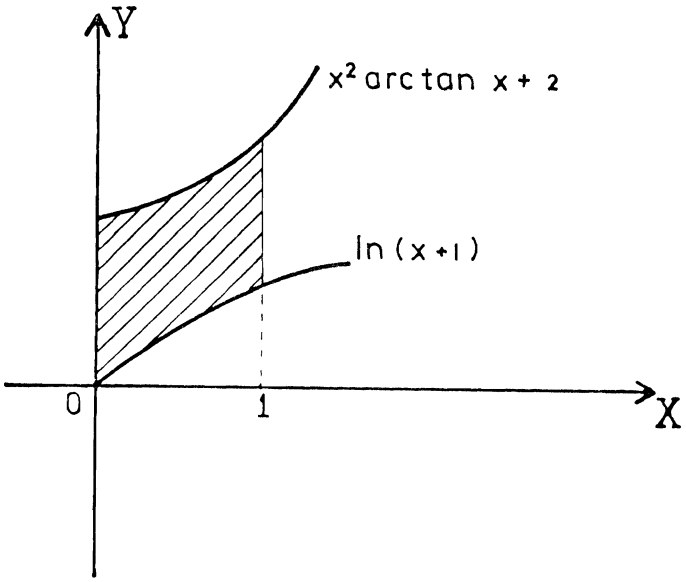
$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

EJEMPLO: *Calcular el área entre las curvas*

$y_1(x) = \ln(x+1)$, $y_2(x) = x^2 \arctan x + 2$ *y las rectas*

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$

SOLUCION: *La grafica de las curvas es mostrada en la siguiente figura.*



Por tanto el área entre las curvas es:

$$A = \int_0^1 (x^2 \arctan x + 2 - \ln(x+1))\,dx$$

$$= \int_0^1 x^2 \arctan x\,dx + \int_0^1 2\,dx - \int_0^1 \ln(x+1)\,dx$$

integración por partes

$$= \left[\frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\right] \Big|_0^1 + 2x \Big|_0^1 -$$

$$-(x\ln(x+1) - x + \ln(1+x)) \Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{3}\arctan 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2)\right)+2-(2\ln 2-1)\right.$$

$$= 3+\frac{1}{3}\arctan 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\ln 2 - 2\ln 2$$

$$= \frac{17}{6} + \frac{1}{3}\frac{\pi}{4} - \frac{11}{6}\ln 2$$

Es decir, el área encerrada entre las curvas dadas es:

$$A = \frac{17}{6} + \frac{\pi}{12} - \frac{11}{6}\ln 2$$

Nota.- La gráfica de las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$ *se pueden obtener empleando los conceptos de derivabilidad sobre el intervalo* $[0;1]$.

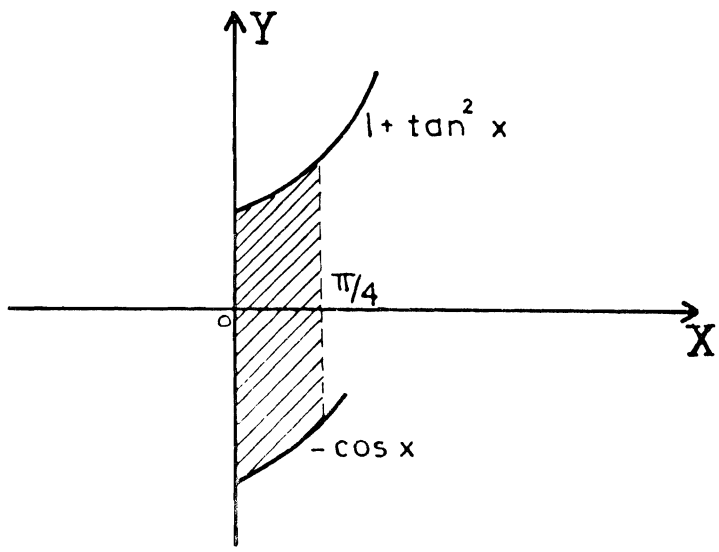
EJEMPLO: *Calcular el área entre las curvas.*

$$y_1(x) = 1+\tan^2 x, \quad y_2(x) = -\cos x$$

y las rectas

$$x = 0, \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

SOLUCION: *La gráfica de las curvas es mostrada en la siguiente figura.*



Por tanto el área entre las curvas es:

$$A = \int_0^{\pi/4} ((1+\tan^2 x)-(-\cos))\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} (1+\tan^2 x)\,dx + \int_0^{\pi/4} \cos x\,dx$$

$$= \tan x \Big|_0^{\pi/4} + \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi/4}$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}.$$

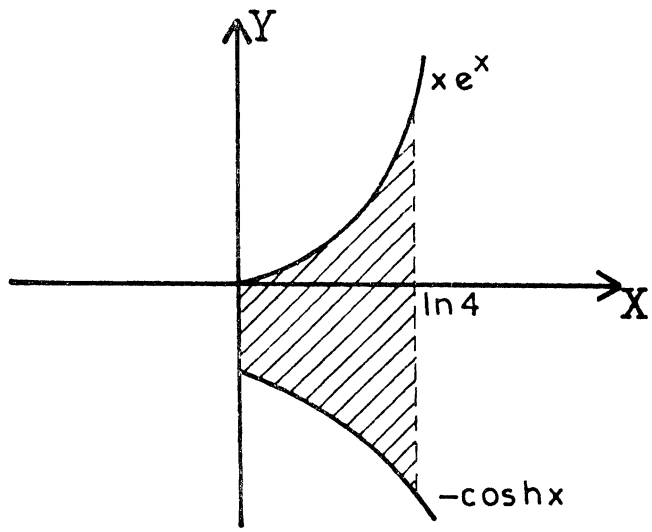
EJEMPLO: *Calcular el área encerrada por las curvas*

$$y_1(x) = xe^x, \quad y_2(x) = -\cosh x$$

y las rectas

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \ln 4.$$

SOLUCION: *La gráfica de las curvas es mostrada en la siguiente figura.*



Por tanto el área encerrada entre las curvas es:

$$A = \int_0^{\ln 4} (xe^x - (-\cosh x))dx = \int_0^{\ln 4} xe^x dx + \int_0^{\ln 4} \cosh x dx$$

$$= xe^x \Big|_0^{\ln 4} - e^x \Big|_0^{\ln 4} + \operatorname{senh} x \Big|_0^{\ln 4}$$

$$= 4\ln 4 - 4 + 1 + \operatorname{senh}(\ln 4)$$

$$= 4\ln 4 - \frac{9}{8}$$

EJEMPLO: *Calcular el área encerrada por la curva* $y_1(x) = e^x$

y sus rectas tangentes a ella en los puntos $x_1 = -\ln 2$, $x_2 = \ln 2$.

SOLUCION: *las rectas tangentes tienen la forma*

$$R_T(x) = y_1(x_o) + y_1^1(x_o)(x - x_o)$$

donde x_o *es la abscisa de tangencia, así*

$$y_1^1(x) = e^x; \quad y_1^1(-\ln 2) = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}; \quad y_1(-\ln 2) = \frac{1}{2}$$

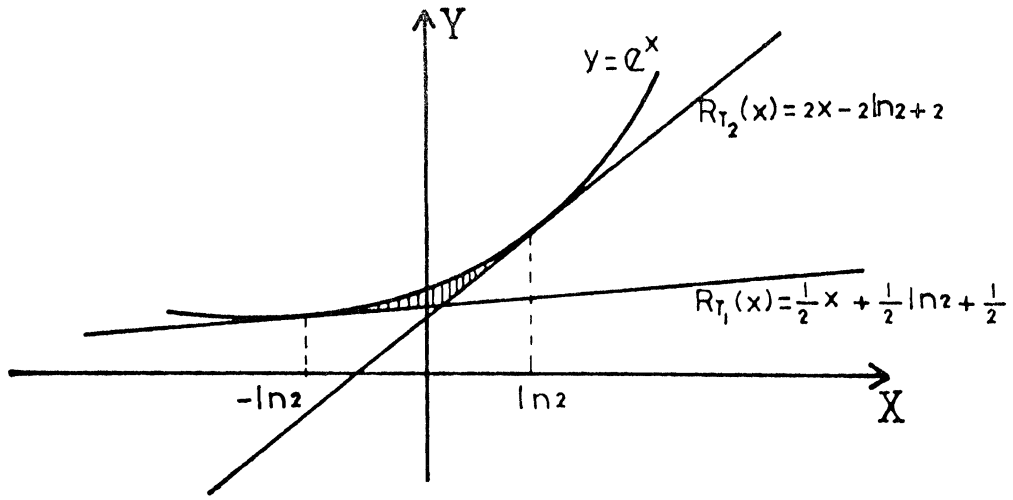
$$y_1^1(\ln 2) = 2; \quad y_1(\ln 2) = 2.$$

entonces

$$R_T(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x + \ln 2) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}$$

$$R_{T_2}(x) = 2 + 2(x - \ln 2) = 2x - 2\ln 2 + 2$$

son las ecuaciones de las rectas tangentes, la figura siguiente muestra el área encerrada por las curvas $y_1(x)$ *y las rectas* $R_{T_1}(x)$, $R_{T_2}(x)$.



las rectas se intersectan, por tanto

$$R_{T_1}(x) = R_{T_2}$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2} = 2x - 2\ln 2 + 2$$

$$-\frac{3}{2}x = -\frac{5}{2}\ln 2 + \frac{3}{2} \qquad x = -\frac{2}{3}\left(-\frac{5}{2}\ln 2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{15}{2}\ln 2 - 1$$

es el punto de intersección de las rectas

Como las rectas se intersectan, por tanto sus ecuaciones deben ser iguales en las abscisas de intersección, y para calcular dichas abscisas, igualamos las ecuaciones de dichas rectas, así tenemos

$$R_{T_1}(x) = R_{T_2}(x)$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2} = 2x - 2\ln 2 + 2$$

$$-\frac{3}{2}x = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\ln 2$$

Así que $x = -1 + \frac{5}{3}\ln 2$ *es la abscisa del punto de intersección de las rectas entonces el área encerrada pedida es:*

$$A = \int_{-\ln 2}^{-1+\frac{5}{2}\ln 2} \left(e^x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\right)\right)dx + \int_{-1+\frac{5}{3}\ln 2}^{\ln 2} \left(e^x - (2x - 2\ln 2 + 2)\right)dx$$

$$= e^{x} \Big|_{-\ln 2}^{-1+\frac{5}{3}\ln 2} - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} \Big|_{-\ln 2}^{-1+\frac{5}{3}\ln 2} - \left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\right)X \Big|_{-\ln 2}^{-1+\frac{5}{3}\ln 2}$$

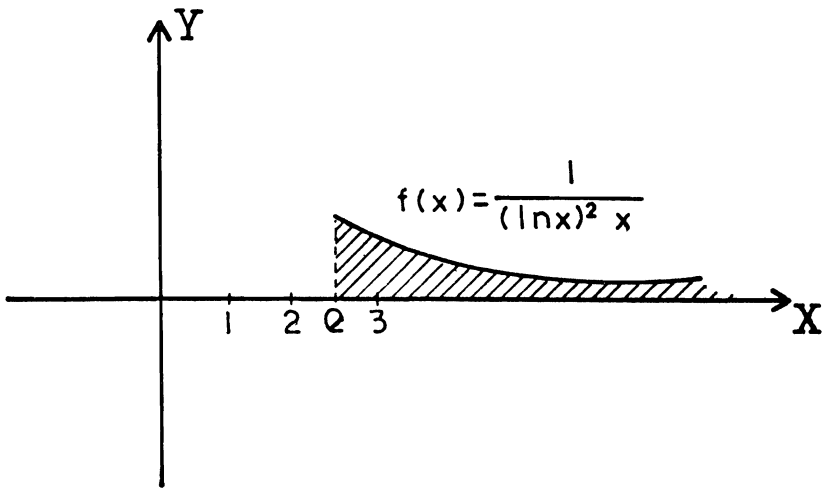
$$+ e^{x} \Big|_{-1+\frac{5}{3}\ln 2}^{\ln 2} - x^2 \Big|_{-1+\frac{5}{3}\ln 2}^{\ln 2} - (2\ln 2)x \Big|_{-1+\frac{5}{3}\ln 2}^{\ln 2}$$

$$= \frac{23}{12} - \frac{1}{2}(\ln 2)^2 \text{ unidades cuadradas}$$

EJEMPLO: *Calcular el área encerrada por la curva* $f(x) = \dfrac{1}{(\ln x)^2\, x}$

la recta $x = e$ *y el eje X.*

SOLUCION: *La gráfica de* $f(x)$ *es mostrada en la siguiente figura.*



entonces el área encerrada es:

$$= \int_e^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^2\, x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_e^{\varepsilon} \frac{1}{(\ln x)^2\, x}\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} \frac{-1}{\ln x} \Bigg|_e^{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} \left(\frac{-1}{\ln \varepsilon} + \frac{1}{\ln e} \right)$$

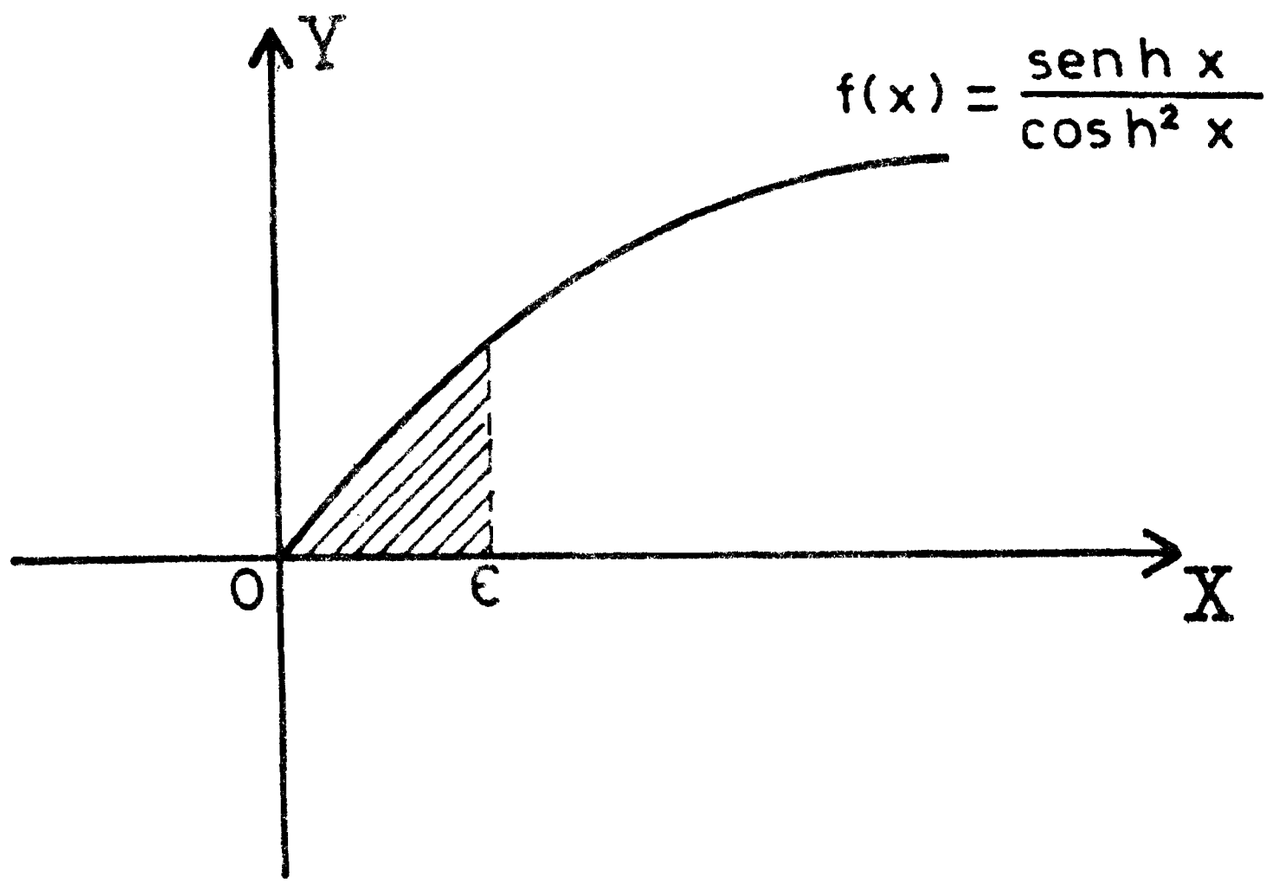
$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} \left(\frac{-1}{\ln \varepsilon} + 1 \right) = 1$$

es decir, el área encerrada por la curva, la recta $x = e$ *y el eje X es:*

$A = 1$ *unidades cuadradas.*

EJEMPLO: *Calcular el área encerrada por la curva* $f(x) = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh^2 x}$ *y los ejex* X, Y. $(x > 0)$

SOLUCION: $f(x) > 0$, *luego*



$$A = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh^2 x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_0^{\varepsilon} \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh^2 x}\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} \left(-\frac{1}{\cosh x}\right) \Bigg|_0^{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} \left(-\frac{1}{\cosh \varepsilon} + 1\right) = 1.$$

A) CALCULO DE AREAS DE FIGURAS PLANAS, CALCULAR EL AREA ENTRE LAS CURVAS CORRESPONDIENTES.

1) $y_1(x) = sen2x$; $y_2(x) = e^x + 1$ en el intervalo $[0;\pi]$

2) $y_1(x) = 1 + \cos(x-\pi)$ y el eje $\overline{X}$, sobre el intervalo $[0; \frac{\pi}{2})$

3) $y_1(x) = \tan x$; $y_2(x) = \cos 2x+1$, sobre el intervalo $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$

4) $y_1(x) = e^x+2$; $y_2(x) = \ln x^2$, sobre el intervalo $[1;e]$

5) $y_1(x) = \ln(2x+1)+1$; $y_2(x) = sen2x$, sobre el intervalo $[1; \frac{\pi}{2}]$

6) $y_1(x) = \cosh 2x$; $y(x) = e^{3x}+5$, sobre el intervalo $[0;1]$

7) $y_1(x) = \arctan x$; y su recta tangente en 1, sobre el intervalo $[0;1]$

8) $y_1(x) = \ln x^2$; $y_2(x) = \cos\frac{x}{e} + 6$, sobre el intervalo $[0;e\pi]$

9) $y_1(x) = e^{2x}$; y la recta tangente en $x = 1$, el eje X, sobre el intervalo $[0;1]$

10) $y_1(x) = arcsen\ x$; y su recta tangente en 1, sobre el intervalo -- $[0;1]$

B) CALCULO DE VOLUMEN DE SOLIDOS DE REVOLUCION: ROTACION,

RESPECTO DEL EJE X
O UN EJE PARALELO

Cuando la gráfica de una función $f(x)$ continua definida sobre el intervalo $[a;b]$ (figura 1.) se rota alrededor del eje $\overline{X}$, esta produce un sólido limitado por la región generada por la curva, dicho sólido es llamado sólido de revolución.

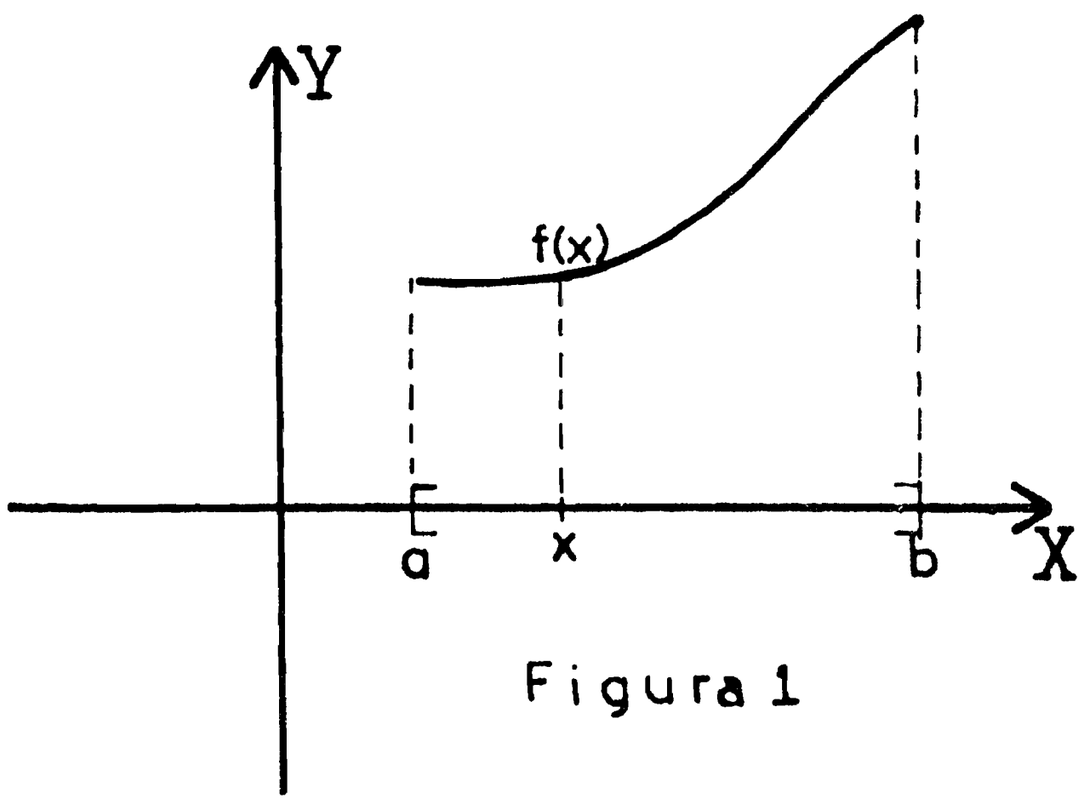


Figura 1

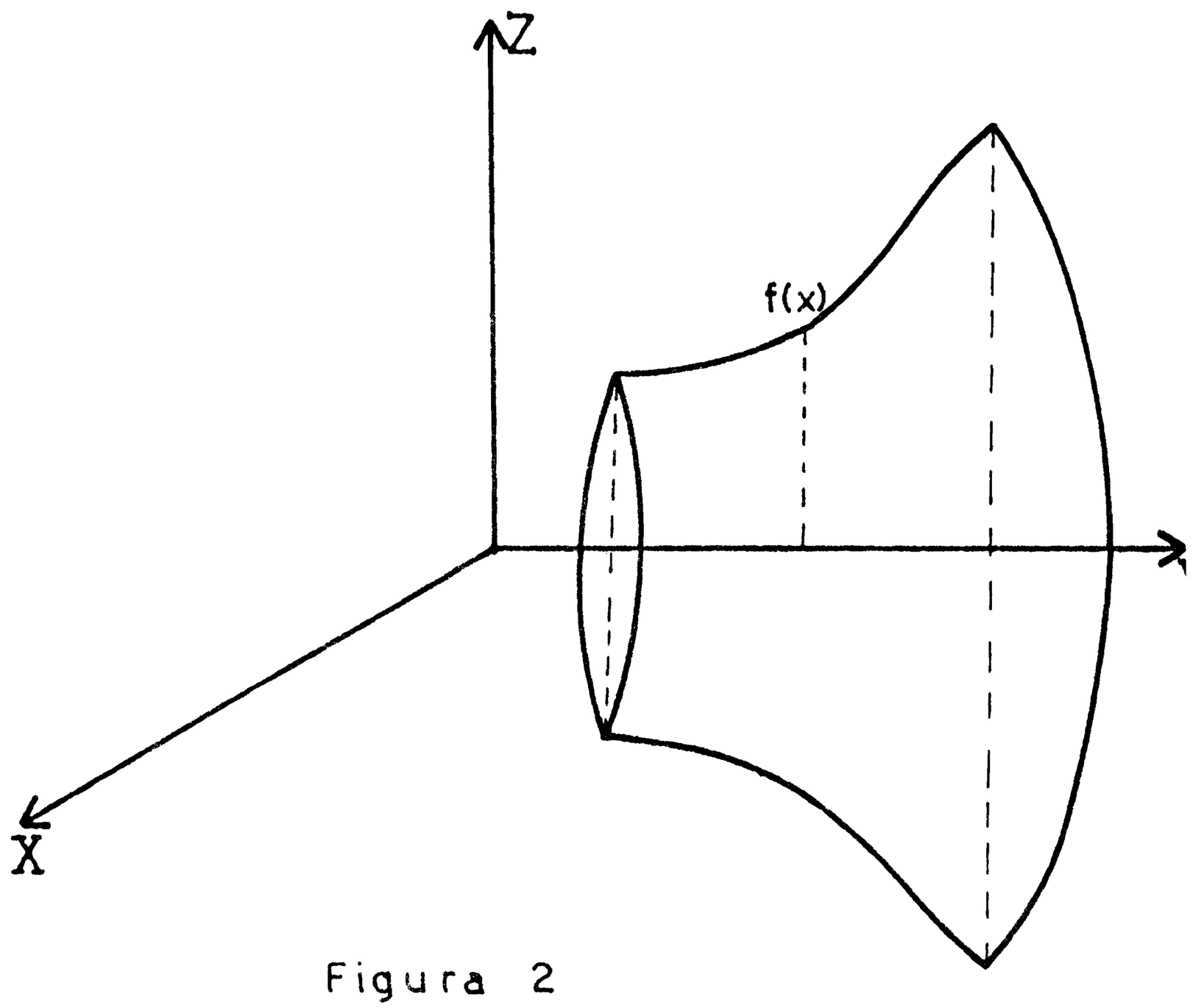


Figura 2

En esta sección estamos interesados en calcular el volumen de sólido de revolución como el que se muestra en la figura 2. Se puede observar que el volumen del sólido de revolución será igual a la "Suma continua" de las areas - transversales del sólido sobre el intervalo [a;b], no es difícil probar que la fórmula.

$$V = \int_a^b A(t)dt \text{ - } 1$$

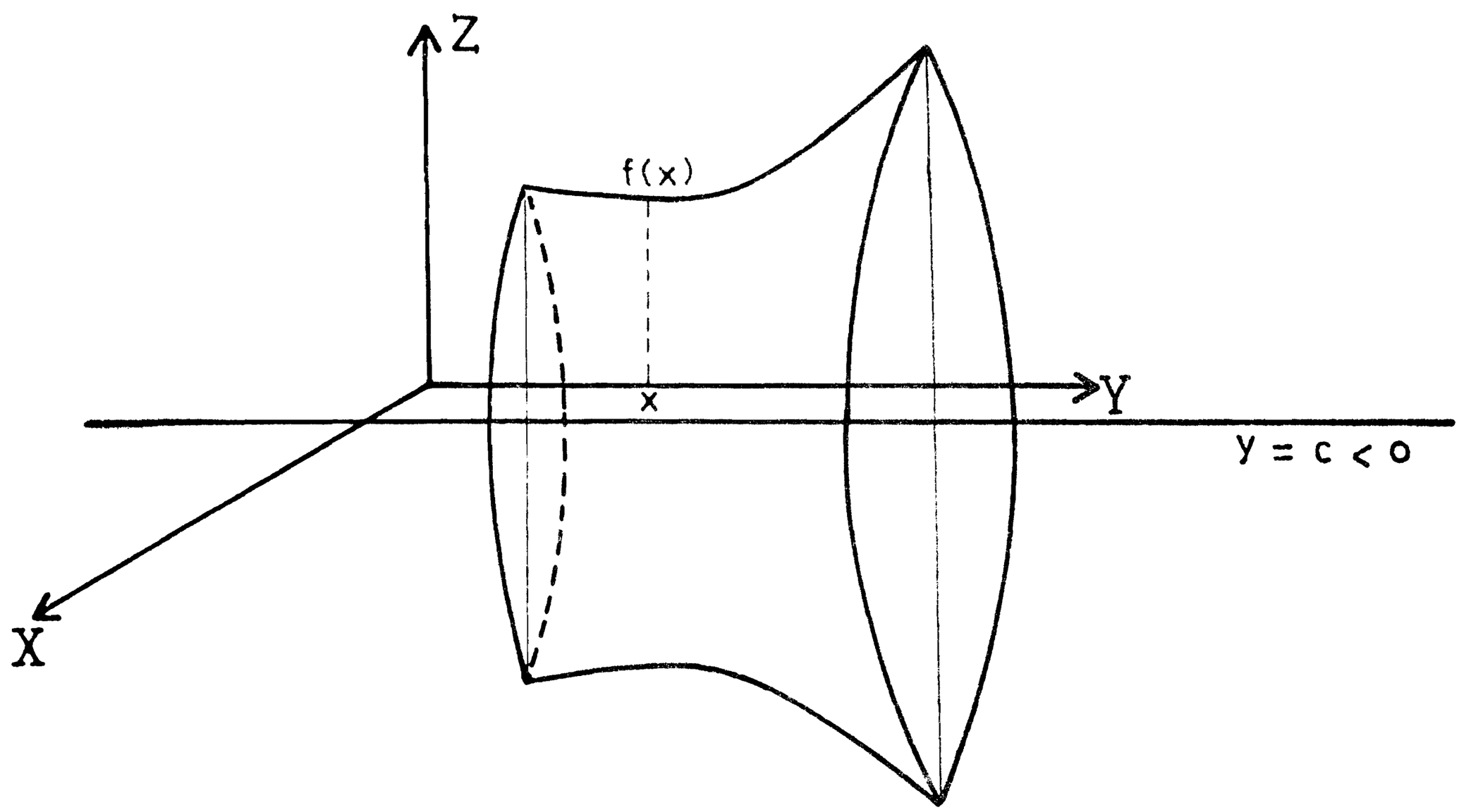
Nos permite calcular el volúmen de dicho sólido, en tal fórmula A(t) es la -- función del área transversal del sólido perpendicular al eje de rotación $\overline{X}$ *, - con* $t \varepsilon [a;b]$ *Como cada punto de la gráfica describe un círculo cuando ésta se rota, entonces debe ser claro que la función de área transversal es el -- área de un círculo, lo cual da* $A(t) = \Pi(f(t))^2$*, por lo tanto el volúmen del sólido de revolución se puede calcular con la fórmula.*

$$V = \Pi \int_a^b (f(t)^2 dt \text{ - } 2$$

La gráfica de una función f(x) continua sobre el intervalo [a:b] también se puede rotar alrededor de un eje paralelo al eje $\overline{X}$ *y es posible calcular el - volumen de revolución del sólido obtenido.*

Por ejemplo, si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a:b]$ e $y = c < 0$, es el eje alrededor del cual la región comprendida por la gráfica de la función y el eje $\overline{X}$ sobre el intervalo $[a:b]$ es rotada, entonces el volumen del sólido generado -- es:

$$V = \int_a^b \Pi (f(x)-c)^2 dx - \int_a^b \Pi c^2 dx$$



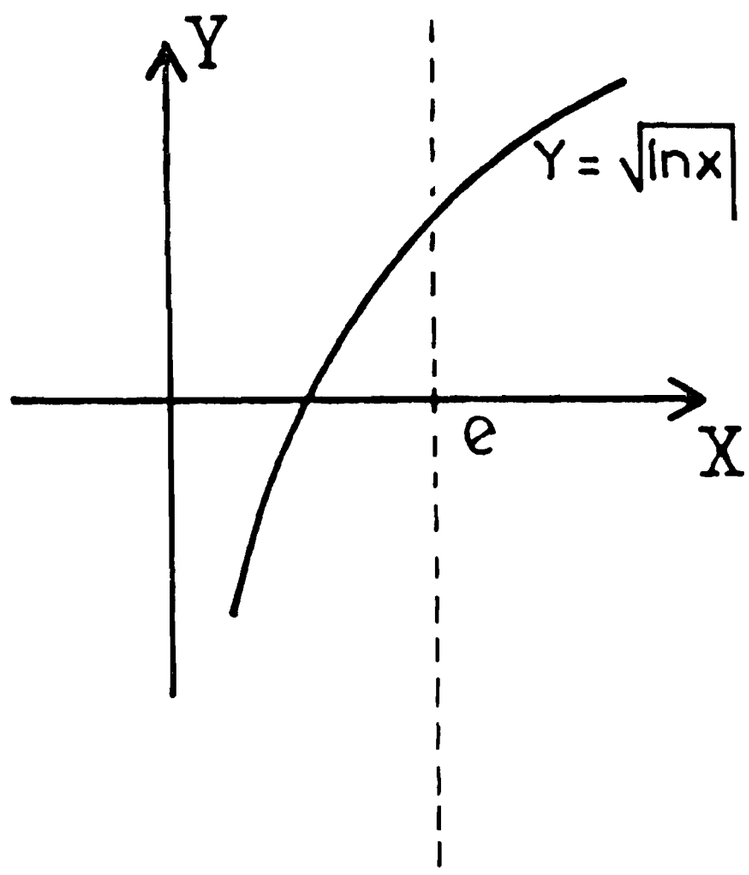
Nota: Si la función $y = f(x)$ con $x \in [a;b]$ es no negativa y su gráfica es - rotada alrededor del eje $\overline{Y}$, entonces podemos calcular el volúmen del sólido de revolución generado, mediante la fórmula.

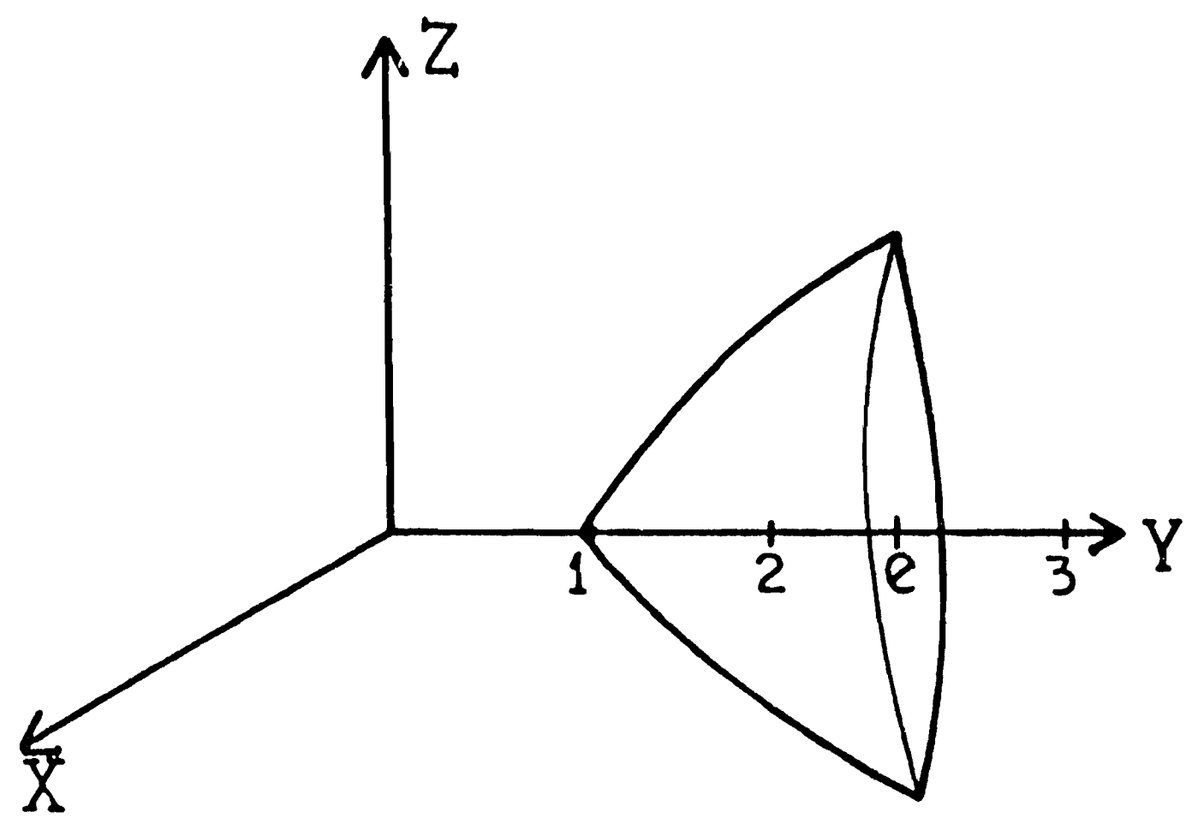
$$V = \int_a^b 2 \Pi x f(x) dx$$

EJEMPLO: *Calcular el volumen del revolución del área comprendida por la curvas.*

$y_1(x) = \sqrt{\ln x}$, *la recta* $x=e_1$ $y = 0$ *cuando ésta es rotada - alrededor del eje X.*

SOLUCION: *En las figuras siguientes mostramos el área comprendida por las curvas dadas y el volumen de revolución obtenido de girar di-- cha área alrededor del eje X.*





El volumen del sólido es:

$$V = \pi \int_1^e (\sqrt{\ln x})^2 dx = \pi \int_1^e \ln x dx$$

$$= \pi (x\ln x - x) \Big|_1^e$$

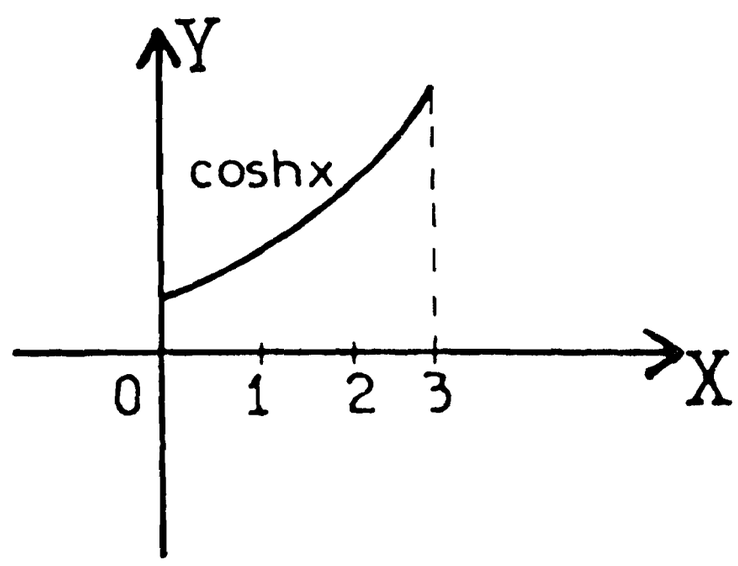
$= \pi (e-e) - \pi (-1) = \pi$, *es decir el volumen del sólido es*

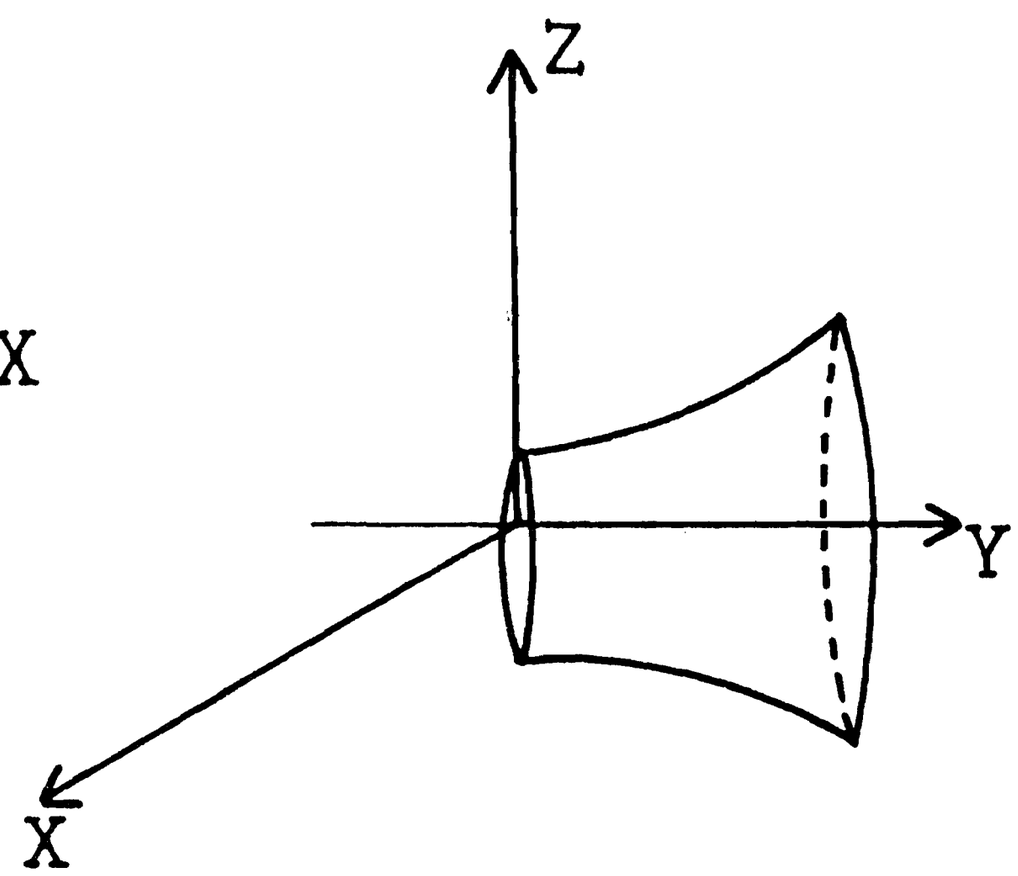
$= \pi$.

EJEMPLO: *Calcular el volumen de revolución obtenido de rotar el área, comprendida por las siguientes curvas*

$f(x) = \cosh 3x$, las rectas $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, alrededor del eje X.

SOLUCION: *A continuación mostramos el área comprendida por las curvas dadas y el volumen de revolución obtenido de girar dicha área al rededor del eje X.*





El volumen del sólido es: (un método es:)

$$V = \pi \int_0^3 \cosh^2 3t\,dt = \pi \int_0^3 \left(\frac{e^{3t} + e^{-3t}}{2}\right)^2 dt$$

$$= \pi \int_0^3 \left(\frac{e^{6t} + e^{0} + e^{-6t}}{4}\right) dt \qquad \frac{\pi}{4}\left(\int_0^3 e^{6t}\,dt + 2 \int_0^3 dt + \int_0^3 e^{-6t}\,dt \right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{6}\, e^{6t}\Big|_0^3 + 2t\Big|_0^3 - \frac{1}{6}\, e^{-6t}\Big|_0^3\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{6}\,(e^{18}-1)+6-\frac{1}{6}\,(e^{-18}-1)\right)$$

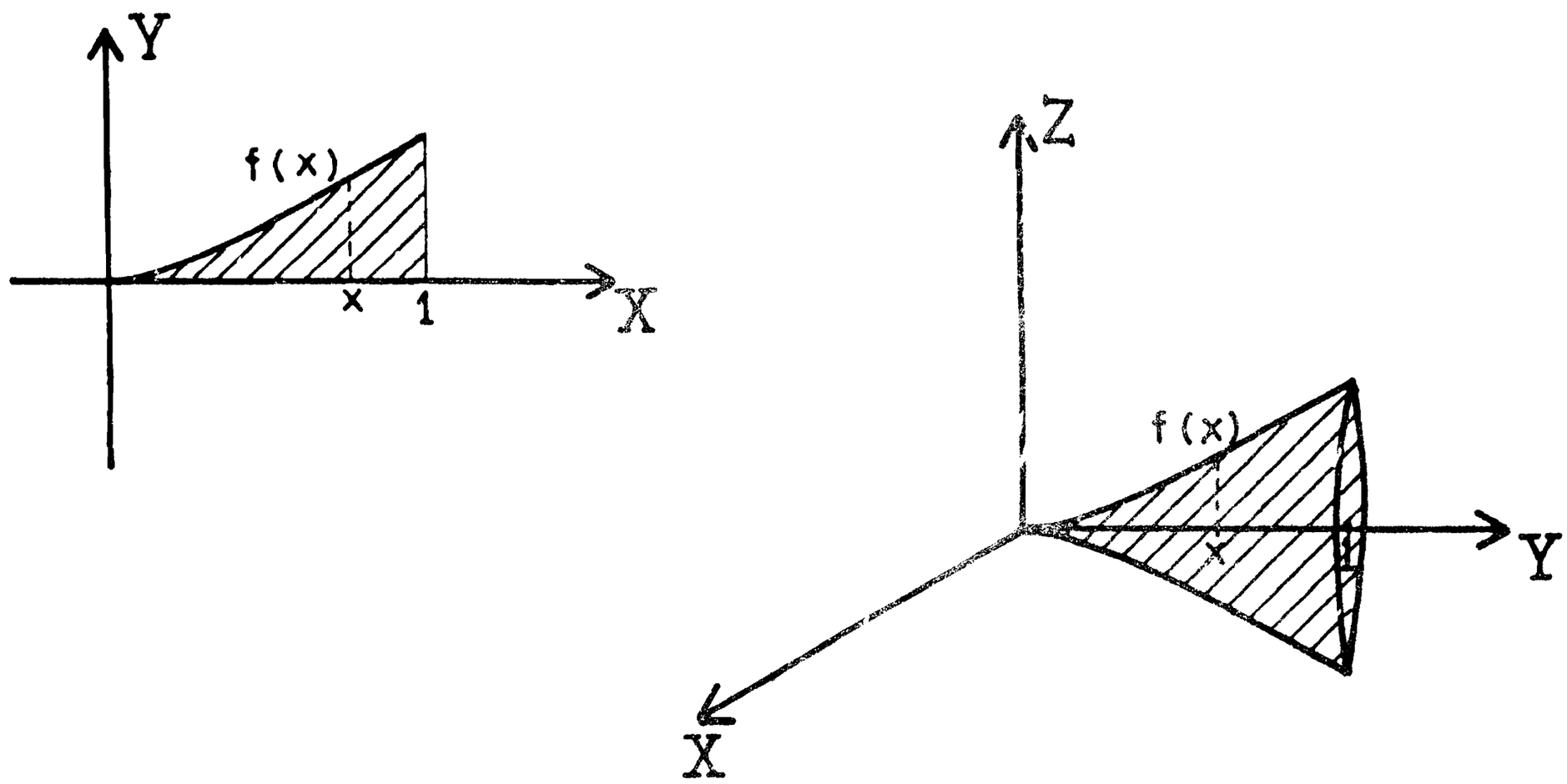
$$= \frac{\pi}{24}\, e^{18} - \frac{\pi}{24} + 6\pi - \frac{\pi}{6}\, e^{-18} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{24}\, e^{18} - \frac{\pi}{6}\, e^{-18} + \frac{3\pi}{24} + 6\pi$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{4}\, e^{18} - e^{-18}\right) + \frac{147}{24}\,\pi \ .$$

EJEMPLO: *Calcular el volumen de revolución obtenido de rotar el área comprendida por la curva*

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$, *el eje* X *y la recta* $x = 1$, *alrededor del eje* X, $x \geq 0$

SOLUCION: *En la figura siguiente mostramos el área comprendida por las curvas dadas y el volumen de revolución obtenido de girar dicha área alrededor del eje.* X.



El volumen del sólido es:

$$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{x}{1 + x}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2}\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{1 + x^2}\right) dx = \pi \int_0^1 dx - \pi \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\, dx$$

$$= \pi x \Big|_0^1 - \arctan x \Big|_0^1$$

$$= \pi - \arctan 1$$

$$= \pi - \pi \frac{\pi}{4}$$

$= \pi - \frac{\pi^2}{4}$, *es decir, el volumen del sólido obtenido es:*

$V = \pi - \frac{\pi^2}{4}$ *unidades cúbicas.*

EJEMPLO: *Calcular el volumen del sólido obtenido de rotar el área comprendida por la curva.*

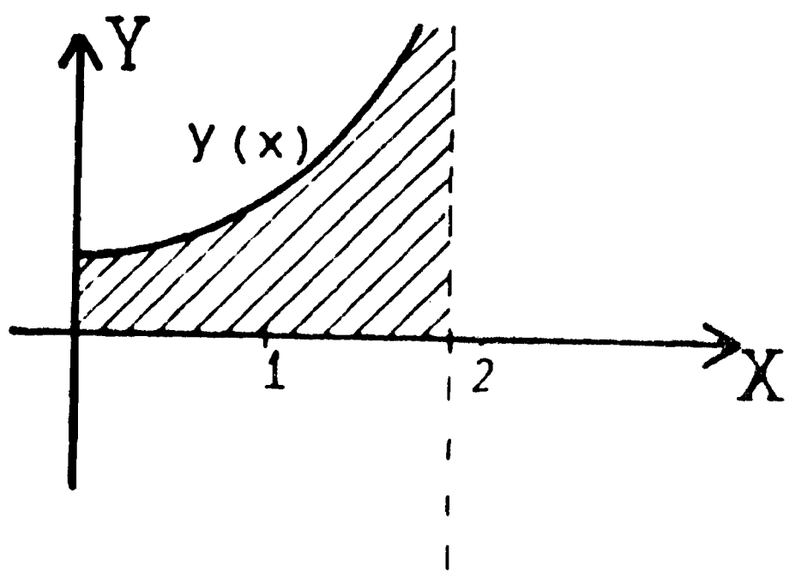
$y(x) = \dfrac{1}{(4 - x^2)^{\frac{1}{4}}}$, *sobre el intervalo* $[0;2]$, *cuando esta es rotada alrededor del eje* $\bar{X}$.

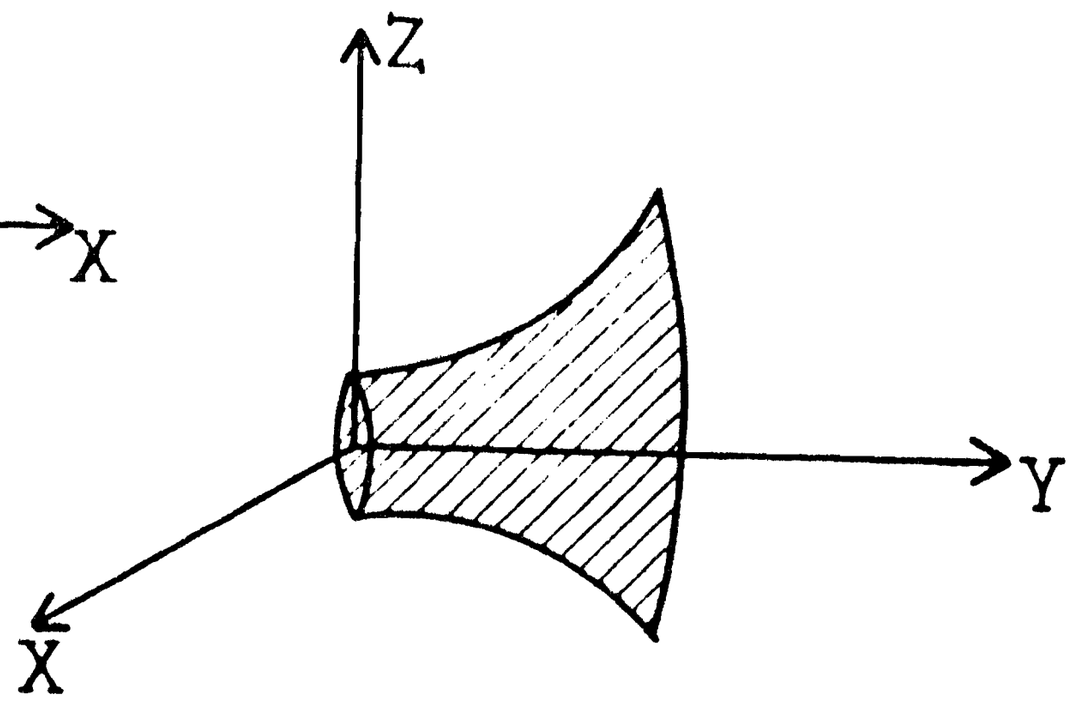
SOLUCION: *Las siguientes figuras muestran el área mencionada y el volumen obtenido de girar dicha área alrededor del eje* $\bar{X}$

Como el volumen de este sólido es calculado sobre el intervalo $[0;2]$ *en el cual la función*

$$y(x) = \frac{1}{(4 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

crece indefinidamente como X *se acerca a 2 por la izquierda, entonces esto da lugar a una integral impropia por lo cual es conveniente calcular el volumen sobre un intervalo de tipo* $[0;\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < 2)$ *y luego hacer* $\varepsilon \to 2$.





Así que el volumen del sólido es:

$$V = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{(4 - x^2)^{\frac{1}{4}}} \right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 \frac{1}{(4 - x^2)^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$= \pi \lim_{\varepsilon \to 2-} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{(4 - x^2)^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$\pi \lim_{\varepsilon \to 2-} \left(\text{arcsen} \left(\frac{N}{Z}\right) \right) \Big|_0^{\varepsilon}$$

$$= \pi \lim_{\varepsilon \to 2^-} \left(\text{arcsen} \frac{\varepsilon}{2} - \text{arcsen } 0 \right)$$

$$= \pi \left(\text{arcsen } 1 \right)$$

$$= \pi \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi^2}{2}$$

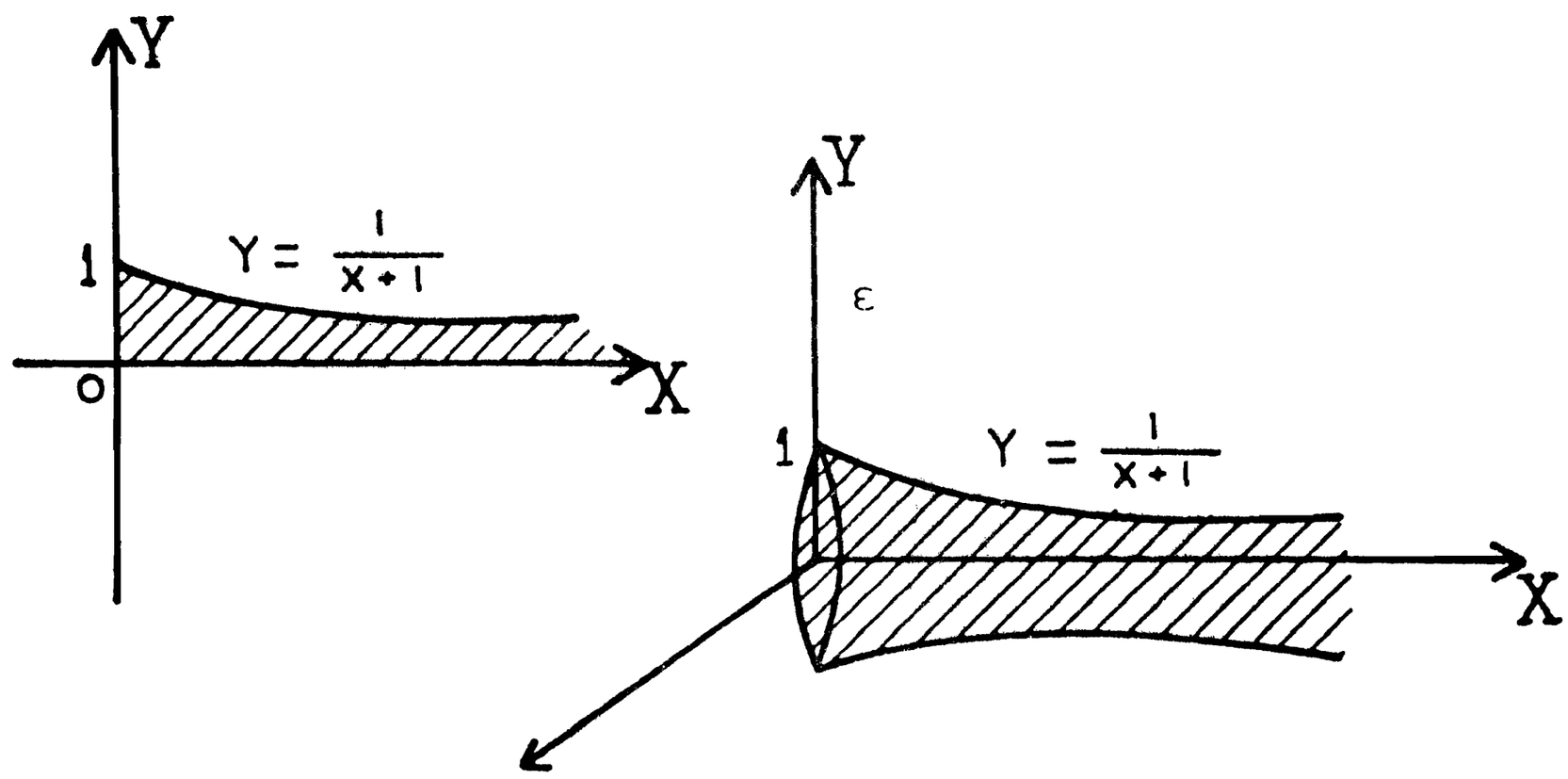
Es decir, el volumen del sólido obtenido de girar el área encerrada por la curva Y (x) sobre el intervalo [0;2] cuando esta es rotada alrededor del eje $\overline{X}$ *es* $\frac{\pi^2}{2}$. *unidades cúbicas.*

EJEMPLO: *Calcular el volumen del sólido obtenido de rotar el área comprendida por la curva*

$$y = \frac{1}{x+1} \quad (x \geqq 0) \text{ y el eje } X$$

Cuando esta es rotada alrededor del eje X.

SOLUCION: *Las siguientes figuras muestran el área mencionada y el volumen obtenido de girar dicha área alrededor del eje X.*



Como el volumen de este sólido es calculado sobre intervalo --- $[0;+\infty]$, esto corresponde entonces al calcular una integral impropia, por lo cual será conveniente primero calcular la integral sobre un intervalo del tipo $[o;\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ y luego hacer $\varepsilon \to +\infty$ para obtener el valor de la integral así tenemos.

$$V = \pi \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 dx = \pi \int^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

$$= \pi \lim_{\varepsilon \to +\infty} \left(-\frac{1}{x+1}\right)\Bigg|_0^{\varepsilon}$$

$$= \pi \lim_{\varepsilon \to +\infty} \left(-\frac{1}{x+1} \right) \Bigg|_{0}^{\varepsilon}$$

$$= \pi \lim_{\varepsilon \to +\infty} \left(-\frac{1}{\varepsilon + 1} + 1 \right)$$

$$= \pi \quad 1 = \pi \quad .$$

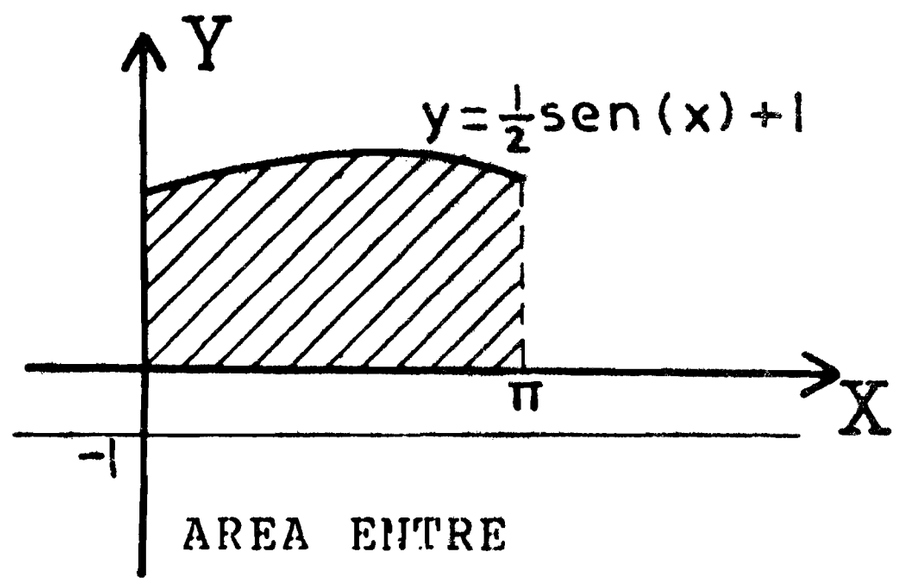
Por lo tanto, el volumen del sólido obtenido de girar la curva $\frac{1}{x+1}$ $(x \geq 0)$ - *alrededor del eje* X *es:*

$V = \pi$ *Unidades cúbicas.*

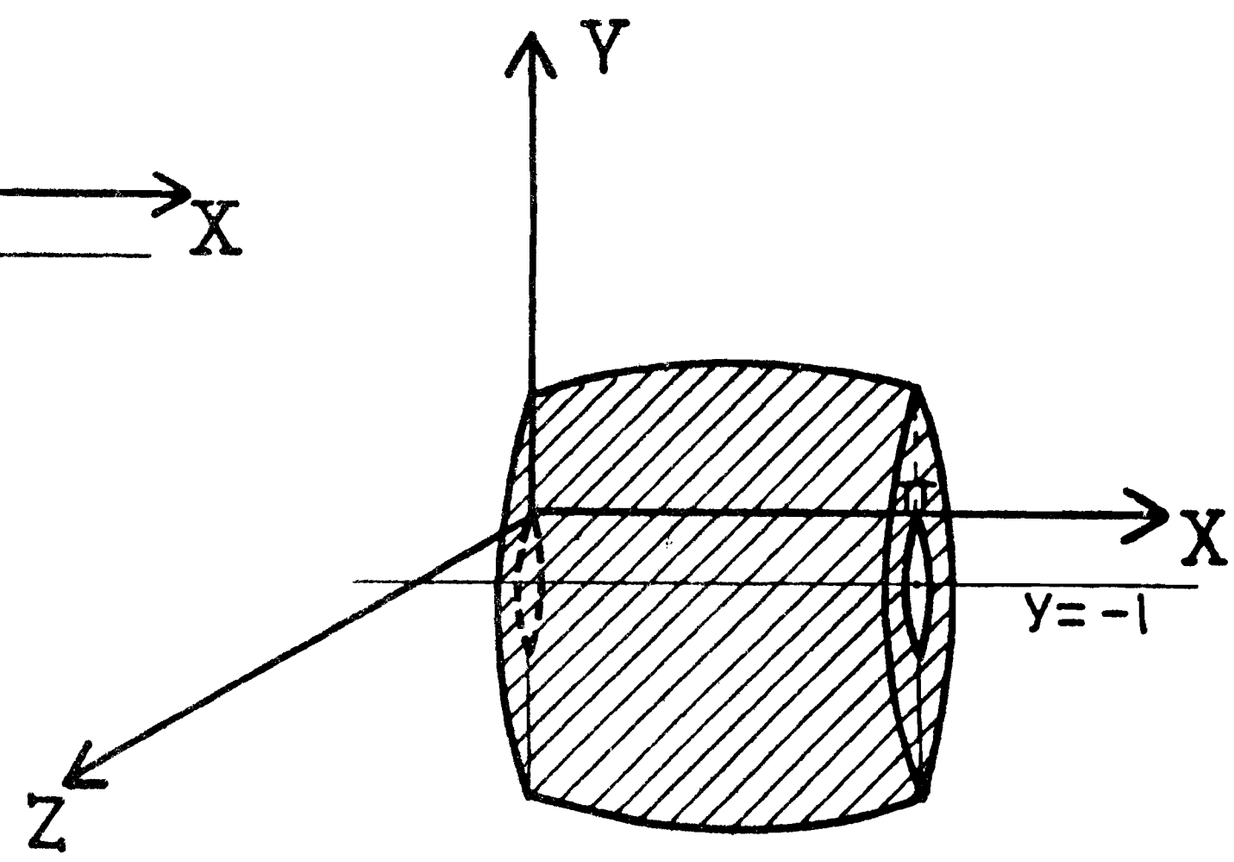
EJEMPLO: *Calcular el volumen de revolución obtenido de girar la curva --*

$y(x) = \frac{1}{2}\,sen(x) + 1$ sobre el intervalo $[0;\pi]$, alrededor de la recta $y = -1$.

SOLUCION: *A continuación mostramos el área comprendida por la curva sobre el intervalo $[0;\pi]$ y el volumen de revolución obtenido de - girar dicha área alrededor de la recta $y = -1$.*



AREA ENTRE CURVAS



VOLUMEN DE REVOLUCION

El volumen del sólido es:

$$V = \pi \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}\,senx+1\right)^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{4}\,sen^2x+senx+1\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} sen^2x\,dx + \pi \int_0^{\pi} senx\,dx + \pi \int_0^{\pi} dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\,(-senx\cos x+x)\Big|_0^{\pi} - \cos x\Big|_0^{\pi} + \pi\,x\Big|_0^{\pi}$$

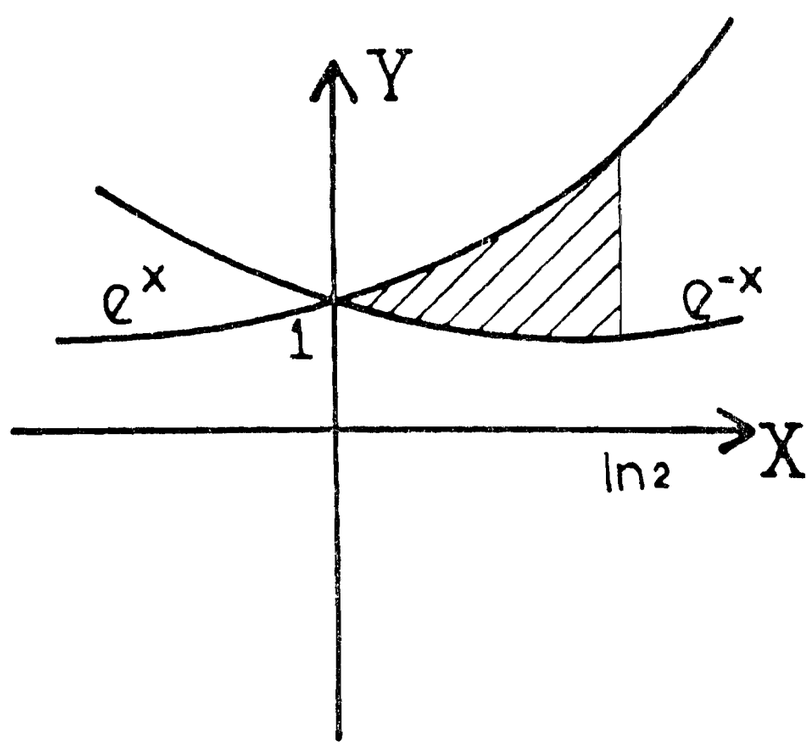
$$= \frac{\pi}{4}\,(\pi) - \pi(-1-1)+\pi^2 = \frac{\pi^2}{4} + 2\pi + \pi^2 = \frac{5}{2}\pi^2 + 2\pi$$ *. unidades cúbicas.*

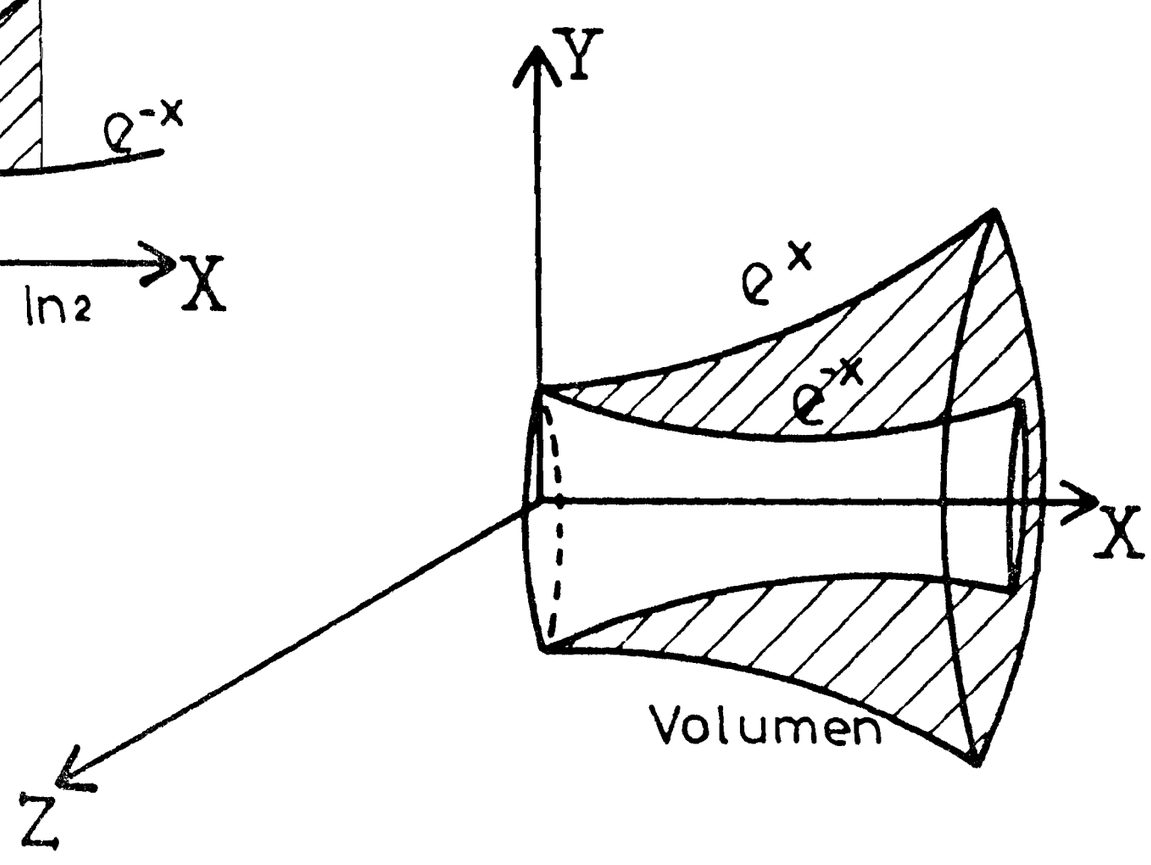
EJEMPLO: *Calcular el volumen de revolución obtenido de rotar el área comprendida por las curvas*

$y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ *y la recta* $x = \ln 2$,

Cuando ésta es rotada alrededor del eje X.

SOLUCION: *En las figuras siguientes mostramos el área comprendida por las curvas dadas y el volumen de revolución obtenido de girar dicha área alrededor del eje* X.





El volumen del sólido es:

$$V = \pi \int_0^{\ln 2} (e^x)^2\,dx - \pi \int_0^{\ln 2} (e^{-x})^2\,dx$$

$$= \pi \int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx - \pi \int_0^{\ln 2} e^{-2x}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big|_0^{\ln 2} + \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big|_0^{\ln 2}$$

$$= \pi \frac{\pi}{2} \left(e^{2\ln 2} - 1\right) + \frac{\pi}{2} \left(e^{-2\ln 2} - 1\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} (4-1) + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{4} - 1\right)$$

$$= \frac{3}{2} \pi - \frac{3}{8} \pi = \frac{9}{8} \pi \text{ unidades cúbicas.}$$

es decir, el volumen del sólido es:

$$V = \frac{9}{8} \pi \text{ unidades cúbicas.}$$

EJEMPLO: *Calcular el volumen de revolución obtenido de rotar el área comprendida por las curvas.*

$y(x) = \tan x$ *y las rectas* $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$.

Cuando esta es rotada al rededor del eje $y = -1$.

SOLUCION: *El volumen del sólido es:*

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} (1+\tan x)^2 \, dx - \pi \int_0^{\pi/4} 1^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} 1 dx + 2\pi \int_0^{\pi/4} \tan x dx + \pi \int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx - \pi \int_0^{\pi/4} 1^2 dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx + \pi \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= -2\pi \ln(\cos x) \Big|_0^{\pi/4} + \pi \tan x \Big|_0^{\pi/4} - \pi x \Big|_0^{\pi/4}$$

$$= -2\pi \left(\ln \frac{1}{\sqrt{2}} - 0\right) + \pi - \frac{\pi^2}{4}$$

$$= -2\pi \ln \sqrt{2} + \pi - \frac{\pi^2}{4}$$

$$= \pi \ln 2 + - \pi \frac{\pi^2}{4}$$

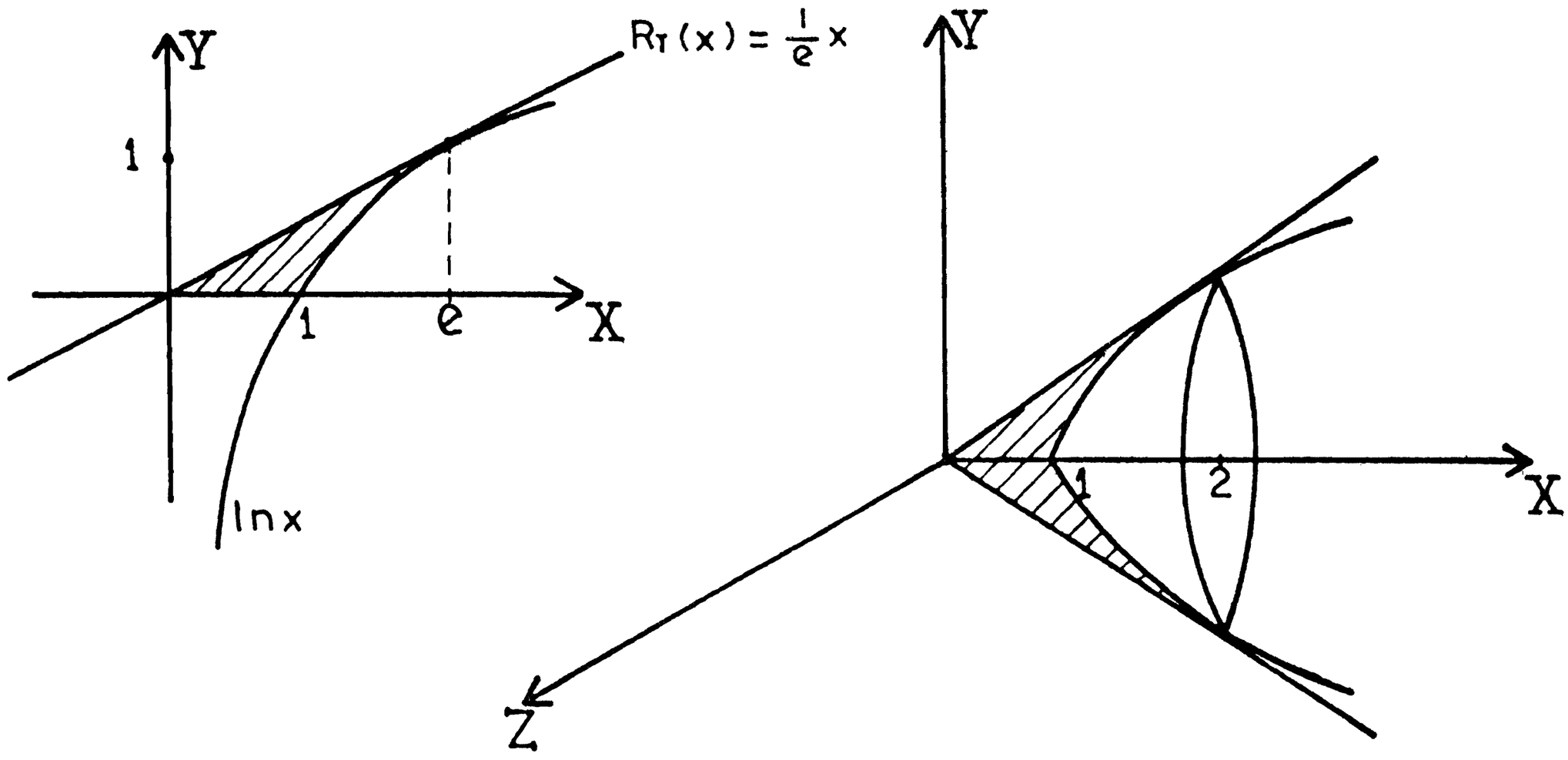
Es decir, el volumen pedido es.

$$V = \pi \ln 2 + \pi - \frac{\pi^2}{4}$$

EJEMPLO: *Calcular el volumen de revolución obtenido de rotar el área comprendida por*

$y(x) = \ln x$, la recta tangente en $x_0 = e$ y los ejes X, Y. cuando ésta es rotada alrededor del eje X.

SOLUCION: *Las siguientes figuras muestran dicha área y el volumen de revolución.*



La ecuación de la recta tangente es:

$$R_T(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x-x_0)$$

en este caso

$$y(e) = 1, \quad y'(x) = \frac{1}{x} \; ; \quad y'(e) = \frac{1}{e}$$

luego entonces

$$R_T(x) = 1 + \frac{1}{e}(x-e) = \frac{1}{e}x$$

y el volumen es:

$$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{e}\, x\right)^2 dx + \pi \int_1^e \left(\frac{1}{e}\, x\right)^2 dx - \pi \int_1^e (\ln x)^2\, dx$$

$$= \frac{2}{e}\, \pi \int_0^1 x^2 dx + \frac{2}{e}\, \pi \int_1^e x^2\, dx - \pi \left(x(\ln x)^2 \Big|_1^e - 2(x\ln x - x) \Big|_1^e \right)$$

$$= \frac{2}{e}\, \frac{x^3}{3}\, \pi \Big|_0^1 + \frac{2}{e}\, \frac{x^3}{3}\, \pi \Big|_1^e - \pi\, (e - 2(e-e) + 2(-1))$$

$$= \frac{\pi}{3e^2} + \frac{\pi}{3e^2}\, (e^3 - 1) - \pi\, (e-2)$$

$$= \frac{\pi}{3e}\, 2 + \frac{\pi}{3}\, e - \frac{\pi}{3e}\, 2 - \pi\, e + 2\, \pi = \frac{2}{3}\, \pi\, e + 2\, \pi$$

$$= 2\, \pi \left(-\frac{e}{3} + 1\right)$$

EJEMPLO: *Calcular el volumen de revolución obtenido de rotar el área comprendida por la curva*

$y(x) = \sqrt{\arctan x}$, *la recta* $x = 0$ *y la recta tangente a* $y(x)$ *en el punto* $x_o = 1$, *cuando ésta es girada alrededor del eje X.*

La ecuación de la recta tangente es:

$$R_T(x) = y(x_o)+y'(x_o)(x-x_o)$$

en este caso

$$y(1) = \frac{\pi}{4}, \quad y'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}(\arctan x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'(1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

luego entonces

$$R_T(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

y el volumen es:

$$V = \pi\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 dx - \pi\int_0^1 \left(\sqrt{\arctan x}\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_0^1 \left(\frac{1}{4}x^2 + x\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)^2\right)dx - \pi\int_0^1 \arctan x\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 x^2 dx + \pi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\int_0^1 x\,dx + \pi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)^2\int_0^1 dx - \pi\int_0^1 \arctan x\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)^2 x\Big|_0^1 - \pi\left(x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Big|_0^1$$

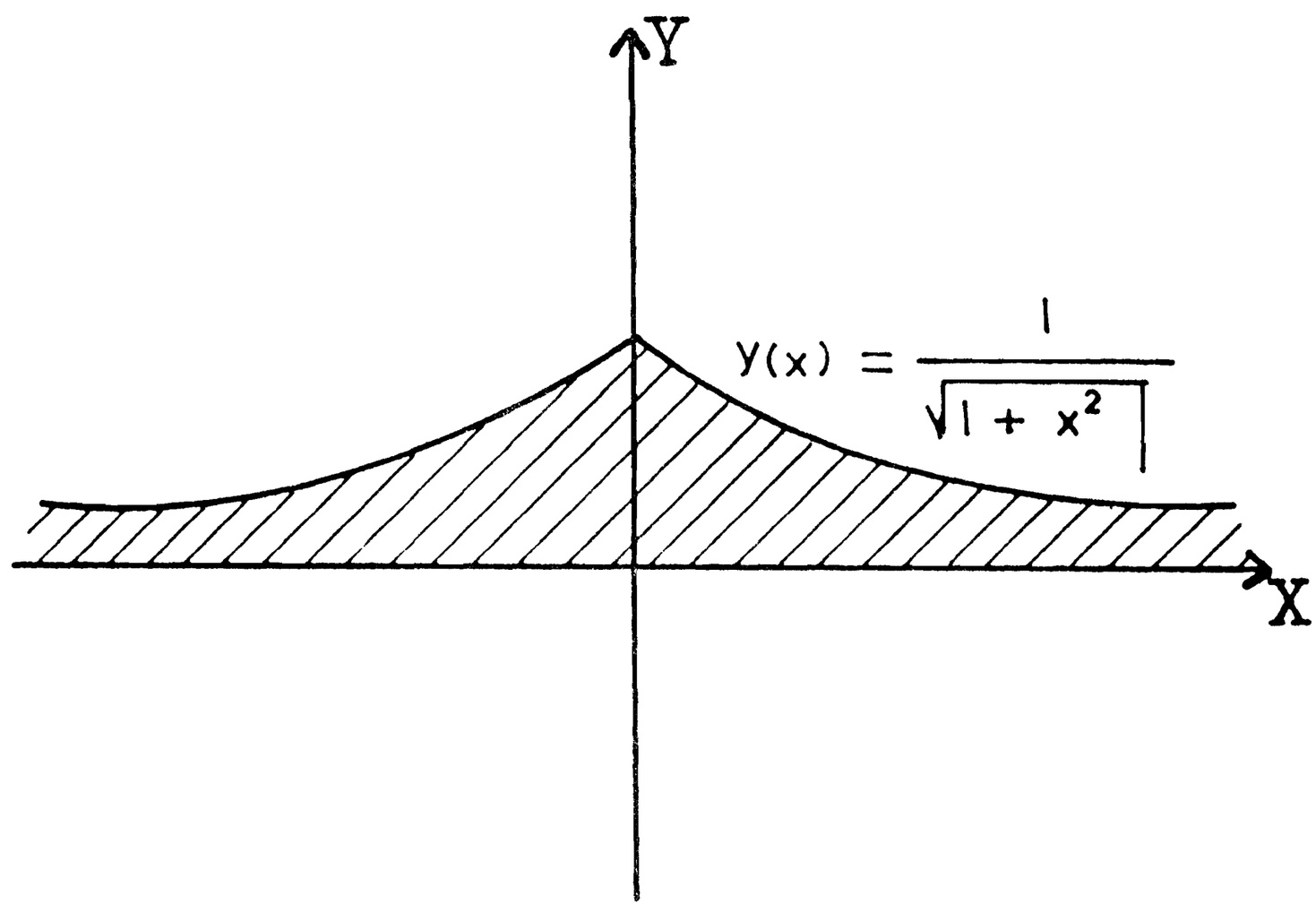
$$= \frac{\pi}{12} + \pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} + \pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4}\pi + \frac{\pi^3}{16} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{6} + \ln 2\right) - \frac{3}{8}\pi^2 + \frac{\pi^3}{16}.$$

EJEMPLO: *Calcular el volumen de revolución del área comprendida por la curva* $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ *y el eje X, cuando ésta es rotada - alrededor del eje X.*

SOLUCION: *La gráfica de la función* $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ *y el volumen de revolución son mostrados en las siguientes figuras.*



El volumen del sólido es:

$$V = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right)^2 dx = 2\pi \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_0^{\varepsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right)^2 dx$$

$$= 2\pi \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{1 + x^2} dx = 2\pi \lim_{\varepsilon \to \infty} \arctan x \Big|_0^{\varepsilon}$$

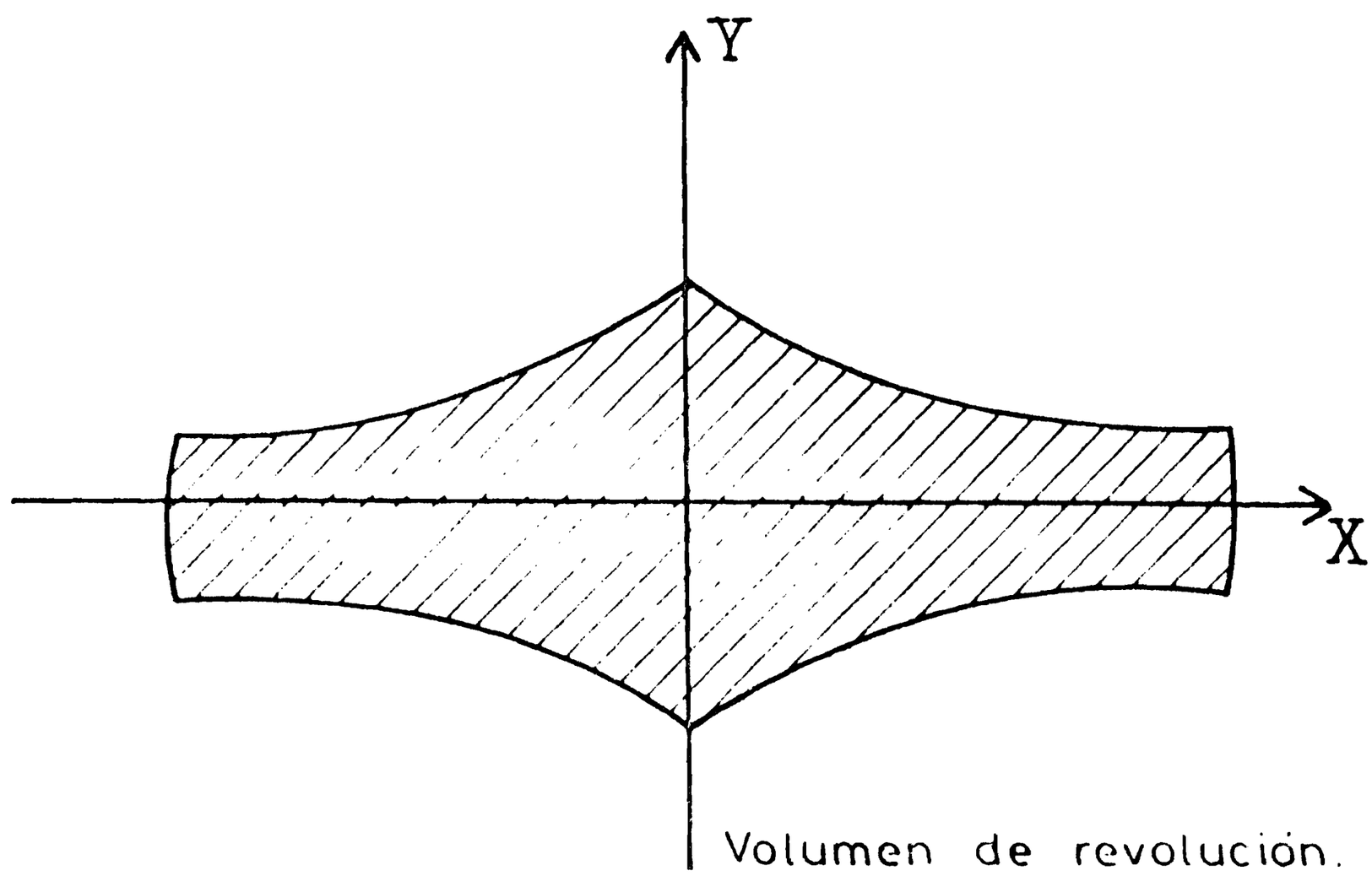
$$= 2\pi \lim_{\varepsilon \to \infty} (\arctan \varepsilon - \arctan 0)$$

$$= 2\pi \lim \arctan \varepsilon = 2\pi \arctan(+\infty)$$

$$= 2\pi \frac{\pi}{2} = \pi^2$$

Por lo tanto el volumen del sólido es:

$V = \pi^2$ *unidades cúbicas.*



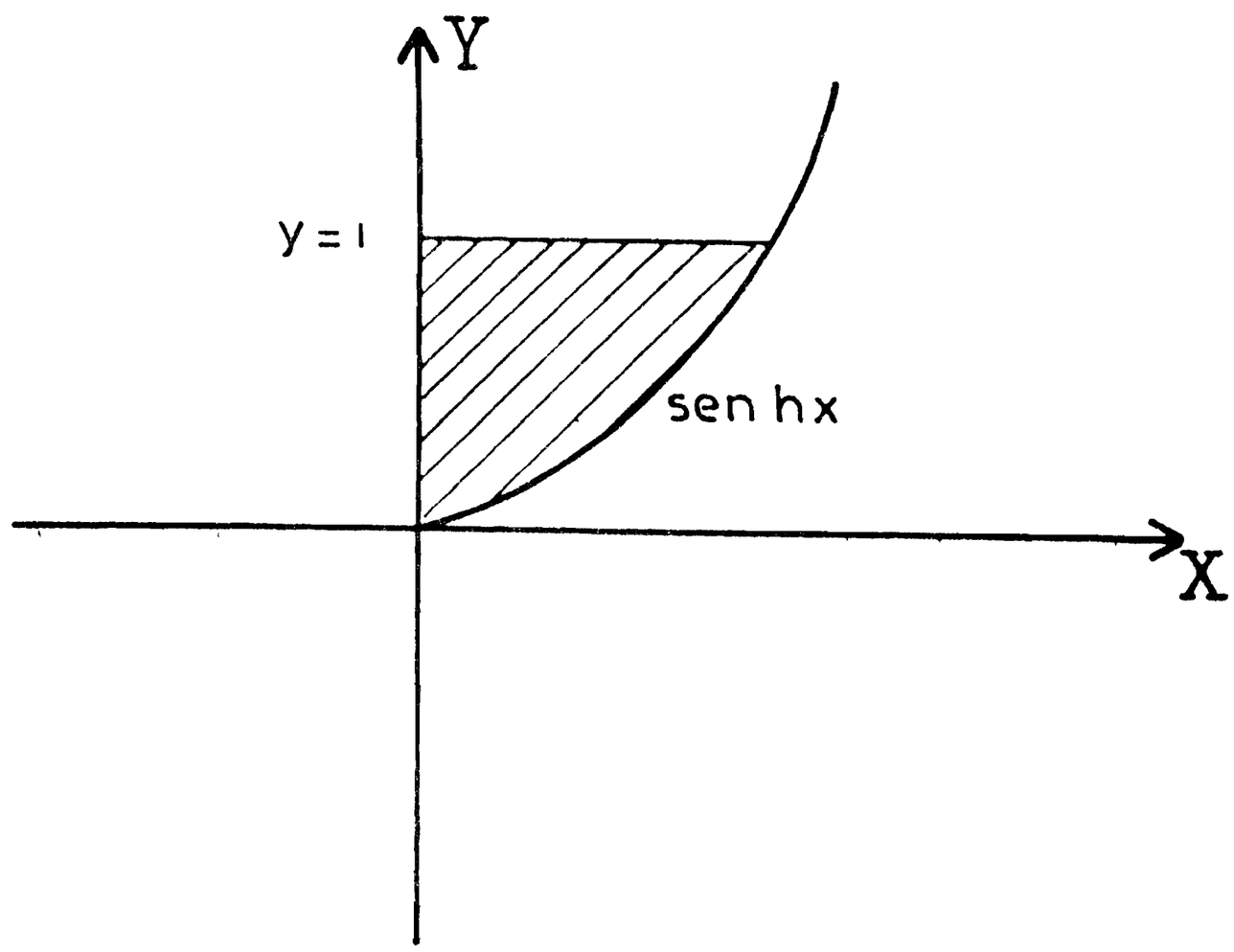
Volumen de revolución.

EJEMPLO: *Calcular el volumen de revolución obtenido de rotar el área comprendida por la curva*

$y(x) = \operatorname{senh} x$, *la recta* $x = 0$, $y = +1$,

cuando ésta es girada alrededor del eje $y = -2$.

SOLUCION: *En las figuras siguientes mostramos el área comprendida por las curvas y el volumen de revolución obtenido de girar dicha área alrededor del eje* X.



El volumen del sólido es:

$$V = \pi \int_0^{\ln 2} (2+\operatorname{senh} x)^2\, dx - \pi \int_0^{\ln 2} 1^2\, dx$$

$$= \pi \int_0^{\ln 2} (4 + 4\operatorname{senh} x + \operatorname{senh}^2 x)\, dx - \pi \int_0^{\ln 2} dx$$

$$= 4\pi \int_0^{\ln 2} dx + 4\pi \int_0^{\ln 2} \operatorname{senh} x\, dx + \pi \int_0^{\ln 2} \operatorname{senh}^2 x\, dx - \pi \int_0^{\ln 2} dx$$

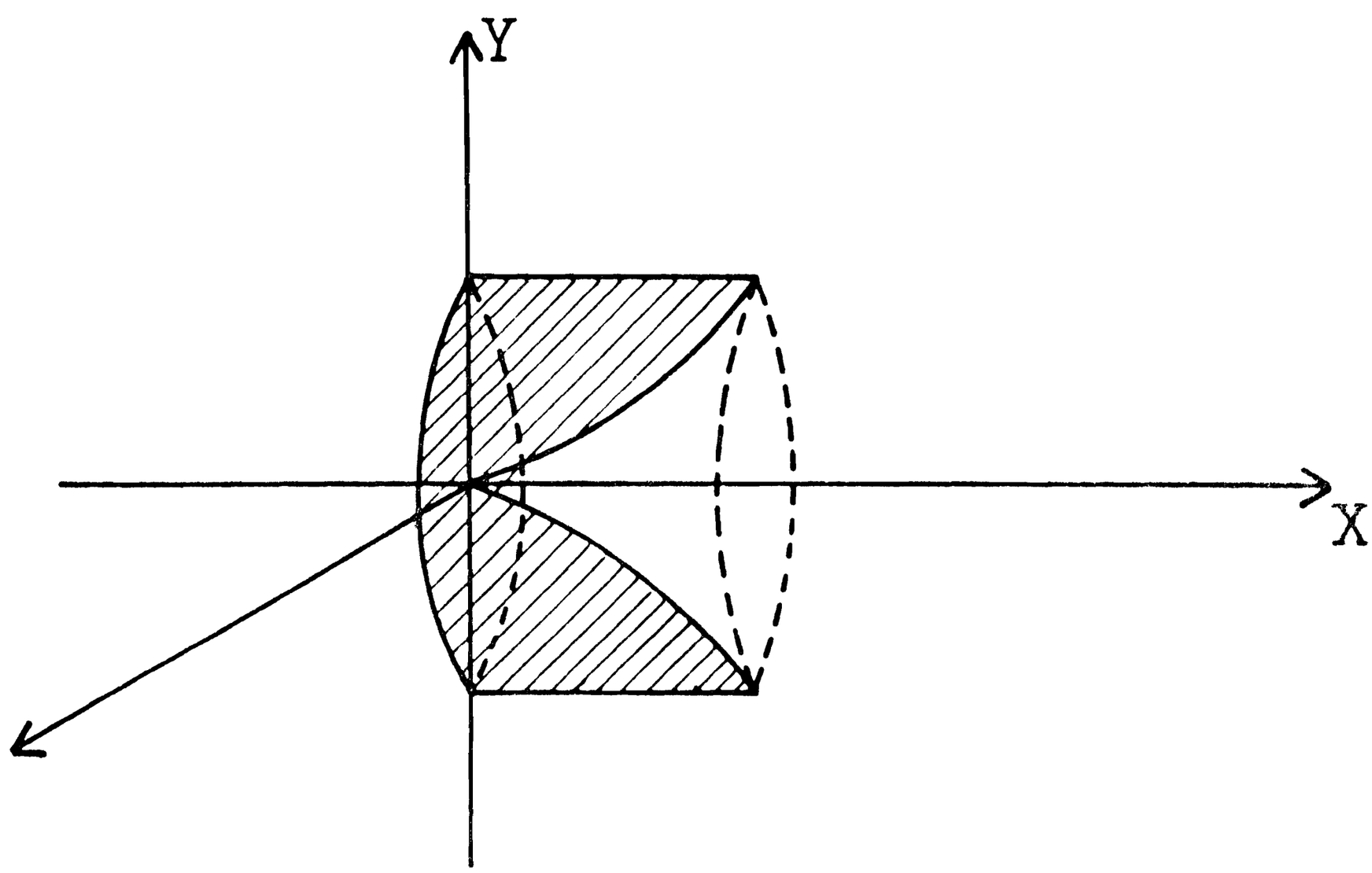
$$= 3\pi \int_0^{\ln 2} dx + 4\pi \int_0^{\ln 2} \operatorname{senh} x\,dx + \pi \int_0^{\ln 2} \operatorname{senh}^2 x\,dx$$

$$= 3\pi\, x \Big|_0^{\ln 2} + 4\pi \cosh x \Big|_0^{\ln 2} + \pi \left(\frac{\operatorname{senh} x \cosh x - x}{2}\right) \Big|_0^{\ln 2}$$

$$= 3\pi(\ln 2) + 4\pi \frac{5/2}{2} + \pi\left(\frac{\frac{15}{4} - \ln 2}{2}\right)$$

$$= 3\pi(\ln 2) + 5\pi + \frac{15}{8}\pi = \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$V = \frac{55}{8}\pi + \frac{5}{2}\pi(\ln 2)$$



B) CALCULO DE VOLUMEN DE SOLIDOS DE REVOLUCION

ROTACION RESPECTO DEL EJE $\bar{X}$, O UN EJE PARALELO.

PARA CADA UNO DE LOS SIGUIENTES CASOS, CALCULAR EL VOLUMEN - DEL SOLIDO OBTENIDO DE ROTAR ALREDEDOR DEL EJE CORRRESPON--- DIENTE, LA REGION COMPRENDIDA POR LAS CURVAS.

1) $y_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, $\bar{X}$, $= 0$, $\bar{X}_2 = 1$, $\bar{Y} = 0$

alrededor del eje $\bar{X}$

2) $y_2(x) = e^x$; $\bar{X}_1 = -1$, $\bar{X}_2 = 2$, $\bar{Y} = 0$, alrededor del eje $Y = -1$.

3) $Y_3(x) =$ sen X, la recta tangente en $x = \frac{\pi}{4}$, $\bar{X} = 0$, alrededor del eje $\bar{X}$.

4) $Y_4(x) = \ln(x + e)$, la recta tangente en $x=0$, la recta $\bar{X} = e$, alrededor del eje $y = -1$.

5) $Y_5(x) = \dfrac{1}{2 + x}$, $\bar{X} = 0$, $\bar{X} = 2$, $\bar{Y} = 0$; alrededor dej eje $y = -1$

6) $Y_6(x) =$ tan X; $\bar{X} = 0$, $\bar{X} = \frac{\pi}{4}$, $Y = 0$, alrededor del eje $y = -1$.

7) $Y_7(x) = \sqrt[3]{e^x}$, $\bar{X}_1 = -1$, $\bar{X}_2 = 2$, $Y = 0$; alrededor del eje $y = -2$.

8) $Y_8(x) =$ cos$x$, la recta tangente en x $\frac{\pi}{4}$, la recta Y 0, rotada alrededor del eje y -1.

9) $Y_9(x) =$ coshx, la recta tangente en $X = \ln 2$, la recta $\bar{X} = 0$; rotada alrededor del eje $y = -2$.

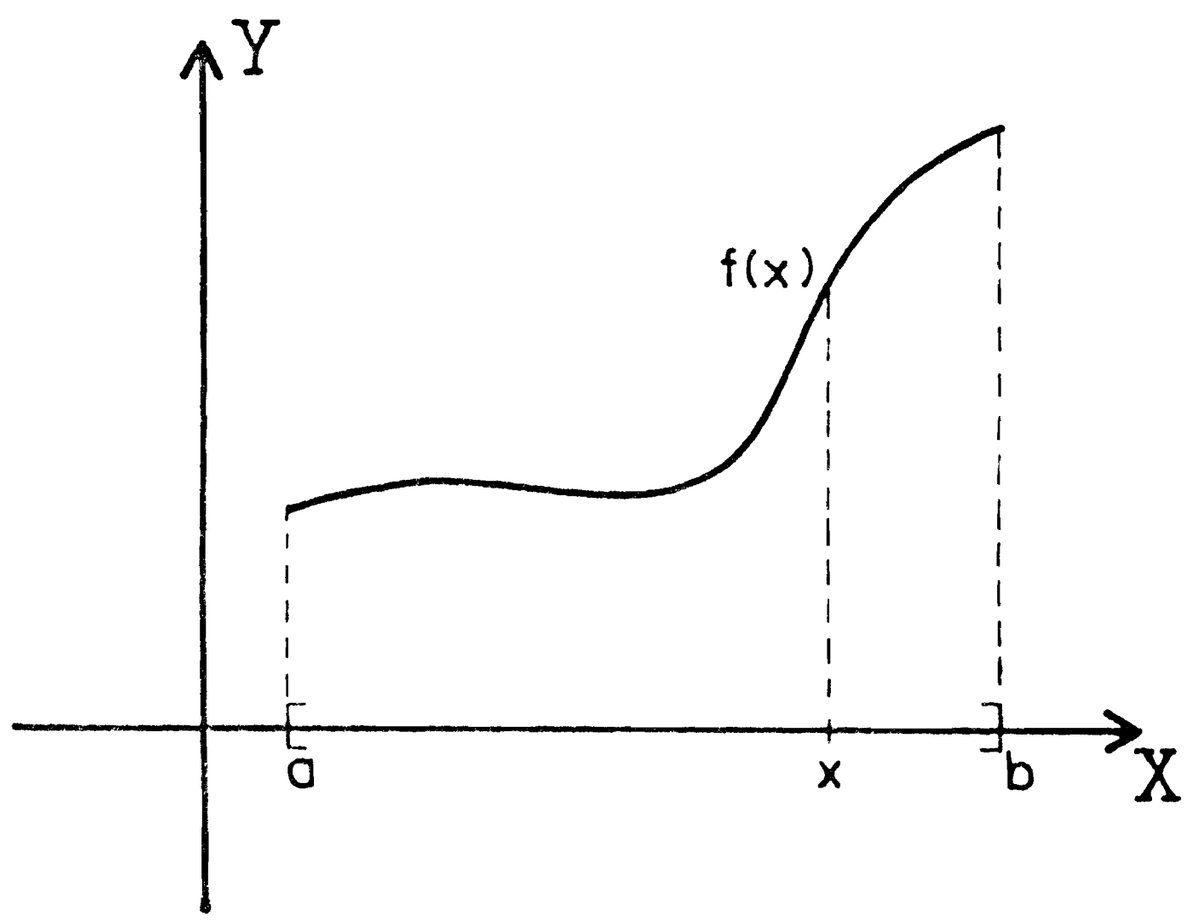
10) $Y_{10}(x) =$ arctan X, la recta tangente en $x = 1$, la recta $\bar{X} = 0$, x 0; alrededor del eje $y = -2$.

C) LONGITUD DE ARCO

La integral puede utilizarse para calcular longitudes de curva tales como la longitud de un círculo, elipse etc.; de hecho, si consideramos que f(x) es una función con derivada continua sobre un intervalo [a;b], es posible calcular la longitud L de su gráfica sobre dicho intervalo, por medio de la -- fórmula.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$

lo cual es conocida como fórmula de longitud de arco.



Nota: la fórmula de la longitud de arco también puede ser aplicado a funciónes cuya función derivada sea acotada y sectorialmente continua sobre el intervalo [a;b].

EJEMPLO: *Sea* $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\log x$. *Calcular la longitud del arco* $f(x)$ *desde* $x = 1$ *hasta* $x = 2$.

SOLUCION: *Como* $f'(x) = x - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}$

entonces la longitud del arco es:

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+(x-\frac{1}{4x})^2}\,dx \qquad = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + \frac{1}{4}\ln x\Big|_1^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\ln 2$$

$$= \int_1^2 \sqrt{1+\frac{(4x^2-1)^2}{16x^2}}\,dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{16x^2+(4x^2-1)^2}{16x^2}}\,dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{16x^2+16x^4-8x^2+1}{16x^2}}\,dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{16x^4+8x^2+1}{4x}}\,dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{(4x^2+1)^2}{4x}}\,dx$$

$$= \int_1^2 \frac{4x^2+1}{4x}\,dx$$

$$= \int_1^2 \frac{4x^2+1}{4x}\,dx = \int_1^2 x\,dx + \int_1^2 \frac{1}{4x}\,dx$$

EJEMPLO: *Calcular la longitud de la curva*

$$y(x) = \int_0^x e^{-w/2} \sqrt{2+e^{-w}}\, dw \quad \text{desde} \quad x = 0 \quad \text{hasta} \quad x = \ln 20.$$

SOLUCION: *Por el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos*

$$y'(x) = e^{-x/2} \sqrt{2+e^{-x}}$$

luego entonces, la longitud de la curva es:

$$L = \int_0^{\ln 20} \sqrt{1+(e^{-x/2}\sqrt{2+e^{-x}})^2}\, dx = \int_0^{\ln 20} \sqrt{1+e^{-x}(2+e^{-x})}\, dx$$

$$= \int_0^{\ln 20} \sqrt{1+2e^{-x}+e^{-2x}}\, dx = \int_0^{\ln 20} \sqrt{(1+e^{-x})^2}\, dx$$

$$= \int_0^{\ln 20} (1+e^{-x})dx = \int_0^{\ln 20} dx + \int_0^{\ln 20} e^{-x}dx$$

$$= x \Big|_0^{\ln 20} -e^{-x} \Big|_0^{\ln 20}$$

$$= \ln 20 - \left(\frac{1}{\ln 20} - 1 \right)$$

$$= \ln 20 + 1 - \frac{1}{\ln 20}$$

es decir, la longitud de la curva $y(x)$ *entre los límites es:*

$$L = \ln 20 + 1 - \frac{1}{\ln 20}$$

EJEMPLO: *Calcular la longitud del arco* $y = \operatorname{arcsen}(e^{-x})$ *desde* $x = 0$ *hasta* $x = 1$.

SOLUCION: Como

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\, dx \quad \text{con} \quad a = 0, \quad b = 1 \quad y$$

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}\,(-e^{-x})$$

entonces

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-e^{-2x}}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\, dx \quad \text{----------} (1)$$

para calcular la integral (1) haremos el siguiente cambio de variable

$$w = \operatorname{arcosh} e^x \quad y \quad e^x = \cosh w$$

entonces

$$x = \ln \cosh w$$

$$y \qquad dx = \frac{1}{\cosh w}\, \operatorname{senh} w\, dw, \text{ así tenemos}$$

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = \int \frac{\cosh w}{\sqrt{\cosh^2 w-1}}\,\frac{\operatorname{senh} w}{\cosh w}\,dw = \int dw = w$$

$$= w = \operatorname{arccosh} e^x \Big|_0^1$$

$$= \operatorname{arccosh}(e) - \arccos t$$

EJEMPLO: *Calcular la longitud del arco de la curva* $y = \ln\sec x$, *comprendida entre* $x = 0$ *ex* $= \frac{\pi}{3}$

SOLUCION: *Como* $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

entonces $y = \ln\sec x = \ln \dfrac{1}{\cos x} = \ln 1 - \ln\cos x$

por lo tanto $y'(x) = -\dfrac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

luego entonces la longitud del arco es:

$$L = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1+\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/3} \sqrt{1+\tan^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/3} \sqrt{\sec^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/3} \sec x\, dx$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| \Big|_0^{\pi/3}$$

$$= \ln\left(\left|\sec\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{3}\right|\right) \ln|1+0|$$

$$= \ln\left|\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right|$$

EJEMPLO: *Calcular la longitud del arco de la curva* $y = \ln(\coth \frac{x}{2})$ *desde* $x = 1$ *hasta* $x = 2$.

SOLUCION: *Como* $\coth \frac{x}{2} = \dfrac{\cosh \frac{x}{2}}{\operatorname{senh} \frac{x}{2}}$

entonces

$$y = \ln(\operatorname{Coth} \frac{x}{2}) = \ln \frac{\cosh \frac{x}{2}}{\operatorname{senh} \frac{x}{2}}$$

$$= \ln(\cosh \frac{x}{2}) - \ln(\operatorname{senh} \frac{x}{2})$$

por tanto

$$y'(x) = \frac{1}{\cosh \frac{x}{2}} \operatorname{senh} \frac{x}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{\operatorname{senh} \frac{x}{2}} \cosh \frac{x}{2} \frac{1}{2}$$

luego entonces la longitud del arco es:

$$L = \int_4^8 \sqrt{1 + (\frac{1}{2} \frac{\operatorname{senh} \frac{x}{2}}{\cosh \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \frac{\cosh \frac{x}{2}}{\operatorname{senh} \frac{x}{2}})^2} \, dx$$

$$= \int_4^8 \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\operatorname{senh}^2 \frac{x}{2} - \cosh^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{senh} \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2}} \right)^2} \, dx$$

$$= \int_4^8 \sqrt{\frac{4\operatorname{senh}^2 \frac{x}{2} \cosh^2 \frac{x}{2} + 1}{4\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \cosh^2 \frac{x}{2}}} \, dx$$

$$= \int_4^8 \sqrt{\frac{sen^2\ 2x + 1}{4senh^2\ \frac{x}{2}\ cosh^2\ \frac{x}{2}}}\ dx = \int_4^8 \sqrt{\frac{cosh^2\ 2x}{4senh^2\ \frac{x}{2}\ cosh^2 \frac{x}{2}}}\ dx$$

$$= \int_4^8 \frac{cosh 2x}{2senh\ \frac{x}{2}\ cosh\ \frac{x}{2}}\ dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{senh\ \frac{x}{2}}\ dx = \frac{1}{2}\ ln \left| tanh\ \frac{1}{4}\ x \right| \Big|_4^8$$

$$= \frac{1}{2}(ln(tanh 2) - ln(tanh 1))$$

$$= \frac{1}{2}\ ln\ \frac{tanh 2}{tanh 1} = ln \sqrt{\frac{tanh 2}{tanh 1}}$$

C) L O N G I T U D D E A R C O.

CALCULAR LA LONGITUD DE CADA UNA DE LAS SIGUIENTES CURVAS, EN EL INTERVALO INDICADO.

1) $F_1(x) = \log(\sec x)$; en $[-\frac{1}{4}\pi ; \frac{1}{4}\pi]$

2) $F_2(x) = \frac{1}{2}(e^x + x^{-x})$; en $[o; \log 2]$

3) $F_3(x) = e^x$; en $[0; \frac{1}{2}\log 3]$

4) *CALCULAR LA LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA DE RADIO. R*

5) $F_5(x) = \log(\frac{5}{\cos x})$; en $[0; \frac{\pi}{4}]$

B I B L I O G R A F I A

Limpman Bers. Cálculo Diferencial e Integral. Vol. I
1a. Edición, Nueva Editorial Interamericana, 1972.

Louis Leithold. El Cálculo con Geometría Analítica
4a. Edición, Editorial Harla, 1982.

Earl W. Swokowski. Cálculo con Geometría Analítica.
Editorial Wadsworth Internacional
Iberoamexicana, 1982.

B. Demidovich. Problemas y Ejercicios de Análisis
Matemática. Editorial MIR, 1980.

PROBLEMARIO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL PARTE II

Se terminó de imprimir en el mes de marzo de 1995 en los talleres
de la Sección de Impresión y reproducción de la Unidad Azcapotzalco.
Se imprimieron 2000 ejemplares más sobrantes de reposición.

Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

UNIDAD AZCAPOTZALCO División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Departamento de Ciencias Básicas