

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA  
POSGRADO EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL

INTERACCIÓN FLUIDO ESTRUCTURA EN  
VELARIAS CONSIDERANDO SUPERFICIE MÍNIMA

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL

P R E S E N T A:

**DANIEL GONZÁLEZ FLORES**

Asesores:

**DR. GELACIO JUÁREZ LUNA**

**DR. EMILIO SORDO ZABAY**

México, D.F. 2017



**LA INGENIERÍA ESTRUCTURAL.**

EL ARTE DE UTILIZAR MATERIALES

Con propiedades que sólo pueden ser estimadas

PARA CONSTRUIR ESTRUCTURAS

Que sólo pueden ser analizadas aproximadamente

QUE SOPORTAN FUERZAS

Que no son conocidas con precisión

*Adaptado de un autor anónimo.*

“El hombre nunca hizo un material tan resistente, como el espíritu humano”

*Bernard Williams*



## Dedicatoria

A Dios,

A mis hijos, *Leonardo Fabrizio y Ximena Alejandra*, por ser el motor de mi vida,  
enseñarme lo útil de la paciencia y a ser niño de nuevo.

Dedico especialmente este trabajo a mi esposa, *Julia*, por brindarme incondicionalmente su  
apoyo, cariño, respeto y amor en cada paso que doy en la vida, gracias a ti.

A mis padres, *Juan Manuel y Graciela* por darme la vida y sostenerme en los momentos  
de debilidad.

A mis hermanos, *Juan José, Marco Antonio, Gustavo y Eduardo* por esos Domingos  
llenos de risas y buenos momentos.

Al *Dr. Claudio Ramos Rodríguez y a la Sra. Julia Ramos Guevara*, por su gran apoyo a  
mi esposa e hijos durante el curso de mis estudios.

A mis compañeros de posgrado, *Salvador, Miguel Ángel, Galet, José Juan* por enseñarme  
el valor del trabajo en equipo.



## Agradecimientos

Primeramente doy infinitamente gracias a Dios por prestarme el tiempo y la vida para continuar adelante con mis estudios profesionales, y por cruzar siempre en mi camino personas excelentes, porque de ellas aprendí mucho y han contribuido enormemente a mi formación profesional:

A los miembros del jurado, Dr. Edgar Tapia Hernández, Dr. Jaime Retama Velasco, al Dr. Gelacio Juárez Luna y al Dr. Emilio Sordo Zabay por sus valiosos comentarios y su tiempo dedicado a la revisión de esta Tesis.

Al *Dr. Gelacio Juarez Luna*, asesor de tesis, por darle dirección a este proyecto, por su apoyo, entusiasmo, consejos y conocimientos.

Al *Dr. Emilio Sordo Zabay*, co-asesor, por encaminarme en la etapa inicial de este proyecto y por brindarme sus conocimientos en clase.

Al equipo de profesores del posgrado, a la *Dra. María de la Consolación Gómez*, al *Dr. Manuel E. Ruiz Sandoval*, al *Dr. Arturo Tena Colunga*, al *Dr.*, al *Dr. Gelacio Juarez Luna*, al *Dr. Hans Archundia*, al *Dr. Emilio Sordo Zabay*, al *Dr. Hugon Juárez*, al *Dr. Oscar González Cuevas*, al *Dr. Edgar Tapia*,; gracias a todos por brindarme sus conocimientos de la mejor calidad.

Al *Ing. Guillermo Coronado Gallardo* por influir de forma directa para continuar con mis estudios de maestría, creer en mí, brindarme su amistad, consejos y conocimientos.

Al *M.I. Carlos Arturo Pastor Mota* por brindarme su apoyo, amistad y compañía.

Por último, agradezco sinceramente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado en este proceso, y al área de estructuras de la Universidad Autónoma Metropolitana por ofrecer una educación de calidad que me ha permitido desarrollarme como persona y como profesional.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción.....</b>	<b>1</b>
1.1	BREVE RESEÑA HISTÓRICA .....	1
1.2	PROBLEMÁTICA ACTUAL DEL DISEÑO DE VELARIAS EN MÉXICO.....	4
1.3	ANTECEDENTES.....	5
1.4	OBJETIVO.....	7
1.5	METAS.....	7
1.6	ORGANIZACIÓN DE LA TESIS.....	8
<b>2</b>	<b>Tipos de Velarias y membranas textiles.....</b>	<b>9</b>
2.1	VELARIAS.....	9
2.1.1	<i>Definición de Velaria.....</i>	<i>10</i>
2.1.2	<i>Tipos de Velarias.....</i>	<i>10</i>
2.1.3	<i>Superficie Anti-clástica: .....</i>	<i>11</i>
2.1.4	<i>Superficie Sin-clástica: .....</i>	<i>11</i>
2.2	CARACTERÍSTICAS DE LAS MEMBRANAS TEXTILES .....	12
2.2.1	<i>Componentes de una membrana textil .....</i>	<i>12</i>
2.2.2	<i>Hilo de soporte.....</i>	<i>13</i>
2.2.3	<i>Hilo de urdimbre e hilo de trama.....</i>	<i>14</i>
2.2.4	<i>Tipos de tejido.....</i>	<i>15</i>
2.2.5	<i>Propiedades mecánicas de una membrana.....</i>	<i>17</i>
2.2.6	<i>Resistencias estándar. ....</i>	<i>19</i>
<b>3</b>	<b>Buscador de forma .....</b>	<b>20</b>
3.1	INTRODUCCIÓN.....	20
3.2	SUPERFICIES MÍNIMAS.....	21
3.3	PROCEDIMIENTO PARA EVALUAR SUPERFICIES MÍNIMAS O BUSCADOR DE FORMA.....	22
3.3.1	<i>Método de Densidad de fuerza: principios básicos.....</i>	<i>22</i>
3.3.2	<i>Densidad de fuerza matricial.....</i>	<i>28</i>
3.3.3	<i>Cálculo de superficies mínimas con el método de densidad de fuerza .....</i>	<i>32</i>
3.3.4	<i>Superficie mínima 1, <math>q=1</math> en todos los elementos.....</i>	<i>34</i>
3.3.5	<i>Superficie mínima 2, <math>q=5</math> en los elementos de borde, <math>q=1</math> en los elementos restantes.....</i>	<i>34</i>
3.3.6	<i>Superficie mínima 3, efecto de la densidad de fuerza sobre determinados elementos.....</i>	<i>35</i>
3.3.7	<i>Análisis de una Velaria anti-clástica.....</i>	<i>38</i>
3.3.8	<i>Buscador de forma.....</i>	<i>38</i>
3.3.9	<i>Análisis de los elementos mecánicos.....</i>	<i>40</i>
<b>4</b>	<b>Planteamiento de modelos y consideraciones para el análisis de viento.....</b>	<b>44</b>
4.1	MODELOS ANALÍTICOS.....	44
4.2	CONSTRUCCIÓN DEL MODELO CFORM1.....	45
4.2.1	<i>Malla inicial y después del análisis de superficie mínima .....</i>	<i>45</i>
4.2.2	<i>Construcción de la superficie y solido 3D.....</i>	<i>46</i>
4.2.3	<i>Estructuración con elementos finitos.....</i>	<i>47</i>
4.3	PLANTEAMIENTO DEL MODELO G14H1.....	49
4.4	CARACTERÍSTICAS DEL VOLUMEN DE CONTROL.....	49



4.5	CONSIDERACIONES PARA EL CÁLCULO DE COEFICIENTES DE PRESIÓN.....	51
<b>5</b>	<b>Dinámica de fluidos. Interacción fluido estructura.....</b>	<b>53</b>
5.1	INTRODUCCIÓN.....	53
5.2	ALCANCES.....	54
5.2.1	<i>Dinámica de fluidos</i> .....	54
5.2.2	<i>Ecuaciones que gobiernan el movimiento promedio del viento</i> .....	55
5.2.2.1	Ecuaciones de equilibrio.....	55
5.2.2.2	Ecuación de continuidad o conservación de la masa.....	56
5.2.2.3	Ecuación constitutiva.....	56
5.3	SISTEMAS ACOPLADOS.....	57
5.3.1	<i>Descripción matemática</i> .....	59
5.3.2	<i>Acoplamiento fuerte</i> .....	60
5.3.3	<i>Acoplamiento débil</i> .....	60
5.4	OSCILACIÓN DE UNA PLACA DE ACERO.....	61
5.4.1	<i>Dimensiones y características</i> .....	61
5.4.2	<i>Modelo de elementos finitos</i> .....	63
5.4.3	<i>Propiedades mecánicas</i> .....	63
5.4.4	<i>Volumen de control</i> .....	64
5.4.5	<i>Parámetros de la caracterización del viento</i> .....	65
5.4.6	<i>Solución</i> .....	65
5.4.7	<i>Resultados</i> .....	66
5.5	RESPUESTA DE LOS MODELOS CFORM1 Y G14H1.....	71
5.5.1	<i>Condiciones iniciales y parámetros para el análisis</i> .....	71
5.5.2	<i>Resultados modelo CFORM1</i> .....	73
5.5.3	<i>Resultados modelo G14H1</i> .....	76
5.5.4	<i>Resumen de resultados de Modelos CFORM1 y G14H1</i> .....	79
5.5.5	<i>Contornos de presión</i> .....	81
5.5.6	<i>Coefficientes de presión</i> .....	83
5.5.7	<i>Desplazamientos y esfuerzos</i> .....	87
5.6	COMENTARIOS ACERCA DE RESULTADOS OBTENIDOS.....	89
<b>6</b>	<b>Conclusiones y recomendaciones.....</b>	<b>92</b>
6.1	CONCLUSIONES.....	92
6.2	RECOMENDACIONES.....	93
6.3	TRABAJOS FUTUROS.....	94
	<b>Referencias.....</b>	<b>95</b>
<b>7</b>	<b>Algoritmo utilizado para calcular superficies mínimas.....</b>	<b>98</b>

## Lista de figuras

Figura 1.1 Construcción de una tienda mongola o “yurta” (adaptado de Wikipedia).....	1
Figura 1.2 Tenso-estructura del pabellón Alemán de 1967 (adaptado de Wikipedia.org)....	2
Figura 1.3 Prueba de tensión axial en membranas textiles para obtener su resistencia (adaptada de Kovar 2010).....	3
Figura 1.4 Velaria del Palacio de Minería del Distrito Federal. (adaptada de www.flickr.com) .....	3
Figura 1.5. Aparición en orden cronológico de diferentes métodos. (adaptada de Veenendaal y Block 2012).....	5
Figura 2.1. Forma de una Velaria .....	9
Figura 2.2. Esquema de una superficie de una Velaria cubierta con una membrana textil. .	10
Figura 2.3. Algunos tipos de formas para Velarias. (adaptada de Forster y Mollaert 2004). .....	10
Figura 2.4. Superficie anti-clástica. (Adaptado de Álvarez 2012) .....	11
Figura 2.5. Superficie sinclástica. (Adaptado de Álvarez 2012).....	12
Figura 2.6. Partes de una membrana textil (adaptada de Forster y Mollaert 2004).....	13
Figura 2.7 Relación esfuerzo-deformación de diferentes materiales y esquema de los elementos que componen una membrana. ....	14
Figura 2.8. Hilo de urdimbre e hilo de trama. (adaptado de Kovar (2010)).....	15
Figura 2.9. Detalle del tipo de tejido (adaptado de Forster y Mollaert 2004). ....	15
Figura 2.10. Tela tejida tipo Plain Wave. (adaptado de Forster y Mollaert 2004).....	16
Figura 2.11 Tejido tipo “Basket o Panamá” (adaptado de Forster y Mollaert 2004). ....	16
Figura 2.12. Relación esfuerzo deformación de una membrana estructural (adaptada de Laboratorium Blum GmbH Stuttgart 2010). ....	17
Figura 2.13. Relación esfuerzo deformación para una membrana estructural. (adaptada de Laboratorium Blum Stuttgart 2010). ....	18
Figura 2.14 Resistencias estándar para membranas (adaptado de Forster y Mollaert 2004). .....	19

Figura 3.1. a) Forma silla de montar y superficie mínima de una película de jabón y b) distancia mínima y curva mínima (adaptado de Lewis, 2003).....	21
Figura 3.2. Membrana textil representada como una malla (adaptado de Technet, 2010)...	22
Figura 3.3. Diagrama de cosenos directores y componentes de la fuerza resultante P. ....	24
Figura 3.4. Coordenadas de los nodos fijos.....	26
Figura 3.5. Coordenada calculada del nodo “i”.....	27
Figura 3.6. Forma inicial de una estructura (adaptada de Schek 1974).....	28
Figura 3.7. Extremos “i” y “k” del elemento.....	29
Figura 3.8 Matriz de conectividades $[C_s] = [C] + [C_F]$ .....	30
Figura 3.9. (a) Forma inicial. Superficie, (b) Forma inicial. Malla. ....	32
Figura 3.10. Diferentes vistas de la superficie inicial y superficie mínima, $q = 1$ en todos sus elementos.....	33
Figura 3.11. Diferentes vistas de la forma mínima obtenida $q=1$ en todos los elementos. ..	34
Figura 3.12. Forma mínima $q=5$ en sus elementos de borde.....	34
Figura 3.13. Diferentes formas mínimas calculadas para diferente densidades de fuerza en los elementos de borde. ....	37
Figura 3.14. Superficie anti-clástica inicial de una Velaria (Adaptada de Lewis 2003). ....	38
Figura 3.15. Idealización de la superficie inicial.....	39
Figura 3.16. Superficie mínima calculada a partir de la malla inicial. ....	39
Figura 3.17. a) Malla en SAP2000 con el caso de carga 1 y b) Tensiones en todos los elementos.....	40
Figura 3.18. Elementos aislados para presentar resultados. ....	41
Figura 3.19. Variación de la tensión en los elementos con la pre-tensión. ....	42
Figura 3.20. Variación de desplazamientos con la pre-tensión. ....	43
Figura 4.1 Sección transversal del modelo G14H1 (adaptado de Álvarez 2012).....	44
Figura 4.2 Malla cónica inicial. ....	45
Figura 4.3. Malla cónica después del análisis de buscador de superficie mínima. ....	46

Figura 4.4. Malla, superficie y sólido 3D CFORM1 .....	46
Figura 4.5. Volumen con espacio vacío para insertar el modelo CFORM1.....	47
Figura 4.6. Características de la estructuración de las mallas de elementos finitos en Ansys Fluent®14.5.....	48
Figura 4.7. Malla de viento y malla de membrana estructural superpuestas.....	48
Figura 4.8. Estructuración de la mallado con elementos finitos del modelo G14H1 .....	49
Figura 4.9. (a) Estructuración del volumen de control, (b) Elemento Solid186, (c) Elemento Solid187.....	50
Figura 4.10. Ubicación de la malla de elementos finitos de la Velaria dentro del volumen de control.....	50
Figura 4.11.Consideraciones para el cálculo de los coeficientes de presión.....	51
Figura 5.1 fluido en movimiento visualizado mediante burbujas de hidrogeno (adaptado de Shapiro 1963) .....	54
Figura 5.2 Manómetros de presión en la entrada y en la reducción del canal (adaptado de Shapiro 1963) .....	55
Figura 5.3 Fuerzas que actúan en una masa unitaria de aire (adaptado de Sordo 2013).....	55
Figura 5.4 Masa de aire que atraviesa un diferencial de área (adaptado de Sordo 2013) ....	56
Figura 5.5. Elemento flexible sometido al flujo del viento. ....	57
Figura 5.6. Zona de interface entre diferentes dominios (adaptada de <i>Zienkiewick 2000</i> ). .	58
Figura 5.7 Volumen de control y dimensiones de la placa.....	61
Figura 5.8. Diagrama de conexiones para un acoplamiento de sistemas en Ansys Workbench. ....	62
Figura 5.9. Ajuste de parámetros en la placa.....	63
Figura 5.10 Malla y zonas del volumen del control. ....	64
Figura 5.11. Aviso de que el programa concluyo las operaciones correctamente.....	66
Figura 5.12. Identificación de los nodos de muestreo. ....	66
Figura 5.13 Presión dinámica y deformación en la placa para diferentes instantes de tiempo. ....	68

Figura 5.14. Historia de la presión dinámica contra el tiempo en diferentes puntos de muestreo en la placa. ....	69
Figura 5.15. Desplazamiento en el tiempo del nodo 12. ....	70
Figura 5.16. Registro de la presión dinámica contra el tiempo. ....	70
Figura 5.17. Esquema de acoplamiento de dominios de los modelos CFORM1 y G14H1 .	71
Figura 5.18. Puntos de muestreo en el modelo CFORM1 .....	74
Figura 5.19. Curvas de presión en el tiempo para el nodo 226, modelo CFORM1 flexible.	74
Figura 5.20. Curvas de presión en el tiempo para el nodo 301, modelo CFORM1 flexible.	75
Figura 5.21. Curvas de presión en el tiempo para el nodo 559, modelo CFORM1 flexible.	75
Figura 5.22 Curvas de presión en el tiempo para el nodo 115, modelo G14H1.....	77
Figura 5.23 Curvas de presión en el tiempo para el nodo 75, modelo G14H1.....	78
Figura 5.24 Curvas de presión en el tiempo para el nodo 155, modelo G14H1.....	78
Figura 5.25. Distribución de la presión estática en el modelo CFORM1 con membrana deformable.....	81
Figura 5.26. Presión estática máxima para los modelos CFORM1 y G14H1.....	81
Figura 5.27. Presión dinámica máxima para los modelos CFORM1 y G14H1. ....	82
Figura 5.28 Coeficientes de presión calculados en $t=0.2$ s para el modelo CFORM1 Flexible .....	83
Figura 5.29 Coeficientes de presión calculados para el modelo CFORM1 rígido.....	84
Figura 5.30 Coeficientes de presión calculados en $t=0.2$ s para el modelo G14H1 flexible	85
Figura 5.31. Coeficientes de presión propuestos para el modelo G14H1 rígido.....	85
Figura 5.32 Coeficientes de presión propuestos en la guía Tensinet (adaptada de Forster y Mollaert 2004 .....	86
Figura 5.33. Desplazamientos máximos de los modelos CFORM1 y G14H1 flexibles. ....	88
Figura 5.34. Esfuerzos de Von Mises máximos para los modelos CFORM1 y G14H1. ....	89



# Resumen

En México, la construcción de Velarias (también conocidas como lonarías o simplemente tenso-estructuras) ha venido en aumento. En los últimos años se ha incrementado su demanda y cada vez es más frecuente su uso en centros comerciales, plazas, lugares de reunión, estacionamientos, etc. Este ejercicio ha progresado prácticamente sin ninguna norma que establezca los criterios mínimos para su análisis, diseño y construcción; evidenciando la ausencia de información en los reglamentos y manuales de construcción del País.

Aquí se presenta, un método matemático que se desarrolló en los años 70's para obtener superficies de tensión en tenso-estructuras. Este método se basa en la idea de definir densidades de fuerza (Fuerza/Longitud) para cada elemento de una tenso-estructura lo que conduce a resolver un sistema lineal de ecuaciones. Resolviendo este sistema lineal de ecuaciones se obtienen todas las coordenadas en el espacio asociadas a una superficie de tensión. Esta tiene la cualidad de asegurar que se presentarán únicamente fuerzas de tensión en los elementos, y que además, estas se distribuirán de manera uniforme. Se caracteriza por ser de fácil programación. De acuerdo a esto, este método puede utilizarse también para determinar la superficie de tensión (o superficie mínima) de una Velaria discretizando la membrana con la que se construye como una malla de elementos. Con el propósito de agilizar la gran cantidad de operaciones que se requieren para obtener estas superficies mínimas, se escribió un algoritmo matemático (Anexo A) en el entorno de programación de Matlab. Siempre a partir de una geometría inicial se propuso una superficie de tensión, como se explica en el Capítulo 3.

Después, se construyeron cuatro modelos analíticos que representan una Velaria anti clástica. Dichos modelos se colocaron dentro de un volumen de control y se sometieron a la acción del viento. Con el objetivo de evaluar los coeficientes de presión se tomó en consideración la interacción fluido-estructura por el método del elemento finito con la ayuda de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento promedio del viento (Navier-Stokes) y de la dinámica computacional de fluidos del programa de análisis de elementos finitos ANSYS. Se tomó en cuenta lo que sucede cuando se tiene una superficie de tensión y su comparación cuando no se le toma en cuenta en un análisis de interacción para una misma Velaria, además de su comportamiento sobre una superficie rígida o indeformable.

Con la ayuda de la dinámica computacional de fluidos, del método de elementos finitos y de algoritmos matemáticos para determinar superficies de tensión, los modelos propuestos fueron analizados, examinados los resultados se presentan conclusiones y recomendaciones incluyendo el algoritmo escrito para evaluar superficies mínimas.

# 1 Introducción

## 1.1 Breve reseña histórica

El uso de las tenso-estructuras probablemente tuvo su origen cuando el hombre llevaba una vida nómada, pues tenía la necesidad de satisfacer el problema de la vivienda. Debido a que no siempre tenía la suerte de encontrar un refugio (como una cueva) que lo resguardara del mal tiempo, tenía la necesidad de un alojamiento que fuera fácil de instalar y desinstalarse en cualquier momento, que pudiera adaptarse al terreno, resistente para aislarlo del mal clima, y que fuera ligera y flexible para poder transportarse sin problemas, además de que los materiales fueran resistentes al mal clima, posiblemente esto fue lo que influyó en él para construir tiendas ligeras que inicialmente, elaboraba con un entramado de palos o ramas, que sujetaba con sogas y que cubría con cuero, paja, lana, materiales tejidos o una combinación de estos.

Un ejemplo de ello fueron los mongoles, que bajo el régimen de su líder Genghis Khan (1162-1227), durante una de sus campañas viajaron la impresionante cantidad de 440 kilómetros en solo tres días, los mongoles eran pueblos nómadas provenientes de las praderas de Mongolia, que para realizar estos recorridos tan grandes, vivían en tiendas portátiles o “yurtas” Figura 1.1, estaban hechas de piel de oveja o telas, y que aún cuando invadían ciudades enteras, éstos se alojaban en las afueras en sus propias tiendas. (Wikipedia.org).

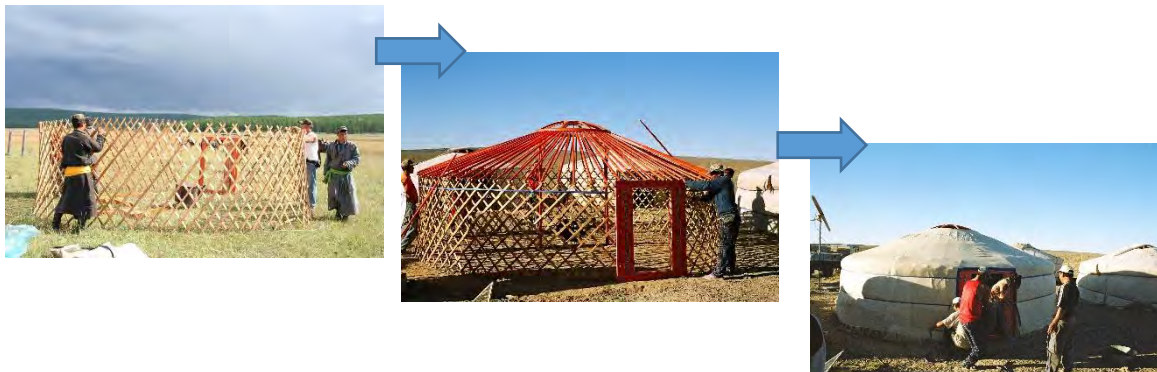


Figura 1.1 Construcción de una **tienda mongola o “yurta”** (adaptado de Wikipedia).



Con el paso de los siglos y el desarrollo de la ingeniería, esta práctica progresó originando la necesidad de cubrir espacios cada vez mayores, como lugares de reunión, salas de conciertos, museos e inclusive estadios; se sustituyó entonces el cuero y la tela por mallas de acero y aquel entramado de palos con sogas, por una estructura metálica bien definida y tensada con cables de acero.



Figura 1.2 Tenso-estructura del pabellón Alemán de 1967 (adaptado de Wikipedia.org)

Aproximadamente en la década de los 50's el Ingeniero-Arquitecto Alemán Frei Otto de la universidad técnica de Berlín concibió el concepto de “**tenso-estructuras**”, estas se caracterizaban porque el sistema de la cubierta estaba hecha con base en una malla de acero que se sujetaba a una estructura principal (de ahí en nombre); a la malla se le fijaba una especie de membrana que se diseñaba para resistir las demandas de presiones provocadas por la acción del viento, como se muestra en la Figura 1.2 el pabellón Alemán de la exposición universal de Montreal de 1967, cubriendo una superficie de  $8,000\text{m}^2$  y su construcción tomo tan solo 6 semanas, otros ejemplos son el estadio para los juegos olímpicos de Múnich de 1972 (Wikipedia.org)

Para encontrar la forma correcta de estas tenso-estructuras, Frei Otto se auxilió de la técnica de la película de jabón, la cual consistía en sumergir los hilos (de una maqueta que construyó simulando los cables de una estructura real) en una solución jabonosa y observando que superficie se creaba. En torno a ésta, logró determinar la configuración de su estructura. Otto observó también que cada vez que cambiaba de posición los hilos, la película de jabón, tomaba una forma diferente adaptándose a la nueva configuración, este efecto sucedía también cuando cambiaba de posición los apoyos; dado que una película de jabón en principio no resiste esfuerzos de compresión y ya que en ese tiempo no existían computadoras con la capacidad de análisis de las que se tiene hoy en día, este fue un recurso sumamente ingenioso para determinar superficies mínimas.

Con el avance de la ciencia de los materiales compuestos, la malla de acero se sustituyó por una membrana textil tejida como la que se muestra en la Figura 1.3 hecha con base en hilos de alta resistencia elaborados de fibras de vidrio, polyester, aramid, etc., *Hexforce (2010)*. En el Capítulo 2 se proporciona información más amplia acerca de las propiedades de las membranas textiles.

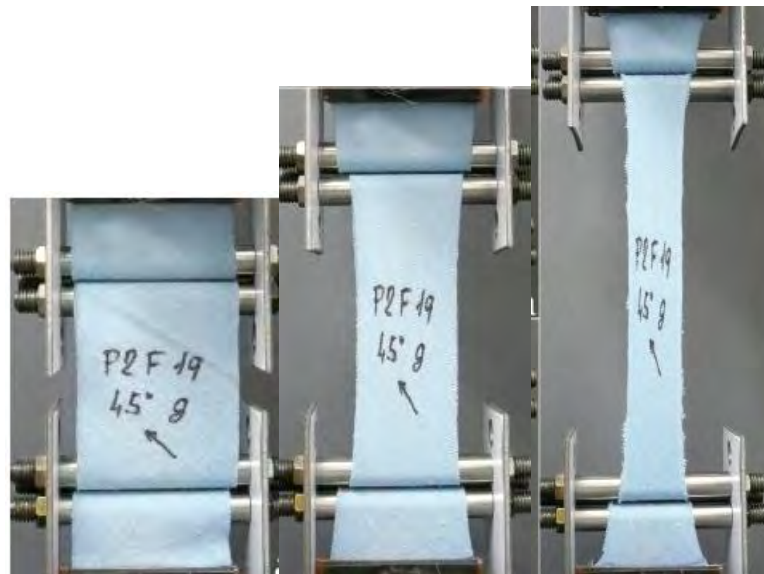


Figura 1.3 Prueba de tensión axial en membranas textiles para obtener su resistencia (adaptada de Kovar 2010).

Probablemente de esta manera se adoptó el nombre de “Velarias” por la similitud de las membranas textiles con las velas de una embarcación; con este avance, surge entonces la nueva era de las tenso-estructuras. Un ejemplo de ello es la Velaria que cubre el patio del Palacio de Minería del Distrito Federal como se muestra en la Figura 1.4.

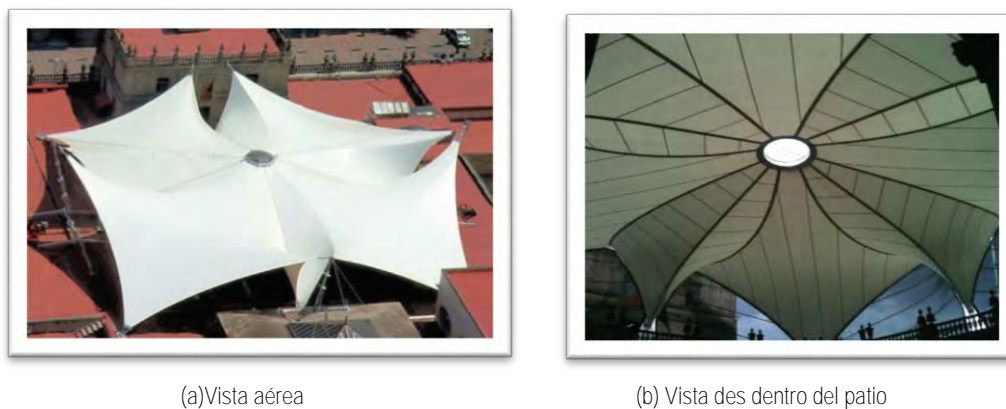


Figura 1.4 Velaria del Palacio de Minería del Distrito Federal. (adaptada de [www.flickr.com](http://www.flickr.com))

## 1.2 Problemática actual del diseño de Velarias en México.

Una de las principales dificultades para el diseño de una Velaria, como se mencionó anteriormente, es la ausencia de información tanto técnica como normativa en la que se definan criterios claros para su análisis, establecer la superficie mínima, factores de carga y resistencia para las membranas, cargas vivas, cargas muertas, cargas dinámicas etc. Aún en los reglamentos de nuestro País como el Manual de Diseño de Obras Civiles (MDOC-08) de la Comisión Federal de Electricidad (CFE) o en las Normas Técnicas Complementarias (NTC-04) del Reglamento de Construcciones del Distrito Federal (RCDF-04) no se encuentran bien definidos estos criterios. Es evidente que la falta de una norma que establezca cuales son los criterios a seguir para encontrar la condición más desfavorable para el cálculo de la distribución de presiones, provoca confusión e incertidumbre entre los diseñadores.

Una de las principales incógnitas que se plantea un ingeniero al diseñar una tenso estructura es resolver el problema de las superficie mínima, y como el trabajo de éste consiste en proponer soluciones adecuadas, eficientes y seguras, realizar un análisis de la forma previo a un análisis estructural debería realizarse desde una perspectiva matemática para garantizar que: 1) Los esfuerzos que se generen en las membranas textiles debido a la acción del viento se distribuyan lo más uniformemente posible, además de que su respuesta ante fuerzas externas produzcan solo esfuerzos de tensión en la membrana (que es la única manera en que esta puede trabajar) y 2) se utilice la menor cantidad posible de materiales. Otra de las incógnitas más importantes es determinar la manera en que afectara el viento a su estructura, este problema se debería de abordar desde un enfoque que permita encontrar la condición más desfavorable, como el de la dinámica computacional de fluidos.

En resumen, la combinación entre la falta de normatividad y la ausencia de métodos para el análisis de superficies mínimas, provocan confusión en el diseñador teniendo como resultado el diseño de estructuras vulnerables y susceptibles a la falla. En una entrevista con la empresa *Tensil Arquitectura* dedicada al diseño y construcción de Velarias, se encontró que en sus diseños se aplicaban cargas de granizo de hasta  $100 \text{ kg/m}^2$ , adicionales a las cargas vivas.

### 1.3 Antecedentes.

A principios de los años 60's comenzaron las primeras investigaciones para el análisis de cubiertas suspendidas hechas de mallas de cables. Métodos basados en la no linealidad de los elementos (cables por ejemplo) como *Siev (1963)* presenta un “método general para el análisis de mallas pre-tensadas” en este tipo de métodos el gran número de iteraciones que se tenían que realizar para encontrar la solución hacia muy difícil de utilizar. Posteriormente *Siev y Eidelman (1964)* presentan un método para “el análisis de esfuerzos de cubiertas suspendidas pretensadas”, casi una década después aparecen los métodos basados en la rigidez geométrica, como el de *Linkwitz y Schek (1972)* desarrolla nuevo método para el “análisis de cubiertas de cable pre-esforzadas y su aplicación en las cubiertas del estadio olímpico de Múnich”. Dos años después, *Schek (1974)* expone un método llamado “densidad de fuerza”, el cual utiliza una simplificación matemática en la que la relación de la fuerza entre la longitud del elemento permanece constante transformando un sistema no lineal de ecuaciones a un sistema lineal, mediante este procedimiento encuentra una superficie mínima. A finales de los años 70's aparecen los métodos para encontrar la superficie mínima basados en la solución de la ecuación de la dinámica como *Barnes (1977)* con el método “iteración Newton-Raphson” o por ejemplo También *Haber & Abel (1982)* presentan “análisis de desplazamiento no lineal”, también *Lewis (2003)* desarrolla el método de la “matriz de rigidez transitoria”. El orden cronológico por aparición de estos métodos según *Veenendaal y Block (2012)* se encuentran en la Figura 1.5

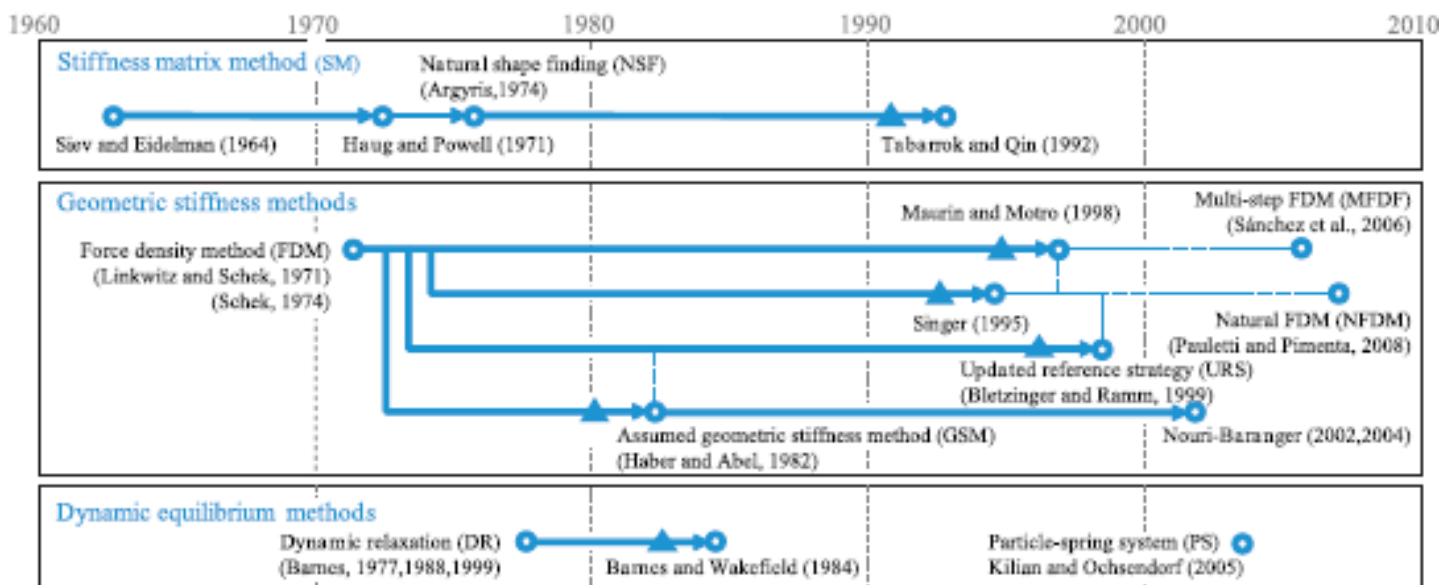


Figura 1.5. Aparición en orden cronológico de diferentes métodos. (adaptada de Veenendaal y Block 2012).

En México, existe poca investigación con respecto al tema de las tenso-estructuras, si se le compara frente a temas como la investigación en la ingeniería sísmica o estructural por mencionar algunas. Investigaciones de tipo interacción fluido-estructura, así como la evaluación de superficies mínimas, cabe mencionar que no se encontró investigación alguna acerca este último en el ámbito nacional; de ahí la importancia de realizar estudios relacionados con el tema.

*Valdés (2007)* estudió la interacción fluido estructura de diferentes formas tomando en cuenta diversos tipos y técnicas de mallado, resaltando de entre ellos los beneficios al utilizar uno u otro enfoque de mallado. *Puerto-Avella (2008)* estudió el comportamiento de una cubierta textil de gran claro incluyendo la no linealidad geométrica, utiliza el criterio del método de la matriz de rigidez transitoria sin realizar un análisis previo de la forma mínima. *Hernández Barrios (2010)* propone un procedimiento simplificado para el análisis dinámico ante cargas eólicas de cubiertas flexibles (Velarias), en el que se presentan dos metodologías para el cálculo de la amplificación de la respuesta estática. *Álvarez (2012)* estudió la acción del viento en modelos rígidos a escala de algunas formas en el túnel de viento de la UAM y utilizó la dinámica computacional de fluidos para construir modelos analíticos de estas mismas formas; sin embargo no consideró interacción fluido-estructura, los modelos de acrílico analizados se colocaron en el piso del túnel, por lo que no se puede apreciar cómo afecta la acción del viento a determinada altura.

En la norma de diseño por viento vigente en México como NTC-04 o el MDOC-08 de la CFE, no se encontraron los criterios para definir el perfil de velocidades del viento sobre este tipo de estructuras, no se emiten recomendaciones para el cálculo de los coeficientes de presión, factores de carga y de resistencia, las cargas estáticas o dinámicas aplicables al diseño de Velarias, ni mención alguna acerca del estudio de la forma mínima.

En la normativa de diseño *ASCE (2013)*, acrónimo de su nombre en el idioma inglés, American Society of Civil Engineers, se presentan varios métodos para el cálculo de los esfuerzos en la membrana, también se hace la aclaración de la dificultad para evaluar las distribuciones de la presión del viento, y que no existe aún metodología para calcular los factores de carga y resistencia para tenso-estructuras.

La guía de diseño europea *Forster y Mollaert (2004)* presentan un documento más completo para el diseño de Velarias, en el que hacen varias recomendaciones para determinar los coeficientes de presión, tipos de materiales para construir Velarias, sus resistencias y demás parámetros, además se emite una propuesta para calcular los coeficientes de presión de Velarias con ciertas geometrías basándose en pruebas experimentales.

La guía de diseño de Viena (*Siedel 2009*) presenta información de los materiales que se utilizan para la construcción de las membranas de las Velarias, proporcionando recomendaciones del proceso de termofusión y montaje, pero sin profundiza en el análisis y diseño.

## 1.4 Objetivo

Estudiar el comportamiento en Velarias considerando la interacción fluido-estructura, teniendo en cuenta el estudio de la superficie mínima.

## 1.5 Metas

Las metas de esta tesis son:

- Investigar las propiedades mecánicas de las membranas utilizadas en la confección de Velarias, tales como: la relación que existe entre el esfuerzo y la deformación, sus esfuerzos límites, espesores, materiales de que están compuestas y sus tipos de tejidos.
- Estudiar y comprender el concepto de la superficie mínima, para su implementación en el planteamiento de los prototipos, ya que es una herramienta importante porque permite realizar el cálculo de superficies óptimas en Velarias.
- Escribir el algoritmo matemático en un lenguaje de programación como herramienta de cálculo para reducir el tiempo de operación requerido en evaluar una superficie mínima, debido a la gran cantidad de operaciones por resolver a partir de ciertas condiciones iniciales.
- Analizar el comportamiento de los prototipos ante la acción del viento en un programa de elementos finitos Ansys, con la ayuda de la dinámica computacional de fluidos utilizando la herramienta para el análisis de sistemas acoplados (interacción fluido-estructura), examinando sus efectos y sus ventajas o desventajas.
- Proponer los diagramas de coeficientes de presión para los diferentes modelos planteados contrastando los resultados.

## 1.6 Organización de la tesis

La organización de la tesis se presenta en seis capítulos:

- El *Capítulo 1* presenta una breve reseña histórica sobre la evolución de las tensoestructuras, una perspectiva de la problemática actual para el diseño de estas estructuras y los antecedentes.
- El *Capítulo 2* presenta la descripción de una serie de propiedades mecánicas relacionadas con las membranas textiles que se utilizan para la confección de Velarias; además se proporciona una breve presentación de los tipos más comunes, la composición de una membrana textil, sus recubrimientos, tipos de tejido, espesores comunes y también se varias relaciones esfuerzo deformación de algunos tipos de membranas. Al final del capítulo se discute una breve revisión de los factores de carga y resistencia que se utilizan en diferentes reglamentos.
- El *Capítulo 3* desarrolla el concepto del FORMFINDING que es una metodología para encontrar superficies mínimas. Se presentan también algunas superficies mínimas obtenidas para diferentes densidades de fuerza. Además se expone el ejemplo de una malla de cables pre-tensados adaptado de *Lewis (2003)*.
- El *Capítulo 4* proporciona recomendaciones para el modelado paramétrico de los prototipos, su estructuración, dimensiones del volumen de control y las consideraciones para el cálculo de los coeficientes de presión.
- El *Capítulo 5* se realiza el cálculo de los coeficientes de presión en un cono considerando los siguientes casos: a) Velaria sometida a un estudio de la forma y en su análisis de presiones se considera la interacción fluido estructura; b) Velaria sin realizarse un estudio de la forma y considerando la interacción fluido estructura; c) Velaria sin considerar el estudio de forma y sin considerar la interacción fluido estructura en el análisis de presiones; d) Velaria considerado el estudio de forma y sin considerar la interacción fluido estructura en el análisis de presiones.
- El *Capítulo 6* se presentan los comentarios, conclusiones y recomendaciones de este trabajo de tesis.
- El *Anexo A* se presenta el algoritmo escrito en el lenguaje de programación de Matlab para evaluar superficies mínimas.

# 2 Tipos de Velarias y membranas textiles.

## 2.1 Velarias.

Un sistema estructural conocido como Velaria está compuesto principalmente por su forma, es decir, de la configuración geométrica que tomará la forma de su superficie, como se muestra en la Figura 2.1. Esta forma de la superficie será determinante para su posterior y correcto análisis.



Figura 2.1. Forma de una Velaria

Después de que se ha propuesto una forma adecuada, una membrana textil con propiedades mecánicas toma el lugar de esta forma para integrar así la superficie como se muestra en la Figura 2.2,





Figura 2.2. Esquema de una superficie de una Velaria cubierta con una membrana textil.

Los elementos restantes que integran el sistema estructural de la Velaria son variables, ya que ésta puede fijarse a una estructura existente; o bien, puede anclarse una estructura de acero mediante cables diseñados especialmente.

### 2.1.1 Definición de Velaria.

Una definición ingenieril para una Velaria es “aquella superficie que cubre una cierta área compuesta por elementos en tensión, ya sea membranas textiles, cables o perfiles de acero” (definición adaptada de *Forster y Mollaert 2004*).

### 2.1.2 Tipos de Velarias.

Existe una gran variedad de formas con las que se pueden construir una Velaria, como se presenta en los esquemas de la Figura 2.3. Aunque, la mayoría de estas formas se pueden construir con dos tipos de superficies, estas son: la superficie anti-clástica y superficie sin-clásticas (*Forster y Mollaert 2004*).



Figura 2.3. Algunos tipos de formas para Velarias. (adaptada de Forster y Mollaert 2004).

### 2.1.3 Superficie Anti-clástica:

O también conocida como doble curvatura invertida; en este tipo de superficies los centros de curvatura en direcciones ortogonales, se encuentran en el lado opuesto a la superficie, creando así la doble curvatura invertida (*Forster y Mollaert 2004*). Por ejemplo, la superficie en color café de la Figura 2.4, al colocarse en el eje “x”, se forma una parábola cóncava hacia el eje “y” (en color rojo) hacia abajo. De igual manera, al situarse en el eje “y”, se observa la parábola que describe la línea verde con una concavidad hacia arriba.

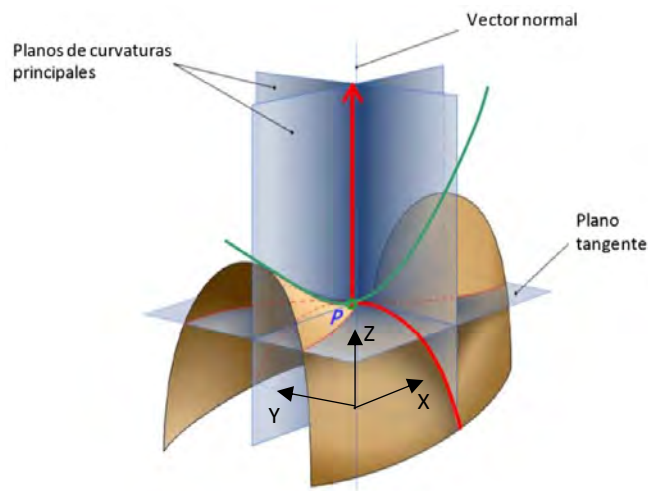


Figura 2.4. Superficie anti-clástica. (Adaptado de Álvarez 2012)

Una superficie hecha por una doble curvatura es resistente a las fuerzas externas más bien por su forma, siendo la superficie en tensión el principal elemento estructural en una Velaria. La forma anti-clástica más básica se conoce comúnmente como forma de silla de montar, como se muestra en la Figura 2.4.

### 2.1.4 Superficie Sin-clástica:

En este tipo de superficie siempre se observa el centro de curvatura del lado opuesto a la superficie, es decir, desde cualquier perspectiva, como se muestra en la Figura 2.5, pues desde cualquier ángulo siempre se observa una sola curvatura.

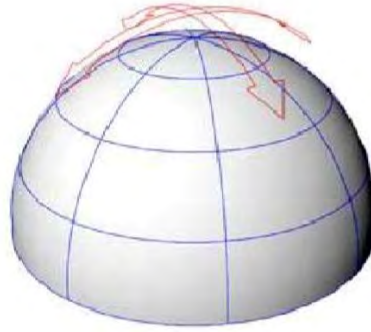


Figura 2.5. Superficie sinclástica. (Adaptado de Álvarez 2012)

## 2.2 Características de las Membranas textiles

### 2.2.1 Componentes de una membrana textil

Las membranas textiles o membranas revestidas que se utilizan comúnmente para la confección de Velarias, son el resultado de la unión de varios materiales con diferentes propiedades que se adhieren o unen para otorgarle cualidades, es decir, es un material compuesto con múltiples propiedades, como por ejemplo, resistencia a la tensión, resistencia al desgarramiento, a las bajas o altas temperaturas, impermeabilidad, resistencia a la flama, adherencia (para la termo fusión cuando se construye), propiedades térmicas, acústicas, transmisión de luz, reflexión de rayos UV, entre otras.

La composición más común de una membrana textil (Figura 2.6) consta de una tela tejida que a su vez está confeccionada por hilos compuestos de fibras de diferentes materiales, que generalmente se reviste en ambos lados por tres capas de diferentes materiales, las dos primeras capas sirven para dar protección y durabilidad a la tela, la tercera capa, que es un lacado, para darle un terminado brillante e impermeabilizarla (*Forster y Mollaert 2004*).

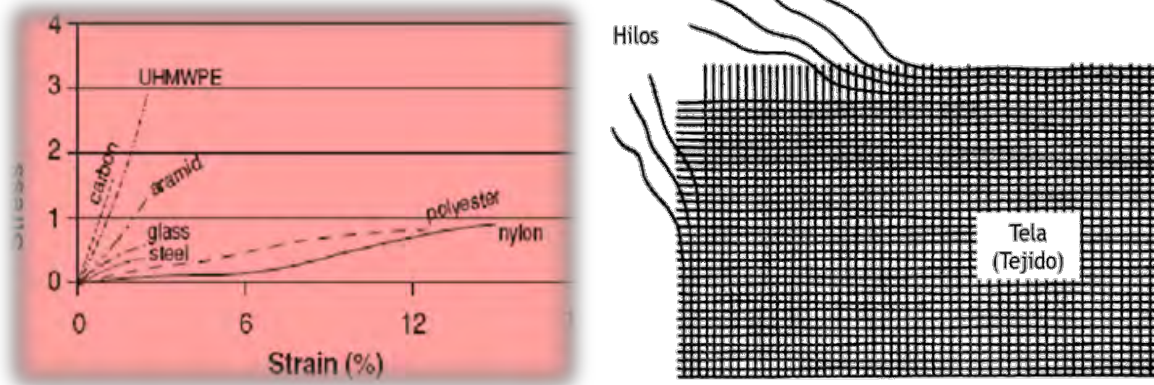


Figura 2.6. Partes de una membrana textil (adaptada de Forster y Mollaert 2004).

La resistencia a tensión o al desgarre de la membrana se proporciona exclusivamente por la tela tejida, que dependerá también de la calidad de los hilos y de la técnica de tejido, los recubrimientos no proporcionan ninguna resistencia y pueden ser de poliéster plastificado con cloruro de polivinilo (PVC) y de fibra de vidrio plastificada con (PTFE). El PVC se une a las fibras de la tela con máquinas de alta frecuencia, es barata y la vida útil de la membrana es de 15 años aproximadamente. El PTFE es un material más caro y delicado, pero brinda una duración a las membranas entre veinte y veinticinco años. El segundo recubrimiento proporciona protección al primero y puede ser de PVC o PTFE, el tercer recubrimiento es un sello que proporciona el acabado y la impermeabilización de la membrana como se mencionó con anterioridad.

### 2.2.2 Hilo de soporte.

El hilo con el que se teje la tela, que es la base de la membrana, está hecho de una serie de filamentos entrelazados que pueden ser de diferentes materiales como, fibra de vidrio, fibra de carbono, poliéster, nylon, teflón, aramidas, Kevlar, LCP (liquid cristal polymers), vectran, etc. (*Hexforce 2010*). En la Figura 2.7 (a) se muestran las gráficas de las relaciones esfuerzo-deformación para diferentes materiales, al parecer el material que posee un mejor comportamiento es la fibra de aramidas pero esta no es comúnmente utilizada debido a su alto costo, lo que hace incosteable la confección de una Velaria, al parecer la fibra de vidrio es la mejor opción ya que su bajo costo de producción y su relación esfuerzo deformación satisfactoria, permiten que sea rentable la fabricación de la membrana. El carbón como se puede ver no es el mejor material, si bien admite un mayor esfuerzo, no permite una deformación unitaria más allá del 1% , en contraste por ejemplo, con el polyester o el nylon que permiten una gran deformación con un menor nivel de esfuerzo.



(a) Relaciones esfuerzo-deformación de diferentes materiales

(b) Elementos que componen una membrana

Figura 2.7 Relación esfuerzo-deformación de diferentes materiales y esquema de los elementos que componen una membrana.

Con base en este hilo y a partir de una serie de diferentes técnicas de tejido se construye la tela de base que se recubrirá con tres capas de diferentes materiales para formar la membrana textil.

### 2.2.3 Hilo de urdimbre e hilo de trama

En la etapa del tejido, que es la etapa en la que se conforma la tela de base, se derivan dos conceptos que son de gran influencia en la manera de trabajar de una membrana, estos son: el hilo de urdimbre (en Inglés warp) y el hilo de trama (en Inglés weft), respectivamente. Básicamente se llama “de urdimbre” a los hilos que van rectos y sin ninguna ondulación, se denominan hilos “de trama” (en negro en la Figura 2.11) a los hilos perpendiculares a los de urdimbre, pero que van entrecruzando o entretejiendo como se muestra en la Figura 2.8.

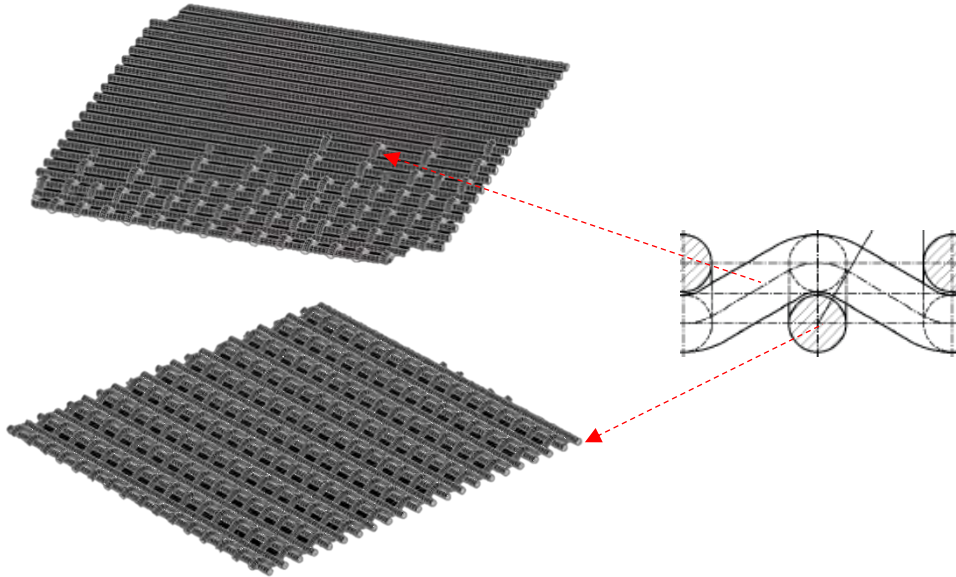
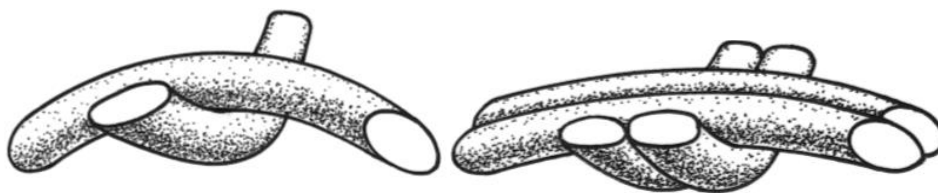


Figura 2.8. Hilo de urdimbre e hilo de trama. (adaptado de Kovar (2010)).

#### 2.2.4 Tipos de tejido

Es importante conocer la técnica de tejido, ya que éste determinara la manera en que trabajan las membranas textiles. Existen diferentes tipos de tejido, denominados en inglés como: “*Plain Weave*”, “*Basket Weave ó Panama*”, “*Satin Weave*” o “*Twill Weave*”, entre otras. De estas técnicas, las dos primeras son las se utilizan comúnmente en membranas textiles (*HexForce 2010*).



(a) Detalle de tejido plain wave

(b) detalle de tejido basket o panamá

Figura 2.9. Detalle del tipo de tejido (adaptado de Forster y Mollaert 2004).

Los tejidos tipo **“Plain weave”** (Figura 2.10) muestran una buena estabilidad y un nivel bajo de deslizamiento (*Hexforce 2010*), además son membranas más ligeras debido a que utilizan un hilo en cada sentido, esta técnica se recomienda para usarse en cubiertas que serán planas.

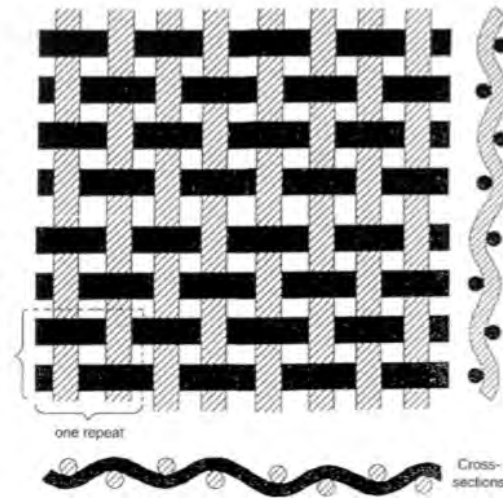


Figura 2.10. Tela tejida tipo Plain Wave. (adaptado de Forster y Mollaert 2004)

El tejido tipo canasta o panamá (Figura 2.11) es una variación de la tipo **“plain weave”** y se caracteriza porque tiene dos o más hilos en el sentido de la urdimbre y en la trama.

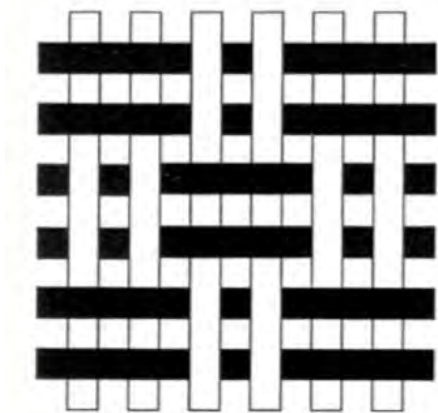


Figura 2.11 Tejido tipo **“Basket o Panamá”** (adaptado de Forster y Mollaert 2004).

### 2.2.5 Propiedades mecánicas de una membrana.

La magnitud del módulo de elasticidad no se encuentra establecido explícitamente en el catálogo de membranas del fabricante. Estos valores deben determinarse de acuerdo a las pruebas de tensión biaxial aplicadas a las membranas, dependiendo del comportamiento en las direcciones urdimbre y trama (*Technet 2010*). Existen múltiples fabricantes de membranas, estos presentan en sus manuales las pruebas que realizan a sus productos. En la se presentan relaciones de esfuerzo deformación de la prueba de tensión biaxial para diferentes membranas estructurales.

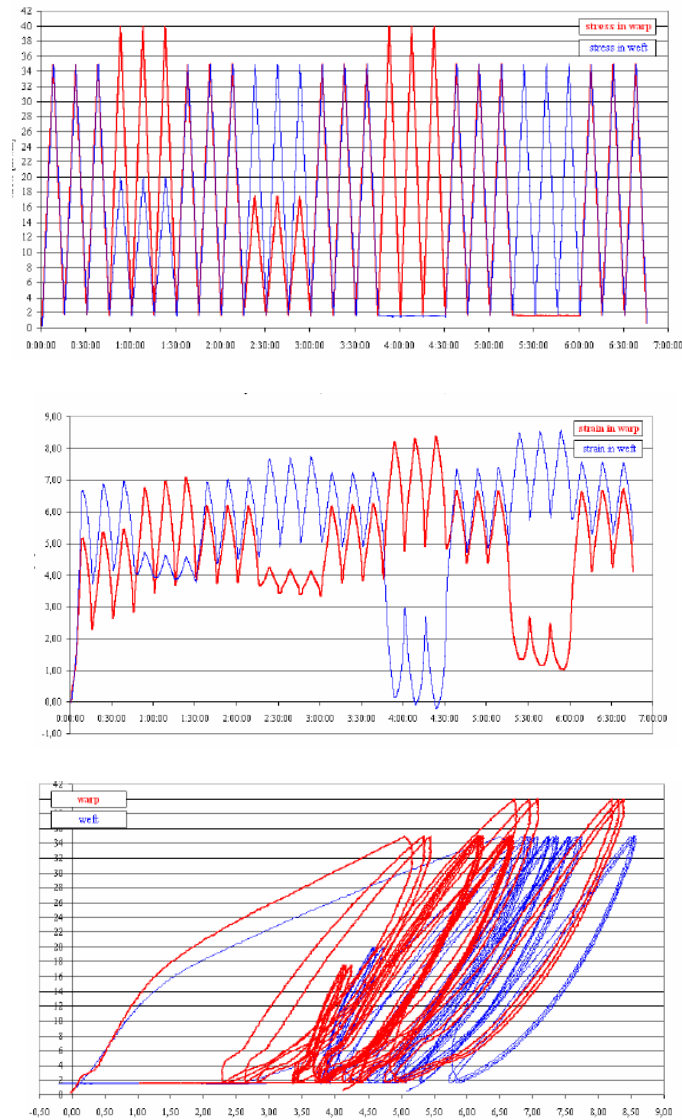


Figura 2.12. Relación esfuerzo deformación de una membrana estructural (adaptada de Laboratorium Blum GmbH Stuttgart 2010).



El comportamiento de la membrana de las gráficas que se presentan en la Figura 2.12 corresponden a las de una prueba de tensión biaxial aplicada en una membrana estructural de la marca Ferrari modelo Preconstraint 1302, las cuales fueron realizadas en los laboratorios Blum GmbH de Stuttgart ([www.labor-blum.de](http://www.labor-blum.de)), la cual alcanza un valor máximo de esfuerzo de  $\sigma=40$  KN/m en la dirección de urdimbre, mientras que para la dirección de trama se alcanza un valor de  $\sigma=35$  KN/m

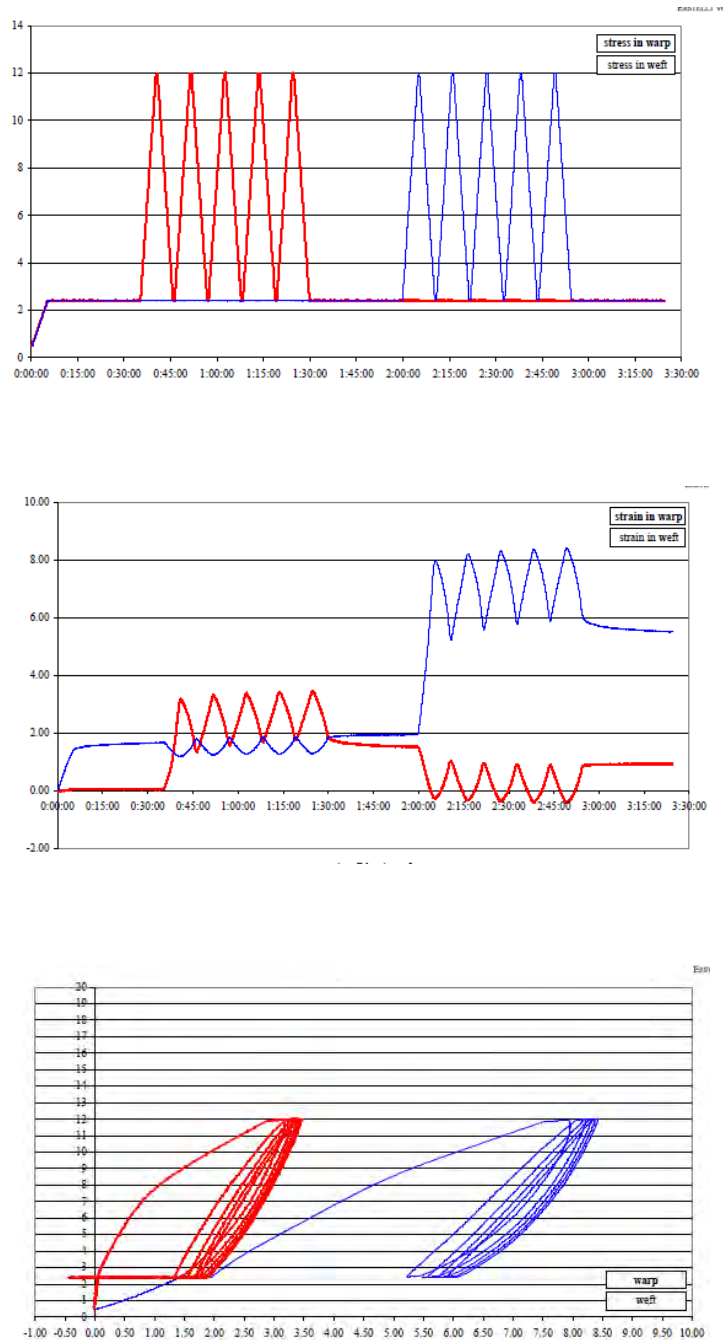


Figura 2.13. Relación esfuerzo deformación para una membrana estructural. (adaptada de Laboratorium Blum Stuttgart 2010).

Note que el material (membrana) presenta un comportamiento diferente en sentidos ortogonales; es decir, tiene diferentes esfuerzos y deformaciones unitarias cuando se le aplica tensión tanto en la dirección de tejido urdimbre, como en el sentido trama, la mayoría de las membranas estructurales normalmente alcanzan un nivel más alto de esfuerzo en la dirección urdimbre, así como un mayor módulo de elasticidad, también en este sentido se tiene menos susceptibilidad al desgarre (*Technet 2010*).

### 2.2.6 Resistencias estándar.

Esencialmente, existen cinco tipos de membranas pre-establecidas en la norma francesa (French Design Guide) y en la norma alemana (WG Messe Frankfurt), y que son aceptadas actualmente por los diferentes fabricantes de membrana, en estas normas se sugieren las características mínimas que se deben de garantizar en una membrana tales como: la resistencia a tensión, desgarre, espesores, peso, número mínimo de hilos, etc. En la Figura 2.14 se presentan estos límites para membranas con recubrimiento de PVC, por ejemplo, para una membrana tipo 1 la guía de diseño francesa propone un peso de 720 gramos/m<sup>2</sup>, mientras que la norma alemana propone 800 gramos/m<sup>2</sup>, un esfuerzo mínimo de 60KN/m en urdimbre y 60KN/m en trama en ambas normas (*Forster y Mollaert 2004*).

Tipo de membrana/ Características	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4	Tipo 5
Peso de las membranas: g/m <sup>2</sup>					
Guía de Diseño Francesa	720	1000	1200	1400	2000
Guía de Diseño Alemana	800	900	1050	1300	1450
Talla del hilo (dtex)					
Guía de Diseño Francesa					
Guía de Diseño Alemana	1100	1100	1670	1670	2200
Tension Maxima warp/weft (KN/m)					
Guía de Diseño Francesa	60/60	84/80	110/104	120/130	160/170
Guía de Diseño Alemana	60/60	88/79	115/102	149/128	196/166
Prueba trapezoidal warp/weft (N)					
Guía de Diseño Francesa					
Guía de Diseño Alemana	310/350	520/580	800/950	1100/1400	1600/1800
Numero de hilos por cm warp/weft					
Guía de Diseño Francesa					
Guía de Diseño Alemana	9/9	12/12	10.5/10.5	14/14	14/14

Figura 2.14 Resistencias estándar para membranas (adaptado de Forster y Mollaert 2004).

# 3 Buscador de forma

## 3.1 Introducción.

Un sistema estructural se debe diseñar para adaptarse eficazmente al proyecto arquitectónico, por ejemplo, si lo que se requiere es librar un gran claro, lo más seguro es que se utilice un sistema de armaduras ya que ese sistema tiene la propuesta más ligera porque utiliza el menor número de elementos con la menor cantidad de materiales. Otro ejemplo es un edificio donde se deben limitar las distorsiones de entrepiso, un sistema estructural de marcos resistentes a momento posiblemente sea el más adecuado; de manera análoga en una tenso-estructura debe de buscarse la superficie adecuada y que se adapte al proyecto.

En la estructuración de edificios existen ciertos sistemas ya previamente establecidos, tales como: marcos contraventeados concéntrica y excéntrica, marcos especiales resistentes a momento, muros de cortante, etc., estos sistemas están perfectamente adaptados para que la solución del proyecto sea lo más eficiente posible. Para el caso de una tenso-estructuras, dichos sistemas no están usualmente bien establecidos, por lo tanto, el diseñador realiza un proceso conocido como “Buscador de Forma”, en Inglés Form-Finding, (*Lewis 2003*). Este proceso es el equivalente a la estructuración del edificio ya que se busca la configuración más adecuada y que sea lo más eficiente posible.

Para realizar el análisis estructural de una tenso-estructura, primero se tiene que definir de qué tipo será (anti-clástica o sin-clástica), después aplicar el proceso de Buscador de Forma, que debe tener como resultado una forma mínima (la menor cantidad de material); posteriormente, determinar la distribución de la presión del viento sobre ésta, y calcular los esfuerzos máximos en la membrana.

### 3.2 Superficies mínimas.

El proceso mediante el cual se determina la superficie de la estructuras en tensión es comúnmente conocido como Buscador de Forma (*Forster y Mollaert 2004*). Se puede decir, que el este procedimiento equivale a evaluar matemáticamente la superficie que se genera dentro de los límites mostrados en la Figura 3.1(a), donde la película de jabón toma naturalmente la estructura de una superficie anti-clástica, con una doble curvatura invertida. Esta película de jabón tiene en la superficie de sus curvas, la trayectoria necesaria para contener la menor cantidad de material, en tanto los límites se mantengan la superficie permanecerá sin cambio, entonces por naturaleza la forma que se moldee o se configure dentro de estos límites, será una superficie mínima. Si estos límites o bordes cambian, la superficie cambiara adaptándose a éstos, siempre formando naturalmente una superficie mínima y óptima, la cual estará sujeta a una tensión uniforme en toda su superficie.

Por definición, si la distancia mínima que une dos puntos es una línea recta, por ejemplo la que une el punto "A" con el punto "B" de la Figura 3.1(b). Esta distancia es la longitud mínima necesaria para unir estos dos puntos. Por otro lado, la curva mínima necesaria para unir estos dos mismos puntos será el segmento de arco que se intersecta entre ellos (segmento AB), por lo tanto, una curva mínima es aquella que tiene la menor longitud necesaria para unir dos puntos.

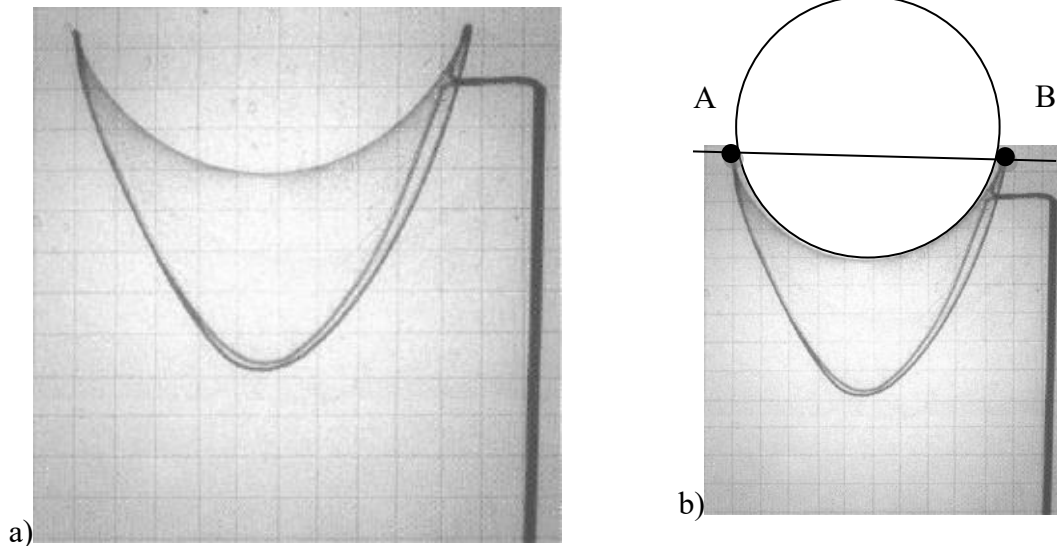


Figura 3.1. a) Forma silla de montar y superficie mínima de una película de jabón y b) distancia mínima y curva mínima (adaptado de Lewis, 2003).

### 3.3 Procedimiento para evaluar superficies mínimas o buscador de forma.

Para el cálculo de superficies mínimas se han desarrollado diferentes métodos, cada uno con diferentes enfoques, tales como: el método de la densidad de fuerza, la relajación dinámica o el método de la matriz de rigideces transitoria (*Veenendaal 2012*) entre otros. En este trabajo sólo se trata el método de la “densidad de fuerza”, el cual tiene su origen como respuesta a las necesidades de diseño de estructuras complejas como la del estadio olímpico de Múnich (*Lewis 2003*).

#### 3.3.1 Método de Densidad de fuerza: principios básicos.

Considerando la superficie de una membrana textil, ésta se plantea como una malla de segmentos rectos interconectados entre sí mediante nodos (similar a una malla o red) como se muestra en la Figura 3.2, aislando de ésta un nodo al azar e identificándolo con la letra “*i*”. Este se conecta con los cuatro elementos “*a*”, “*b*”, “*c*”, “*d*”, cuyas longitudes “*L<sub>a</sub>*”, “*L<sub>b</sub>*”, “*L<sub>c</sub>*” y “*L<sub>d</sub>*”, están dadas por las ecuaciones (3-1) a (3-4), estos elementos a su vez se conectan a los nodos “*l*”, “*m*”, “*j*”, “*k*”, respectivamente, en el extremo (*Technet 2010*).

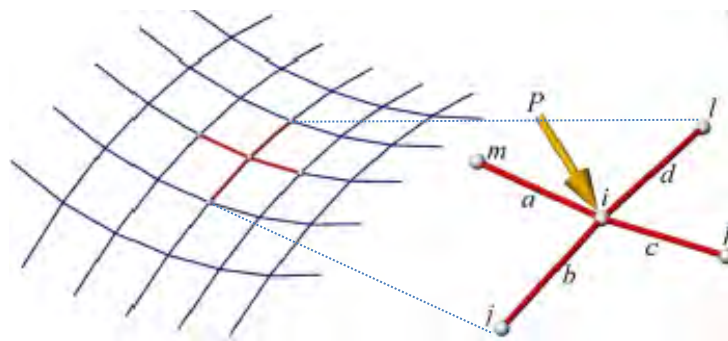


Figura 3.2. Membrana textil representada como una malla (adaptado de Technet, 2010)

$$L_a = \sqrt{(x_m - x_i)^2 + (y_m - y_i)^2 + (z_m - z_i)^2} \quad (3-1)$$

$$L_b = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (3-2)$$

$$L_c = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2} \quad (3-3)$$

$$L_d = \sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2 + (z_l - z_i)^2} \quad (3-4)$$

La fuerza  $\mathbf{P}$  que actúa en un nodo “ $i$ ”, es un vector tridimensional que se puede expresar en términos de sus componentes de fuerza “ $P_x$ ”, “ $P_y$ ” y “ $P_z$ ”, ecuación (3-5), como se muestra en la Figura 3.3.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \quad (3-5)$$

La magnitud de  $\mathbf{P}$ , se obtiene con la raíz de la suma de los cuadrados de sus componentes, por lo tanto:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \quad (3-6)$$

La dirección de la resultante  $\mathbf{P}$  se determina mediante sus cosenos directores (Figura 3.3)

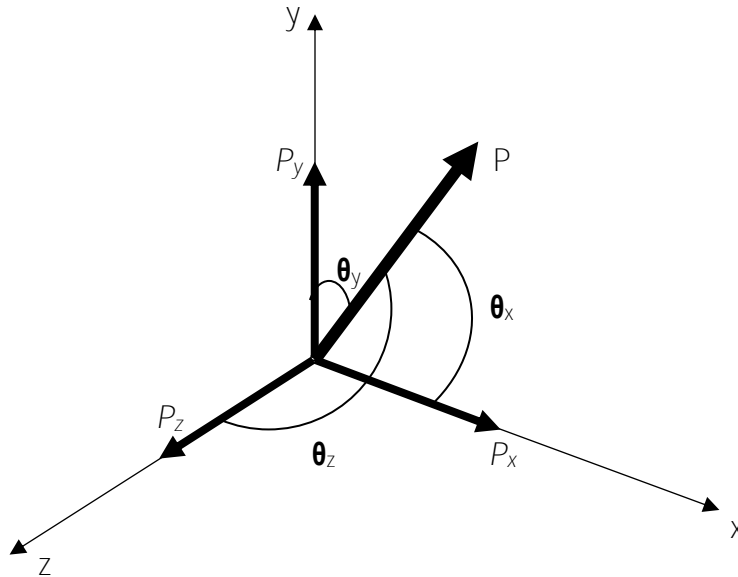


Figura 3.3. Diagrama de cosenos directores y componentes de la fuerza resultante P.

Al Realizar el equilibrio del nodo “i” (Figura 3.2), llevando a cabo una sumatoria de fuerzas;  $\vec{P} = \vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c + \vec{F}_d$  esta deben ser igual a cero; este equilibrio se expresa en términos de sus componentes en las ecuaciones (3-7), (3-8) y (3-9):

$$P_x = F_a \cdot \cos(\theta_{xa}) + F_b \cdot \cos(\theta_{xb}) + F_c \cdot \cos(\theta_{xc}) + F_d \cdot \cos(\theta_{xd}) \quad (3-7)$$

$$P_y = F_a \cdot \cos(\theta_{ya}) + F_b \cdot \cos(\theta_{yb}) + F_c \cdot \cos(\theta_{yc}) + F_d \cdot \cos(\theta_{yd}) \quad (3-8)$$

$$P_z = F_a \cdot \cos(\theta_{za}) + F_b \cdot \cos(\theta_{zb}) + F_c \cdot \cos(\theta_{zc}) + F_d \cdot \cos(\theta_{zd}) \quad (3-9)$$

Reemplazando los cosenos directores por la proyección de los elementos normalizada entre su longitud total (*Lewis 2003*).

$$\begin{aligned} \cos(\theta_{xa}) &:= \frac{x_m - x_i}{L_a} & \cos(\theta_{xb}) &:= \frac{x_j - x_i}{L_b} & \cos(\theta_{xc}) &:= \frac{x_k - x_i}{L_c} & \cos(\theta_{xd}) &:= \frac{x_l - x_i}{L_d} \\ \cos(\theta_{ya}) &:= \frac{y_m - y_i}{L_a} & \cos(\theta_{yb}) &:= \frac{y_j - y_i}{L_b} & \cos(\theta_{yc}) &:= \frac{y_k - y_i}{L_c} & \cos(\theta_{yd}) &:= \frac{y_l - y_i}{L_d} \\ \cos(\theta_{za}) &:= \frac{z_m - z_i}{L_a} & \cos(\theta_{zb}) &:= \frac{z_j - z_i}{L_b} & \cos(\theta_{zc}) &:= \frac{z_k - z_i}{L_c} & \cos(\theta_{zd}) &:= \frac{z_l - z_i}{L_d} \end{aligned}$$

Sustituyendo los cosenos directores en las ecuaciones (3-7), (3-8) y (3-9) tenemos:

$$0 = \frac{F_a}{L_a} \cdot (x_m - x_i) + \frac{F_b}{L_b} \cdot (x_j - x_i) + \frac{F_c}{L_c} \cdot (x_k - x_i) + \frac{F_d}{L_d} \cdot (x_l - x_i) + P_x \quad (3-10)$$

$$0 = \frac{F_a}{L_a} \cdot (y_m - y_i) + \frac{F_b}{L_b} \cdot (y_j - y_i) + \frac{F_c}{L_c} \cdot (y_k - y_i) + \frac{F_d}{L_d} \cdot (y_l - y_i) + P_y \quad (3-11)$$

$$0 = \frac{F_a}{L_a} \cdot (z_m - z_i) + \frac{F_b}{L_b} \cdot (z_j - z_i) + \frac{F_c}{L_c} \cdot (z_k - z_i) + \frac{F_d}{L_d} \cdot (z_l - z_i) + P_z \quad (3-12)$$

Para transformar un sistema no-lineal de ecuaciones a un sistema lineal (**Lewis 2003**), se cambian los términos que relacionan la fuerza entre la longitud del elemento por un término que permanece constante,  $q_a=F_a/L_a$ ,  $q_b=F_b/L_b$ ,  $q_c=F_c/L_c$  y  $q_d=F_d/L_d$  se sustituyen en las ecuaciones (3-10), (3-11) y (3-12) quedando:

$$0 = q_a \cdot (x_m - x_i) + q_b \cdot (x_j - x_i) + q_c \cdot (x_k - x_i) + q_d \cdot (x_l - x_i) \quad (3-13)$$

$$0 = q_a \cdot (y_m - y_i) + q_b \cdot (y_j - y_i) + q_c \cdot (y_k - y_i) + q_d \cdot (y_l - y_i) \quad (3-14)$$

$$0 = q_a \cdot (z_m - z_i) + q_b \cdot (z_j - z_i) + q_c \cdot (z_k - z_i) + q_d \cdot (z_l - z_i) \quad (3-15)$$

Factorizando “ $x_i$ ”, “ $y_i$ ”, “ $z_i$ ” de las ecuaciones (3-13), (3-14) y (3-15) y agrupando los términos quedan las expresiones:



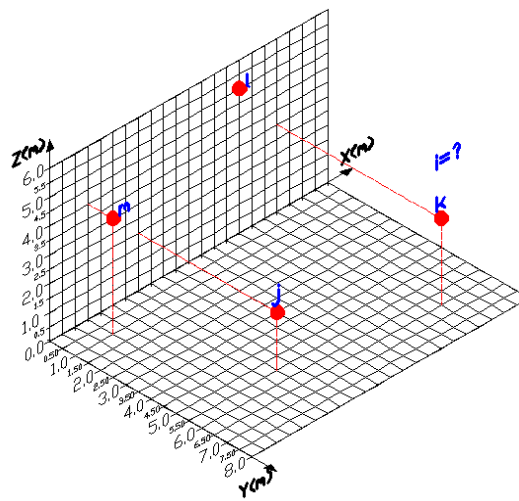
$$0 = -(q_a + q_b + q_c + q_d) \cdot x_i + q_a \cdot x_a + q_b \cdot x_b + q_c \cdot x_c + q_d \cdot x_d \quad (3-16)$$

$$0 = -(q_a + q_b + q_c + q_d) \cdot y_i + q_a \cdot y_a + q_b \cdot y_b + q_c \cdot y_c + q_d \cdot y_d \quad (3-17)$$

$$0 = -(q_a + q_b + q_c + q_d) \cdot z_i + q_a \cdot z_a + q_b \cdot z_b + q_c \cdot z_c + q_d \cdot z_d \quad (3-18)$$

De las ecuaciones (3-16), (3-17) y (3-18) se puede obtener la coordenada del nodo libre “i” para la cual el sistema de cuatro elementos obtendrán una configuración que le permita a los elementos estar sometidos únicamente en tensión, es decir, dando valores a las coordenadas de los nodos fijos “x<sub>a</sub>”, “x<sub>b</sub>”, “x<sub>c</sub>”, “x<sub>d</sub>”, “y<sub>a</sub>”, “y<sub>b</sub>”, “y<sub>c</sub>”, “y<sub>d</sub>”, “z<sub>a</sub>”, “z<sub>b</sub>”, “z<sub>c</sub>”, “z<sub>d</sub>”, se obtiene la posición del nodo “i” para la cual solo se producen esfuerzos de tensión en los elementos “a”, “b”, “c”, “d”.

Por ejemplo, considerando como fijos los nodos “j”, “k”, “l” y “m” de la Figura 3.4 se puede observar que estos deben conectarse en algún punto en el espacio, para encontrar la configuración más simple de una estructura formada por cuatro elementos y si las coordenadas de los nodos fijos son conocidas, el problema de la forma mínima se reduce a encontrar la coordenada del nodo “i”.



	x	y	z
nodo j	3.5	5.5	2.0
nodo k	9.0	6.5	3.0
nodo l	7.5	0.0	5.0
nodo m	1.5	1.0	4.0

Figura 3.4. Coordenadas de los nodos fijos.

Con las ecuaciones (3-16), (3-17) y (3-18) se pueden calcular las coordenadas del nodo “*i*” para obtener una geometría con la cual, todos los elementos involucrados solo estarán sometidos a esfuerzos de tensión cuando se aplique una fuerza en dicho nodo. Sustituyendo los valores de las coordenadas de los nodos fijos “*j*”, “*k*”, “*l*”, y “*m*”, indicadas en la Figura 3.4 y considerando una densidad de fuerza ( $q = L^{-1}f = 1$ ) para todos los elementos, entonces sustituyendo valores:

$$0 = -((1 + 1 + 1 + 1)) \cdot x_i + (1) \cdot (1.5) + (1) \cdot (7.5) + (1) \cdot (3.5) + (1) \cdot (9.0) \quad (3-19)$$

$$0 = -(1 + 1 + 1 + 1) \cdot y_i + (1) \cdot (1.0) + (1) \cdot (0.0) + (1) \cdot (5.5) + (1) \cdot (6.5) \quad (3-20)$$

$$0 = -(1 + 1 + 1 + 1) \cdot z_i + (1) \cdot (4.0) + (1) \cdot (5.0) + (1) \cdot (2.0) + (1) \cdot (3.0) \quad (3-21)$$

Después de sustituir, resolver y despejar “*x<sub>i</sub>*”, “*y<sub>i</sub>*”, “*z<sub>i</sub>*”, de las ecuaciones (3-19) (3-20) y (3-21), las coordenadas en metros del nodo libre son:

$$x_i := 5.375$$

$$y_i := 3.25$$

$$z_i := 3.5$$

Graficando estas coordenadas calculadas, la configuración para esta estructura sería como la que se muestra en la Figura 3.5, no es necesario (para este caso) contar con una forma inicial por tratarse de un simple nodo unido por cuatro elementos; sin embargo, para estructuras de más de un nodo si será necesario contar con una forma inicial o forma de referencia a partir de la cual se realizará el análisis de buscador de forma.

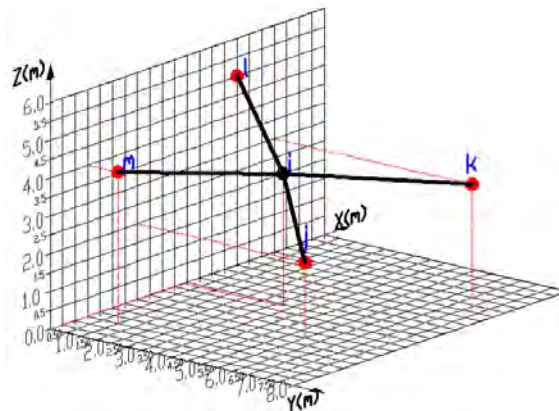


Figura 3.5. Coordenada calculada del nodo “*i*”.

La forma mínima no es única, como la que se muestra en la Figura 3.5, ya que existen un sin fin de posiciones del nodo “*i*” para las cuales los elementos estarían sometidos a esfuerzos de tensión, para este ejemplo, es muy obvia dicha posición pero para estructuras más complejas o con más de tres nodos determinar esta posición a simple vista no es sencillo (*Lewis 2003*).

### 3.3.2 Densidad de fuerza matricial.

Actualmente, no es necesario realizar estos cálculos manualmente, ya que existe un método matricial fácil de programar desarrollado por *Schek (1974)*, este método caracterizado por encontrar superficies mínimas a partir de una superficie inicial como una malla y a partir de ésta se calculan las diferentes superficies dependiendo de su condición de apoyo y de la densidad de fuerza que se le otorgue a los diferentes elementos, una de sus principales ventajas consiste en el hecho de que cualquier sistema puede analizarse por un sistema lineal de ecuaciones (*Lewis 2003*), y también por su facilidad para escribirse en un algoritmo matemático que auxilie la resolución de ecuaciones.

Considerando la estructura de la Figura 3.6, adaptada de *Schek (1974)*, la numeración de los elementos se encuentra encerrado por un círculo (un total de 12 elementos), mientras que la numeración de nodos se presenta sin encerrar (un total de 9 nodos).

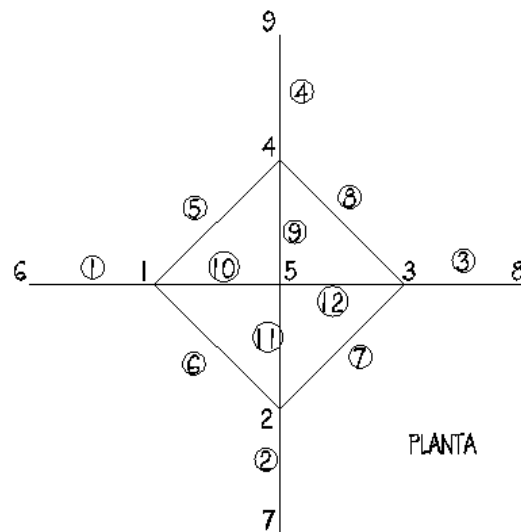


Figura 3.6. Forma inicial de una estructura (adaptada de Schek 1974).

Considerando fijos los nodos “6”, “7”, “8” y “9” de la Figura 3.6, el primer paso consiste en ensamblar la matriz  $[C_s]$  denominada “ramificación de nodo” (Argyris 1964), la cual contiene toda la información acerca de las conectividades de la estructura, con un tamaño del número de elementos por número de nodos, “ $n \times nn$ ”. Cada elemento tiene un extremo cercano “ $i$ ” y uno lejano “ $k$ ” como se muestra en la Figura 3.7.

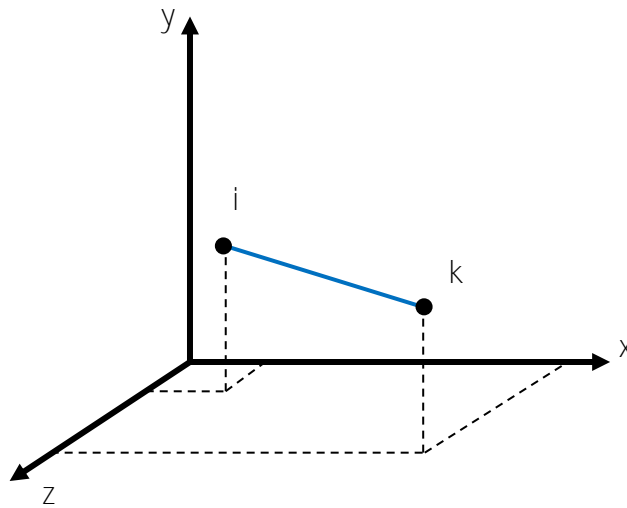


Figura 3.7. Extremos “ $i$ ” y “ $k$ ” del elemento.

Para ensamblar la matriz de conectividades  $[C_s]$ , se asigna un número -1 a cada nodo en el extremo “ $k$ ” de cada elemento, y un +1 a cada nodo en el extremo “ $i$ ”, cero si no existe conexión. Para interpretar el contenido en la matriz ramificación de nodo esta se puede dividir en dos matrices,  $[C]$  y  $[C_f]$ , donde la matriz  $[C]$  contiene todas las conectividades de los nodos libres o nodos que no son fijos, y  $[C_f]$  contiene las conectividades de los nodos que son fijos, la división de la matriz  $[C_s]$  quedaría de la siguiente manera (Schek 1974):

Nodos

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9} \\
 \left. \begin{array}{c}
 C_S = \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix} \\
 C \qquad C_f
 \end{array} \right\} \text{Elementos}
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -1
 \end{pmatrix} \\
 C
 \end{array}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 6 \ 7 \ 8 \ 9 \\
 \begin{pmatrix}
 -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix} \\
 C_f
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 3.8 Matriz de conectividades  $[C_S] = [C] + [C_f]$ .

Las coordenadas  $u$ ,  $v$ ,  $w$  de los puntos conectados se obtienen multiplicando la matriz de conectividades por los vectores de los nodos libres  $x$ ,  $xf$ ,  $y$ ,  $yf$ ,  $z$ ,  $zf$  de la siguiente manera:

$$u = C \cdot x + C_f \cdot xf \quad (3-22)$$

$$v = C \cdot y + C_f \cdot yf \quad (3-23)$$

$$w = C \cdot z + C_f \cdot zf \quad (3-24)$$

Del equilibrio con las fuerzas externas aplicadas en cada nodo, utilizando la transformación Gaussianas e introduciendo el concepto de densidad de fuerza ( $q = L^{-1}s$ ) por medio de la matriz diagonal  $[Q]$ , que es una matriz que contiene todas las densidades de fuerza especificadas para cada elemento, se llega a las siguientes ecuaciones (*Schek 1974*):

$$Px = C^T \cdot Q \cdot C \cdot x + C^T \cdot Q \cdot Cf \cdot xf \quad (3-25)$$

$$Py = C^T \cdot Q \cdot C \cdot y + C^T \cdot Q \cdot Cf \cdot yf \quad (3-26)$$

$$Pz = C^T \cdot Q \cdot C \cdot z + C^T \cdot Q \cdot Cf \cdot zf \quad (3-27)$$

Donde:

$Px$  = componente en la dirección  $x$  de la fuerza externa;

$Py$  = componente en la dirección  $y$  de la fuerza externa;

$Pz$  = componente en la dirección  $z$  de la fuerza externa;

$C$  = Matriz de conectividades de los nodos libres;

$Cf$  = Matriz de conectividades de los nodos fijos;

$x$  = Vector de coordenadas de los nodos libres en la dirección  $x$ ;

$y$  = Vector de coordenadas de los nodos libres en la dirección  $y$ ;

$z$  = Vector de coordenadas de los nodos libres en la dirección  $z$ ;

$xf$  = Vector de coordenadas de los nodos fijos en la dirección  $x$ ;

$yf$  = Vector de coordenadas de los nodos fijos en la dirección  $y$ ;

$zf$  = Vector de coordenadas de los nodos fijos en la dirección  $z$ ;

$Q$  = Matriz diagonal de densidades de fuerza;

Para simplificar las ecuaciones (3-25) (3-26) y (3-27) realiza un cambio de variable tal que  $D = C^T Q C$  y  $Df = C^T Q Cf$ , quedando las expresiones siguiente:

$$Px = D \cdot x + Df \cdot xf \quad (3-28)$$

$$Py = D \cdot y + Df \cdot yf \quad (3-29)$$

$$Pz = D \cdot z + Df \cdot zf \quad (3-30)$$

Despejando los vectores  $x$ ,  $y$ , y  $z$  correspondientes a las coordenadas de los nodos libres de las ecuaciones (3-28), (3-29) y (3-30) se obtienen las expresiones que se utilizan en el cálculo de las superficies mínimas (*Schek 1974*).

$$x = D^{-1} \cdot (Px - Df \cdot xf) \quad (3-31)$$

$$y = D^{-1} \cdot (Px - Df \cdot yf) \quad (3-32)$$

$$z = D^{-1} \cdot (Px - Df \cdot zf) \quad (3-33)$$

### 3.3.3 Cálculo de superficies mínimas con el método de densidad de fuerza

Una primera superficie mínima evaluada con el método densidad de fuerza matricial, fue a partir de una superficie cuadrada simple como la de la Figura 3.9(a). En primer lugar se estructura una malla de elementos conectado por medio de nodos como la que se muestra en la Figura 3.9(b), cuyos elementos para este caso son de 1 m de longitud, dando como resultado una malla de 5 m por lado. Antes de evaluar la superficie mínima, se determina los nodos que serán un apoyo fijo; para este caso los nodos de las cuatro esquinas. Cambiando la posición del nodo 26 de las coordenadas (5,0,0) a (5,0,2.5), el nodo 36 de (5,5,0) a (5,5,1) y el nodo 23 de (0,5,0) a (0,5,-1), el nodo 1 se queda en su posición original.

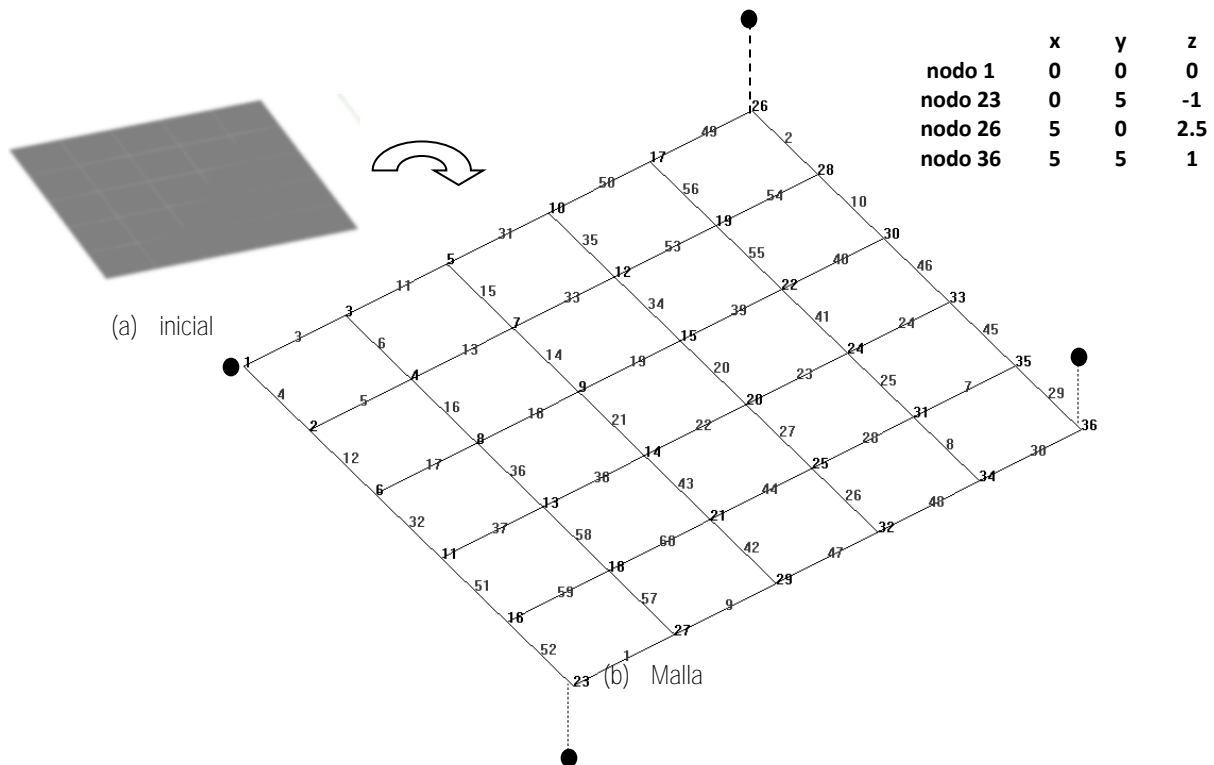


Figura 3.9. (a) Forma inicial. Superficie, (b) Forma inicial. Malla.

Con los nodos 1, 23, 26 y 36 fijos en sus nuevas posiciones, se construye la matriz  $[C]$  que contiene todas las conectividades de los nodos libres, la matriz  $[C_f]$  la cual contiene todas las conectividades de los nodos fijos, la matriz  $[Q]$  que es una matriz diagonal que contiene todas las densidades de fuerza asignadas a cada uno de los elementos que componen la malla. Con las ecuaciones (3-32), (3-32) y (3-33) se determinan todos valores de las nuevas coordenadas para los nodos libres, resolviendo simultáneamente y graficando la nueva superficie encontrada, la superficie que se forma es como la que se muestra en la Figura 3.10.

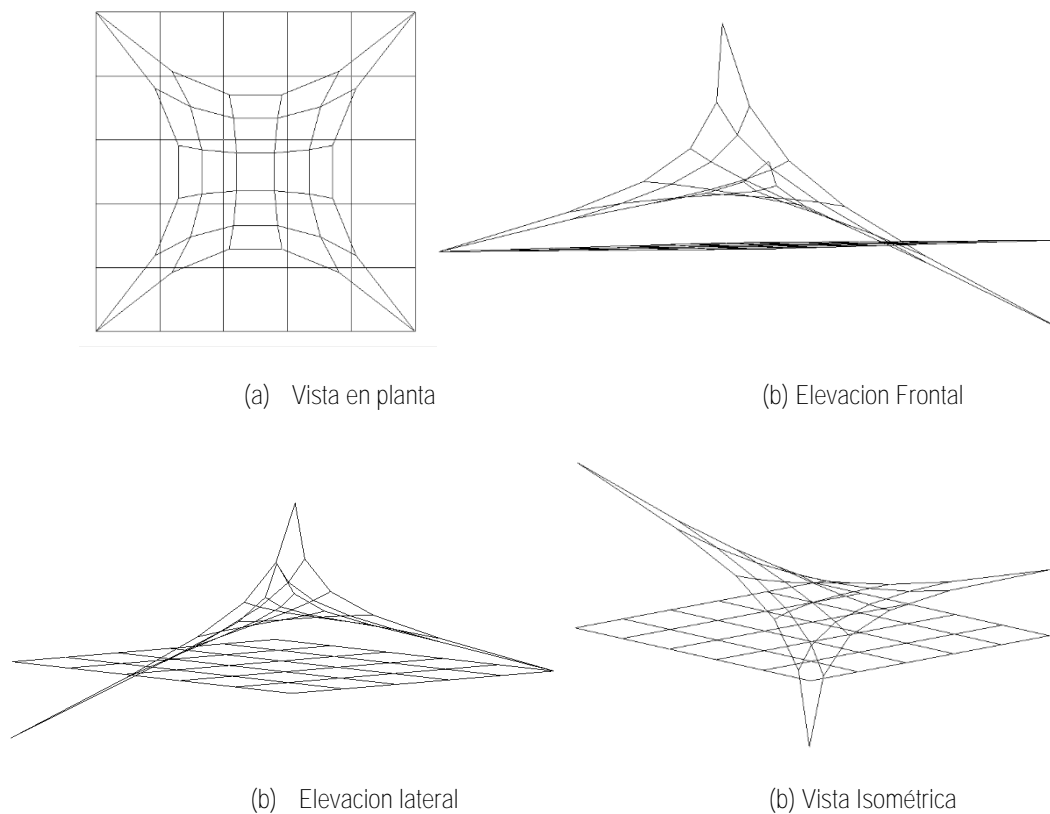


Figura 3.10. Diferentes vistas de la superficie inicial y superficie mínima,  $q = 1$  en todos sus elementos.



### 3.3.4 Superficie mínima 1, $q=1$ en todos los elementos.

En la Figura 3.11 se ha eliminado la presencia de la forma inicial y se agregó un área sombreada entre los elementos para que se aprecie mejor la superficie obtenida. Esta superficie o forma mínima, fue obtenida después de calcular todas las posiciones o coordenadas de los nodos libres, para las cuales solo se producen esfuerzos de tensión en los elementos con ayuda del algoritmo (anexo A) escrito en el lenguaje de programación de Matlab, los gráficos se obtuvieron después de leer todas las coordenadas con la ayuda del programa de mallado GID11.0.1.

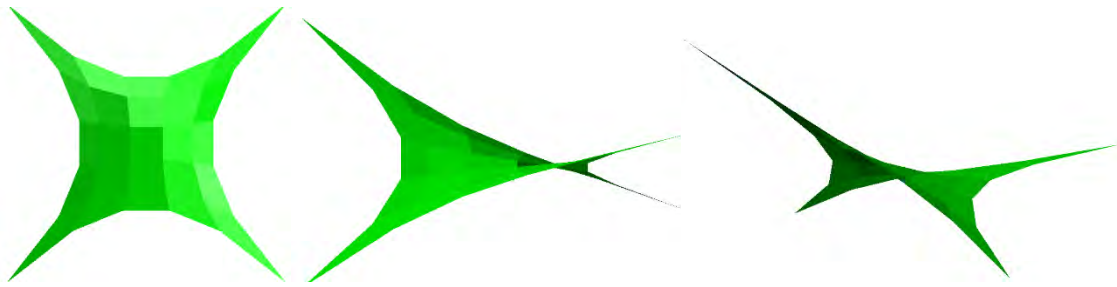
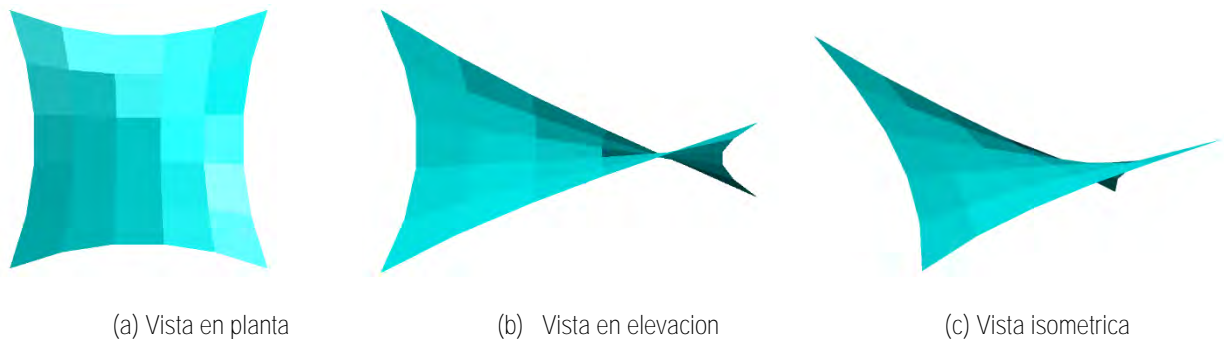


Figura 3.11. Diferentes vistas de la forma mínima obtenida  $q=1$  en todos los elementos.

### 3.3.5 Superficie mínima 2, $q=5$ en los elementos de borde, $q=1$ en los elementos restantes.

Por otra parte, si ahora se asigna un valor de 5 a la densidad de fuerza ( $q = 5$ ) solo en los elementos en el borde de la forma inicial de la Figura 3.9(a), la superficie encontrada a partir de esta forma inicial, es como la que se muestra en la Figura 3.12.



(a) Vista en planta

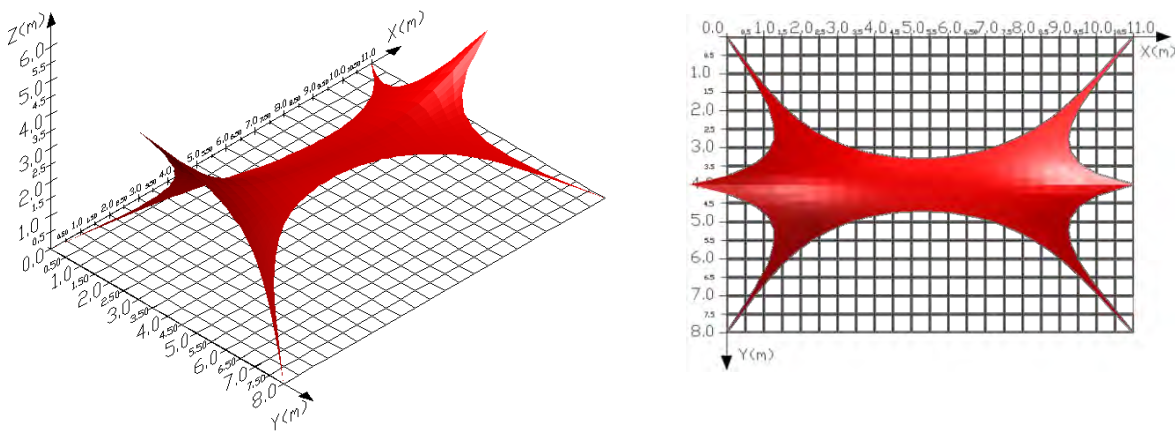
(b) Vista en elevacion

(c) Vista isometrica

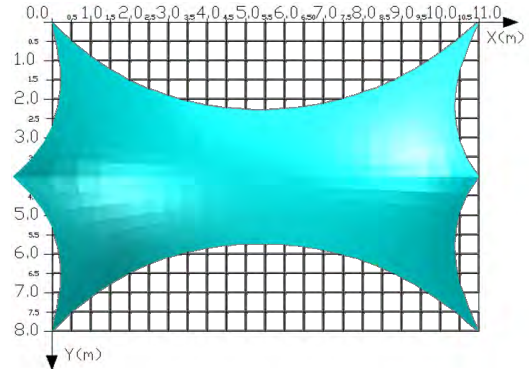
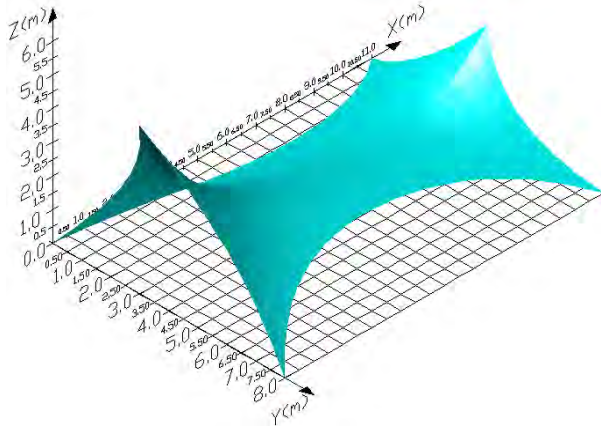
Figura 3.12. Forma mínima  $q=5$  en sus elementos de borde.

### 3.3.6 Superficie mínima 3, efecto de la densidad de fuerza sobre determinados elementos.

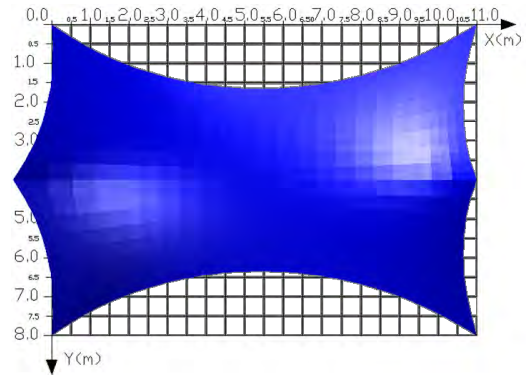
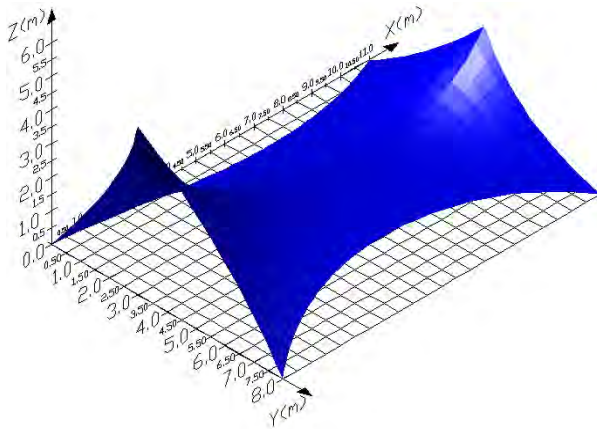
Se pueden reconocer cambios importantes en la configuración de las superficies a partir de aumentar (o reducir) la densidad de fuerza en determinados elementos, por ejemplo, la superficie de la Figura 3.13(a) es una superficie en la que todos sus elementos tienen una densidad de fuerza igual a uno ( $q = 1$ ), esta superficie tiene fijos los nodos de los extremos, conforme se aumenta esta densidad en los elementos de borde a **5, 10, 50, 100**, Figura 3.13 (b), (c), (d) y (e), respectivamente, se observa como estos tienden a formar un arco de menor curvatura. Este efecto se produce debido a que al considerar una densidad de fuerza ( $q$ ) mayor en los elementos de borde, éstos tienden a ser más rígido en comparación con los elementos internos en los que la densidad de fuerza es iguala uno ( $q=1$ ). Por lo tanto, este resultado se puede comparar físicamente con un cable colocado en todo el borde, que tiene una capacidad mayor a la tensión que de los elementos internos (la membrana), el cual tiende a ser más un apoyo rígido para la Velaria. Esto es importante de considerar en el momento de evaluar superficies mínimas, ya que diferentes densidades de fuerza conducirán a diferentes configuraciones para una misma superficie.



(a) Superficie mínima con  $q=1$  en todos sus elementos. Vista isométrica y en planta.



(b) Superficie mínima,  $q=5$  en los elementos del borde,  $q=1$  en los elementos interiores. Vista isométrica y en planta.



(c) Superficie mínima,  $q=10$  en los elementos del borde,  $q=1$  en los elementos interiores. Vista isométrica y en planta.

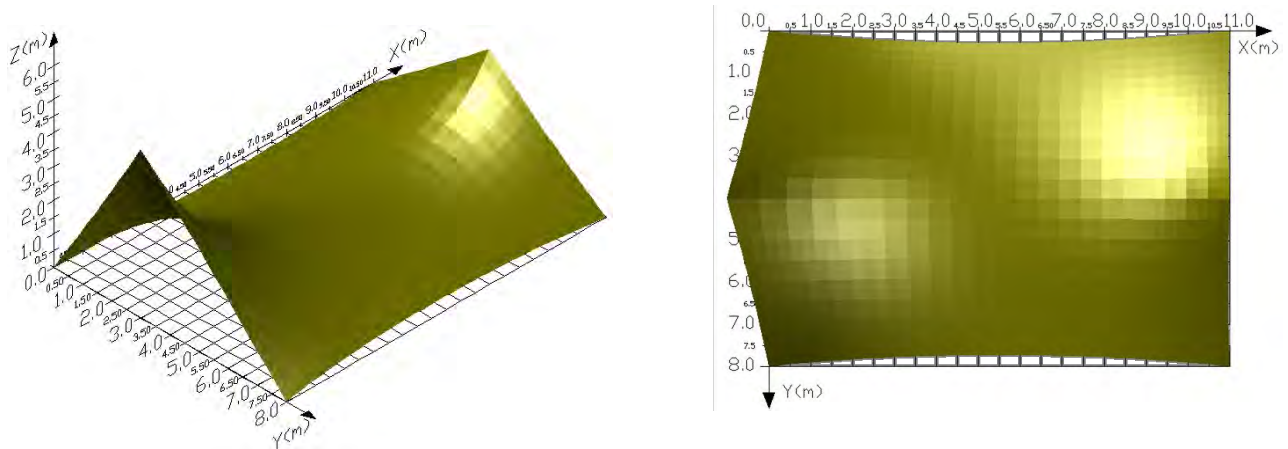
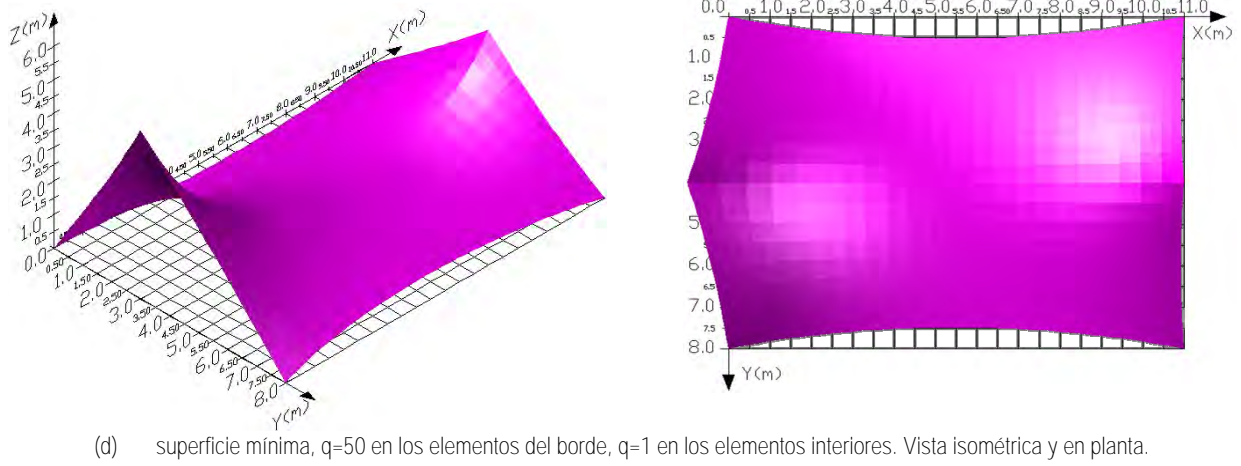


Figura 3.13. Diferentes formas mínimas calculadas para diferente densidades de fuerza en los elementos de borde.

### 3.3.7 Análisis de una Velaria anti-clástica.

Como se expuso con anterioridad, una superficie mínima depende de las condiciones de borde, de los apoyos y de las densidades de fuerza que se asignen sus elementos. Por lo tanto, para comprender el comportamiento de una Velaria de forma anti-clástica (doble curvatura invertida), se estudió uno de los ejemplos presentado en *Lewis (2003)*. En este, se comienza con un análisis de buscador de forma, para después, con la configuración propuesta, realizar un análisis estático no-lineal (por geometría), en el que se aplica como caso de carga una fuerza de 2kN a cada nodo libre (positiva en el sentido de la gravedad), para tres diferentes niveles de pre-tensión, 65, 85 y 95 kN, de los que se comparan las tensiones y desplazamientos.

### 3.3.8 Buscador de forma

Como superficie inicial se tiene la tenso-estructura de la Figura 3.14, en la que se muestra la trayectoria de su doble curvatura inversa con flechas en negro. Esta superficie inicial se encuentra fija en todos los nodos localizados en el borde. Esta misma superficie se representa como una malla de elementos rectos que se interconectan entre sí por medio de nodos, como se muestra en la Figura 3.15. Los nodos y los elementos se etiquetan con un número de referencia para identificarlos al momento de ensamblar la matriz de conectividades. En un archivo de texto se guardó esta información para realizar el análisis de buscador de forma con el algoritmo escrito en Matlab (Anexo A). El cambio en la trayectoria de sus curvaturas se observa en el perfil longitudinal y transversal de la Figura 3.16.

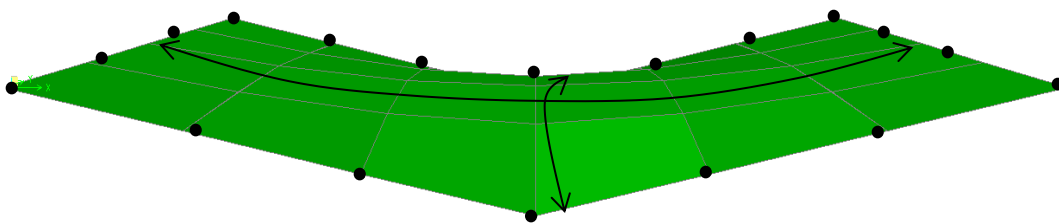


Figura 3.14. Superficie anti-clástica inicial de una Velaria (Adaptada de Lewis 2003).

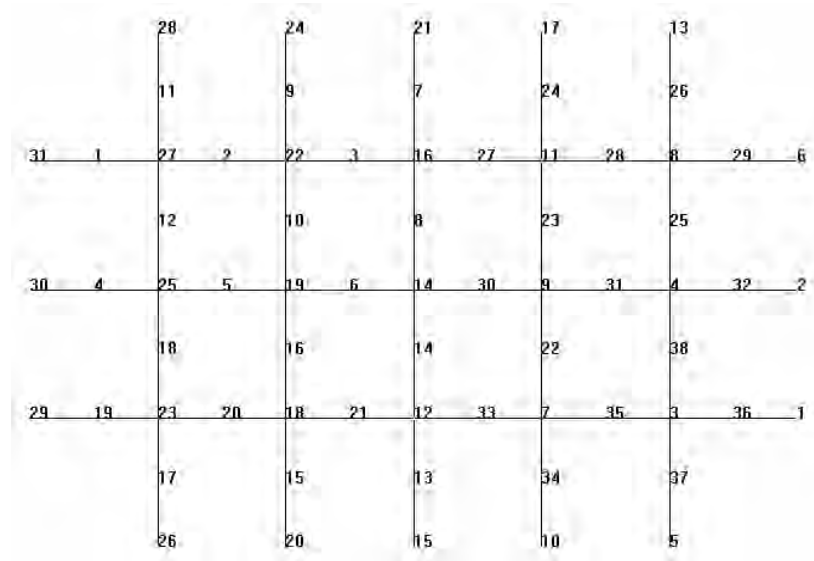
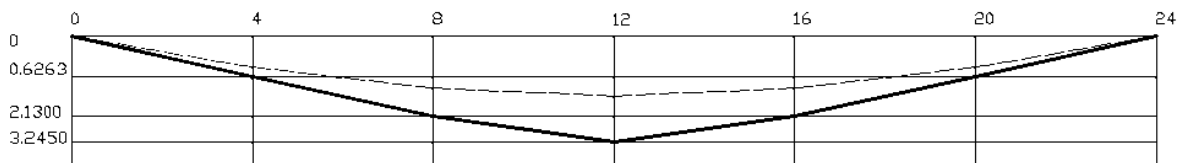
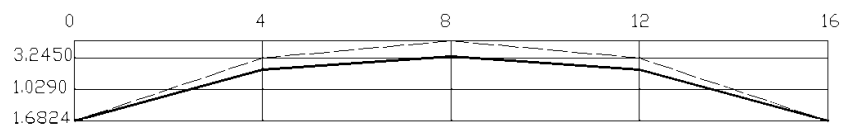


Figura 3.15. Idealización de la superficie inicial.

Al parecer el cambio de la curvatura presentado en el perfil longitudinal en la Figura 3.16 (a), no parece tener un gran efecto, la curvatura del perfil transversal sube, mientras que el perfil longitudinal baja. Esto sucede debido a que la posición de los nodos fijos se mantiene en la misma posición, de haber existido un cambio en la posición de uno o más nodos fijos, la forma que se obtendría después de buscar la forma sería distinta, este cambio se puede notar con más impacto en la superficie mostrada en la Figura 3.9, en la que se comienza con una superficie plana rectangular y de ella se obtiene una forma hyper (Figura 3.11). Al designar como nodos fijos los nodos de las esquinas y elevarlos de su posición, se obtiene una superficie anti-clástica mejor conocida como hyper a partir de una superficie inicial plana.



(a) Perfil longitudinal central, forma inicial (punteada) y forma encontrada (continua).



(b) Perfil transversal central, forma inicial (punteada) y forma encontrada (continua).

Figura 3.16. Superficie mínima calculada a partir de la malla inicial.

### 3.3.9 Análisis de los elementos mecánicos.

Según la teoría después de analizar la forma correcta que debe tener la superficie de la Velaria, se debería obtener una tensión uniforme en los elementos de la malla tanto en el sentido transversal, como en el sentido longitudinal, graficando las nuevas coordenadas de los nodos libres obtenidas al buscar la forma. Posteriormente, se realizó un modelo analítico en el programa de análisis estructural SAP2000, definiendo los elementos como cables de 1 pulgada de diámetro, para posteriormente aplicar 2kN en cada nodo libre de la malla de cables (Figura 3.17(a)). Se utilizó tres niveles de pretensión en los cables 65 kN, 85 kN y 100 kN para analizar su comportamiento, suponiendo que los desplazamientos en los cables serán pequeños debido a la acción de las cargas.

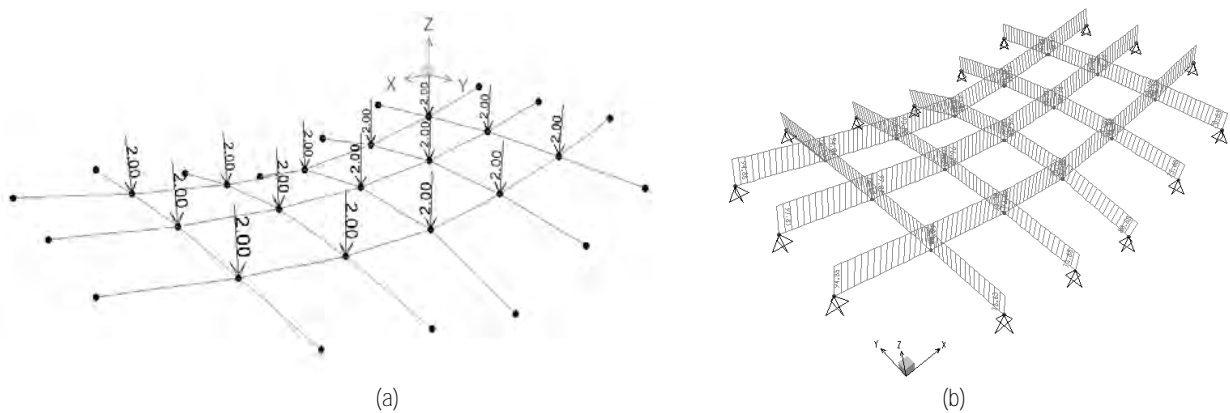


Figura 3.17. a) Malla en SAP2000 con el caso de carga 1 y b) Tensiones en todos los elementos.

Como se observa en la Figura 3.17(b), se obtiene una tensión uniforme en los cables, como se presentan más adelante en la Figura 3.19.

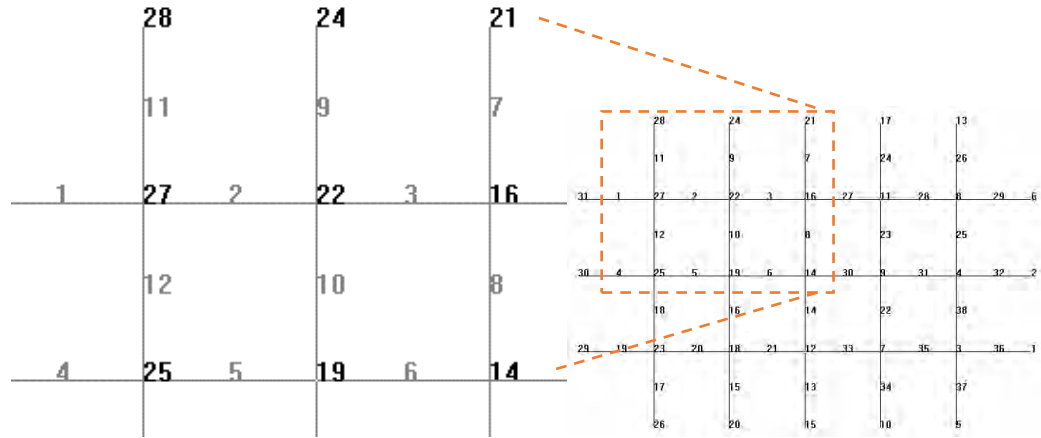


Figura 3.18. Elementos aislados para presentar resultados.

Los resultados obtenidos del análisis estático no-lineal contenidos en la Tabla 3.1, tanto en el sentido longitudinal como en el transversal las tensiones se mantienen en un valor uniforme. Por ejemplo, para el sentido transversal, las tensiones en los elementos se mantienen razonablemente uniformes entre 72 y 76 (kN) aproximadamente para una pre-tensión inicial de 63kN, o entre 102 y 107 (kN) si la pre-tensión inicial es de 95kN como se puede apreciar en la Figura 3.19. Estos resultados se pueden corroborar con los reportados por *Lewis (2003)*. En la Figura 3.19 se presenta la relación tensión en elementos contra la pre-tensión inicial, observando que se mantienen uniformes en ambos sentidos; de esta manera se comprueba que el método de la densidad de fuerza (*Schek 1974*) crea superficies que producen solo esfuerzos de tensión para los elementos sometidos a cualquier caso de carga.

Tabla 3.1.Variación de la tensión para los diferentes niveles de pretensión.

Elemento entre los nodos	P63 (KN)	P85 (KN)	P95 (KN)
28-27	55.4969	78.6345	89.0335
27-25	55.4726	78.5913	88.9817
24-22	50.9000	73.6795	84.0192
22-19	50.6517	73.3026	83.5834
21-16	59.7780	80.8838	90.6271
16-14	57.8282	78.2685	87.7054
31-27	73.6458	94.8471	104.9855
27-22	72.9648	94.0446	103.7329
22-16	72.1765	93.0177	102.7959
30-25	76.6408	97.8114	107.5067
25-19	75.9963	97.0359	106.6725
19-14	75.3577	96.1972	105.7425



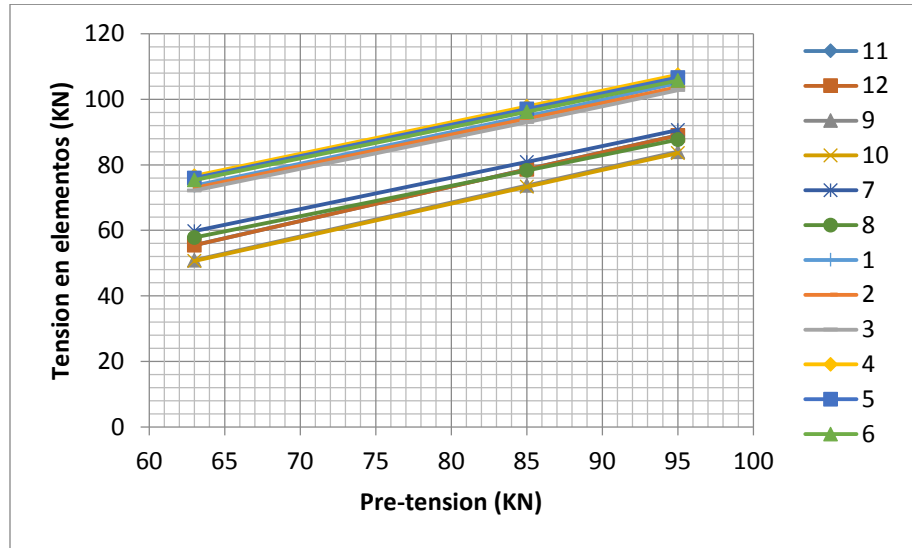


Figura 3.19. Variación de la tensión en los elementos con la pre-tensión.

Otro punto importante derivado del análisis (*Lewis 2003*) es que, para los tres niveles de pre-tensión aplicada (63, 85 y 95) kN se obtiene un cambio mínimo en los desplazamientos para los tres casos. La Tabla 3.2 contiene los desplazamientos calculados para estos tres niveles de pre-tensión. Tal como se puede observar estos desplazamientos son pequeños, por lo tanto se puede usar un análisis estático no lineal válido sólo para tomar en cuenta la no linealidad de los cables para determinar las fuerzas en los elementos.

Tabla 3.2. Desplazamientos calculados

Nodo	P63 (mm)	P85 (mm)	P95 (mm)
	Z	Z	Z
27	-1.0000	-0.8140	-0.7552
22	-0.5771	-0.5311	-0.5129
16	-0.0520	-0.0799	-0.0892
25	-1.0951	-0.9260	-0.8671
19	-0.6521	-0.5952	-0.5846
14	-0.1953	-0.2155	-0.2222

En la Figura 3.20 se puede observar la variación del desplazamiento contra la pretensión de la estructura para el caso de carga 1, en el que los desplazamientos al centro de la malla incrementen conforme aumenta la pretensión en los cables.

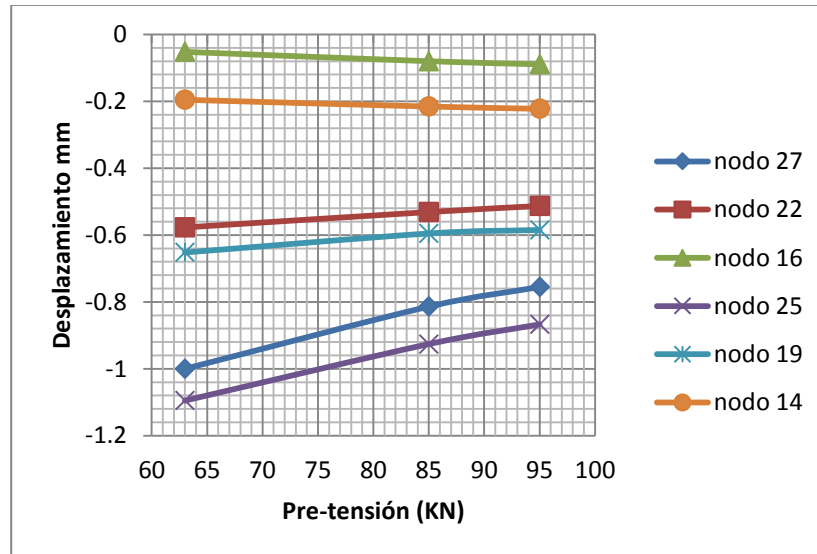


Figura 3.20. Variación de desplazamientos con la pre-tensión.

En este ejemplo se utiliza solamente un caso de carga en el que todas las fuerzas se aplican a los nodos de la estructura son de 2kN en el sentido de la gravedad. Es de gran utilidad para demostrar la eficacia el método “buscador de forma”, ya que las superficies resultantes son superficies de tensión, importante ya que, sólo producen esfuerzos de tensión en los elementos. Sin embargo, esta no es una manera realista de ver cómo afecta el viento a las tenso-estructuras. Para encontrar la condición más desfavorable, se deben resolver modelos matemáticos que tomen en cuenta la caracterización del viento.

# 4 Planteamiento de modelos y consideraciones para el análisis de viento

## 4.1 Modelos analíticos

*Álvarez et al. (2012)* realizó el análisis experimental de una Velaria tipo cónica modelada a escala, ésta fue hecha de un material acrílico, identificada con el nombre G14H1. En la Figura 4.1 se muestran las dimensiones como: el espeso de la membrana  $t=2\text{mm}$ , la altura  $H_e=0.025\text{mts}$ , el radio del anillo en la base  $R2_e=0.075\text{mts}$ , la dimensión del radio del anillo superior  $r=0.015\text{mts}$  y el ángulo ( $\beta=20.32^\circ$ ) que describe la curvatura. Este trabajo experimental consistió en aplicar un flujo laminar de viento sobre el modelo colocado en el piso del túnel de viento, que se encuentra ubicado en el área de posgrados de la Universidad Autónoma Metropolitana. Cabe señalar que la sección transversal de la Velaria se propone con base en un criterio y no mediante un análisis buscador de superficie mínima como se muestra en la Figura 4.1.

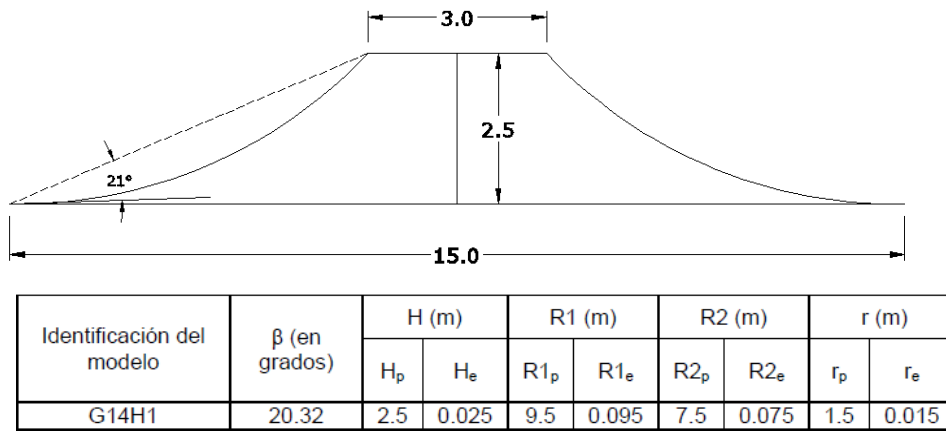


Figura 4.1 Sección transversal del modelo G14H1 (adaptado de Álvarez 2012).

## 4.2 Construcción del Modelo CFORM1

Tomando como referencia las dimensiones y altura del cono G14H1, se modeló un cono con lados rectos, como se muestra en la Figura 4.2(a), en el programa de mallado estructurado GID, partiendo de esta malla cónica inicial se obtuvieron todas las conectividades que este programa numera automáticamente en nodos y elementos. Posteriormente se exportaron estos elementos con sus respectivas conectividades a un archivo de texto.

### 4.2.1 Malla inicial y después del análisis de superficie mínima

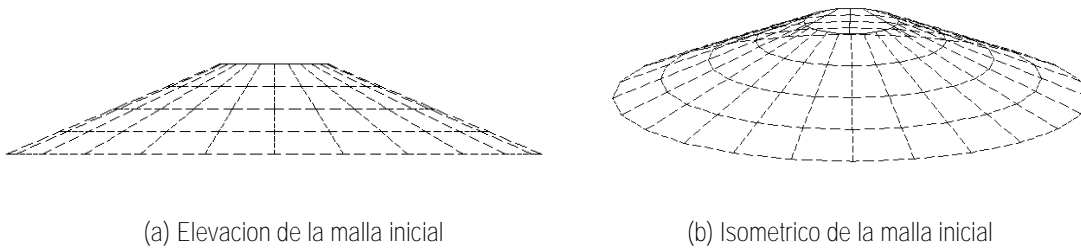


Figura 4.2 Malla cónica inicial.

El archivo de texto con la malla inicial se manipuló para extraer el número de elementos, conectividades, coordenadas, así como las etiquetas de los nodos que se consideraron fijos y nodos libres, con lo que se realizó el análisis para buscar la superficie mínima con el algoritmo escrito en lenguaje de programación de Matlab. Para buscar la superficie mínima, se consideraron fijos los nodos del anillo superior e inferior, mientras que a todos los elementos la malla se les asignó una densidad de fuerza  $\mathbf{q} = \mathbf{1}$ , con lo que se obtuvo una superficie con las nuevas coordenadas, como la que se muestra en la Figura 4.3.

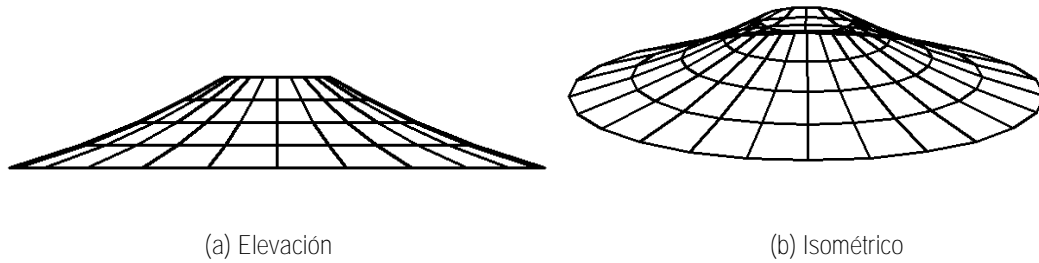


Figura 4.3. Malla cónica después del análisis de buscador de superficie mínima.

#### 4.2.2 Construcción de la superficie y sólido 3D.

Después de buscar la forma mínima (Figura 4.3), esta malla se exportó al programa de dibujo AutoCAD®, donde, utilizando el comando “revolve” se construyó una superficie como la que se muestra en la Figura 4.4(a). Posteriormente, se proporcionó un espesor de 2mm con el comando “thicken”, el cual construye un sólido 3D, como el que se muestra en la Figura 4.4(b), a partir de una superficie. Para reducir el tiempo de cómputo en los análisis numéricos, se aprovechó el eje de simetría longitudinal, por lo que se construyó sólo la mitad del modelo al cual se le llamó CFORM1.

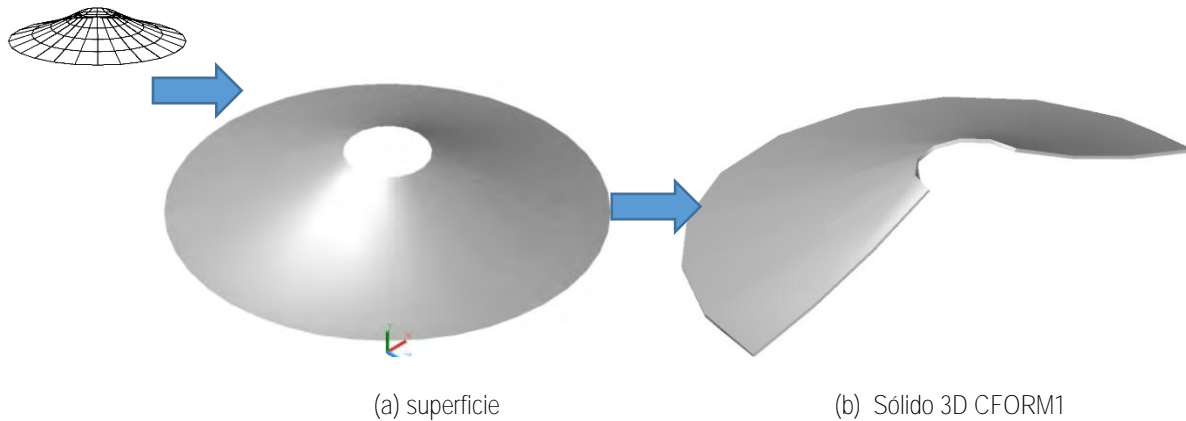


Figura 4.4. Malla, superficie y sólido 3D CFORM1

Para realizar un análisis de interacción fluido estructura, Ansys requiere que el modelo se integre dentro de un volumen de control, análogo a un túnel de viento. Al modelo sólido se le asignan las propiedades mecánicas de una Velaria y el volumen de control tiene asignadas las características del viento, pero ambas partes se modelan por separado. Para lograr lo anterior, se creó un cubo sólido alrededor del modelo CFORM1 y se extrajo a éste del volumen, con lo que queda un hueco dentro del volumen de control cuyas dimensiones son exactamente las del modelo CFORM1, luego se insertó una copia del modelo CFORM1 dentro del hueco del volumen, quedando ambas partes acopladas como se muestra en la Figura 4.5

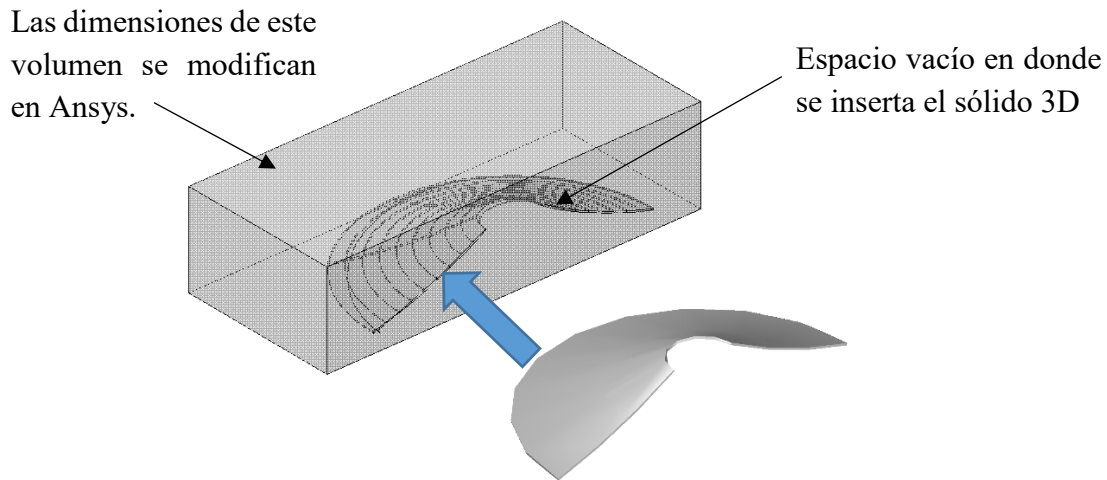


Figura 4.5. Volumen con espacio vacío para insertar el modelo CFORM1.

### 4.2.3 Estructuración con elementos finitos.

La estructuración de la malla de elementos finitos se realizó en el módulo Fluent®14.5, modo mallado (meshing mode), que permite el modelado paramétrico de mallas complejas.

Por tener una superficie curva debido a la forma del modelo CFORM1, la estructuración de la malla de elementos finitos en la zona de transición (Figura 4.6(a)) se realizó mediante elementos hexaedros. Se utilizó este tipo de elementos para lograr una mejor adaptación entre la malla de viento y la malla del modelo estructural. Dentro de la malla de elementos finitos del volumen de control se inserta la malla del modelo como se muestra en la Figura 4.6(b).

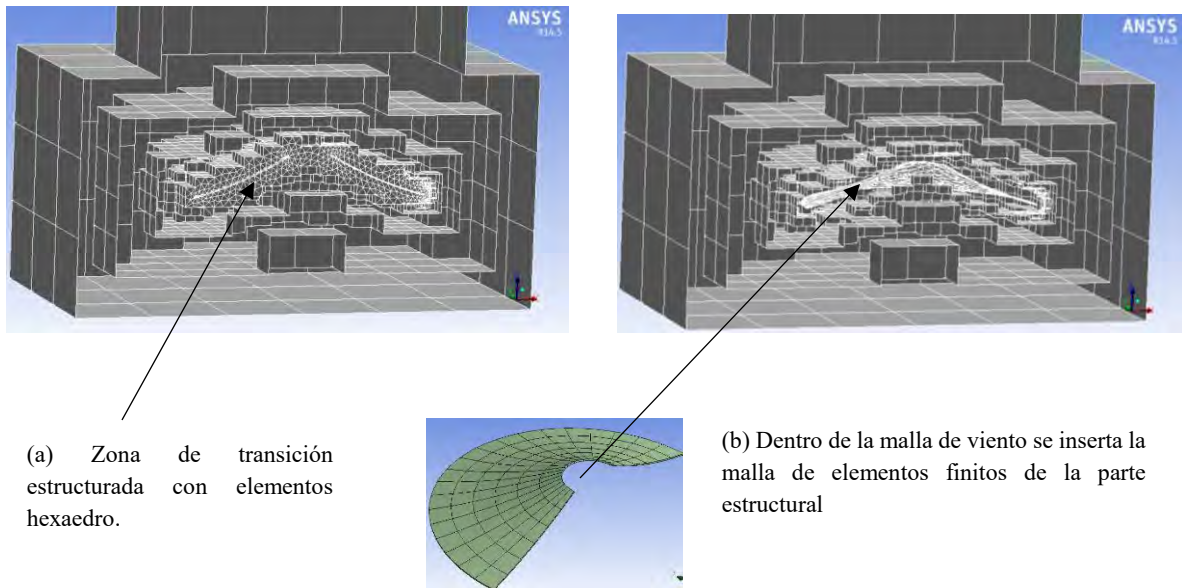


Figura 4.6. Características de la estructuración de las mallas de elementos finitos en Ansys Fluent®14.5.

Una vez que se realizó el estructurado con elementos finitos de ambas partes, la incorporación del volumen de control y del modelo CFORM1 queda estructurado como se muestra en la Figura 4.7.

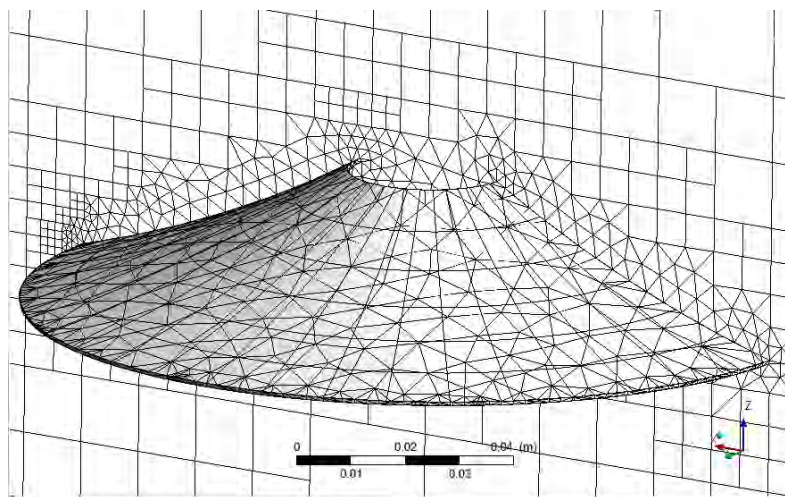


Figura 4.7. Malla de viento y malla de membrana estructural superpuestas.

### 4.3 Planteamiento del modelo G14H1.

El proceso que se siguió para preparar el cono G14H1 para el análisis de interacción fue similar al descrito para el modelo CFORM1. El modelo G14H1 tiene la característica de no contar con una superficie mínima, la estructuración del mallado con elementos finitos de la parte estructural y del viento se muestra en la Figura 4.8.

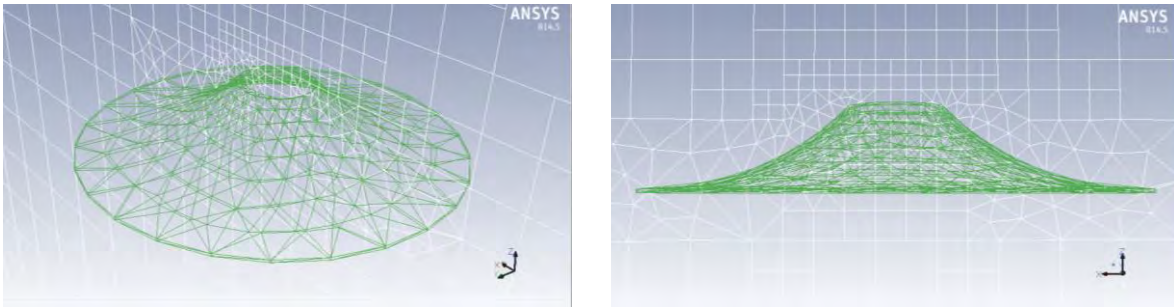


Figura 4.8. Estructuración de la mallado con elementos finitos del modelo G14H1

### 4.4 Características del volumen de control.

El elemento finito general utilizado en la estructuración del volumen de control (o túnel de viento) es el elemento Solid 186. El elemento Solid186, es un elemento sólido 3D de 20 nodos que exhibe un comportamiento cuadrático, y cuenta con tres grados de libertad en cada nodo, traslación en “ $U_x$ ”, “ $U_y$ ”, y “ $U_z$ ” Figura 4.9(b). Por otra parte, estructurar el volumen de control en la zona curva, o zona de la transición Figura 4.6 (b), que es la zona del fluido alrededor de la membrana se utilizó el elemento Solid187, Figura 4.9(c), este es un elemento del tipo sólido 3D con 10 nodos y exhibe también un comportamiento cuadrático. Para disminuir el número de ecuaciones por resolver y, por lo tanto, el tiempo de cómputo en el análisis, se dividió la mitad cada modelo para aprovechar la simetría longitudinal como se muestra en la Figura 4.9(a).



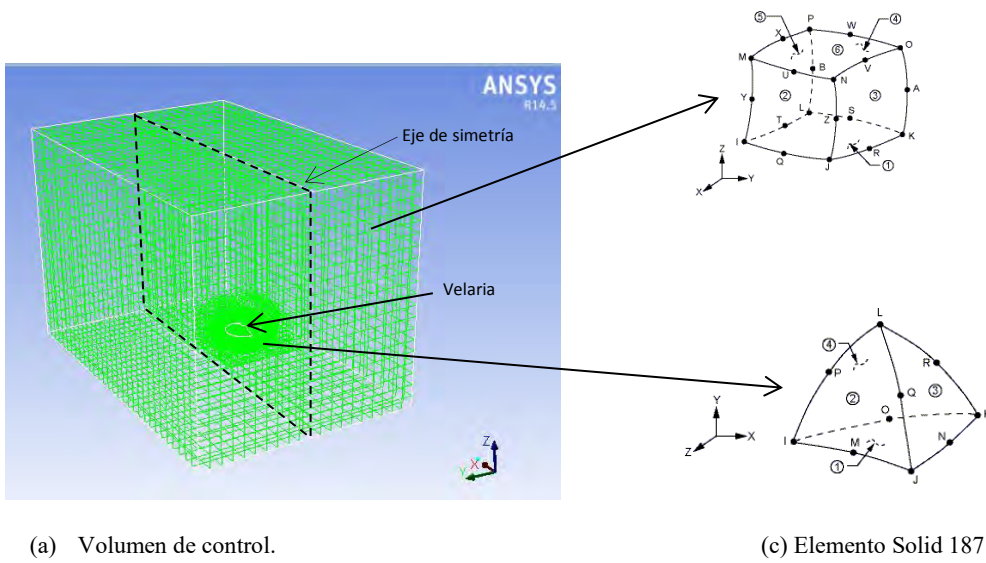


Figura 4.9. (a) Estructuración del volumen de control, (b) Elemento Solid186, (c) Elemento Solid187

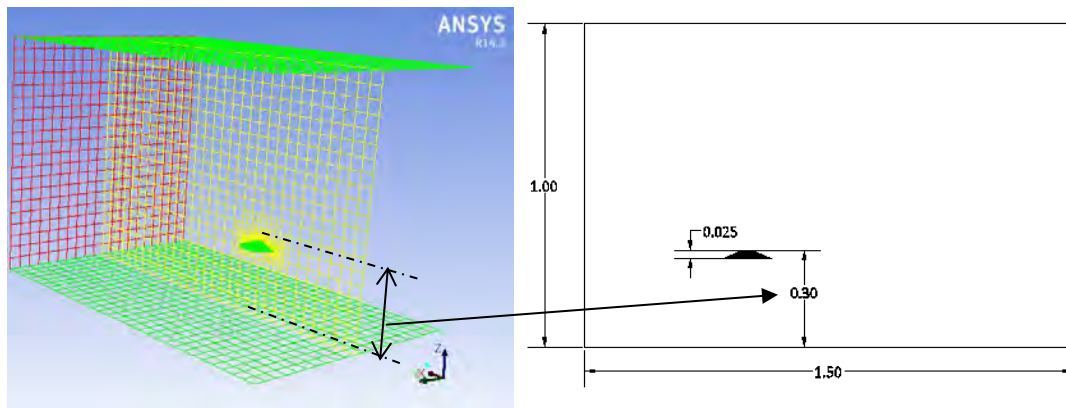


Figura 4.10. Ubicación de la malla de elementos finitos de la Velaria dentro del volumen de control.

## 4.5 Consideraciones para el cálculo de coeficientes de presión.

Se tomó en consideración para el cálculo de los coeficientes de presión ( $C_p$ ) la ecuación (4-1), tomando como presión estática de referencia ( $P_{ESTref}$ ) y presión dinámica de referencia ( $P_{DINref}$ ) la medida en la entrada al volumen de control, por otra parte, se tomó como presión dinámica en el punto de medición ( $P_{DIN}$ ), es decir, la que se mide directamente en la superficie de interés o punto que nos interesa, o en otras palabras la superficie sobre la cual se quiere determinar este coeficiente, tal como se muestra en el esquema de la Figura 4.11.

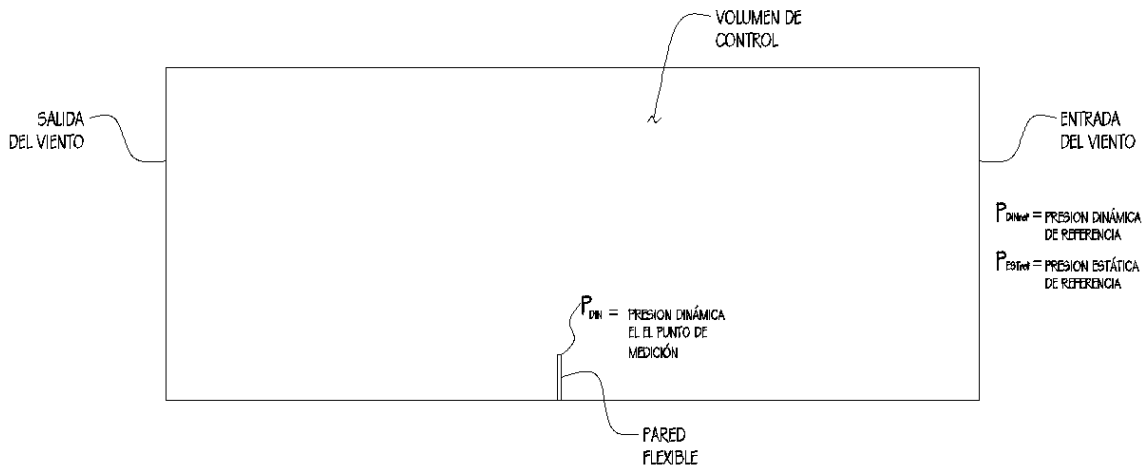


Figura 4.11. Consideraciones para el cálculo de los coeficientes de presión

$$C_p := \frac{P_{DIN} - P_{ESTref}}{P_{DINref}} \quad (4-1)$$

Por lo tanto, se definió al coeficiente de presión como la presión dinámica en el punto de medición menos la presión estática en el punto de referencia, entre la presión dinámica en el punto de referencia.

Donde:

$C_p$  es el coeficiente de presión;

$P_{DIN}$  es la presión dinámica en la entrada del volumen de control;

$P_{ESTref}$  es la presión estática en el punto de referencia, es decir, en la entrada del volumen de control; y

$P_{DINref}$  es la presión dinámica en el punto de referencia, es decir, en la entrada del volumen de control.

De acuerdo a los procedimientos descritos en las secciones 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 de este capítulo se prepararon un total de 6 modelos analíticos para ser sometidos a la acción del viento cuyas características particulares se encuentran en el resumen de la Tabla 4.1

Tabla 4.1. Características generales de los modelos analíticos.

Nombre del modelo	Considera superficie mínima	Considera membrana flexible	Descripción
<b>CFORM1</b>	SI	SI	Este modelo toma en cuenta la deformación de la membrana cuando el viento ejerce presión sobre ella, es decir, simula un modelo <b>FLEXIBLE</b> , cuenta con una superficie de tensión
<b>CFORM1</b>	SI	NO	Este modelo <b>NO</b> toma en cuenta la deformación de la membrana cuando el viento ejerce presión sobre esta, es decir, simula un modelo <b>RÍGIDO</b> , cuenta con una superficie de tensión
<b>G14H1</b>	NO	SI	Este modelo toma en cuenta la deformación de la membrana cuando el viento ejerce presión sobre ella, es decir, simula un modelo <b>FLEXIBLE</b> , <b>NO</b> cuenta con una superficie de tensión.
<b>G14H1</b>	NO	NO	Este modelo <b>NO</b> toma en cuenta la deformación de la membrana cuando el viento ejerce presión sobre ella, es decir, simula un modelo <b>RÍGIDO</b> , <b>NO</b> cuenta con una superficie de tensión.
<b>Placa</b>	NO APLICA	SI	Este modelo toma en cuenta la deformación de la placa cuando el viento ejerce presión sobre ella, es decir, simula un modelo <b>FLEXIBLE</b> .
<b>Placa</b>	NO APLICA	NO	Este modelo <b>NO</b> toma en cuenta la deformación de la placa cuando el viento ejerce presión sobre ella, es decir, simula un modelo <b>RÍGIDO</b> .

Para contribuir a la investigación pre-existente, se respetó las dimensiones del Volumen de control (o túnel de viento) Figura 4.9, por tratarse de un modelo real que existe en el laboratorio de viento de la Universidad Autónoma de México, así como la caracterización del viento determinada por *Álvarez (2012)*. Esta caracterización del viento determinada experimentalmente de acuerdo a las teorías existentes mejor conocida como perfil de velocidades se tomó tal cual sin modificación alguna. A este perfil de velocidades, lo determinan parámetros tales como, la densidad del viento ( $\rho = 1.1800 \text{ Kg/m}^3$ ), la viscosidad  $\mu = 1.7894\text{e-}5$ , la velocidad de entrada del viento ( $V = 5.4800 \text{ m/s}$ ), así como el modelo de rugosidad ( $\kappa\text{-}\epsilon$ ) y sus coeficientes, el determinarlos no están dentro del alcance de esta Tesis.

El programa utilizado para encontrar la distribución de presiones de los modelos analíticos expuestos en este capítulo es el programa de análisis de elementos finitos Ansys®Worbech™2.0FrameWork versión 14.5.0.

# *CAPÍTULO 5*

## 5 Dinámica de fluidos.

### Interacción fluido estructura.

#### 5.1 Introducción.

Debido a las formas tan complejas que presentan la mayoría de las tenso-estructuras, determinar la distribución de la presión en este tipo de estructuras es complejo, en parte, debido a la falta de información técnica en los reglamentos; la causa de esto probablemente es por la dificultad para estimar una sola configuración de coeficientes que represente a la mayoría de las formas, esto no es realista ya que diferentes formas tendrán diferentes repuestas ante la acción del viento. En el Manual de Diseño de Obras Civiles (*MDOC 2008*), apartado de “Diseño por Viento” de la Comisión Federal de Electricidad (CFE) en la sección 4.4.6 “Respuesta dinámica de cubiertas deformables de forma cónica”, no se proporcionan los coeficientes para este tipo de estructuras, solo se mencionan algunas referencias para determinarlos, se recomienda obtenerlos ya sea mediante estudios experimentales en túnel de viento o mediante simulaciones numéricas.

Para que una tenso-estructura tenga un buen comportamiento se tiene que determinar forzosamente una superficie mínima calculada mediante algún método disponible (el método de la densidad de fuerza, o rigidez transitoria, o relajación dinámica por ejemplo) con densidades de fuerza que representen el comportamiento de una membrana textil (Capítulo 2) antes de aplicar cualquier tipo de análisis. Sólo entonces se puede proceder a obtener la distribución de presiones sobre esta superficie mediante modelos analíticos o experimentales en túnel de viento.

## 5.2 Alcances

Este capítulo se presenta la respuesta de los modelos CFORM1 y G14H1 (sección 5.5) que se plantearon en el capítulo 4. Antes de exponer los resultados se presenta la base teórica (sección 5.3) sobre la cual se basa el estudio de sistemas acoplados. Para familiarizarse con entorno del programa Ansys®Worbech™, Ansys®Fluent™ y conocer cuáles son los procedimientos, ajustes y enlaces necesarios para llevar a cabo un análisis de sistemas acoplados, se realizó el análisis de una placa de acero en voladizo que se somete a la acción del viento. Se evaluó la distribución de presiones, deformaciones, esfuerzos. Para calibrar los modelos se utilizó un estudio experimental *Forster y Mollaert (2003)*. Es importante mencionar que no se estudia el desprendimiento de vórtices, el propósito principal es identificar las diferencias existen entre un modelo flexible y un modelo rígido.

### 5.2.1 Dinámica de fluidos

La dinámica de fluidos se ocupa del movimiento de gases y fluidos y de cómo este movimiento se relaciona con las fuerzas que estos producen. La fuerza principal que produce un fluido que se acelera es el gradiente de presión *Shapiro (1963)*.

Cuando un fluido incompresible y de baja viscosidad se mueve a través de un canal en donde su área decrece con la distancia Figura 5.1, Por el principio de conservación de la masa sabemos que el volumen  $Q$  que entra en el canal debe ser exactamente el mismo volumen que sale. El volumen  $Q$  es igual a  $AV$ , donde  $V$  es la velocidad promedio y  $A$  es el área transversal del canal. Por lo tanto, una disminución de área producirá necesariamente un incremento de la velocidad.

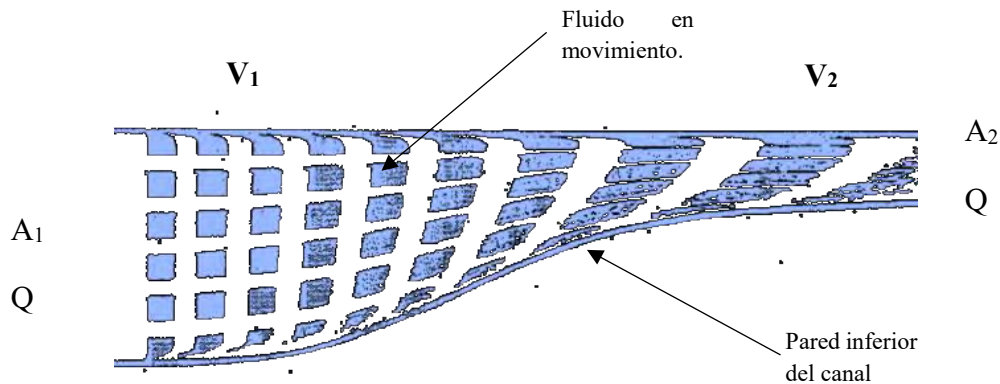


Figura 5.1 fluido en movimiento visualizado mediante burbujas de hidrogeno (adaptado de Shapiro 1963)

Este incremento de la velocidad, como consecuencia de la reducción del canal, produce un decremento de la presión estática como se muestra en la Figura 5.2. En ella se aprecian los manómetros que miden la presión total (stag) y la presión estática (stat), estos indican que la presión estática decrece cuando el fluido se acelera, sin embargo, la presión total (stag) se mantiene.

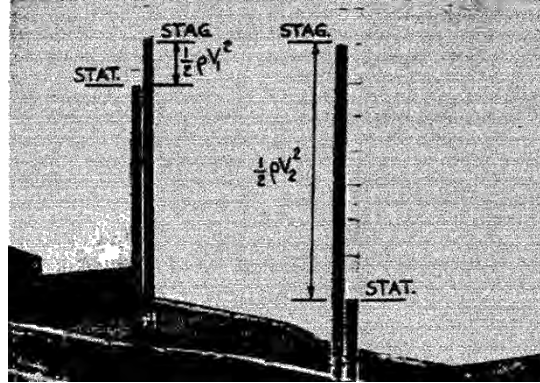


Figura 5.2 Manómetros de presión en la entrada y en la reducción del canal (adaptado de Shapiro 1963)

La diferencia entre la presión total y la presión estática se le conoce como presión dinámica ( $1/2\rho V^2$ ) esta expresión se deriva de igualar la fuerza neta del gradiente de presión  $\delta p/\delta s$  que actúa a lo largo de una línea de flujo constante  $s$  con segunda ley de Newton, entonces, para un flujo no viscoso y estable se tiene.

$$\frac{\delta p}{\delta s} = -\rho V \cdot \frac{\delta V}{\delta s} \quad (5-1)$$

## 5.2.2 Ecuaciones que gobiernan el movimiento promedio del viento

### 5.2.2.1 Ecuaciones de equilibrio

Para caracterizar el viento es necesario recurrir a las ecuaciones fundamentales de la mecánica. Las ecuaciones que gobiernan el movimiento promedio del viento son tres: las ecuaciones de equilibrio, las ecuaciones de continuidad conocido también como el principio de conservación de la masa en mecánica de fluidos y las ecuaciones constitutivas del viento. Por ejemplo, del equilibrio de la masa unitaria de aire de la figura 5.23, donde  $fV$  es la fuerza de Coriolis, igualando estas ecuaciones con la segunda ley de Newton  $\sum F=ma$  se obtiene:

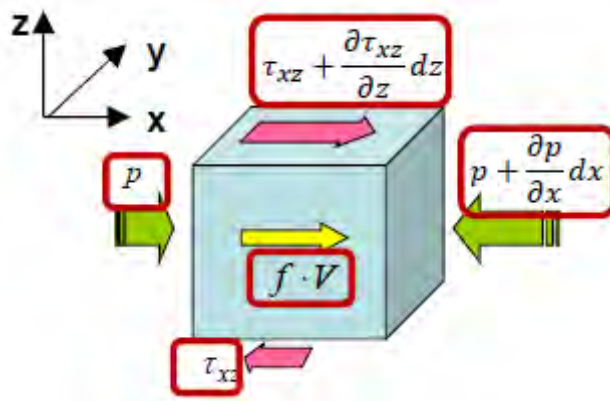


Figura 5.3 Fuerzas que actúan en una masa unitaria de aire (adaptado de Sordo 2013)

Del equilibrio en la dirección  $x$ :

$$\frac{\partial U}{\partial x} U + \frac{\partial U}{\partial y} V + \frac{\partial U}{\partial z} W + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\rho} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{\rho} - f \cdot V = 0 \quad (5-2)$$

Del equilibrio en la dirección  $y$ :

$$\frac{\partial V}{\partial x} U + \frac{\partial V}{\partial y} V + \frac{\partial V}{\partial z} W + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{\rho} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \frac{1}{\rho} + f \cdot U = 0 \quad (5-3)$$

Y del equilibrio en la dirección  $z$ :

$$\frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\rho} + g = 0 \quad (5-4)$$

### 5.2.2.2 Ecuación de continuidad o conservación de la masa

Si la masa de aire que atravesó la superficie  $\delta A$  en un tiempo  $\delta t$  se conserva y si la densidad del viento no cambia con el tiempo (flujo incompresible), entonces se obtiene la ecuación (5) se le conoce como ecuación de continuidad o de conservación de la masa

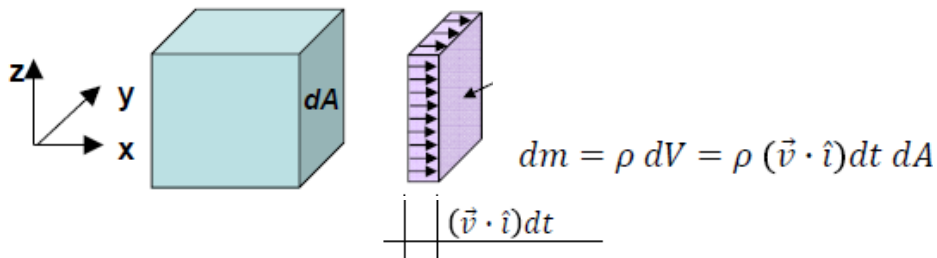


Figura 5.4 Masa de aire que atraviesa un diferencial de área (adaptado de Sordo 2013)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (5-5)$$

### 5.2.2.3 Ecuación constitutiva

Un fluido newtoniano es el modelo más simple para caracterizar la viscosidad (relación constitutiva) de un fluido. En términos generales el aire puede considerarse newtoniano, esto es, un flujo en donde el esfuerzo cortante proporcional al gradiente de velocidades, es decir, si el fluido es isotrópico y se considera incompresible (como el caso del viento) su relación constitutiva es:

$$\tau = \mu \left( \frac{\delta u}{\delta y} \right) \quad (5-6)$$

Donde  $\mu$  se conoce como viscosidad dinámica absoluta y tiene un valor de  $\mu = 1.82 \times 10^{-5}$  Pa-s, a 20° Celsius de temperatura, por lo tanto, esta expresión relaciona el patrón de velocidades con los esfuerzos cortantes.

### 5.3 Sistemas acoplados.

Estudios como *Valdés (2007)* demuestran que es importante y de considerar en un análisis de viento la deformación de una estructura debida a la interacción entre el viento y la estructura. Se han observado incrementos importantes en los esfuerzos así como en la distribución de presión debidos a esta interacción como se representa en la Figura 5.5. La presión que ejerce una corriente de viento sobre una estructura esbelta o flexible causa una deformación, cuando la estructura experimenta una recuperación modifica el viento que la rodea. Esta interacción influirá en la distribución de presiones y en la distribución de esfuerzos de la estructura, debido a esta deformación y recuperación.

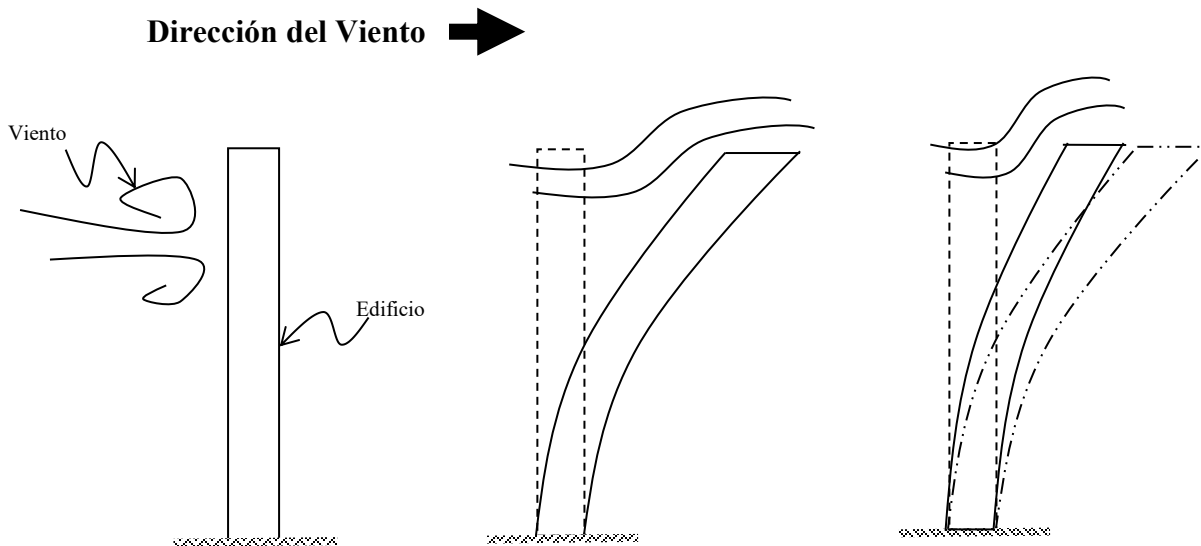


Figura 5.5. Elemento flexible sometido al flujo del viento.



Un problema de esta naturaleza se encuentra definido en la dinámica de fluidos. Con la dinámica de fluidos se puede acoplar diferentes dominios, por ejemplo, se puede acoplar un fluido (como el viento) con una estructura (un puente, un edificio una velaria etc.), interactuando uno con otro aunque cada uno tenga sus propias características, este fenómeno es directamente aplicable a una tenso-estructura, donde el fluido en movimiento deforma la superficie de la velaria. En *Zienkiewicz (2000)* se clasifica a este tipo de interacción como *clase 1*, en la que el acoplamiento de diferentes dominios ocurre en “zonas de interfaz” como se muestra en la Figura 5.6. Generalmente, estos dominios representan diferentes fenómenos físicos, pero es posible considerar un acoplamiento entre ellos, cada uno con una solución independiente pero esta no se puede llevar a cabo sin el desenlace de la otra.

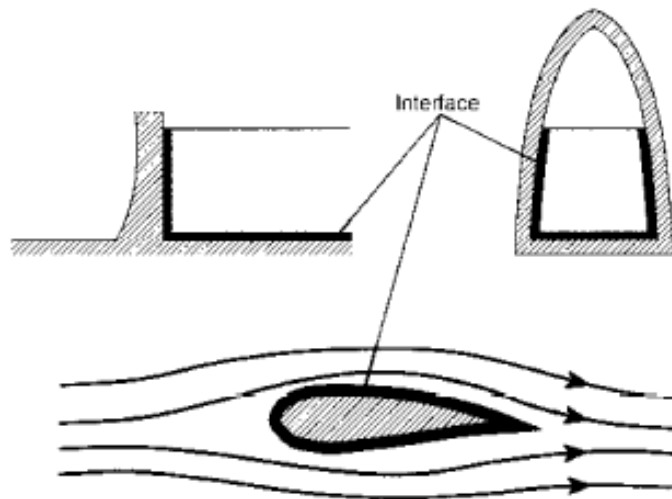


Figura 5.6. Zona de interface entre diferentes dominios (adaptada de *Zienkiewicz 2000*).

Para estimar el comportamiento de este fenómeno físico, se debe caracterizar el viento de acuerdo con las ecuaciones que gobiernan su movimiento promedio. Con estas ecuaciones así como los principios de la mecánica de sólidos se toman en cuenta las relaciones constitutivas (modelo de viscosidad para el fluido), de continuidad (o conservación de la masa para la parte del fluido), y de equilibrio para ambos casos. La solución de la ecuación de la dinámica para ambos sistemas acoplados es difícil de resolver por medio de métodos de solución exacta. Es posible resolver estas ecuaciones mediante iteraciones con incrementos de tiempo hasta que la solución converge dentro de una norma aceptable. Formulando ambos sistemas desde un enfoque de elementos finitos que realice el acoplamiento de los sistemas en la zona de interfaz se pueden obtener aproximaciones razonables.

### 5.3.1 Descripción matemática.

El procedimiento general a seguir para considerar que un sistema fluido-estructura está acoplado de una manera estándar (*Zienkiewicz 2000*), se debe aproximar el vector de desplazamiento ( $\mathbf{u}$ ) como:

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_u \tilde{\mathbf{u}} \quad (5-7)$$

Por otra parte en el fluido, el vector de presiones ( $\mathbf{p}$ ) se debe aproximar similarmente como:

$$\mathbf{p} \approx \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{N}_p \tilde{\mathbf{p}} \quad (5-8)$$

Donde  $\hat{\mathbf{u}}$  y  $\hat{\mathbf{p}}$  son los parámetros nodales para cada campo,  $\mathbf{N}_u$  y  $\mathbf{N}_p$  son sus respectivas funciones de forma. De acuerdo con esto, la ecuación de la dinámica en la parte estructural viene a ser de siguiente forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{p}} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (5-9)$$

Donde  $\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{p}}$  o también conocido como “término de acoplamiento” surge debido a las presiones obtenidas en la zona de interfaz. Los términos de las demás matrices son la matriz de masa  $\mathbf{M}$ , la matriz de rigideces  $\mathbf{K}$ , la matriz de amortiguamiento  $\mathbf{C}$  y el vector de fuerzas externas  $\mathbf{f}$ .

La discretización Galerkin estándar aplicada a un sistema débil de acoplamiento es:

$$\mathbf{S}\ddot{\tilde{\mathbf{p}}} + \mathbf{C}\dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \mathbf{H}\tilde{\mathbf{p}} + \mathbf{Q}^T\ddot{\tilde{\mathbf{u}}} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (5-10)$$

Es posible considerar un acoplamiento débil entre sistemas de tipo fluido-estructura (*Zienkiewicz 2000*), debido a que el enlace entre la ecuación del viento-y la ecuación de la estructura es tan débil, que en la solución general se puede considerar que los dos sistemas son completamente independientes.

Ansys emplea dos métodos de acoplamiento que se adaptan a las técnicas de formulación de elementos finitos utilizados para la solución de los sistemas acoplados, estos métodos son; el “**acoplamiento fuerte**” también llamado simultaneo o completo, y el “**acoplamiento débil**” también llamado secuencial; por simplicidad se representa con dos de los grados de libertad ( $\{\mathbf{X}_1\}$ ,  $\{\mathbf{X}_2\}$ ).

### 5.3.2 Acoplamiento fuerte

**1.-Método Fuerte.** En la ecuación (5-5) el efecto del acoplamiento se toma en cuenta por las sub-matrices  $[\mathbf{K}_{12}]$  y  $[\mathbf{K}_{21}]$  fuera de la diagonal, este método provee la solución en una iteración. El esquema de solución es de la forma:

$$\begin{pmatrix} [\mathbf{K}_{11}] & [\mathbf{K}_{12}] \\ [\mathbf{K}_{21}] & [\mathbf{K}_{22}] \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbf{X}_1\} \\ \{\mathbf{X}_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\mathbf{F}_1\} \\ \{\mathbf{F}_2\} \end{bmatrix} \quad (5-11)$$

### 5.3.3 Acoplamiento débil

**2.-Metodo débil.** En la ecuación (5-6) el efecto del acoplamiento se considera independientemente por  $[\mathbf{K}_{11}]$  y  $\{\mathbf{F}_1\}$  en  $\{\mathbf{X}_2\}$ , así como,  $[\mathbf{K}_{22}]$  y  $\{\mathbf{F}_2\}$  en  $\{\mathbf{X}_1\}$ , donde al menos dos iteraciones son necesarias para lograr la respuesta del acoplamiento; el esquema de solución es de la forma:

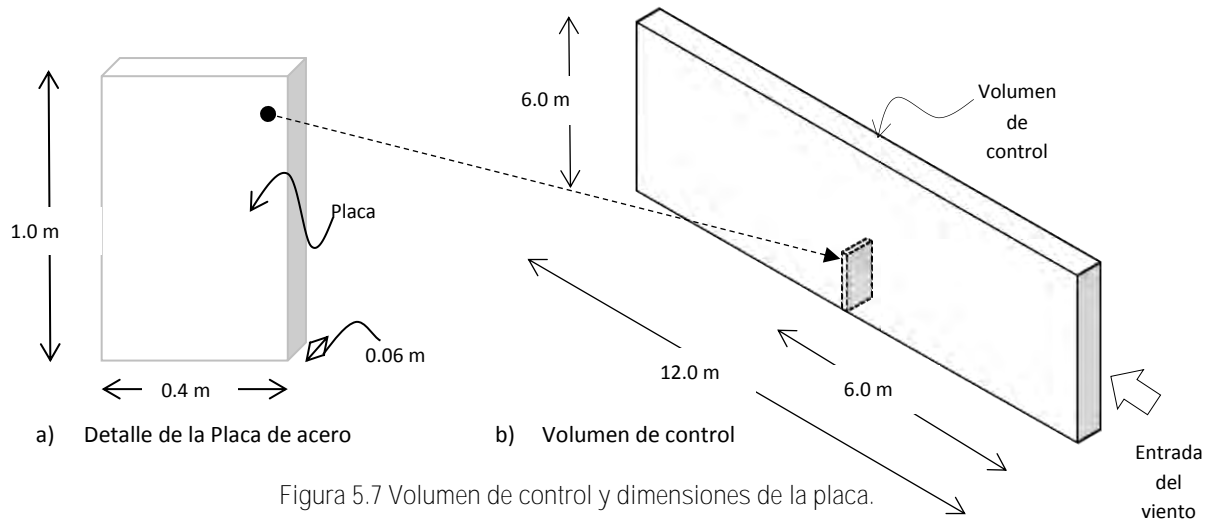
$$\begin{pmatrix} [\mathbf{K}_{11}(\{\mathbf{X}_1\}, \{\mathbf{X}_2\})] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}_{22}(\{\mathbf{X}_1\}, \{\mathbf{X}_2\})] \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbf{X}_1\} \\ \{\mathbf{X}_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\mathbf{F}_1(\{\mathbf{X}_1\}, \{\mathbf{X}_2\})\} \\ \{\mathbf{F}_2(\{\mathbf{X}_1\}, \{\mathbf{X}_2\})\} \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

La secuencia de solución de Ansys® sigue la metodología estándar para elementos finitos, en donde, se considera que se llegó la solución cuando la convergencia para todos los grados de libertad es menor a un valor específico de tolerancia. Ansys considera que el sistema ha convergido utilizando el criterio RMS (Roots Mean Square). En los sistemas que acoplan un fluido (viento), mediante la transferencia de presión a desplazamientos (hacia la estructura) en zonas de interfaz, Ansys utiliza la forma de acoplamiento débil para la solución de este tipo de sistemas.

## 5.4 Oscilación de una placa de acero

### 5.4.1 Dimensiones y características

Con el fin de encontrar la ruta de ajuste de parámetros para el análisis de sistemas acoplados en el programa Ansys, se realizó el análisis de interacción de una placa de acero sometida a un flujo laminar de viento (10 m/s) propuesta en la ayuda del programa Ansys, la cual consiste de una placa de acero A-36 ksi, que tiene 1.0 m de altura, 0.40 m de ancho y 0.06 m de espesor, como se muestra en la Figura 5.7 (a). La placa se encuentra al centro dentro de un volumen de control cuyas dimensiones se muestran en la Figura 5.7 (b); la entrada del viento se realiza de derecha a izquierda.



En una hoja de trabajo de Ansys Workbench se agregaron los módulos para realizar el análisis de interacción como se muestra en la Figura 5.8. El sistema estructural transitorio “**transient structural**” o parte A, contiene todos parámetros y definición de dominio aplicables a la estructura, en este caso la placa, tales como: la estructuración de la malla de elementos finitos, módulo de elasticidad, peso específico, masa, límite de fluencia, etc. El módulo de flujo de viento “**Fluid Flow o Fluent**” o parte B, contiene los parámetros y la definición de dominios aplicables al viento, por ejemplo, la estructuración de la malla de elementos finitos del volumen de control, peso específico del viento, velocidad, etc.

En el módulo C o de acoplamiento de sistemas “**system coupling**”, se ajustaron los límites de convergencia, iteraciones, zonas de transferencia y tiempo de análisis. El esquema de conexión de cada una de las partes antes descritas se muestra en la Figura 5.8. Los detalles y características de cada pestaña se pueden consultar en la Tabla 5.1.

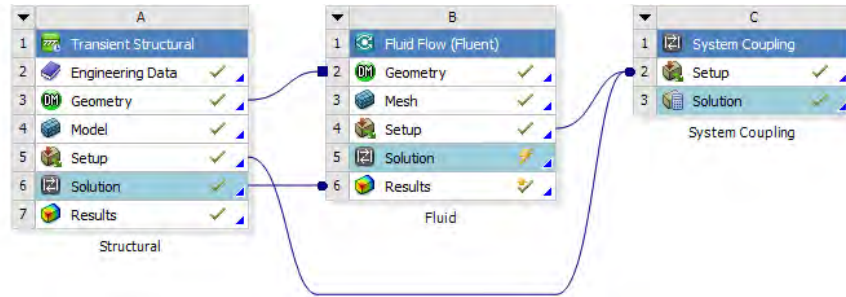


Figura 5.8. Diagrama de conexiones para un acoplamiento de sistemas en Ansys Workbench.

Tabla 5.1. Descripción de los sistemas A, B, y C en Ansys system coupling.

PARTE	CONTENIDO
<b>Transient Structural</b>	
<b>Engineering Data</b>	Contiene Propiedades de los materiales, módulo de elasticidad, límite de fluencia, módulo de Poisson, Modulo de Cortante, etc.
<b>Geometry</b>	Se define la geometría de los elementos con propiedades mecánicas.
<b>Model</b>	En esta parte se realiza el estructuramiento de la malla de elementos finitos del elemento a analizar
<b>Setup</b>	Son las condiciones iniciales del sistema estructural, apoyos, zonas de interface, etc.
<b>Solution</b>	Contiene la solución del sistema estructural.
<b>Results</b>	Se presentan de manera gráfica los resultados
<b>Fluid Flow (Fluent)</b>	
<b>Geometry</b>	Contiene la geometría del volumen de control (túnel de viento).
<b>Mesh</b>	En esta parte se realiza el estructuramiento de la malla del túnel de viento.
<b>Setup</b>	Contiene los parámetros para el análisis de viento, condiciones iniciales, velocidades de viento, zonas de interface, etc.
<b>Solution</b>	Contiene la solución del sistema de viento.
<b>Results</b>	Presenta de manera gráfica los resultados obtenidos.
<b>System coupling</b>	
<b>Setup</b>	Contiene los parámetros para el acoplamiento de los sistemas, tiempo de análisis, zonas por acoplar, etc.
<b>Solution</b>	Contiene la solución del sistema acoplado.

### 5.4.2 Modelo de elementos finitos

La malla de elementos finitos de la placa que se estructuró en la parte A del diagrama de acoplamiento, es decir, en el paso 4 de la Figura 5.9 (a), donde se definieron las condiciones de apoyo fijo en la base, ver Figura 5.9 (b), y la zona de interfaz en la Figura 5.9 (c), seleccionando las caras con las cuales habrá de interactuar con el viento. El tiempo de duración del análisis se puede ajustar; sin embargo, se dejó tal como se encuentra predeterminado, ya que este tiempo se controla desde el módulo “system coupling”.

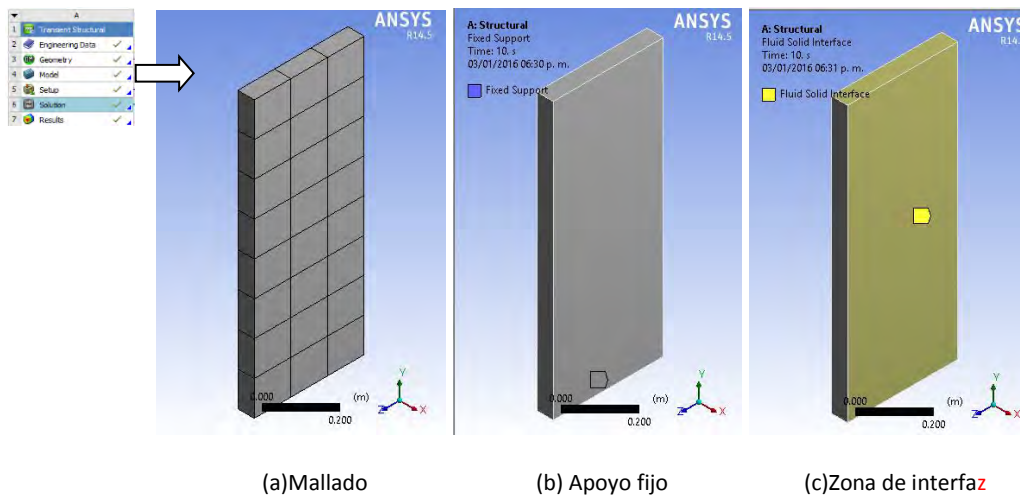


Figura 5.9. Ajuste de parámetros en la placa.

### 5.4.3 Propiedades mecánicas

Las propiedades mecánicas tales como, peso volumétrico, límite de fluencia, modulo elástico; etc., se ajustaron en la parte denominada como “datos de ingeniería” (pestaña 1 Figura 5.8), utilizadas por el programa para encontrar la solución de la placa de acero sometida a la acción del viento, son las que se muestran en la Tabla 5.2

Tabla 5.2. Propiedades mecánicas de la placa.

Parte	Valores
Transient structural	
Peso específico: $\rho_{\text{acero}}$ (kg/m <sup>3</sup> ).	7,850.00
Módulo de elasticidad: E (kg/m <sup>2</sup> ).	2'039,000.00
Límite de Fluencia: $f_y$ (kg/m <sup>2</sup> ).	2,530.00
Coefficiente de Poisson: $\nu$	0.30

#### 5.4.4 Volumen de control

Se definió la geometría del volumen de control (parte B Figura 5.8), correspondiente al fluido, en este caso, referente al viento, con las dimensiones propuestas en la Figura 5.7 (b). Al estructurarse la malla de elementos finitos se dejó libre o hueca la zona donde se alojará la placa como se muestra en la Figura 5.10(c). Además se definió una zona llamada “Deform” formada por las tres caras de esta parte hueca debido a que la malla en esta zona se deformara junto con la placa, es recomendable nombrar esta malla con el nombre “Deform” como tal, debido a que Ansys Fluent lo reconoce y lo identifica como malla deformable.

Además se definieron las diferentes zonas como la zona “inlet”, que es la cara por donde entra el viento, “outlet” salida de viento y “symmetry” cara larga definida como eje de simetría, como se muestra en la Tabla 5.3.

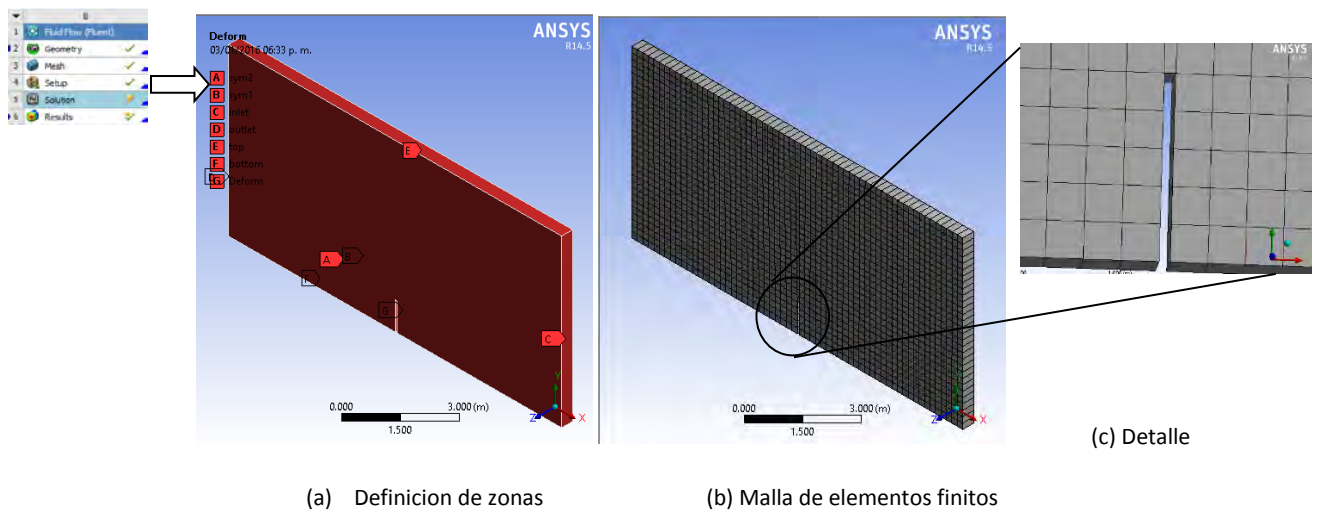


Figura 5.10 Malla y zonas del volumen del control.

### 5.4.5 Parámetros de la caracterización del viento

Se identificó cada zona con una etiqueta o un nombre reconocible en Ansys Fluent para las diferentes caras del volumen de control mostradas en la Figura 5.10(a), que servirá para identificar los diferentes límites y, además, se les asignó funciones en la etapa de análisis. En la Tabla 5.3 se proporciona el significado y función de cada una de estas zonas que se ajustaron en la parte B o especial para el fluido, en la pestaña 4 denominada “setup” de la Figura 5.8.

Tabla 5.3. Condiciones iniciales del volumen de control.

Zonas	Condición	Tipo de malla
Inlet	Entrada del viento.	Estacionaria
Deform	Zona de interface	De acoplamiento
Top	Límite superior.	Estacionaria
Bottom	Límite inferior.	Estacionaria
Sym1	Pared de simetría.	Deformable
Sym2	Pared de simetría.	Deformable
Outlet	Salida del viento.	Estacionaria

Fluid Flow (Fluent)	
Solución	transient
Modelo	Laminar
Densidad del viento: $\rho_{\text{viento}}$ (kg/m <sup>3</sup> ).	1.00
Velocidad de entrada: inlet (m/s)	10.00
Viscosidad: $\mu$ (kg/m-s)	0.2

Aunque no se cuenta con una mayor información acerca de cómo se determinaron las propiedades del viento reportadas en la Tabla 5.3 tales como: densidad, viscosidad o velocidad. No es posible determinar si los resultados del análisis son representativos ya que Ansys no explica si estos se determinaron con base en pruebas experimentales o si es sólo asunto ilustrativo. Aun así, dado que el objetivo de realizar este ejercicio fue familiarizarse con el entorno del programa Ansys e identificar todas las rutas a seguir en donde se ajustan todos estos parámetros y como se conectan los diferentes dominios, podemos concluir que es de gran utilidad.

### 5.4.6 Solución

Una vez que la solución converge (sistema RMS RootsMeanSquare), el programa proporciona el aviso mediante un mensaje como el de la Figura 5.11, los resultados se pueden consultar entonces conectando la pestaña 6 “solution” de la parte estructural. Con la pestaña 6 “Results” se presenta gráficamente los resultados como se presentan en las secciones siguientes; se enumeraron los nodos, como se muestra en la Figura 5.12, donde se tomaron los resultados del análisis para una mejor interpretación de los resultados.



```

Structural                               Converged
Data Transfer 2                          4.86645e-003  4.09227e-003
Change:RMS
Fluid                                     Converged
Data Transfer                             4.73241e-003  4.77289e-003
Change:RMS

-----
Shut Down
-----

System Coupling Service shut down...
System coupling run completed successfully.

```

System Coupling	
Duración del análisis: (seg)	40.00
Incremento de tiempo: (seg)	0.10

Figura 5.11. Aviso de que el programa concluyó las operaciones correctamente.

### 5.4.7 Resultados

Con base en la numeración de nodos de la Figura 5.12, los nodos 1, 2, 23 y 24 no se tomaron en cuenta para presentar los resultados por estar fijos en la base. Además no se analizaron los resultados de los nodos 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 y 21 ya que estos valores son muy similares a los de los nodos 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 y 22 respectivamente, por lo tanto, solo los nodos en color azul se utilizaron en la presentación de resultados.

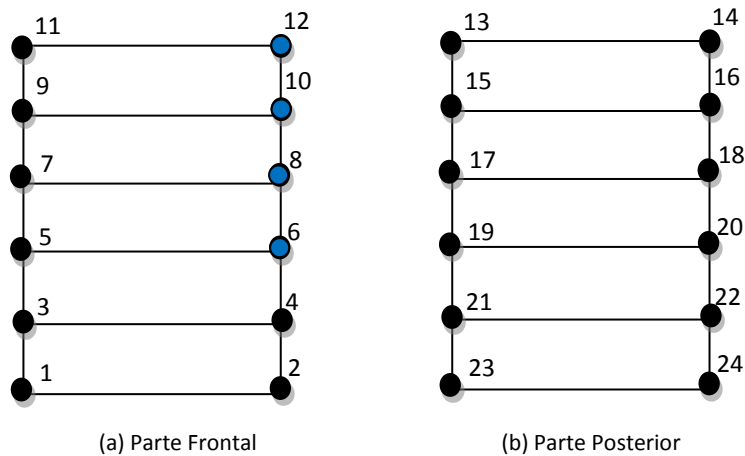
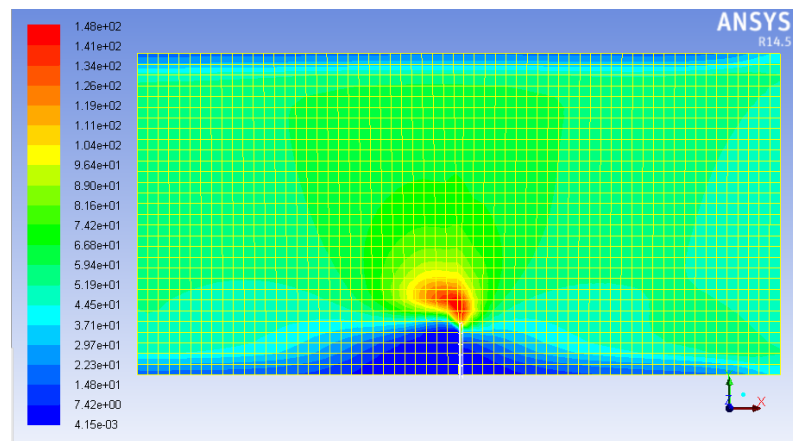
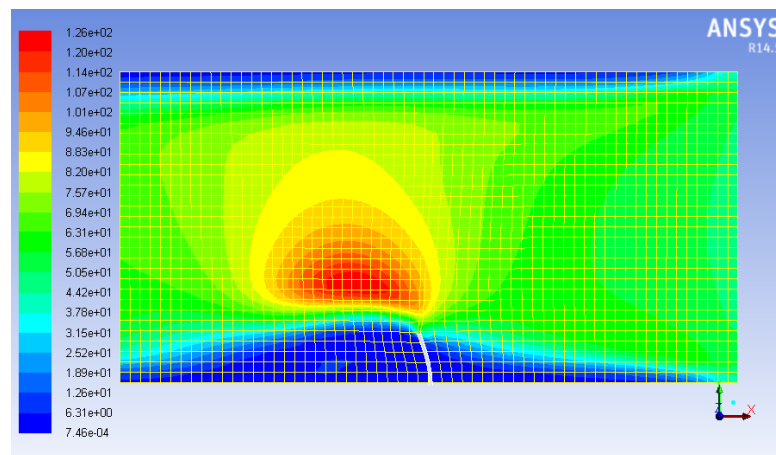


Figura 5.12. Identificación de los nodos de muestreo.

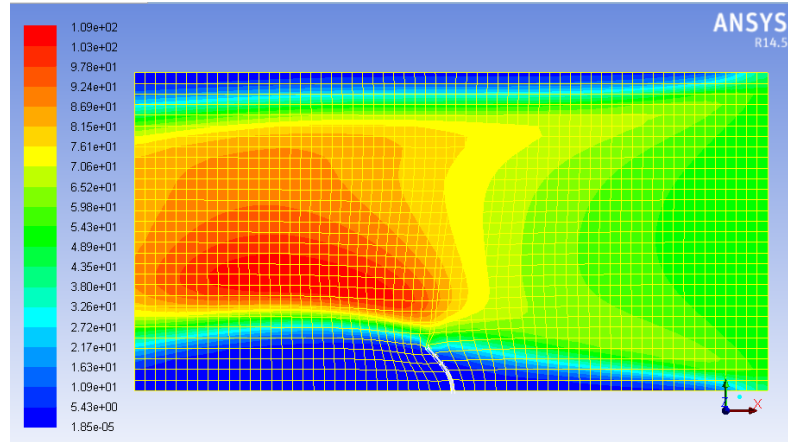
Los resultados derivados de este análisis se presentan a continuación de manera gráfica, por ejemplo, en la Figura 5.13, se puede ver la distribución de la presión dinámica a través del volumen de control y su interacción con la placa en el tiempo. Tomando como referencia el nodo 12 de la placa (Figura 5.12) se observa que para un tiempo de una décima de segundo ( $t = 0.1\text{s}$ ) la presión dinámica alcanza inmediatamente su valor máximo  $P_D = 124.9715\text{ Pa}$ , en este instante de tiempo la placa esta practicamente vertical, ocasionando una reduccion en de la altura del volumen de control, debido a esto el viento se aumenta su velocidad en esta zona (en ese instante se tiene una velocidad aproximada de  $V = 17\text{ m/s}$ ), por lo tanto, alcanza un nivel maximo de presión dinámica.



(a) Presión dinámica (Pa),  $t = 0.1\text{ seg.}$



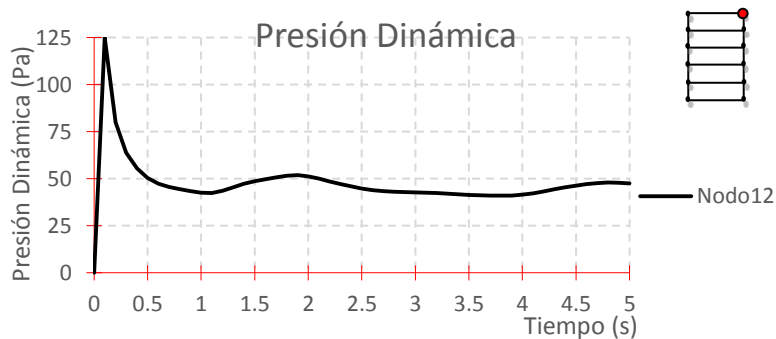
(b) Presión dinámica (Pa),  $t = 0.5\text{ seg.}$



(c) Presión dinámica (Pa),  $t = 1.2$  seg. Desplazamiento máximo de la placa de 0.5 m.

Figura 5.13 Presión dinámica y deformación en la placa para diferentes instantes de tiempo.

Conforme el tiempo de análisis avanza y la placa interactúa con el viento, la presión dinámica decrece rápidamente. Este efecto es ocasionado por la deformación de la placa que interactúa con el viento, como se observa en la Figura 5.14 (a), tan solo 4 décimas de segundo después, es decir, en  $t = 0.5$ , la presión dinámica ha caído aproximadamente a la mitad del valor máximo calculado. Este mismo efecto se puede ver en los nodos, 10, 8 y 6 como se muestra en las siguientes gráficas.



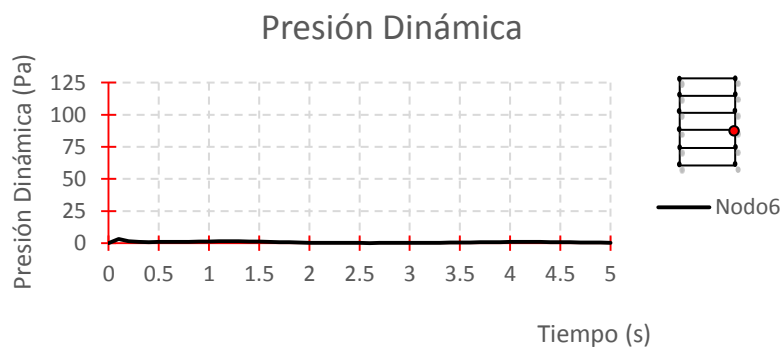
(a) Presión dinámica en el Nodo 12.



(b) Presión dinámica en el Nodo 10.



(c) Presión dinámica en el Nodo 8.



(d) Presión dinámica en el Nodo 6.

Figura 5.14. Historia de la presión dinámica contra el tiempo en diferentes puntos de muestreo en la placa.

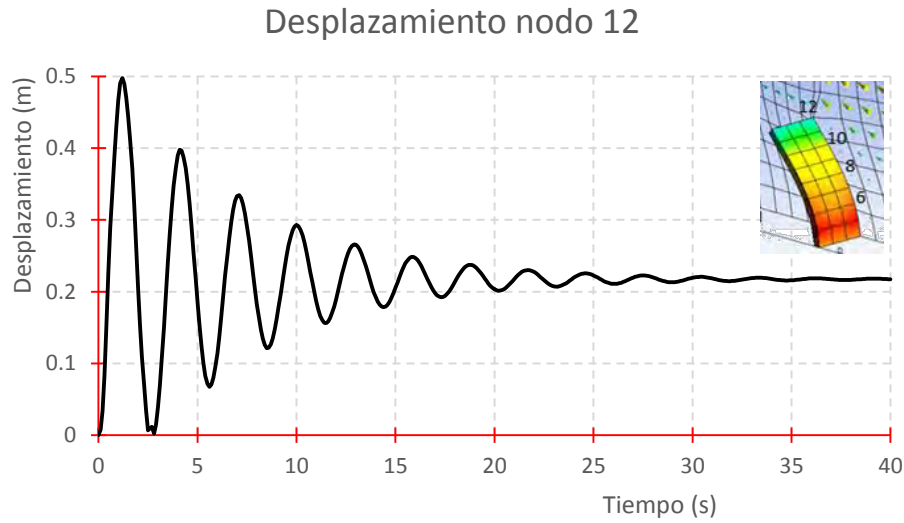


Figura 5.15. Desplazamiento en el tiempo del nodo 12.

Además, el desplazamiento máximo fue el reportado en el nodo 12. Este desplazamiento ( $\delta$ ) fue de magnitud  $\delta = 0.5$  m obtenido en un tiempo  $t = 1.2$  s (Figura 5.15) a este le corresponde a una presión dinámica de 43.5596 Pa. Esta presión representa aproximadamente a un tercio del valor máximo calculado como se muestra en el resumen de graficas que se muestra en la Figura 5.16.

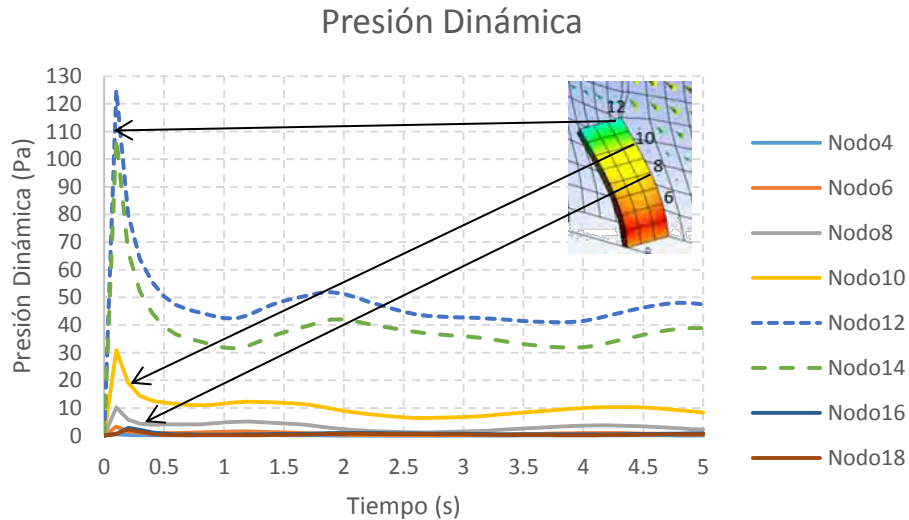


Figura 5.16. Registro de la presión dinámica contra el tiempo.

## 5.5 Respuesta de los modelos CFORM1 y G14H1.

En las secciones 5.5.2 y 5.5.3 de este capítulo se examina el comportamiento de los modelos CFORM1 y G14H1 (figuras 4.7 y 4.8 respectivamente) planteados en el capítulo 4. Se consideró en el análisis dos versiones de cada modelo, una versión en membrana flexible y otra en membrana rígida. Como sabemos el modelo CFORM1 cuenta con un examen de la forma, por lo tanto, cuenta con una superficie de tensión. En la sección 5.5.1 se precisan los procedimientos y parámetros utilizados en la solución.

### 5.5.1 Condiciones iniciales y parámetros para el análisis

Todas las propiedades mecánicas, en el fluido como de la membrana considerada (velaria), así como las condiciones iniciales, y parámetros del acoplamiento se encuentran especificados en la Tabla 5.4 y la Tabla 5.5. Se consideró los mismos ajustes para el modelo CFORM1 y G14H1. En el caso en que se trata de una superficie rígida no se asignaron propiedades mecánicas debido a que no existe un sistema acoplado, es decir, solo existe la parte del fluido. En la cara frontal del volumen de control donde entra el viento, denominada como “inlet”, las condiciones iniciales son:  $V_x = 5.48 \text{ m/s}$ ,  $V_y = 0 \text{ m/s}$  y  $V_z = 0 \text{ m/s}$ . Por otra parte, la zona de salida del viento se denomina como “outlet” se ajustó para que sea una salida de presión. La zona denominada “deform” que envuelve a la membrana con propiedades mecánicas Figura 4.6 es la zona que se define como de acoplamiento, esto es, la zona en la que se define una interfaz de acoplamiento de dominios fluido-sólido. Una recomendación oportuna es la de nombrar de esta manera para que Ansys reconozca automáticamente cada zona. El esquema de acoplamiento de dominios en Ansys Workbench queda como el que se muestra en la Figura 5.17.

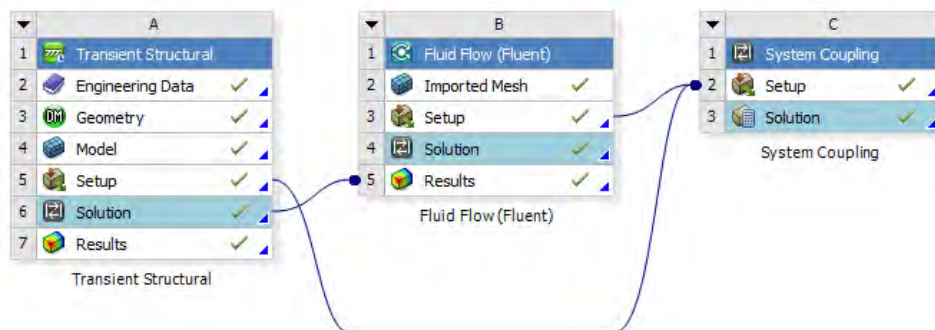


Figura 5.17. Esquema de acoplamiento de dominios de los modelos CFORM1 y G14H1

Tabla 5.4. Ajustes necesarios para el análisis de interacción

Zonas	Condición	Tipo de malla
Inlet	Entrada del viento: $V_x, V_y, V_z$	Estacionaria
Deform	Zona de interface: de acoplamiento	De acoplamiento
Top	Límite superior.	Estacionaria
Bottom	Límite inferior.	Estacionaria
Sym1	Pared de simetría.	Deformable
Sym2	Pared de simetría.	Deformable
Outlet	Salida del viento.	Estacionaria

Los parámetros y las propiedades mecánicas de la membrana, del fluido y del sistema de acoplamiento se enlistan en la Tabla 5.5.

Tabla 5.5. Parámetros utilizados para el análisis

Parte	Valores
<b>Transient structural</b>	
Peso específico: $\rho_{\text{membrana}}$ ( $\text{kg/m}^3$ ).	1,267.00
Módulo de elasticidad warp: E (Pa).	4.4444e+08
Módulo de elasticidad weft: E (Pa).	4.4444e+08
Límite de Fluencia warp: $f_y$ (kg/kN).	980
Límite de Fluencia weft: $f_y$ (kg/kN).	980
Coefficiente de Poisson: $\nu$	0.4
<b>Fluid Flow (Fluent)</b>	
Solución	transient
Modelo	Estándar k- $\epsilon$
Densidad del viento: $\rho_{\text{viento}}$ ( $\text{kg/m}^3$ ).	1.1850
Velocidad de entrada: inlet (m/s)	5.4800
Viscosidad: $\mu$ (kg/m-s)	1.7894e-05
<b>System Coupling</b>	
Duración del análisis: (seg)	5.00
Incremento de tiempo: (seg)	0.10
Data transfer	
Zona Deform	Desplazamiento
Fluid Solid inteface	Presión

El propósito fundamental de los modelos CFORM1 y G14H1 es comparar entre sí el comportamiento o la respuesta tal como haría en un análisis convencional., es decir, con una superficie rígida, cuando se trata de una superficie rígida no es necesario asignar las propiedades mecánicas de la membrana. Por otra parte, en el caso en que se considera la flexibilidad de la membrana deformable tomo en consideración un módulo de elasticidad de magnitud  $E = 4.4444 \times 10^8$  Pa, que corresponde a una membrana tipo 5 con un límite de fluencia de 980 kN, en ambas direcciones (urdimbre y trama) Figura 2.8, y una relación de Poisson de  $\nu = 0.4$  estos datos se encuentran en la Tabla 5.5.

### **5.5.2 Resultados modelo CFORM1**

Tomando en cuenta las densidades de fuerza descritas en el capítulo 4 (Figura 4.3), se calculó una superficie de tensión para el modelo CFORM1. Este modelo se colocó dentro del volumen de control. Se simuló el flujo del viento a través del túnel durante 10 segundos de análisis y se registró su comportamiento sobre la membrana del modelo considerando la flexibilidad de esta. La interacción entre los diferentes dominios se logró a través zona de interfaz fluido-sólido definido entre la velaria y el volumen de control. La zona de interfaz fluido-sólido entre estas dos mallas es esencial para que el programa realice el acoplamiento de dominios. Luego, se capturo la presión dinámica y la presión estática para cada instante de tiempo, luego, se graficó en un sistema coordenado Figura 5.19 , esto fue así, para los nodos 226, 301 y 559 que son los tres puntos de muestreo localizados en diferentes zonas del modelo (Figura 5.18), determinados a partir de los esfuerzos máximos que ahí se registraron. Los resultados obtenidos se compararon con el estudio experimental que se presenta en la guía de diseño europeo *Forstern y Mollaert (2004)* utilizado para calibrar los modelos, este se muestra en Figura 5.32.



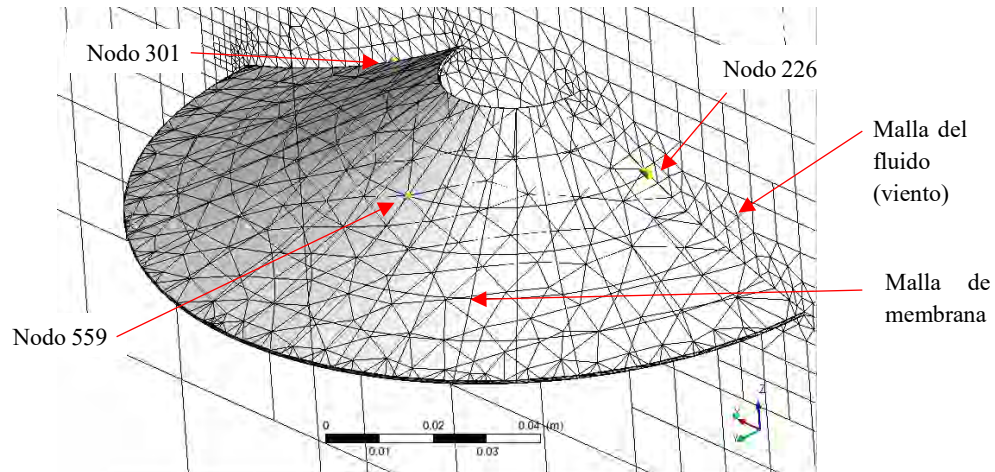


Figura 5.18. Puntos de muestreo en el modelo CFORM1

El resultado del registro de presiones en el nodo 226 del modelo numérico de la Velaria cónica CFORM1 flexible son las curvas mostradas en los ejes coordenados de la figura 5.16. Como puede observarse sólo se presentan los primeros 5 segundos de análisis por considerar que la respuesta después del primer segundo no cambia. En este punto de muestreo (que está localizado frente a la entrada del viento) se obtuvo una presión estática positiva,  $P_{E226F} = 5.49$  Pa en  $t=0.2$  s. Rápidamente disminuye llegando a 5.08 Pa y se mantiene después de  $t = 0.5$  s. Por otra parte, la presión dinámica máxima fue de magnitud  $P_{D226F} = 13.0$  Pa que disminuye rápidamente a 12.3817 Pa después de  $t=0.5$  s y se mantiene constante. Al comparar estas magnitudes con los resultados obtenidos del análisis del modelo CFORM1 en su versión rígida  $P_{E226R} = 5.09$  Pa y  $P_{D226R} = 12.4$  Pa (presión estática y presión dinámica respectivamente), se observa que estos son ligeramente más bajos que los del análisis CFORM1 flexible.

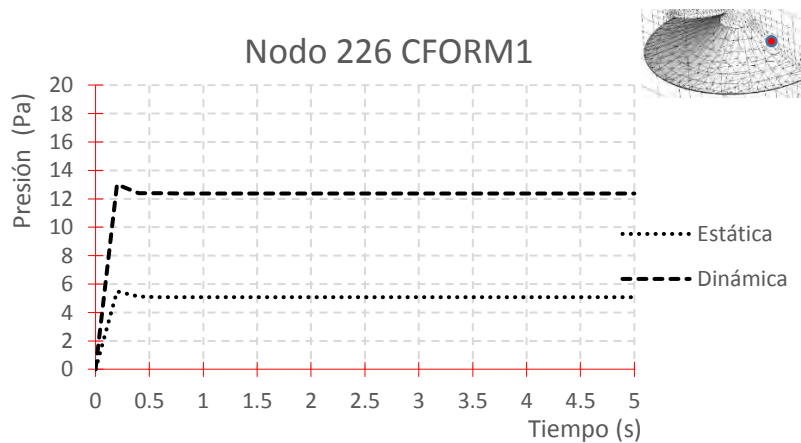


Figura 5.19. Curvas de presión en el tiempo para el nodo 226, modelo CFORM1 flexible.

En el caso del nodo 301 del mismo modelo se observa un comportamiento totalmente distinto al nodo 226, pues ahora se tienen valores negativos de presión, estos corresponden a una succión. La magnitud máxima de la presión estática fue  $P_{E301F} = -11.90$  Pa en  $t = 0.2$  s, reduciéndose a  $-9.80$  Pa en  $t=0.5$  s, como se muestra en la Figura 5.20. Por otra parte, la presión dinámica alcanza un valor máximo  $P_{D301F} = 6.31$  Pa para el mismo instante de tiempo ( $t = 0.2$  s), se reduce a  $4.85$  Pa en  $t = 0.5$  s y se mantiene constante. Estos valores para el modelo de versión rígida son  $P_{E301R} = -9.69$  Pa y  $P_{D301R} = 4.80$  Pa respectivamente.

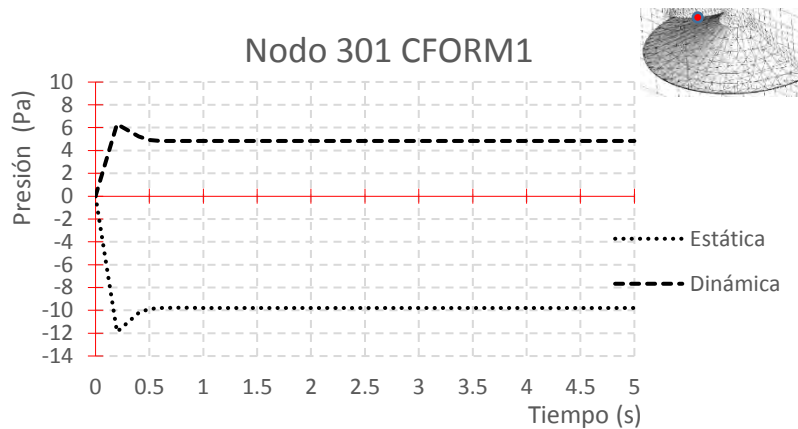


Figura 5.20. Curvas de presión en el tiempo para el nodo 301, modelo CFORM1 flexible.

En el nodo 559 se observó una presión dinámica mayor que la estática, pues se tiene una magnitud máxima  $P_{E559F} = -9.37$  Pa y  $P_{D559F} = 24.40$  Pa en  $t = 0,2$  s, Figura 5.21. Mientras que para el modelo de superficie rígida son de  $P_{E559R} = -8.60$  Pa y  $P_{D559R} = 23.00$  Pa, respectivamente.

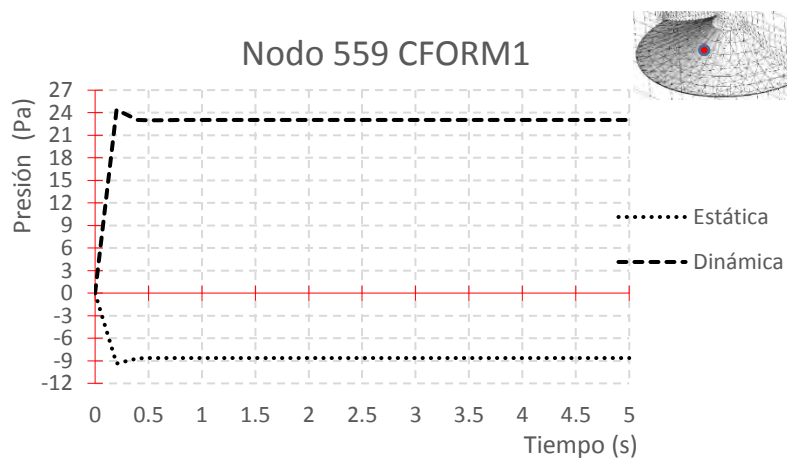


Figura 5.21. Curvas de presión en el tiempo para el nodo 559, modelo CFORM1 flexible.

Tabla 5.6 Resumen de las magnitudes máximas de presión obtenida para el modelo CFORM1

Modelo:	CFORM1				
	Nodo	Magnitud	Magnitud	Diferencia	Relación
		En el Modelo	En el Modelo		
		Flexible	Rígido		
Presión estática	226	5.49	5.09	0.4	1.07
Presión dinámica	226	13.0	12.4	0.6	1.04
Presión estática	301	-11.9	-9.69	2.21	1.23
Presión dinámica	301	6.31	4.80	1.51	1.31
Presión estática	559	-9.37	-8.60	0.77	1.09
Presión dinámica	559	24.40	23.00	1.40	1.06

En la Tabla 5.6 que se compara los resultados del modelo CFORM1 (flexible y rígido) se observa que existe una pequeña variación en el caso del nodo 226, esta variación fue del 7% y 4% entre la presión estática y la dinámica respectivamente. En el caso del nodo 301 existe una diferencia un poco más marcada, pues se registró una diferencia de 2.21 Pa entre el modelo flexible y el modelo rígido lo que representa una variación de un 22% de la magnitud entre un modelo y otro, en lo que respecta a la presión dinámica se tiene una diferencia de 1.51 Pa esto representa un 31% de aumento en su magnitud. En el nodo 559 existe una diferencia de 0.77 Pa lo que representa un 9.0% de aumento de esta presión, y una diferencia de 1.40 Pa que representa un 6.0% de aumento para la presión dinámica.

### 5.5.3 Resultados modelo G14H1

El modelo G14H1 representa una Velaria de tipo cónica cuyas dimensiones geométricas se han propuesto con base en especificaciones (Álvarez 2012), y no por medio de un análisis de la forma, es decir, carece de una superficie de tensión. El resultado es un modelo con trayectorias curvas más prolongadas que las del modelo CFORM1. Esta geometría impactó directamente en la respuesta de esta tenso-estructura. Al graficar el las presiones reportadas en el nodo 115 de los primeros 5 segundos de análisis. Se tiene que, particularmente en este punto, la magnitud de la presión estática es muy similar a la presión dinámica (a la izquierda de la Figura 5.22 se encuentra el registro de las magnitudes obtenidas; la columna de la izquierda corresponde a la presión estática mientras que los valores de la columna de la derecha pertenecen a la presión dinámica).



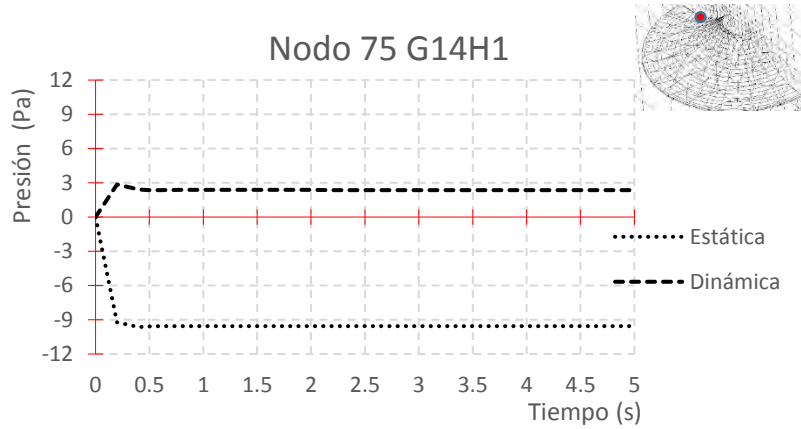


Figura 5.23 Curvas de presión en el tiempo para el nodo 75, modelo G14H1

Por último, se investigó la respuesta en el nodo 155 (Figura 5.24) del modelo G14H1, cuya presión dinámica y estática máximas tienen una magnitud del orden de  $P_{E155F} = -11.70$  Pa y  $P_{D155F} = 25.8$  Pa en  $t = 0.2$  segundos respectivamente. Para el modelo con superficie rígida estas magnitudes con del orden de son  $P_{E155R} = -11.3$  Pa y  $P_{D155R} = 25.1$  Pa en  $t = 0.2$  segundos,

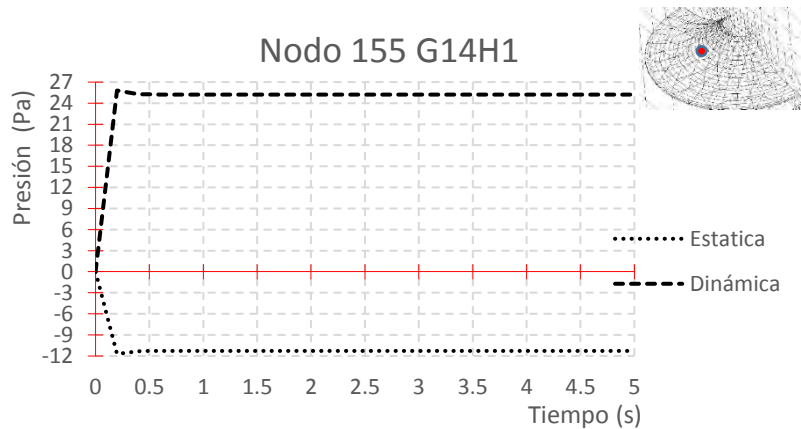


Figura 5.24 Curvas de presión en el tiempo para el nodo 155, modelo G14H1

Las magnitudes máximas de las presiones para el modelo G14H1 de membrana flexible son  $P_{E115F} = 8.41$  Pa y  $P_{D115F} = 8.41$  Pa, el modelo G14H1 rígido reporta las magnitudes de  $P_{E115R} = 7.86$  Pa y  $P_{D115R} = 7.82$  Pa estáticas y dinámicas, respectivamente, como se muestra en el resumen de la Tabla 5.7

Tabla 5.7 Resumen de las magnitudes máximas de presión obtenidas para el modelo G14H1

Modelo:	G14H1				
	Nodo	Magnitud	Magnitud	Diferencia	Relación
		En el Modelo	En el Modelo		
		Flexible	Rígido		
Presión estática	115	8.41	7.86	0.55	1.07
Presión dinámica	115	8.41	7.82	0.59	1.07
Presión estática	75	-9.64	-9.52	0.12	1.01
Presión dinámica	75	2.85	2.31	0.54	1.23
Presión estática	155	-11.70	-11.30	0.4	1.035
Presión dinámica	155	25.8	25.1	0.7	1.03

En el caso del nodo 115, también se observa una pequeña variación entre los resultados obtenidos, para este modelo (G14H1) se obtuvo un incremento de un 7% de la presión estática y dinámica para este punto. En el caso del nodo 75 existe una corta diferencia para la presión estática, pues entre el modelo flexible y el modelo rígido se encontró un 1% de diferencia, en cuanto a la presión dinámica se obtuvo 23% de aumento en su magnitud. En el nodo 115 existe un aumento de un 3.5% para la presión estática, y un 3.0% de aumento para la presión dinámica.

#### 5.5.4 Resumen de resultados de Modelos CFORM1 y G14H1

En las dos secciones anteriores se expuso el comportamiento de los modelos CFORM1 y G14H1 por separado, la Tabla 5.8 es el resumen de estos resultados calculados en donde es muy fácil comparar la respuesta entre los dos modelos en su versión flexible como la versión rígida; por ejemplo, en la presión estática en el nodo 226 del modelo CFORM1 flexible y la presión estática del modelo G14H1 flexible en el nodo 115 (encuentran aproximadamente en la mismas coordenadas de ambos modelos), tienen una magnitud  $P_{E226F} = 5.49$  Pa y  $P_{E115F} = 8.41$  Pa respectivamente, en cuanto a la presión dinámica se refiere les corresponde una magnitud  $P_{D226F} = 13.0$  Pa y  $P_{D115F} = 8.41$  Pa.

Estas diferencias e incrementos tan marcados de las magnitudes calculadas, pueden deberse a que las curvaturas de los modelos son completamente diferentes, por lo tanto, puede decirse que se están comparando respuestas de modelos completamente distintos. Esto sucede cuando se compara un modelo que cuenta con una superficie de tensión (Modelo CFORM1) en relación a un modelo sin superficie de tensión, por lo tanto, se concluye que se debe calificar el comportamiento de estos modelos por separado.

Tabla 5.8 Tabla comparativa entre modelos CFORM1 y G14H1

Modelo:	CFORM1 / G14H1				
	Nodo	Magnitud En el Modelo Flexible	Magnitud En el Modelo Flexible	Diferencia Valor Abs	Relación Valor Abs
Presión estática	226/115	5.49	8.41	2.92	1.5318
Presión dinámica	226/115	13.0	8.41	4.59	1.5457
Presión estática	301/75	-11.91	-9.64	2.26	1.2344
Presión dinámica	301/75	6.31	2.85	3.41	2.2140
Presión estática	559/155	-9.37	-11.70	2.33	1.2487
Presión dinámica	559/155	25.8	24.4	1.40	1.0573
		Magnitud En el Modelo Rígido	Magnitud En el Modelo Rígido	Diferencia Valor Abs	Relación Valor Abs
Presión estática	226/115	5.09	7.66	2.57	1.5049
Presión dinámica	226/115	12.4	7.82	4.58	1.5857
Presión estática	301/75	-9.69	-9.52	0.07	1.0178
Presión dinámica	301/75	4.80	2.31	2.49	2.0779
Presión estática	559/155	-8.60	-11.30	2.70	1.3139
Presión dinámica	559/155	25.1	23.0	2.10	1.0913

Estos resultados se calibraron con el modelo experimental que reporta la guía de diseño Tensinet (Forster y Mollaert 2004) Figura 5.32, más tarde se cometa acerca de las características de este modelo experimental.

### 5.5.5 Contornos de presión.

En las secciones anteriores se representó en varias graficas la variación de la presión en el tiempo sólo para determinados puntos ubicados en la superficie de los modelos, con el fin de comparar entre sí los resultados como se puede ver el resumen de la Tabla 5.8 . Al graficar todo conjunto de puntos sobre la superficie, es decir, el conjunto de presiones, se forman los contornos de presión de las siguientes imágenes (Figura 5.26 (para presión estática) y la Figura 5.27 (para presión dinámica)). En el modelo CFORM1 flexible por ejemplo (Figura 5.26 (a)) se nota una ligera acumulación de presión en la parte frontal, ligeramente mayor que la del mismo modelo pero en su versión rígida (Figura 5.26 (b)). Mientras que en los costados y parte posterior se concentra la succión. El modelo G14H1 flexible (Figura 5.26 (c)) exhibe una mayor concentración de succión en la parte superior posterior. Este modelo fue el que obtuvo una magnitud mayor con respecto a los demás modelos inclusive con el mismo pero en versión rígida (Figura 5.26(d)).

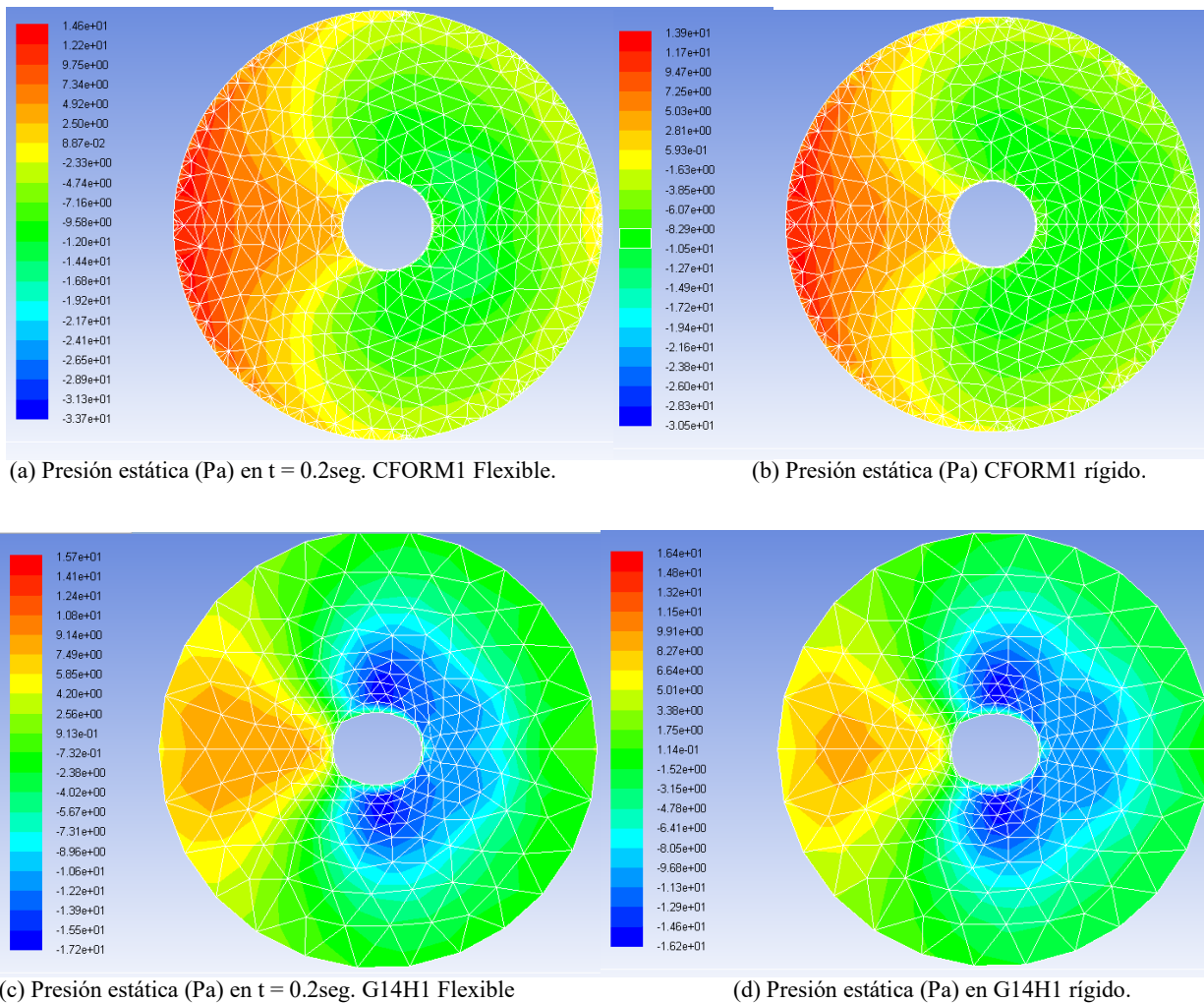
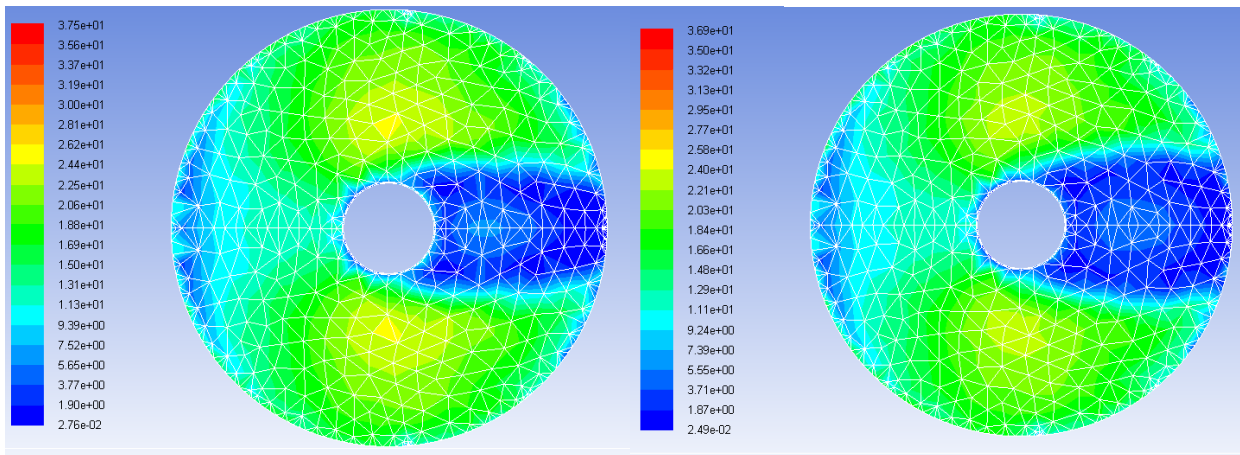


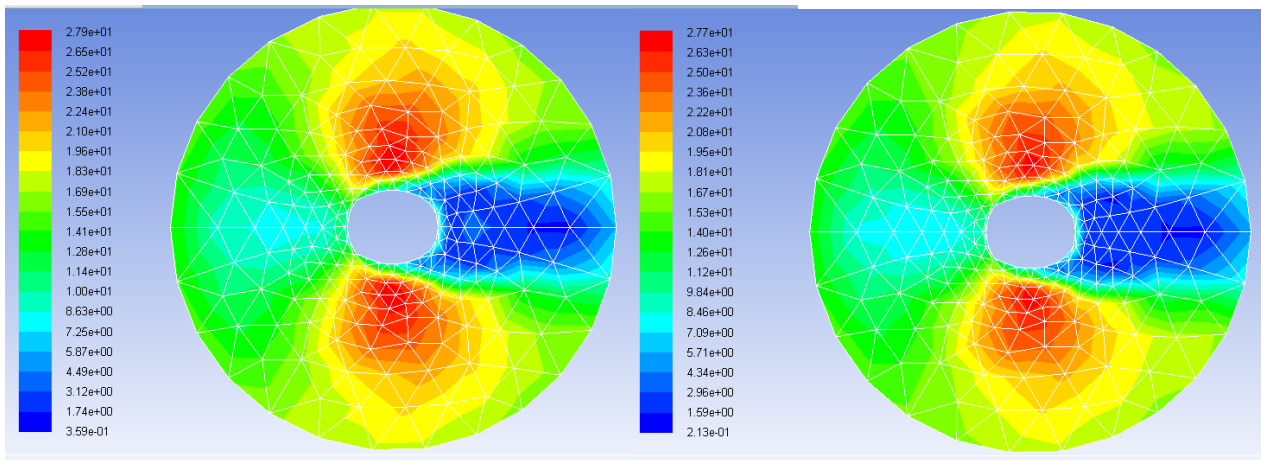
Figura 5.26. Presión estática máxima para los modelos CFORM1 y G14H1.



Un comportamiento similar se obtiene al graficar los contornos de presión dinámica que se muestran en la Figura 5.27 (a) (b) (c) y (d) propios de los modelos en cuestión. Aquí vemos con mayor facilidad que el modelo CFORM1 es en ambos casos (versión flexible y rígida), el modelo que distribuye la presión de manera más uniforme, se aprecian claramente tres zonas muy bien definidas y sin cambios abruptos entre ellas, mientras que en el modelo G14H1 tenemos un comportamiento bastante distinto. En él se aprecian concentraciones de presiones con cambios abruptos entre las cuatro zonas definidas (en los costados, en la parte posterior y en la parte frontal Figura 5.27(c)). El mismo comportamiento desfavorable sucede para la versión rígida. En ambos casos el modelo con un mejor comportamiento es aquel que toma en cuenta un superficie mínima (modelo CFORM1) debido a que se obtienen niveles mucho más bajos de succión y compresión y una mejor distribución.

(a) Presión dinámica en  $t = 0.2$ seg. CFORM1 Flexible.

(b) Presión dinámica en CFORM1 rígido.

(c) Presión dinámica en  $t = 0.2$ seg. G14H1 Flexible.

(d) Presión dinámica en G14H1 rígido.

Figura 5.27. Presión dinámica máxima para los modelos CFORM1 y G14H1.

### 5.5.6 Coeficientes de presión.

Con base en las magnitudes (presiones) reportadas por Ansys, basándonos en el criterio del capítulo 4 Figura 4.11, ecuación (4-1), se determinaron los coeficientes de presión para los diferentes modelos en cuestión. De acuerdo con a las gráficas de las curvas de presión determinadas en las secciones anteriores (5.5.2 y 5.5.3). Las condiciones más desfavorables o magnitudes máximas ocurren en  $t = 0.2$  s, por lo tanto, es en ese tiempo en que se determinaron los coeficientes que se presentan a continuación. Un valor negativo de un coeficiente corresponde a una zona que se encuentra en succión, un valor positivo corresponde a una presión.

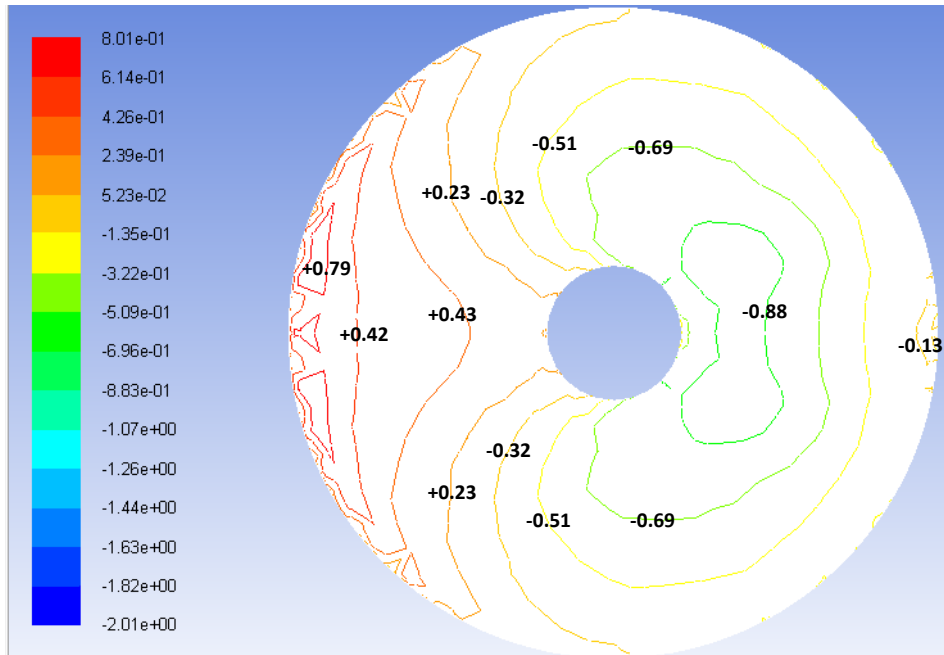


Figura 5.28 Coeficientes de presión calculados en  $t=0.2$  s para el modelo CFORM1 Flexible

En la figura anterior (Figura 5.28) se muestra los coeficientes de presión correspondientes a CFORM1 flexible, este tiene superficie de tensión. En este modelo se puede argumentar que la succión se concentra en la parte posterior superior y desciende hacia los costados. El valor máximo en succión alcanzado es de  $C_p = -0.88$  atenuándose hacia los costados desciende hasta un valor de  $C_p = -0.32$ . Además se observa que la presión se concentra solamente una pequeña área en la parte frontal, afectando un área mínima.

Los valores calculados en esta zona alcanzan un valor máximo de  $C_p = +0.79$  pero disminuye rápidamente a un valor de  $C_p = +0.43$ . En el caso del modelo CFORM1 rígido el comportamiento es similar pero con valores ligeramente más bajos, por ejemplo, en la zona de succión estos valores oscilan entre  $-0.67$  y  $-0.41$ , mientras que en la parte frontal oscilan entre  $+0.76$  y  $+0.37$ , como se muestra en la Figura 5.29.

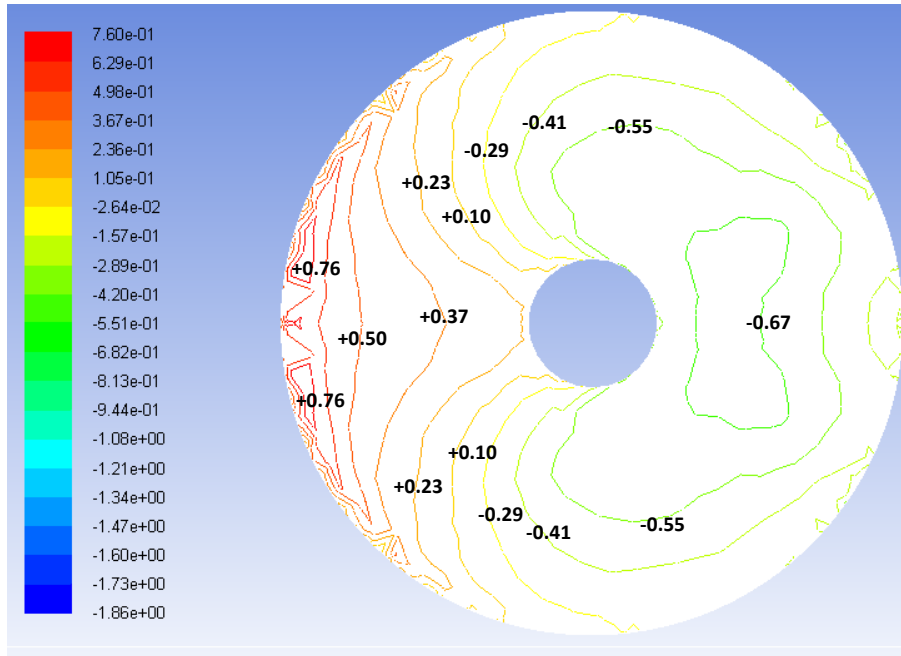


Figura 5.29 Coeficientes de presión calculados para el modelo CFORM1 rígido.

En el caso del modelo G14H1 flexible estos resultados difieren (como se comentó con anterioridad) en gran medida con los obtenidos en el modelo CFORM1 flexible. Ya que son dos superficies distintas no deben compararse directamente entre sí. Sin embargo, es muy interesante observar que en G14H1 flexible la succión se concentra mucho más en los costados afectando fuertemente esta zona, desde la parte superior (con  $C_p = -1.08$ ) hasta la parte posterior, descendiendo hacia los costados hasta un valor de  $C_p = -0.41$ .

Aquí cabe hacer mención que realizar un análisis de la forma no solo conseguirá una disminución de la presión, sino que también, niveles más bajos de esfuerzos y de desplazamiento, además de ahorrar material con el que se construyen (membranas).

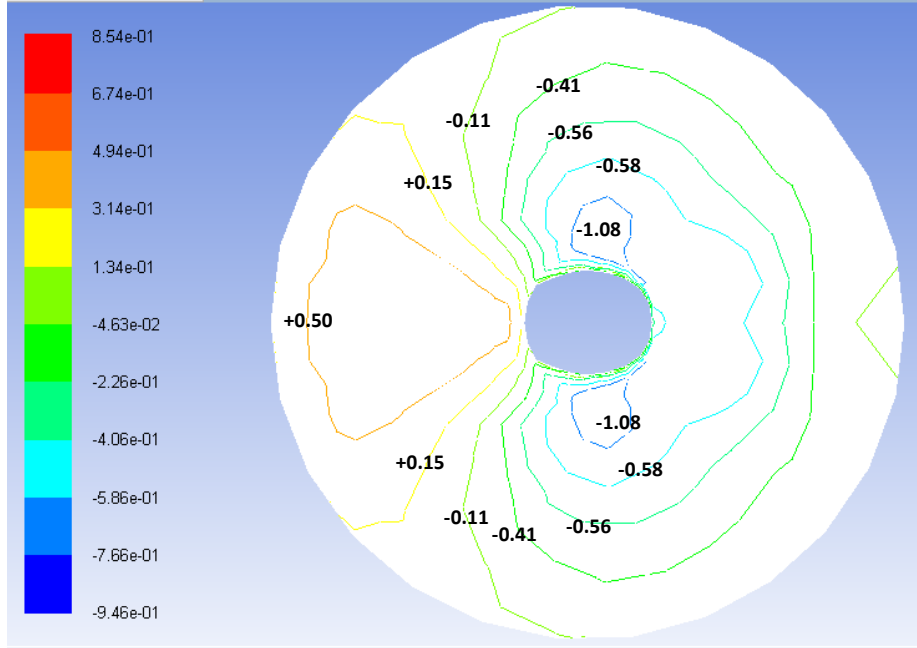


Figura 5.30 Coeficientes de presión calculados en  $t=0.2$  s para el modelo G14H1 flexible

En el caso del modelo G14H1 rígido se obtiene un comportamiento parecido al de su versión flexible, solamente que los coeficientes son de una magnitud menor, por ejemplo, el coeficiente correspondiente a la zona en succión tiene una magnitud de  $C_p = -0.87$  Figura 5.31.

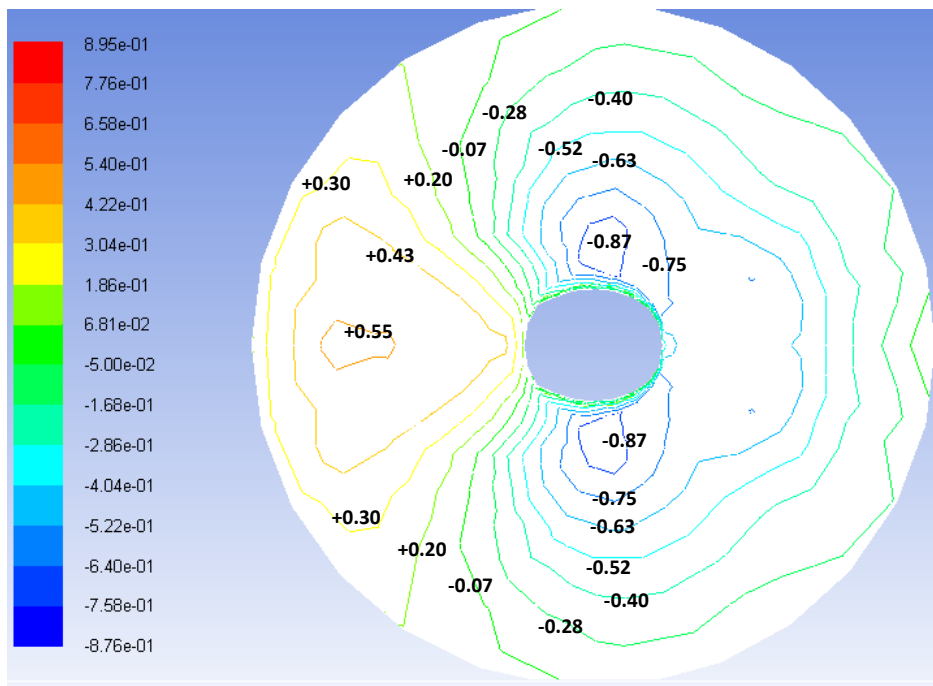
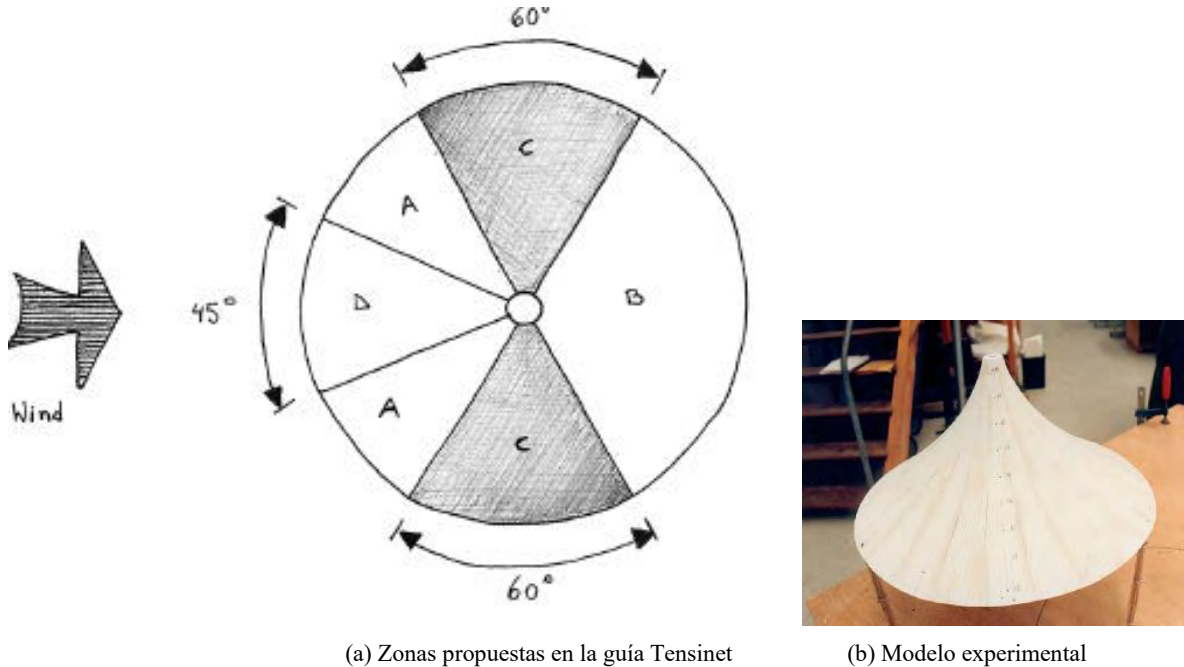


Figura 5.31. Coeficientes de presión propuestos para el modelo G14H1 rígido

Para validar los resultados derivados del análisis de interacción se utilizó el modelo experimental reportado en la guía de diseño Tensinet (Forster y Mollaert 2004) Figura 5.32. Una vez que se determinaron los coeficientes de presión, se compararon con los coeficientes propuestos en esta guía coincidiendo en gran medida. Esto era de esperarse, puesto que el modelo (G14H1) es de características muy similares a las del modelo experimental, por ejemplo, una de las características principales que es directamente comparable es la trayectoria de sus curvas, haciendo una pequeña inspección nos damos cuenta de que son muy similares entre sí, por lo tanto, se aceptaron los coeficientes calculados como válidos. Sin embargo, esta guía no menciona de qué material está hecha la velaria, tampoco se encuentra información acerca de las dimensiones del volumen de control utilizado, o del perfil de velocidades, la caracterización del viento, los coeficientes de rugosidad, densidad, velocidad, o viscosidad.

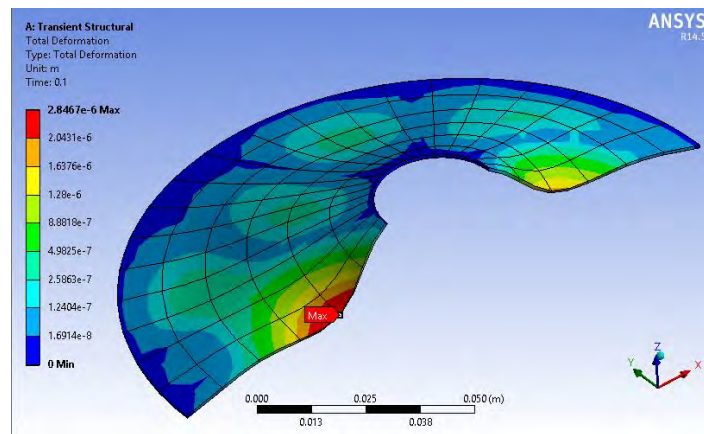


External $C_p$ Values for Conical Structures		Zones			
	Angle of slope of membrane to horizontal /deg.	A	B	C	D
Open sided structure	40	-0.15	-0.6	-1.0	+0.4/-0.2
Closed structure	40	-0.41	-0.7	-1.0	+0.75/-0.6

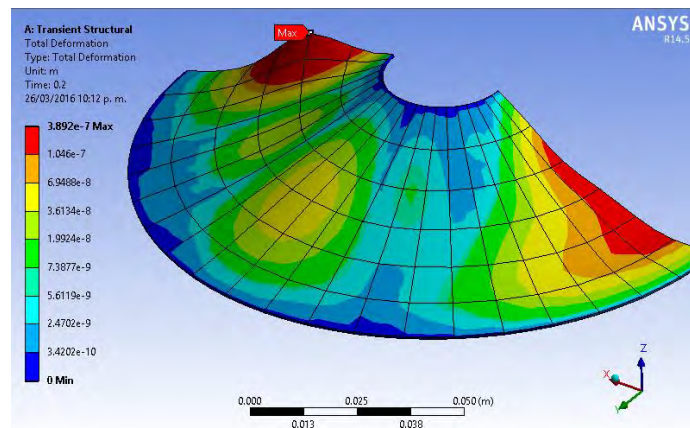
Figura 5.32 Coeficientes de presión propuestos en la guía Tensinet (adaptada de Forster y Mollaert 2004)

### 5.5.7 Desplazamientos y esfuerzos.

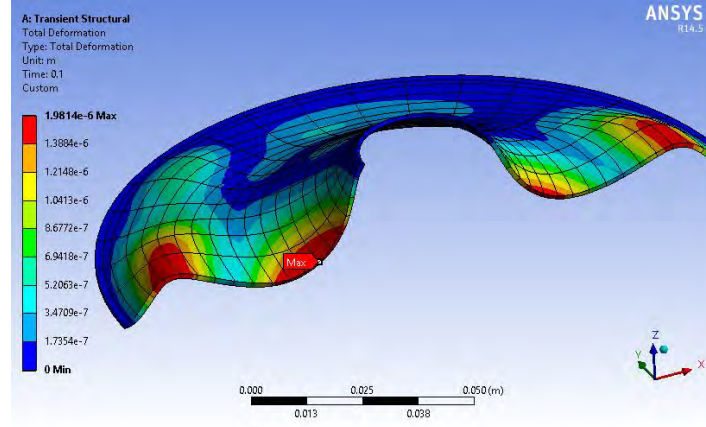
Como se mencionó con anterioridad el criterio para determinar los puntos en donde se debería tomar el muestreo, fue simple, se identificó los lugares en los que se reportó un mayor desplazamiento, por ejemplo, al observarse que en un tiempo  $t = 0.2$  s ocurre el desplazamiento máximo en el nodo 301 del modelo CFORM1 flexible Figura 5.33(b) se definió como punto de muestreo, así, para los nodos 226, 301, 559, 115, 75 y 155 de los modelos CFORM1 y G14H1 flexibles respectivamente como se muestra en la Figura 5.33 (a) (b) y (c).



(a) Desplazamiento máximo en  $t = 0.1$ seg. CFORM1 Flexible.



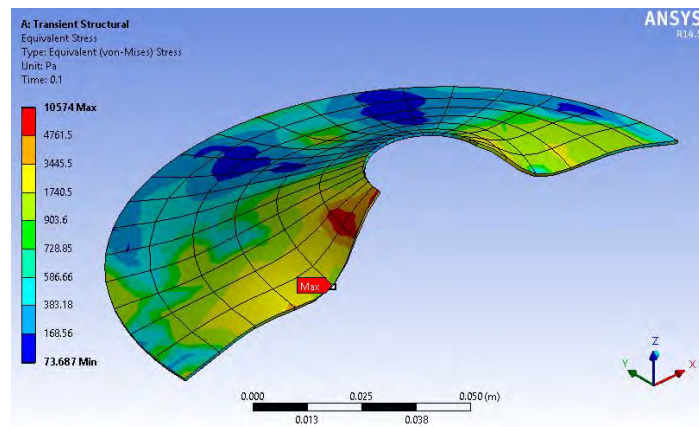
(b) desplazamiento máximo en  $t = 0.2$ seg. CFORM1 Flexible.



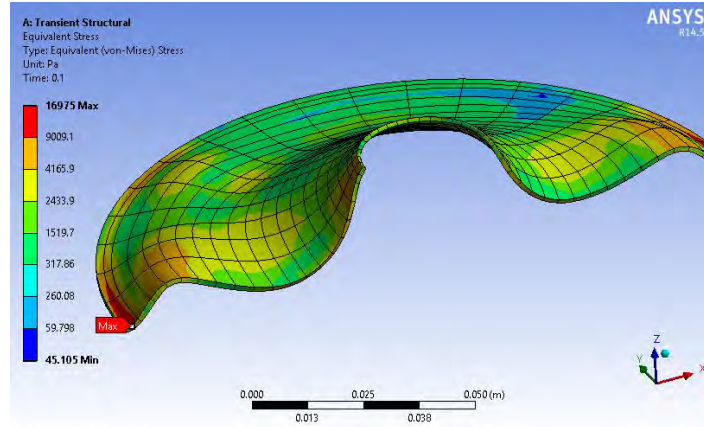
(c) desplazamiento máximo en  $t = 0.2$ seg. G14H1 Flexible.

Figura 5.33. Desplazamientos máximos de los modelos CFORM1 y G14H1 flexibles.

El esfuerzo equivalente (Von Mises Tabla 5.10), para CFORM1 reporta una magnitud máxima de 10,574 Pa en un tiempo  $t = 0.1$ , menor al que se obtuvo en el modelo G14H1 de magnitud 16,975 Pa, esto, representa un esfuerzo un 60% mayor al obtenido en el modelo CFORM1 flexible, como se muestra en las imágenes de la Figura 5.34 (a) y (b) respectivamente.



(a) Esfuerzo de Von Mises máximo. CFORM1 Flexible.



(b) Esfuerzo de Von Mises máximo. G14H1 Flexible.

Figura 5.34. Esfuerzos de Von Mises máximos para los modelos CFORM1 y G14H1.

## 5.6 Comentarios acerca de resultados obtenidos.

En general, el modelo que presentó una mejor respuesta fue CFORM1. Al contar con un análisis de la forma la superficie de este es una superficie de tensión, por lo que, reparte de mejor manera la presión que ejerce el viento, en consecuencia, se consigue un menor nivel de esfuerzos (Figura 5.34), un menor nivel de desplazamientos (Figura 5.33). Conviene llevarse a cabo un análisis de forma mínima previo a cualquier tipo de análisis ya que estos modelos tienden a distribuir de una manera más uniforme las presiones (Figura 5.26 y Figura 5.27) y no las concentra como lo hace G14H1 Figura 5.26 y Figura 5.27 (c) y (d). Al distribuir mejor las presiones, se obtendrán un menor coeficiente tanto de presión, además se garantiza obtener sólo esfuerzos de tensión Figura 5.34 (a) tal como se muestra en la Tabla 5.10. Además este modelo es el que utiliza una menor cantidad de material.



Tabla 5.9. Resumen de resultados obtenidos. Presión estática y presión dinámica.

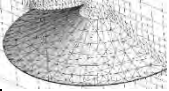
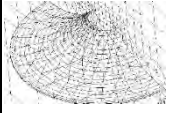
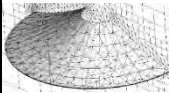
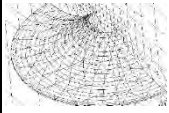
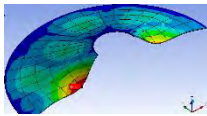
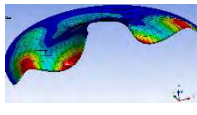
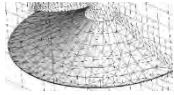
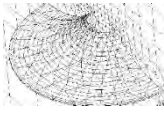
	Esquema	Nodo	Designación	Magnitud	Flexible/ Flexible CFORM1 y G14H1	Rígido / Rígido CFORM1 v G14H1	Flexible / Rígido CFORM1 y G14H1	Flexible / Rígido G14H1 y CFORM1
CFORM1 Flexible		226	P <sub>E226F</sub>	5.49		x		x
			P <sub>D226F</sub>	13.0	1.5457	x	1.6624	x
		559	P <sub>E559F</sub>	-9.37		x		x
			P <sub>D559F</sub>	24.4		x		x
		301	P <sub>E301F</sub>	-11.9	1.2344	x	1.25	x
			P <sub>D301F</sub>	6.31	2.2140	x	2.7316	x
G14H1 Flexible		115	P <sub>E115F</sub>	8.41	1.5319	x	x	1.6522
			P <sub>D115F</sub>	8.41		x	x	
		155	P <sub>E155F</sub>	-11.7	1.2487	x	x	1.3604
			P <sub>D155F</sub>	25.8	1.0573	x	x	1.1217
		75	P <sub>E75F</sub>	-9.64	x	x	x	
			P <sub>D75F</sub>	2.85	x	x	x	
CFORM1 Rígido		226	P <sub>E226R</sub>	5.09	x		x	
			P <sub>D226R</sub>	12.4	x	1.5857	x	1.4744
		559	P <sub>E559R</sub>	-8.60	x		x	
			P <sub>D559R</sub>	23.00	x		x	
		301	P <sub>E301R</sub>	-9.69	x	1.0178	x	1.0051
			P <sub>D301R</sub>	4.80	x	2.0779	x	1.6842
G14H1 Rígido		115	P <sub>E115R</sub>	7.66	x	1.5049	1.3952	x
			P <sub>D115R</sub>	7.82	x			x
		155	P <sub>E155R</sub>	-11.30	x	1.3139	1.2059	x
			P <sub>D155R</sub>	25.10	x	1.0913	1.0286	x
		75	P <sub>E75R</sub>	-9.52	x			x
			P <sub>D75R</sub>	2.31	x			x

Tabla 5.10. Resumen de resultados obtenidos. Coeficientes de presión, esfuerzos y deformaciones

Nombre	Esquema	Nodo	Esfuerzo [MPa]	Desplazamientos maximos [m]	Cp
CFORM1 Flexible		226	10.574	2.8467e-08	0.43
		559	0.2062	5.5193e-08	-0.70
		301	1.3537	3.892e-07	-0.88
G14H1 Flexible		115	16.975	1.981e-06	0.50
		155	0.408	3.769e-07	-1.08
		75	1.638	1.355e-6	-0.76
CFORM1 Rígido		226	x	x	0.37
		559	x	x	-0.55
		301	x	x	-0.68
G14H1 Rígido		115	x	x	0.43
		155	x	x	-0.63
		75	x	x	-0.63

# 6 Conclusiones y recomendaciones

## 6.1 Conclusiones

### **Superficie mínima:**

Una de las principales ventajas al utilizar un análisis de superficie mínima previo a un análisis estructural o de viento, consiste en que se pueden proponer superficies adecuadas que garanticen una distribución uniforme de la tensión en las membranas de las Velarias. Esto es muy benéfico ya que las membranas tienen diferentes propiedades ortogonales.

A medida que se aumenta la densidad de fuerza en los elementos, estos tienden a ser más rectos, lo que hace más rígido cada elemento. Se debe tener cuidado al designar diferentes valores de densidad de fuerza a diferentes elementos, ya puede llevar a cambios importantes en la forma de la superficie, además de que se deberá especificar un elemento que tenga dicha rigidez en el momento de la construcción.

Para proponer superficies mínimas realistas, es necesario contar con densidades de fuerza que sean realistas. Es decir, evaluar en qué proporción es más rígido un cable con respecto a una membrana y en qué condiciones se puede utilizar una densidad de fuerza unitaria en las membranas, como se supuso en este estudio. El proponer densidades de fuerza realistas producirá superficies realistas y, por lo tanto, al buen comportamiento de una tensoestructura.

No considerar un análisis de la forma puede llevar a proponer soluciones en las que se produzcan concentraciones de los esfuerzos de tensión o que estos no sean uniformes que sean susceptibles a fallar.

Considerar una superficie mínima aleatoria puede llevar a producir una variación importante tanto en la forma como en los resultados de los esfuerzos en la membrana, a diferentes densidades de fuerza se pueden obtener diferentes configuraciones poco representativas y que no garanticen que se produzcan solo esfuerzos de tensión en los elementos.

### **Interacción fluido estructura:**

Existen diferencias considerables entre la respuesta de un modelo de superficie flexible con respecto a la de un modelo de superficie rígida. En general se obtuvo un incremento en la magnitud de los valores encontrados en los modelos de superficie flexible con respecto a su versión rígida.

De los casos analizados se obtuvo un mejor comportamiento para el cono del modelo CFORM1 rígido, este resultó con magnitudes más bajas que en los otros casos, se atribuye que este comportamiento fue favorable debido al análisis de la forma previamente realizado, por lo que se distribuyeron de una manera más uniforme los efectos.

Al comparar la respuesta del modelo CFORM1 con el modelo G14H1, se determinó que la respuesta de un modelo con superficie mínima es totalmente distinta a un modelo sin análisis de la forma, debido a que la trayectoria de sus superficies son diferentes.

Se encontró que para una estructura de características similares al cono G14H1 flexible, los coeficientes de presión propuestos por el modelo experimental son apropiados y concuerdan con los reportados en el estudio.

## **6.2 Recomendaciones**

Cuando se realice un análisis de dinámica de fluidos en una Velaria modelada como cuerpo rígido, se recomienda tomar en consideración que existirá un aumento de los efectos derivados por la presión del viento asociados a la estructura. Para tomar en cuenta este aumento se recomienda que en el análisis se considere la flexibilidad de la Velaria se incrementen los coeficientes de presión un 15% para un coeficiente positivo, y un 25% para un coeficiente negativo (succión) para un modelo de características similares. Esta relación se determinó con base en la comparación de la respuesta de un modelo flexible con uno de superficie rígida.

### 6.3 Trabajos futuros

Realizar investigaciones para obtener densidades de fuerza reales para determinadas membranas textiles y cables de acuerdo a sus propiedades mecánicas, debido a la falta de esta información en este trabajo se consideró una densidad de fuerza de 1 en los casos que se utilizó membrana y diferentes valores para los cables o bordes rígidos.

Realizar estudios de diferentes formas con diferentes ángulos de incidencia para determinar las respuestas máximas y proponer los coeficientes de presión correspondientes mediante un análisis de interacción fluido estructura para diferentes de formas.

Evaluar superficies mínimas considerando cargas puntuales sobre la superficie de la membrana.

# Referencias

- [1] Álvarez, J.A., (2012), “Comportamiento de tenso estructuras mediante modelos a escala en túnel de viento y dinámica de fluidos computacional”, Tesis de Doctorado, Universidad Autónoma Metropolitana, México, D. F.
- [2] Argyris, J.H. (1964), “Recent advances in matrix methods of structural analysis”, Progress in the aeronautical sciences, Vol. 4, Pergamon Press, Ltd., Oxford.
- [3] Ansys (2009), “Ansys®Worbech™2.0FrameWork versión 14.5.0”, (Ansys14.5Help//Theory Reference//11.Coupling//11.1.2 Coupling Methods), *Ansys Inc. Estados Unidos*.
- [4] ASCE, (2013), “Tensile fabric structures, design, analysis, and construction”, American Society of Civil Engineers, Tensioned Fabric Structures Task Committee 2010 , Estados Unidos de América.
- [5] Barnes, M.R, (1977). Form-finding and analysis of tension space structures by dynamic relaxation, Ph.D. thesis, City University London, United kingdom.
- [6] Forster, B. y Mollaert, M., (2004), “European desing guide for tensile surface structures” Universidad de Bruselas, Bruselas, Bélgica.
- [7] Haber, R.B., Abel, J.F., (1982). Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes. Part 1 – Formulations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 30, 263-284.
- [8] Hernández, H. (2010), “Procedimiento simplificado de diseño eólico de tenso estructuras”, XVII Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, León, Guanajuato.
- [9] HexForce (2010), “Technical fabrics handbook”, Hexcel Reinforcements for composites, Estados Unidos de América.
- [10] Kovar, R. (2010), “Anisotropy in woben fabric stress and elongation at break”, Technical University of Liberec, Czech Republic.
- [11] Lewis, W.J., (2003), “Tension structures”, University of Warwick, United Kingdom, Ed. Thomas Telford.
- [12] Linkwitz, K., Schek, H.J., (1971). Einige Bmerkungen zur Berechnung von vorgespannten Seilnetzkonstruktionen. Ingenieur Archiv 40, 145-158.

- [13] Lumley, J. (1961), "Eulerian and Lagrangian description in fluid mechanics" Pennsylvania State University, (<http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>), Estados Unidos de América.
- [14] MDV, (2008), "Respuesta dinámica de cubiertas deformables", Manual de Diseño por Viento, Manual de Diseño de Obras Civiles, Comisión Federal de Electricidad, Gobierno Federal.
- [15] Pauletti, M.O. (2008), "The natural force density method for shape finding of taut structures", Computational Methods in Applied Mechanical Engineering 197, 4419-4428.
- [16] Prandtl, L., (2000), "Essencial of fluid mechanics", Springer, segunda edición, Estados Unidos de América.
- [17] Puerto, D.Y. (2008), "Acción del viento sobre una Velaria de gran claro", Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F.
- [18] Schek, H.J., (1974), "The force density method for form finding and computation of general networks", Computer methods in applied mechanics and engineering, 3, 115-134.
- [19] Siev, A., Eidelman, J., (1964), Stress analysis of prestressed suspended roofs, Journal of the Structural Division. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 103-121.
- [20] Siedel, M., (2009), "Tensile surface structures, a practical guide to cable and membrane construction", Universidad Técnica de Viena, Viena, Austria.
- [21] Shapiro, A., (1961), "Pressure fields and fluid acceleration", Massachusetts Institute of Technology, National Committee for Fluid Mechanics Films, film notes (<http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>), Estados Unidos de América.
- [22] Technet, GmbH, (2010), "Lighthweight structure design with EASY", University of Viena, Viena, Austria.
- [23] Tysmans T., Adriaenssens S. y Wastiels J. (2011), "Form finding methodology for force-modelled anticlastic shells in glass fibre textile reinforced cement composites" Engineering Structures 33, 2603-2611.
- [24] Valdés, J. G., (2007), "Nonlinear analysis of orthotropic membrane and Shell structures including fluid-structure interaction", Universidad Politécnica de Cataluña, España.

- [25] Valdés, J.G. y Prieto, J.U. (2010), “Distribución de presiones y aeroelasticidad de cubiertas para estructuras especiales”, XVII Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, León, Guanajuato.
- [26] Veenendaal, D. y Block, P., (2012), “An overview and comparison of structural form finding method for general networks”, International Journal of Solids and Structures 49, 3741-3753.
- [27] Zienkiewicks, O.C. (2000), “The finite element method”, Butterworth Heinemann, 5ta. Edición, Volumen 1, Estados Unidos de América



## *Anexo A*

# 7 Algoritmo utilizado para calcular superficies mínimas.

```
clc
clear all
format short g

%
%           Universidad Autónoma Metropolitana
%           Unidad Azcapotzalco
%           División de Ciencias Básicas e Ingeniería.
%           Posgrado en Ingeniería Estructural
%
%           Seminario de tesis
%
%           Asesor Dr. Gelacio Juárez Luna
%
%           Alumno: Daniel González Flores
%           Matricula: 2133804058
%
%           Descripción: Algoritmo para encontrar formas mínimas de
%           tenso-estructuras idealizadas con una serie de elementos
%           conectados mediante nodos, basado en el método de Densidad de
%           fuerza Schek (1974).

%Lectura de los archivos de entrada, es necesario que se encuentren
%contenidos en un archivo de texto, cada uno por separado.

load('xf.txt');      %vector de coordenadas de nodos en x fijos
load('yf.txt');      %vector de coordenadas de nodos en y fijos
load('zf.txt');      %vector de coordenadas de nodos en z fijos
load('Coord.txt');   %son las coordenadas de todos los nodos
load('Conec.txt');   %son las conectividades
load('NF.txt');      %son los nodos fijos
load('FD.txt');      %son los elementos con densidades de fuerza
diferentes que 1
```

```

%Obtienen las propiedades para realizar los cálculos necesarios

nnod=size(Coord); %Determina el número de nodos
nelem=size(Conec); %Determina el número de elementos
nnf=size(NF); %Determina el número de nodos fijos
nfd=size(FD); %Determina el número de elementos con densidades
diferentes

Cs=zeros(nelem,nnod);
Csf=zeros(nelem,nnod);
NCoord=zeros(nnod,4);
NConec=zeros(nelem,3);

%Rutina para armar la matriz de conectividades Cs que contiene
%tanto nodos fijos como nodos libres
for i=1:nelem %nelem=número de elementos
    Cs(i,Conec(i,2))=1;
    Cs(i,Conec(i,3))=-1;
end

nnf=size(NF); %calcula el tamaño del vector de nodos libres
cont=squeeze(nnf(1,1,:)); %Define un contador y con squeeze extrae
%el número total de nodos libres(un solo valor)

%Rutina para separar la matriz de nodos libres C de la matriz Cs
for j=1:nnf %nf=número de nodos fijos

    Cs(:,NF(cont,1))=[];
    cont=cont-1;
end

C=Cs; %C libre

%Ciclo para separar vector de nodos (nnod,1) de la matriz Coord
for m=1:3
    cont=5-m;
    Coord(:,cont)=[]; %Queda el vector de nodos desde 1 hasta n
    cont=cont;
end

nnf=size(NF); %calcula el tamaño del vector de nodos libres
cont=squeeze(nnf(1,1,:)); %Define un contador y con squeeze extrae
%el número total de nodos libres (un solo
valor)

%Ciclo para separar el vector de nodos libres nl, elimina
%los nodos que son fijos
for i=1:nnf %nf=número de nodos fijos

    Coord(NF(cont,1),:)=[]; %elimina de la matriz Coord los nodos fijo
    cont=cont-1;
end

```

```

NL=Coord;                                %Nodos Libres

%Rutina que vuelve a armar la matriz de conectividades Cs
%Para extraer de esta la matriz de nodos fijos Cf
for i=1:nelem

    Csf(i,Conec(i,2))=1;
    Csf(i,Conec(i,3))=-1;

end

nnl=size(NL);                             %calcula el tamaño del vector de nodos libres
cont=squeeze(nnl(1,1,:)); %Define un contador y con squeeze extrae
                                %el número total de nodos libres(un solo valor)

%Rutina para extraer la matriz conectividades de nodos fijos
%de la matriz de conectividades completa
for i=1:nnl

    Csf(:,NL(cont,1))=[];
    cont=cont-1;

end

Cf=Csf;   %Cf fija

%define la matriz de densidades de fuerza, 1 por default
Q=eye(nelem,nelem);
jj=1;
salir=squeeze(nfd(1,1,:))+1;

for ii=1:nelem

    if jj == salir

        jj=salir;
    else

        if Conec(ii,1) == FD(jj,1);

            Q(ii,ii)=5; %Cambia la densidad de fuerza para determinados
            elementos designados por el diseñador
            jj=jj+1;

        end
    end
end

end

```

```

%Cambio de variables

D=C'*Q*C;   %
Df=C'*Q*Cf;

%Calculo de las nuevas coordenadas a partir de la original

x=inv(D)*(-Df*xf);
y=inv(D)*(-Df*yf);
z=inv(D)*(-Df*zf);

load('Coord.txt');           %Lee la matriz de coordenadas
NS=squeeze(nnod(1,1,:))+1;   %NS=nodo siguiente
l=0;                         %Define el contador para los nodos libres
n=1;                         %Define el contador para los nodos fijos

%Rutina para llenar la nueva matriz de coordenadas NCoord
for k=1:nnod

    if Coord(k,1)== NF(n,1);

        NCoord(k,1)=NS;
        NCoord(k,2)=xf(n,1);
        NCoord(k,3)=yf(n,1);
        NCoord(k,4)=zf(n,1);
        n=n+1;
    else
        l=l+1;
        NCoord(k,1)=NS;
        NCoord(k,2)=x(l,1);
        NCoord(k,3)=y(l,1);
        NCoord(k,4)=z(l,1);
    end

    NS=NS+1;

End

```

```

    unidades='mts';

    load('Conec.txt');           %Lee la matriz de coordenadas
    ES=squeeze(nelem(1,1,:));    %ES=elemento siguiente
    k=0;                         %Define el contador para los nodos
libres
    NT=squeeze(nnod(1,1,:));

    %Rutina para llenar la nueva matriz de conectividades NConec
    for k=1:nelem

        ES=ES+1;

        NConec(k,1)=ES;
        NConec(k,2)=Conec(k,2)+NT;
        NConec(k,3)=Conec(k,3)+NT;

    end

    %Para obtener las nuevas coordenadas de las matrices escriba en
command
    %window NCoord para la matriz de nuevas coordenadas y NConec para la
    %matriz de conectividades

```