Estocástica
FINANZAS Y RIESGO

La ecuación de segundo grado en la estimación de parámetros de la martingala y la valuación de opciones americanas a través de la programación dinámica estocástica

José Antonio Climent Hernández*

Fecha de recepción: 14 de mayo de 2014
Fecha de aprobación: 10 de julio de 2014

* Universidad Autónoma Metropolitana
Departamento de Administración
antonio.climent@hotmail.mx

Resumen

En este trabajo se presentan los factores de influencia y las características que se deben satisfacer en la teoría de valuación de opciones en un mercado completo, se utiliza el marco teórico del modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979), se estiman los parámetros de la probabilidad libre de riesgo a través de una ecuación de segundo grado y utilizando la programación dinámica estocástica se modela el precio subyacente para valuar opciones, se analizan las diferencias entre el modelo obtenido y el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979), se analiza gráficamente la convergencia de las opciones europeas y americanas de compra al modelo de Merton (1973) y al modelo de Black y Scholes (1973), se valúa una opción europea de compra sobre la paridad fix del mercado extrabursátil mexicano y un *warrant* americano sobre Kodak, se muestra que el modelo obtenido tiene diferencias en la valuación de las opciones con respecto al modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979), se valúan las opciones americanas de venta sobre la paridad fix y sobre Kodak utilizando los insumos de la opción europea de compra sobre la paridad fix y del warrant americano sobre Kodak y se analiza gráficamente la convergencia al modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987), se muestran las diferencias entre ambos modelos concluyendo que el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) tiene una calibración elegante de los parámetros de la probabilidad libre de riesgo pero subestima o sobreestima el riesgo de mercado y la valuación de las opciones con respecto al modelo propuesto en este trabajo.

Clasificación JEL: G13, D81, G32, C61.

Palabras clave: valuación de opciones, administración de riesgo, análisis de riesgo, programación dinámica estocástica.

The quadratic equation in the parameter estimation of the riskless probability and the american options pricing through stochastic dynamic programming

Abstract

In this paper, the influencing factors and the characteristics that have to be satisfied in the options pricing theory in a complete market are presented. The theoretical framework of the model by Cox, Ross and Rubinstein (1979) is used. The risk free probability parameters are estimated by means of a quadratic equation, using stochastic dynamic programming, the underlying price for valuing options is modeled. The differences between the proposed model and the one by Cox, Ross and Rubinstein (1979) are analyzed. The convergence of European and American call options to the Merton (1973) and Black and Scholes (1973) models is analyzed graphically. A European call option on the fix parity of the Mexican over the counter market, and an American warrant on Kodak are priced, showing that the proposed model has differences in the options pricing when compared to the Cox, Ross and Rubinstein (1979) model. The American put options are priced on the fix parity and on Kodak, using the inputs on the European call option on the fix parity and the American warrant on Kodak. The convergence to the Barone-Adesi and Whaley (1987) model is graphically analyzed. The differences between both models are shown, concluding that the Cox, Ross and Rubinstein (1979) model has an elegant calibration of the risk free probability parameters, but it underestimates or overestimates the market risk and the options pricing with respect to the model proposed in this paper.

JEL Classification: G13, D81, G32, C61.

Keywords: *options pricing, risk management, risk analysis, stochastic dynamic programing.*

Introducción

Las opciones americanas son contratos, en los que los titulares adquieren el derecho, pero no la obligación, de negociar una cantidad determinada del subyacente a un precio de liquidación durante el periodo hábil comprendido entre la fecha de negociación y la fecha de vencimiento.

La valuación de las opciones depende de la distribución del rendimiento subyacente y se obtiene como el valor presente de la esperanza condicional del precio de liquidación en función de la medida neutral al riesgo como se ha propuesto en los trabajos de Ross (1976) y Cox y Ross (1976).

El modelo de Bachelier (1900) supone que la evolución del subyacente es una caminata aleatoria binomial, asociando la probabilidad de ocurrencia de cada estado posible y obtiene la distribución límite en tiempo continuo utilizando la fórmula asintótica de Stirling. Bachelier (1900) aplicó el teorema central del límite aproximando la distribución de la caminata aleatoria a una distribución gaussiana. Las dos aproximaciones presentadas por Bachelier (1900) son los primeros modelos formales para modelar los movimientos del subyacente.

El modelo de Black y Scholes (1973) usa el supuesto a priori acerca de la función de distribución de probabilidad log-gaussiana del precio subyacente, el modelo es derivado a través métodos de ecuaciones diferenciales parciales y es el primer modelo de valuación de opciones que satisface las condiciones de no arbitraje de acuerdo a los límites en el precio de las opciones con respecto al precio subyacente, al precio de liquidación, al tiempo de vigencia y a la paridad de compra-venta. El modelo de Merton (1973) extendió el modelo de Black y Scholes (1973) mostrando las propiedades de las opciones en función de su valor (payoff) en la fecha de vencimiento, definiendo los límites inferiores y superiores entre los que se encuentra el valor de las opciones para satisfacer el supuesto de la no existencia de oportunidades de arbitraje, mostrando que existe diferencia entre las opciones europeas y las americanas debido a la probabilidad del ejercicio anticipado, mostrando el efecto de los dividendos, mostrando la propiedad de la paridad compra-venta, mostrando una aproximación alternativa al modelo de Black y Scholes (1973) y valuando opciones americanas.

La valuación y determinación del ejercicio anticipado óptimo de las opciones americanas consiste en determinar la frontera óptima que maximiza el flujo de efectivo por el ejercicio anticipado, actualmente no se tiene una ecuación cerrada, sólo se tienen métodos de aproximación como el numérico de Villeneuve y Zanette (2002), el de diferencias finitas de Brennan y Schwartz (1977), y el de una fórmula analítica aproximada de Barone-Adesi y Whaley (1987) que tiene consistencia con los supuestos de Black y Scholes (1973) y Merton (1973).

En este artículo se presenta un modelo de tiempo discreto para valuación de opciones utilizando la programación dinámica estocástica como se propone en Cox, Ross y Rubinstein (1979) estimando los parámetros de la probabilidad libre de riesgo de una forma alternativa. El resto de este trabajo está organizado de la forma siguiente: en la sección 1 se presentan los factores de influencia y se analizan las características que debe satisfacer la teoría de valuación de opciones en un mercado completo, en la sección 2 se analiza el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979), se presenta la calibración de los parámetros de la probabilidad libre de riesgo del modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979), se muestran las fórmulas recursivas y generales para valuación de opciones, en la sección 3 se estiman los parámetros de la probabilidad libre de riesgo a partir de un sistema de ecuaciones donde la solución alternativa es obtenida a través de una ecuación de segundo grado, también se presentan las relaciones entre los parámetros del modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) y el modelo propuesto en este trabajo, en la sección 4 se valúa una opción europea de venta sobre la paridad fix y un warrant americano sobre Kodak, se muestra gráficamente la convergencia de ambos modelos de tiempo discreto a los modelos de Merton (1973) y de Black y Scholes (1973), respectivamente, se valúan las opciones americanas de venta sobre la paridad fix y sobre Kodak, se muestra gráficamente la convergencia de ambos modelos, al modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987) y se muestra que existe diferencia entre ambos modelos, en la sección 5 se presentan las conclusiones del trabajo de investigación, y por último la bibliografía utilizada: un apéndice en el que se presenta el algoritmo para la valuación de opciones sobre subyacentes que pagan dividendos durante el periodo de vigencia y un apéndice en el que se presenta la convergencia del modelo propuesto al modelo log-gaussiano.

1. Modelo de tiempo discreto para valuar opciones americanas

El ser humano ha creado instrumentos que permiten transferir los riesgos extrínsecos (riesgo de mercado: precios, tipos de cambio y tasas de interés) y proteger las pérdidas económicas derivadas de las exposiciones a ciertas contingencias.

Las opciones de compra y venta otorgan el derecho al titular de comprar y vender, respectivamente, una cantidad de subyacente determinada en los contratos, las opciones americanas y europeas determinan el periodo durante el cual, los titulares, pueden ejercer el derecho de comprar o vender la cantidad de subyacente indicada en los contratos.

1.1 Factores de influencia en la valuación de opciones

Los factores exógenos son: el precio subyacente M, la volatilidad subyacente σ, la tasa de interés libre de riesgo nacional i, y la tasa de interés libre de riesgo extranjera r. Los factores endógenos son: el precio de liquidación S, y el tiempo de vigencia T.

1.2 Valor de las opciones (payoff) en la fecha de liquidación

Sean $c(t,M_t)$ y $p(t,M_t)$ los valores de las opciones europeas de compra y venta, respectivamente y sean $C(t,M_t)$ y $P(t,M_t)$ los valores de las opciones americanas de compra y venta, respectivamente, entonces en la fecha de liquidación T se tiene que:

$$\begin{aligned}
c(T,M_T) &= \max(0, M_T - S) = (M_T - S)_+ \\
p(T,M_T) &= \max(0, S - M_T) = (S - M_T)_+ \\
C(t,M_t) &= \max(0, M_t - S) = (M_t - S)_+ \\
P(t,M_t) &= \max(0, S - M_t) = (S - M_t)_+
\end{aligned} \tag{1}$$

1.3 Límites en la valuación de las opciones

La valuación de opciones a través del enfoque en el que obtener beneficios por las compras y ventas simultáneas de activos se debe considerar para evitar oportunidades de arbitraje. Por lo que para las opciones europeas se deben satisfacer los límites siguientes:

$$\begin{aligned} &\left(M_T \exp(-rT) - S\exp(-iT)\right)_+ \leq c(T, M_T) \leq M_T \\ &\left(S\exp(-iT) - M_T \exp(-rT)\right)_+ \leq p(T, M_T) \leq S\exp(-iT) \end{aligned} \tag{2}$$

La ecuación (2) se obtiene a partir de proposiciones que hace Merton (1973) para mostrar la existencia de valores mínimos y máximos en el valor de las opciones europeas que indican condiciones que debe satisfacer la teoría de valuación de opciones para satisfacer la hipótesis de no existencia de oportunidades de arbitraje o valuación en un mundo neutral al riesgo.

Mientras que para las opciones americanas se deben satisfacer los límites siguientes:

$$\begin{aligned} &\left(M_t \exp(-r\tau) - S, M_t \exp(-r\tau) - S\exp(-i\tau)\right)_+ \leq C(t, M_t) \leq M_t \\ &\left(S\exp(-i\tau) - M_t \exp(-r\tau), S\exp(-i\tau) - M\right)_+ \leq P(t, M_t) \leq S \end{aligned} \tag{3}$$

donde $\tau = T - t$ representa el tiempo remanente y $t \in [0, T]$ es el tiempo transcurrido desde la negociación de las opciones.

La ecuación (3) se obtiene a partir de proposiciones que hace Merton (1973) y muestran la existencia de valores mínimos y máximos en el valor de las opciones americanas, los que indican condiciones que debe satisfacer la teoría de valuación de opciones, así también indica que las opciones americanas de compra no se deben ejercer antes de la fecha de vencimiento ya que el flujo de efectivo en valor presente, por el pronto ejercicio, es menor que el flujo de efectivo en valor presente, por el ejercicio en la fecha de vencimiento. Por lo cual, las opciones americanas de compra tienen al menos el mismo valor por la cobertura otorgada por las opciones europeas, esto indica que $c(t, M_t) = C(t, M_t)$. También indica que las opciones americanas de venta pueden ser ejercidas antes de la fecha de vencimiento ya que el flujo de efectivo en valor presente, por el ejercicio anticipado, es mayor que el flujo de efectivo en valor presente, por el ejercicio en la fecha de vencimiento. Por lo cual, los contratos americanos de venta tienen un valor superior por la cobertura que otorgan las opciones europeas, esto es significa que $p(t, M_t) \leq P(t, M_t)$.

1.4 Paridad compra-venta

Es la relación entre las opciones europeas de compra y venta:

$$c(t, M_t) + S\exp(-i\tau) = p(t, M_t) + M_t \exp(-r\tau) \quad (4)$$

Lo que significa que el precio de las opciones europeas de compra se pueden calcular a partir del precio de las opciones europeas de venta de la misma serie (opciones emitidas sobre el mismo bien subyacente, igual precio de liquidación y misma fecha de vencimiento) y viceversa. Es decir:

$$c(t, M_t) = p(t, M_t) + M_t \exp(-r\tau) - S\exp(-i\tau)$$
$$p(t, M_t) = c(t, M_t) + S\exp(-i\tau) - M_t \exp(-r\tau)$$

La relación entre las opciones americanas de compra y venta es:

$$M\exp(-r\tau) - S \leq C - P \leq M - S\exp(-i\tau) \quad (5)$$

El valor de las opciones americanas de compra se encuentra entre los límites inferiores y superiores de las opciones americanas de venta de la misma serie y el valor de las opciones americanas de venta se encuentra entre los límites inferiores y superiores de las opciones americanas de compra de la misma serie.

2. Modelo de Cox, Ross y Rubinstein para valuación de opciones

Al igual que Bachelier (1900) y Cox, Ross y Rubinstein (1979), el supuesto es que el precio subyacente puede tener sólo dos valores posibles derivados del estado anterior. A esta hipótesis se le conoce como supuesto binomial. El precio subyacente se modela mediante una caminata aleatoria y el valor de las opciones se calcula a través de la programación dinámica estocástica que por medio del principio de inducción regresiva maximiza el flujo de efectivo en valor presente, cuantificando el riesgo que otorga la cobertura de las opciones. Para representar las trayectorias del precio subyacente, el modelo considera la no existencia de oportunidades de arbitraje para los inversionistas.

El modelo discreto de un periodo supone que al final del periodo se tienen dos valores posibles del precio subyacente. Sea un bien subyacente con precio de mercado M_0, una opción europea de compra con valor $c(t, M_t)$ sobre el bien subyacente y el tiempo de vigencia T de la opción. En la fecha de vencimiento el precio aumenta de M_0 a $M_0 a$ con probabilidad π o disminuye de M_0 a $M_0 d$ con probabilidad $\theta = 1 - \pi$, donde $0 < d < 1 < a$. Si el precio subyacente aumenta, entonces el valor de la opción en la fecha de vencimiento es $c(T, M_1^a) = (M_0 a - S)_+$ y si el precio subyacente disminuye, entonces el valor de la opción en la fecha de vencimiento es $c(T, M_1^d) = (M_0 d - S)_+$.

Se conocen los dos valores posibles que puede tener la opción en la fecha de vencimiento, los cuales son $c(T, M_1^a)$ y $c(T, M_1^d)$. Para conocer el valor actual se crea una opción europea de compra sintética que es el portafolio replicante compuesto por la posición larga de Δ bienes subyacentes en valor presente a la tasa de interés libre de riesgo extranjera $(\Delta M_0 \exp(-rT))$ y la posición corta de la opción que se desea valuar $(-c(0, M_t))$. El valor de Δ que mantiene el portafolio libre de riesgo es:

$$\Delta = \frac{c(T, M_1^a) - c(T, M_1^d)}{M_0 a - M_0 d} \tag{6}$$

El número de activos que debe tener el portafolio para estar libre de riesgo es Δ. Si el precio subyacente aumenta o disminuye el valor presente del portafolio es $\left(c(T, M_1^a) - M_1^a \Delta\right)\exp(-iT)$ cuando aumenta y $\left(c(T, M_1^d) - M_1^d \Delta\right)\exp(-iT)$ cuando disminuye, en la fecha de la negociación el valor de la opción sintética es $M_0 \Delta \exp(-rT) - c(0, M_t)$. Por lo que el valor de la opción es:

$$c(0, M_0) = \left(\frac{c(T, M_1^a)\left(\exp((i-r)T) - d\right) + c(T, M_1^d)\left(a - \exp((i-r)T)\right)}{a - d} \right) \exp(-iT) \tag{7}$$

donde i es la tasa de interés instantánea libre de riesgo nacional y el valor de la opción es independiente de la probabilidad de ocurrencia de los movimientos en el precio subyacente.

Si π es la probabilidad de que el precio subyacente aumente, el rendimiento esperado por la inversión en el bien subyacente es equivalente a la tasa de interés libre de riesgo y el valor esperado del rendimiento subyacente al final del periodo T es $\mathrm{E}(X)=\exp((i-r)T)=a\pi+d(1-\pi)$. Por lo cual las probabilidades neutrales al riesgo, respectivamente, son:

$$\pi=\frac{\exp((i-r)T)-d}{a-d} \quad \text{y} \quad 1-\pi=\frac{a-\exp((i-r)T)}{a-d} \tag{8}$$

donde $0\leq\pi\leq 1$ y $0<d<1\leq\exp((i\text{-}r)T)\leq a$.

Sustituyendo la ecuación (8) en la ecuación (7) se obtiene que el valor de la opción europea de compra sintética se puede calcular como:

$$c(0,M_0)=\left(c\left(T,M_1^a\right)\pi+c\left(T,M_1^d\right)(1-\pi)\right)\exp(\text{-}iT) \tag{9}$$

donde $c\left(T,M_1^a\right)=(M_0a-S)_+$ y $c\left(T,M_1^d\right)=(M_0d-S)_+$.

El proceso estocástico supuesto para modelar el rendimiento subyacente implica que la varianza proporcional en el rendimiento subyacente durante el periodo T es:

$$\sigma^2T=(a-d)^2\,\pi\,(1-\pi) \tag{10}$$

Sea $u=\exp((i-r)T)$, entonces las probabilidades neutrales al riesgo son:

$$\pi=\frac{u-d}{a-d} \quad \text{y} \quad 1-\pi=\frac{a-u}{a-d} \tag{11}$$

donde la varianza proporcional del rendimiento subyacente durante el periodo T es:

$$\sigma^2T=(u-d)(a-u) \tag{12}$$

Se tiene un sistema con las dos ecuaciones (11) y (12) y las tres incógnitas π, a y d, por lo cual al incluir la tercera restricción $ad=1$, propuesta por Cox, Ross y Rubinstein (1979) en donde definen a las incógnitas $a=\exp\left(\sigma\sqrt{T}\right)$ y $d=\exp\left(-\sigma\sqrt{T}\right)$ a partir de la distribución límite de la distribución binomial.

2.1 Modelo multiperiodo para valuación de opciones europeas

Supone que al final de cada estado el precio subyacente tiene sólo dos posibles valores, por lo que al dividir el tiempo de vigencia T en n intervalos de igual duración, existen $n+1$ valores posibles del precio subyacente y en consecuencia $n+1$ precios de la opción en la fecha de vencimiento.

Para resolver el problema se emplea una técnica basada en la secuencia de decisiones que satisface que si las decisiones futuras constituyen una decisión óptima con base en las decisiones precedentes, entonces la decisión actual es óptima y tiene una definición recursiva de la solución.

Suponiendo que las tasas de interés libres de riesgo i y r, y la volatilidad subyacente σ son constantes, sean $V\left(t,M_t\right)$ el valor de las opciones en el instante $t\in\left[0,T\right]$ cuando el precio subyacente es M_t, $V\left(t,M_t^a\right)$ el valor de las opciones en el instante t cuando el precio subyacente aumenta su valor de M_{t-1} a $M_t^a=M_{t-1}a$ y $V\left(t,M_t^d\right)$ el valor de las opciones en el instante t cuando el precio subyacente disminuye su valor de M_{t-1} a $M_t^d=M_{t-1}d$, entonces la estrategia óptima Δ_t durante el periodo $\left[t-1,t\right)$ es:

$$\Delta_t=\frac{V\left(t,M_t^a\right)-V\left(t,M_t^d\right)}{M_t^a-M_t^a} \qquad (13)$$

Si π es la probabilidad de que el precio subyacente aumente en cada uno de los n intervalos, el rendimiento subyacente esperado al final del intervalo δT es $\mathrm{E}\left(X\right)=\exp\left(\left(i-r\right)\delta T\right)=u$. Por lo cual las probabilidades neutrales al riesgo, respectivamente, son:

$$\pi=\frac{u-d}{a-d} \quad \text{y} \quad 1-\pi=\frac{a-u}{a-d} \qquad (14)$$

donde $\delta=\frac{1}{n}$, $0<d<1\leq u\leq a$, $a=\exp\left(\sigma\sqrt{\delta T}\right)$, $d=a^{-1}$ y $u=\exp\left(\left(i-r\right)\delta T\right)$.

Suponiendo que el periodo de vigencia T está dividido en dos intervalos $(n=2)$, en el primer intervalo, donde M_1^a entonces $V\left(1,M_1^a\right)=\left(V\left(2,M_2^{a^2}\right)\pi+V\left(2,M_2^{ad}\right)(1-\pi)\right)\exp(-i\delta T)$ y donde M_1^d entonces $V\left(1,M_1^d\right)=\left(V\left(2,M_2^{ad}\right)\pi+V\left(2,M_2^{d^2}\right)(1-\pi)\right)\exp(-i\delta T)$ y los valores de la opción son, respectivamente $V\left(2,M_2^{a^2}\right)=\left(M_0a^2-S\right)_+$ $V\left(2,M_2^{ad}\right)=\left(M_0a-S\right)_+$ y $V\left(2,M_2^{d^2}\right)=\left(M_0d^2-S\right)_+$. Para valuar la opción cuando M_0, se tiene que $V(0,M_0)=\left(V\left(1,M_1^a\right)\pi+V\left(1,M_1^d\right)(1-\pi)\right)\exp(-i\delta T)$ sustituyendo $V\left(1,M_1^a\right)$ y $V\left(1,M_1^d\right)$ en $V(0,M_0)$ el valor de la opción está dado por la ecuación siguiente $V(0,M_0)=\left(V\left(2,M_2^{a^2}\right)\pi^2+2V\left(2,M_2^{ad}\right)\pi(1-\pi)+V\left(2,M_2^{d^2}\right)(1-\pi)^2\right)$.

Generalizando la definición recursiva para n intervalos y bajo la hipótesis de valuación en un mundo neutral al riesgo, se tienen dos formas para valuar opciones europeas de compra:

1. La valuación de la opción se hace mediante la fórmula recursiva.

$$V\left(\eta,M_\eta^{a^kd^{\eta-k}}\right)=\begin{cases}\left(V\left(\eta+1,M_{\eta+1}^{a^{k+1}d^{\eta-k}}\right)\pi+V\left(\eta+1,M_{\eta+1}^{a^kd^{\eta-k+1}}\right)(1-\pi)\right)\exp(-i\delta T) & \text{si } 0\le k\le\eta<n\\ V\left(\eta,M_\eta^{a^kd^{\eta-k}}\right)=\left(Ma^kd^{\eta-k}-S\right)_+ & \text{si } 0\le k\le\eta=n\end{cases} \tag{15}$$

2. La valuación de la opción se hace mediante la fórmula general.

$$V(0,M_0)=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\pi^k(1-\pi)^{n-k}\,V\left(n,M_n^{a^kd^{n-k}}\right)\right)\exp(-iT) \tag{16}$$

donde $\delta=\dfrac{1}{n}$, $0<d<1\le u\le a$, $a=\exp\left(\sigma\sqrt{\delta T}\right)$, $d=a^{-1}$ y $u=\exp\left((i-r)\delta T\right)$.

Para la fórmula recursiva, es necesario calcular el valor intrínseco en los $n+1$ estados al término del n-ésimo intervalo. Cada par de estados tiene un estado padre, el cual es calculado mediante la fórmula recursiva hasta el primer intervalo, el cual tiene dos estados, de los cuales se obtiene el valor de la opción en el intervalo de negociación a través de las 2^n trayectorias del precio subyacente. Para la fórmula general, es necesario calcular el valor intrínseco en los $n+1$ estados al término del n-ésimo intervalo, si la opción es europea no existe la posibilidad de ejercer anticipadamente por lo que es suficiente calcular las combinaciones de cada uno de los $n+1$ valores intrínsecos y las probabilidades asociadas, sumar los $n+1$ resultados en valor presente para obtener el valor de la opción europea.

También se cuenta con dos formas para valuar opciones europeas de venta:

1. La valuación de la opción se realiza a través de la fórmula recursiva.

$$V\left(\eta, M_{\eta}^{a^k d^{\eta-k}}\right) = \begin{cases} \left(V\left(\eta+1, M_{\eta+1}^{a^{k+1} d^{\eta-k}}\right)\pi + V\left(\eta+1, M_{\eta+1}^{a^k d^{\eta-k+1}}\right)(1-\pi)\right)\exp\left(-i\delta T\right) & \text{si } 0 \le k \le \eta < n \\ V\left(\eta, M_{\eta}^{a^k d^{\eta-k}}\right) = \left(S - M a^k d^{\eta-k}\right)_+ & \text{si } 0 \le k \le \eta = n \end{cases} \tag{17}$$

2. La valuación de la opción se realiza a través de la fórmula general.

$$V\left(0, M_0\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi^k \left(1-\pi\right)^{n-k} V\left(n, M_n^{a^k d^{n-k}}\right)\right)\exp\left(-iT\right) \tag{18}$$

donde

$$\delta = \frac{1}{n},\ 0 < d < 1 \le u \le a,\ a = \exp\left(\sigma\sqrt{\delta T}\right),\ d = a^{-1} \text{ y } u = \exp\left(\left(i-r\right)\delta T\right).$$

2.2 Modelo multiperiodo para valuación de opciones americanas

Los titulares de las opciones americanas tienen el derecho, pero no la obligación, de negociar una cantidad del subyacente en cualquier día hábil antes o en la fecha de vencimiento y al precio de liquidación, por lo que es necesario considerar el flujo de efectivo en valor presente por el ejercicio anticipado. Como se demuestra en Cox, Ross y Rubinstein (1979) y Climent Hernández (2005) no es óptimo ejercer anticipadamente las opciones americanas de compra, por lo cual se pueden utilizar las ecuaciones (15) y (16).

Como se demuestra en Cox, Ross y Rubinstein (1979) y Climent Hernández (2005) en algunos casos es óptimo ejercer anticipadamente las opciones americanas de venta, por lo que es necesario calcular de forma recursiva el valor de la opción en cada estado de cada intervalo, por lo que para considerar el flujo de efectivo por el ejercicio anticipado se tiene que:

$$V\left(\eta, M_{\eta}^{a^k d^{\eta-k}}\right) = \begin{cases} \max\left(V\left(\eta, M_{\eta}^{a^k d^{\eta-k}}\right), \left(V\left(\eta+1, M_{\eta+1}^{a^{k+1} d^{\eta-k}}\right)\pi + V\left(\eta+1, M_{\eta+1}^{a^k d^{\eta-k+1}}\right)(1-\pi)\right)\exp(-i\delta T)\right) & \text{si } 0 \le k \le \eta < n \\ V\left(\eta, M_{\eta}^{a^k d^{\eta-k}}\right) = \left(S - Ma^k d^{\eta-k}\right)_+ & \text{si } 0 \le k \le \eta = n \end{cases} \tag{19}$$

donde

$$\delta = \frac{1}{n}, \quad 0 < d < 1 \le u \le a, \quad a = \exp\left(\sigma\sqrt{\delta T}\right), \quad d = a^{-1} \text{ y } u = \exp\left(\left(i-r\right)\delta T\right).$$

3. Estimación de parámetros para valuación de opciones

Bachelier (1900) y Cox, Ross y Rubinstein (1979) suponen que δ representa el tiempo transcurrido entre los cambios sucesivos del precio subyacente. Es decir, si T es el tiempo de vigencia, y n es el número de intervalos de longitud δ antes de la fecha de vencimiento, entonces $T = n\delta$. Si el número de cambios n incrementa indefinidamente, δ se aproxima a cero y por lo tanto se deben ajustar las variables a, d y u para obtener resultados de acuerdo a cada instante δT. Utilizando el teorema central del límite, Bachelier (1900) supone que las probabilidades son $\pi = 1 - \pi = \frac{1}{2}$, entonces el ajuste de las variables es $a = \exp\left(\left(i-r\right)\delta T\right) - \sigma\sqrt{\delta T}$ y $d = \exp\left(\left(i-r\right)\delta T\right) - \sigma\sqrt{\delta T}$, mientras que Cox, Ross y Rubinstein (1979) proponen que $a = \exp\left(\sigma\sqrt{\delta T}\right)$

y $d = \exp\left(-\sigma\sqrt{\delta T}\right)$ a partir de la distribución límite de la distribución binomial.

Se propone una solución alternativa suponiendo como en Bachelier (1900) y Cox, Ross y Rubinstein (1979) que el rendimiento esperado durante el intervalo δT es $\mathrm{E}\left(X\right) = a\pi + d\left(1-\pi\right) = u$, entonces:

$$a\pi + d\left(1-\pi\right) = \exp\left(\left(i-r\right)\delta T\right) \tag{20}$$

Despejando π y $1-\pi$ de la ecuación (20), se obtiene la ecuación (14) donde donde debido a la probabilidad libre de riesgo se satisface que $0 < d < 1 < \exp\left(\left(i-r\right)\delta T\right) < a$, y la varianza proporcional durante el intervalo δT es constante y está dada por $\operatorname{var}\left(X\right) = \left(a-d\right)^2 \pi\left(1-\pi\right)$, sustituyendo la ecuación (14) en la ecuación de la varianza proporcional durante el intervalo δT se tiene que:

$$\left(u-d\right)\left(a-u\right) = \sigma^2\delta T \tag{21}$$

Se tiene un sistema con las ecuaciones (20) y (21) y las variables a, d y π, incluyendo, igual que Cox, Ross y Rubinstein (1979) la ecuación siguiente:

$$ad = 1 \tag{22}$$

Sustituyendo la ecuación (22) en la ecuación (21) y despejando a la variable a se obtiene la ecuación de segundo grado siguiente:

$$a^2 - \left(\sigma^2\delta T + u^2 + 1\right)\exp\left(-\left(i-r\right)\delta T\right)a + 1 = 0 \tag{23}$$

Sean $A = 1$, $B = -\left(\sigma^2\delta T + u^2 + 1\right)\exp\left(-\left(i-r\right)\delta T\right)$ y $C = 1$, se tiene que:

$$a_1 = \tan\left(\gamma_2\right) - \sec\left(\gamma_1\right) \quad \text{y} \quad d_1 = -\tan\left(\gamma_2\right) - \sec\left(\gamma_1\right) \tag{24}$$

donde $\gamma_1 = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{2}{B}\right)$ y $\gamma_2 = \arctan\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{B^2 - 4}\right)$.

A través de la solución propuesta para las variables a_1 y d_1 se puede comparar la valuación de opciones del mercado mexicano extrabursátil utilizando las ecuaciones, y donde se tiene que $\delta = n^{-1}$, $0 < d_1 < 1 \leq u \leq a_1$ $u = \exp\left(\left(i-r\right)\delta T\right)$, $a_1 = \tan\left(\gamma_2\right) - \sec\left(\gamma_1\right)$ y $d_1 = -\tan\left(\gamma_2\right) - \sec\left(\gamma_1\right)$ y mostrar gráficamente la convergencia de ambos modelos de tiempo discreto a la valuación mediante el modelo log-gaussiano.

3.1 Valuación de opciones a través del modelo multiperiodo

La metodología empleada para modelar el precio subyacente es la programación dinámica estocástica a través de los insumos en un instante determinado y la valuación de las opciones se realiza utilizando el principio de inducción regresiva. Los insumos utilizados son el precio subyacente M_0, la volatilidad subyacente σ, las tasas de interés libres de riesgo i y r, el precio de liquidación S, el tiempo de vigencia T y el tiempo remanente $\tau = T - t$ donde t es el tiempo transcurrido desde la negociación de las opciones. Los parámetros a_1 y a_2 de la ecuación son equivalentes a:

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{B^2 - 4} - B\right) \quad \text{y} \quad d_1 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{B^2 - 4} + B\right) \tag{25}$$

donde $B = -\left(\sigma^2 \delta T + u^2 + 1\right)\exp\left(-\left(i-r\right)\delta T\right)$, por lo que el incremento a_1 y el decremento d_1 en el precio subyacente está modelado a través de las tasas de interés, la volatilidad subyacente y el tiempo de vigencia y además por la propiedad de tricotomía se tienen los tres casos siguientes:

$$\begin{aligned} a_1 < a \quad & \text{si} \;\; B > -\left(a+d\right) \\ a_1 = a \quad & \text{si} \;\; B = -\left(a+d\right) \\ a_1 > a \quad & \text{si} \;\; B < -\left(a+d\right) \end{aligned} \tag{26}$$

donde $\lim_{n\to\infty} B = \lim_{\delta\to 0} B = -2$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_1 = \lim_{\delta\to 0} a_1 = \lim_{n\to\infty} a = \lim_{\delta\to 0} a = 1$.

Lo que significa que en el límite ambos resultados son equivalentes, sin embargo los parámetros a_1 y d_1 propuestos modelan más adecuadamente el precio subyacente que los parámetros a y d debido a que las tasas de interés son factores de influencia en el modelado del precio subyacente y en la valuación de opciones, así entonces la probabilidad libre de riesgo también se modela más adecuadamente, lo que permite que la valuación cuantifique de manera más adecuada el riesgo de mercado ya que la ecuación significa el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) subestima el precio subyacente cuando $a_1 > a$ y sobreestima el precio subyacente cuando $a_1 < a$, por lo cual también subestima o sobreestima el riesgo de mercado y en consecuencia ocurre lo mismo con la valuación de las opciones.

4. *Valuación de opciones americanas*

Actualmente el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer) no tiene opciones americanas de venta vigentes por lo que se valúa una opción europea de venta sobre la paridad peso-dólar del mercado extrabursátil y se compara la valuación de la opción europea de ambos modelos y se muestra la convergencia al modelo de Merton (1973), se valúan las opción americanas de compra y venta de la misma clase utilizando los insumos con los que el proveedor de precios Valuación Operativa y Referencias de Mercado (Valmer) realizó las valuaciones, utilizando ambos modelos de tiempo discreto y comparando los resultados con el modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987). También se valúa un warrant americano sobre Kodak que es equivalente a la valuación de una opción americana de compra, comparando la valuación de ambos modelos y mostrando la convergencia al modelo de Black y Scholes (1973), se valúa la opción americana de venta de la misma clase y también se comparan los resultados con el modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987).

4.1 *Los insumos utilizados en la valuación de una opción americana*

El tipo de cambio fix del día 2 de enero de 2014 fue $M_0 = 13.1011$ pesos por dólar, la volatilidad subyacente $\sigma = 0.12442667$, la tasa de interés libre de riesgo nacional $i = 3.24253071789042\%$, la tasa de interés extranjera

$r = 0.251595108417202\%$, el precio de liquidación $S = 12.93$ y el periodo remanente $\tau = 102$ días para la fecha de vencimiento el día 14 de abril de 2014. Utilizando el modelo de Merton (1973) para la valuación de la opción europea de venta se tiene el resultado siguiente:

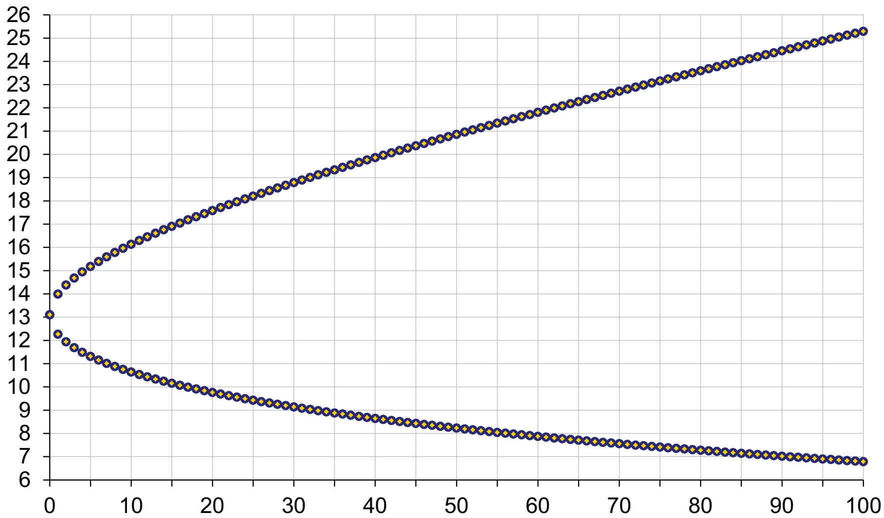
$$p(t, M_t) = S\exp(-i\tau)\Phi(-d_2) - M_0\exp(-r\tau)\Phi(-d_1) = 0.218557$$

donde $d_1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{M_0}{S}\right) + \left(i - r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$ y $\Phi(x)$ es la distribución estándar del rendimiento subyacente.

Utilizando estos insumos se valúan las opciones europeas y americanas utilizando el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) y el modelo propuesto en la investigación presente, la valuación se realiza utilizando de uno a cien intervalos. A través de la programación dinámica estocástica se modela la evolución del precio subyacente en función del número de intervalos y se muestran los límites superiores e inferiores en la Figura 1.

En la Figura 1 se aprecia el modelado del precio subyacente a través de la programación dinámica en función del número de intervalos (1-100) y no se observa a simple vista diferencia entre el precio subyacente para ambos modelos (en rombos claros el modelo propuesto y en círculos obscuros el modelo de Cox, Ross y Rubinstein), sin embargo el precio máximo para el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) es $M_0a^n = 25.291180$, el precio mínimo es $M_0d^n = 6.786509$ y para el modelo propuesto los precios son $M_0a_1^n = 25.291797$ y $M_0d_1^n = 6.786343$, respectivamente, por lo cual se tiene que $M_0a_1^n > M_0a^n$ y $M_0d^n > M_0d_1^n$, además, éste resultado se presenta para toda $n = 1, \ldots, 100$, concluyendo el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) subestima la evolución del precio subyacente y en consecuencia no cuantifica de manera adecuada el riesgo de mercado utilizando los insumos dados. La convergencia del modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) y del modelo propuesto al modelo de Merton (1973), en función del número de intervalos se presenta en la Figura 2.

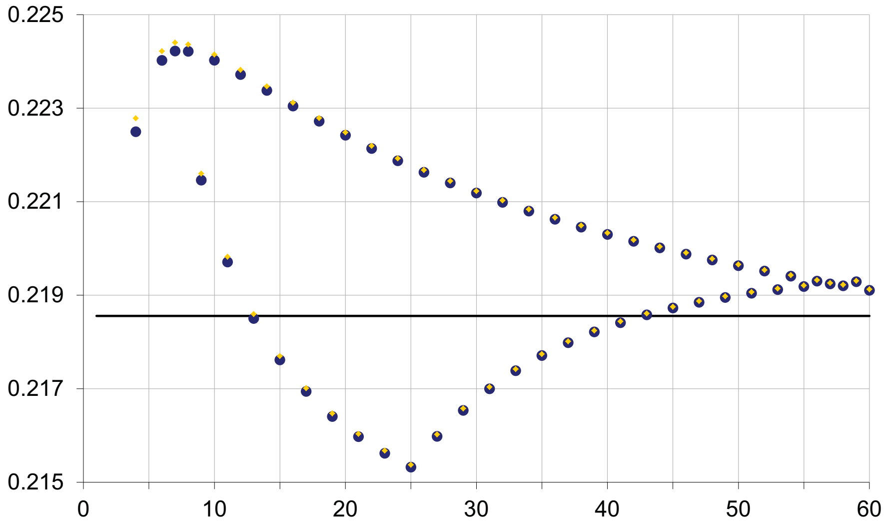
Figura 1. Evolución del precio subyacente



Fuente: Elaboración propia a través de hoja de cálculo.

En la Figura 2 se observa la convergencia de ambos modelos de tiempo discreto al precio del modelo de Merton (1973) que está representado por la línea negra horizontal y el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) está representado por los círculos obscuros y el modelo propuesto en este trabajo por los rombos claros en función del número de intervalos. La convergencia de ambos se da en el intervalo $n=58$ con los valores $p(t,M_t)=0.219201$ y $p_1(t,M_t)=0.219222$, respectivamente. Se puede observar que la diferencia entre ambos modelos existe para los insumos utilizados y además se tiene que $p_{\mathrm{M}}(t,M_t)<p(t,M_t)<p_1(t,M_t)$ para $n=58$ intervalos y para los tres modelos se tiene el resultado $p_{\mathrm{M}}(t,M_t)0.218557<p(t,M_t)=0.217747<p_1(t,M_t)=0.217759$ cuando el número de intervalos es $n=100$. Además, éste resultado se da para toda $n=1,\ldots,100$, concluyendo que el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) subestima la valuación de la opción europea con respecto al modelo propuesto y en consecuencia no cuantifica de manera adecuada el riesgo de mercado al utilizar los insumos dados. Considerando el volumen de operación de los mercados extrabursátiles las diferencias se presentan cuando

Figura 2. Convergencia de los modelos discretos al modelo de Merton (1973)



Fuente: Elaboración propia a través de hoja de cálculo.

existen más de diez mil subyacentes involucrados o mil contratos que amparan cien subyacentes cada uno.

4.2 Valuación de la opción americana de venta

La importancia del modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) y el modelo propuesto en este trabajo se presenta en la posibilidad de la valuación de las opciones americanas de venta ya que actualmente no se tiene una ecuación cerrada, entonces se compara la valuación de la opción americana de la misma clase con los insumos utilizados por Valmer para la opción europea, utilizando el modelo de Cox, Ross y Rubisntein (1979), el modelo propuesto en este trabajo y se muestra la relación de ambos modelos de tiempo discreto con el modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987).

Utilizando el modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987) para la valuación de la opción americana de venta se tiene que:

$$P_{\text{BAW}}\left(t, M_t\right) = P_{\text{BS}}\left(t, M_t\right) + A_1\left(M_t\left(M^*\right)^{-1}\right)^{q_1} = 0.222409$$

donde:

$$P_{\mathrm{BS}}\left(t,M_t\right)=0.218557,\quad m=2i\sigma^{-2}=4.188776,\quad N=2\left(i-r\right)\sigma^{-2}=3.863760$$

$$M\left(\infty\right)=S\left(1-2\left(-\left(N-1\right)-\sqrt{\left(N-1\right)^2+4m}\right)^{-1}\right)^{-1}=10.307117$$

$$h_1=-\left(\left(i-r\right)\tau-2\sigma\sqrt{\tau}\right)\left(S\left(S-M\left(\infty\right)\right)^{-1}\right)=-0.607307$$

$$M^*=M\left(\infty\right)+\left(S-M\left(\infty\right)\right)\exp\left(h_1\right)=11.736106$$

y además:

$$g\left(\tau\right)=1-\exp\left(-i\tau\right)=0.009020$$

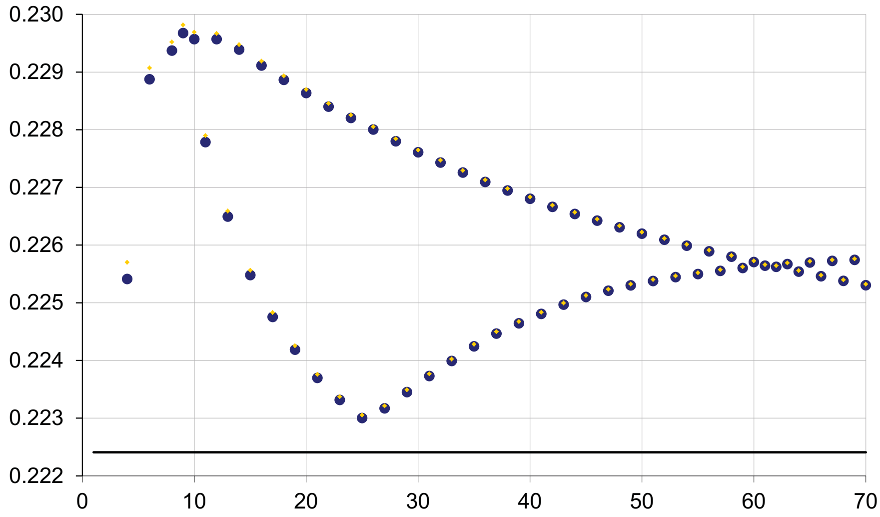
$$q_1=-\frac{1}{2}\left(\left(N-1\right)+\sqrt{\left(N-1\right)^2+4mg^{-1}\left(\tau\right)}\right)=-23.028589$$

$$A_1=-M^*q_1^{-1}\left(1-\exp\left(-r\tau\right)\Phi\left(-d_1\left(M^*\right)\right)\right)=0.048538$$

El precio subyacente se modela a través de la programación dinámica estocástica y se obtiene un resultado igual al de la Figura 1 y utilizando el principio de inducción regresiva, en función del número de intervalos, se obtiene el resultado presentado en la Figura 3.

En la Figura 3 se observa la convergencia de la valuación de la opción americana de venta donde el modelo Barone-Adesi y Whaley (1987) está representado por la línea negra horizontal, el modelo de Cox Ross y Rubinstein (1979) está representado por los círculos obscuros y el modelo propuesto por los rombos claros en función del número de intervalos. La convergencia de los modelos de tiempo discreto se da en el intervalo $n=60$ con el valor $P_{\mathrm{BAW}}\left(t,M_t\right)=0.222409$ para el modelo Barone-Adesi y Whaley (1987), con el valor $P\left(t,M_t\right)=0.225707$ para el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979), y con el valor $P_1\left(t,M_t\right)=0.225727$ para el modelo propuesto. La diferencia entre ambos modelos existe con los insumos utilizados, $P_{\mathrm{BAW}}\left(t,M_t\right)<P\left(t,M_t\right)<P_1\left(t,M_t\right)$

Figura 3. Valuación de la opción americana sobre
la paridad fix



Fuente: Elaboración propia a través de hoja de cálculo.

cuando el número de intervalos es $n = 60$ y también ocurre que $P_{\text{BAW}}(t, M_t) = 0.222409 < P(t, M_t) = 0.224431 < P_1(t, M_t) = 0.224443$ cuando $n = 100$. La valuación de las opciones americanas $P_{\text{BAW}}(t, M_t) < P(t, M_t) < P_1(t, M_t)$ se cumple para toda $n = 1, \ldots, 100$ por lo que el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) subestima la valuación de la opción americana de venta con respecto al modelo propuesto y en consecuencia no cuantifica de manera adecuada el riesgo de mercado al utilizar los insumos dados. Considerando el volumen de operación de los mercados extrabursátiles las diferencias se presentan con mil contratos que amparan cien subyacentes cada uno. Ambos modelos de tiempo discreto tienen una valuación superior con respecto al modelo de Merton (1973) y al modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987) de tal forma que $p_{\text{M}}(t, M_t) < P_{\text{BAW}}(t, M_t) < P(t, M_t) < P_1(t, M_t)$.

La valuación de opciones europeas y americanas con los insumos utilizados por Valmer, del 2 de enero de 2014, a través del modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) subvalúa el riesgo de mercado con respecto al modelo propuesto con la estimación de los parámetros a_1 y d_1, sin embargo debido a la tricotomía de los números reales, representada por la ecuación , el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) puede valuar adecuadamente cuando $a_1 = a$ o sobrevaluar el riesgo de mercado cuando $a_1 < a$ con respecto al modelo propuesto. En el caso de las opciones americanas de venta no hay convergencia al modelo de Merton (1973) sin embargo de acuerdo a Martínez Palacios (2012) el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) y el modelo propuesto, convergen, mediante un enfoque de control óptimo estocástico a $p_{\mathrm{M}}(t, M_t) + (1 - \exp(-i\upsilon)) f(M_t, g(\upsilon))$ que es el valor de una opción europea más un valor positivo que debe satisfacer algunas otras condiciones y como se ha mostrado el valor se aproxima al modelo Barone-Adesi y Whaley (1987). Entonces el modelo propuesto al igual que el modelo de Cox, Ros y Rubisntein (1979), utilizando matemáticas elementales, permite realizar la valuación de las opciones americanas de venta de una forma sencilla y computacionalmente eficiente.

4.3 Valuación de un warrant americano sobre Kodak

Valmer realiza la valuación de un warrant americano sobre la acción de Eastman Kodak Company, acción que no paga dividendos durante la vigencia del warrant y que es equivalente a la valuación de una opción americana de compra descubierta, con los insumos del día 22 de abril de 2014 siguientes: precio subyacente $M_0 = 29.65$ dólares, volatilidad subyacente $\sigma = 0.2944$, tasa de interés libre de riesgo $i = 1.60544805126257\%$, precio de liquidación $S = 14.93$ y periodo remanente $\tau = 1{,}595$ días para la fecha de vencimiento el día 3 de septiembre del año 2018. Utilizando el modelo de Black y Scholes (1973) para la valuación de la opción europea de compra se tiene que $c_{\mathrm{BS}}(t, M_t) = 16.37157$, la valuación del proveedor de precios utilizando el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) con $n = 100$ intervalos es $c(t, M_t) = 16.374963$ y la valuación con el método propuesto es $c_1(t, M_t) = 16.373954$ donde $c_{\mathrm{BS}}(t, M_t) < c_1(t, M_t) < c(t, M_t)$. Además éste resultado se cumple para toda $n=1,\ldots 100$, por lo que el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) sobreestima la valuación de la opción americana de compra con respecto al modelo propuesto a partir de un contrato que ampara cien subyacentes y en consecuencia no cuantifica de manera adecuada el riesgo de mercado al utilizar los insumos dados.

La diferencia entre la tasa de interés y la volatilidad es demasiado amplia, y en el modelo propuesto, la estimación de los parámetros a_1 y d_1 está en función de la tasa de interés, de la volatilidad y del tiempo remanente, el análisis de sensibilidad muestra que entre menor es la diferencia entre la tasa de interés y la volatilidad, los parámetros estimados satisfacen $a_1 > a$ y $d > d_1$, el riesgo de mercado es grande comparado con la tasa de interés esperada en la inversión, el riesgo es 18.3376 veces mayor que la tasa de interés libre de riesgo. Cuando la volatilidad subyacente es $\sigma \leq 12.2\%$, entonces $a_1 > a$ y $d > d_1$ para toda $n=1,\ldots,100.$ Si la tasa de interés libre de riesgo es $i \geq 10\%$ y la volatilidad subyacente es $\sigma \leq 30.4\%$, se tiene que $a_1 > a$ y $d > d_1$ para toda $n=1,\ldots,100.$ Si la tasa de interés libre de riesgo es $i = 25\%$ y la volatilidad subyacente es $\sigma \leq 100\%$, entonces se satisface que: $a_1 > a$ y $d > d_1$ para toda $n=1,\ldots,100.$ Por lo que el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) sobreestima el riesgo de mercado y la valuación del warrant americano equivalente a la valuación de la opción americana de compra con respecto al modelo propuesto en este trabajo.

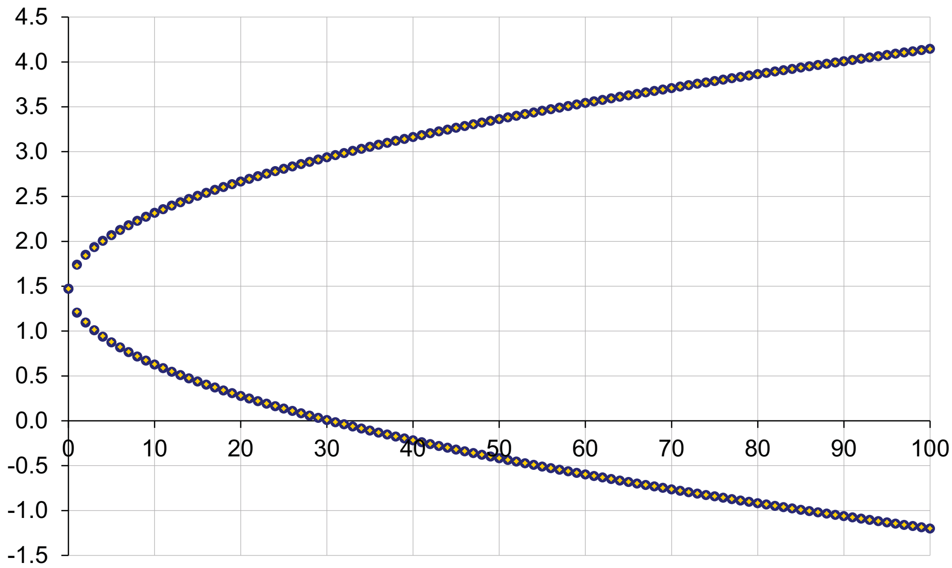
4.4 Valuación de una opción americana de venta sobre Kodak

Suponiendo que existe una opción americana de venta sobre Kodak de la misma serie que el warrant americano se realiza la valuación a través del modelo de Cox, Ross y Rubisntein (1979), del modelo propuesto en este trabajo y además se realiza y se presenta un análisis con los resultados siguientes:

La valuación de la opción europea de venta sobre Kodak realizada a través del modelo de Black y Scholes (1973) es $p_{\mathrm{BS}}\left(t, M_t\right) = 0.640043$, utilizando los insumos del warrant americano sobre Kodak se modela la evolución del logaritmo precio subyacente en función del número de intervalos y se muestran los límites superiores e inferiores en la Figura 4.

En la Figura 4 se aprecia el modelado del logaritmo precio de Kodak, $\left(n, \log\left(M_n\right)\right)$, a través de la programación dinámica estocástica en función del

Figura 4. Evolución del logaritmo del precio de Kodak



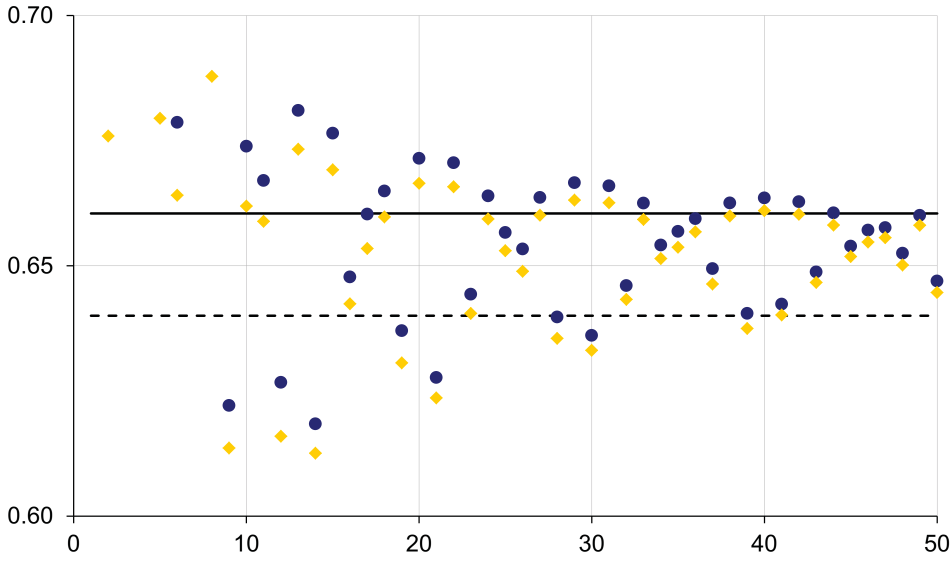
Fuente: Elaboración propia a través de hoja de cálculo.

número de intervalos $n=1,\ldots,100$ y no se observa diferencia entre el precio subyacente para ambos modelos (en rombos claros el modelo propuesto), sin embargo para el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) el precio máximo está dado a través del valor $M_0a^n = 13{,}955.984640$, el precio mínimo es $M_0d^n = 0.062993$ y para el modelo propuesto, los valores respectivos son $M_0a_1^n = 13{,}917.960027$ y $M_0d_1^n = 0.063165$, por lo cual se observa que los límites superiores e inferiores son $M_0a^n > M_0a_1^n$ y $M_0d_1^n > M_0d^n$, además, este resultado se presenta para toda $n=1,\ldots,100$, por lo que el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) sobreestima la evolución del precio subyacente con respecto al modelo propuesto y en consecuencia no cuantifica adecuadamente el riesgo de mercado.

Utilizando el principio de inducción regresiva, considerando el pronto ejercicio de la opción americana de venta y en función del número de intervalos, se obtiene el resultado de la Figura 5.

En la Figura 5 el modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987) está representado por la línea negra horizontal, el modelo de Black y Scholes (1973) está representado por la línea negra y discontinua horizontal el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) está representado por los círculos obscuros

Figura 5. Valuación de la opción americana sobre Kodak



Fuente: Elaboración propia a través de hoja de cálculo.

y, el modelo propuesto por los rombos claros en función del número de intervalos, la convergencia se da por primer ocasión en el intervalo $n = 25$ con el valor $P(t, M_t) = 0.656664$ para el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) y con el valor $P_1(t, M_t) = 0.653002$ para el modelo propuesto, la convergencia siguiente es en el intervalo $n = 35$ donde $P(t, M_t) = 0.656873$ y $P_1(t, M_t) = 0.653685$, la tercera convergencia ocurre en el intervalo $n = 46$ donde $P(t, M_t) = 0.657113$ y $P_1(t, M_t) = 0.654730$ que son las valuaciones con los valores máximos para ambos modelos, el modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987) tiene el valor $P_{\text{BAW}}(t, M_t) = 0.660458$ y el modelo de Black y Scholes (1973) tiene el valor $p_{\text{BS}}(t, M_t) = 0.640044$. La diferencia entre ambos modelos de tiempo discreto existe y es notoria con los insumos utilizados, $P_{\text{BS}}(t, M_t) < P_1(t, M_t) < P(t, M_t) < P_{\text{BAW}}(t, M_t)$ para toda $n = 1, \ldots, 100$ concluyendo que el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) sobrestima la valuación de la opción americana de venta sobre Kodak con respecto al modelo propuesto a partir de diez contratos que amparan cien subyacentes y en consecuencia el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) no cuantifica de manera adecuada el riesgo de mercado y el riesgo equivalente a la cobertura de la opción al utilizar los insumos dados. Ambos modelos tienen una valuación superior con respecto al modelo de Black y Scholes (1973) y una valuación inferior con respecto al modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987) de tal forma que $p_{\text{BS}}(t,M_t) < P_1(t,M_t) < P(t,M_t) < P_{\text{BAW}}(t,M_t)$.

Las opciones americanas de venta no convergen al modelo de Black y Scholes (1973), sin embargo de acuerdo a Martínez Palacios, Sánchez Daza y Venegas-Martínez (2012) el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) y el modelo propuesto, convergen, mediante un enfoque de control óptimo estocástico a $p_{\text{BS}}(t,M_t)+(1-\exp(-i\upsilon))f(M_t,g(\upsilon))$ y como se ha mostrado en este trabajo el valor se aproxima al modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987) donde $P_{\text{BAW}}(t,M_t) = P_{\text{BS}}(t,M_t)+A$ para toda $A>0$.

En el mercado mexicano organizado y en el extrabursátil no se realiza actualmente la valuación de opciones americanas de venta, por lo cual se ha tenido que recurrir a la valuación de opciones americanas de venta de la misma clase que las existentes de compra para mostrar las cualidades y diferencias entre el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) y el modelo propuesto en este trabajo a través de la estimación de los parámetros a_1 y d_1 para modelar la evolución del precio subyacente a través del tiempo, y mediante las probabilidades libres de riesgo y el principio de inducción regresiva realizar la valuación de las opciones.

El teorema central de límite muestra que el modelo de Bachelier (1900) converge a un modelo gaussiano, bajo los supuestos del modelo de Cox, Ross y Rubisntein (1979) la convergencia es al modelo log-gaussiano de Black y Scholes (1973), y de Merton (1973), como se analiza en la publicación de Climent Hernández (2005), en modelo de Merton (1973) y en el Apéndice B de este trabajo. El modelo propuesto realiza la estimación de los parámetros a través de un sistema de ecuaciones y la convergencia también se da al modelo de tiempo continuo de Black y Scholes (1973) y de Merton (1973) para las opciones europeas y para las opciones americanas de compra. Por lo que la importancia y oportunidad de utilizar el modelo propuesto se presenta en la valuación de las opciones americanas de venta debido a la complejidad para la valuación de éstas opciones a través de los modelos de aproximación, de diferencias finitas, y de una fórmula analítica que proponen aproximaciones para la valuación de opciones mediante una excesiva complejidad y el uso de recursos de cómputo como es el caso del método Montecarlo.

La valuación de las opciones americanas de venta a través del método propuesto tiene diferencias con el modelo de Cox, Ross y Rubisntein (1979), el cual presenta una calibración elegante y que no incluye la tasa de interés en los parámetros a y d, por lo cual puede subvaluar o sobrevaluar el riesgo de mercado con respecto al modelo propuesto, esto es debido a la propiedad de tricotomía de los números reales. En el modelo propuesto está incluida la tasa de interés libre de riesgo en los parámetros de la probabilidad libre de riesgo a_1 y d_1, los cuales representan el aumento y descenso en el precio subyacente. La tasa de interés libre de riesgo, efectivamente tiene una influencia menor que la volatilidad subyacente, pero debe ser considerada en el modelado del precio subyacente y en las probabilidades libres de riesgo para la cuantificación adecuada del riesgo de mercado y de la valuación de las opciones ya que es un factor de influencia en la teoría de valuación de opciones.

5. Conclusiones

El modelo en tiempo discreto de Cox, Ross y Rubinstein permite modelar le precio subyacente a través de la programación dinámica estocástica y por medio del principio de inducción regresiva se realiza la valuación de las opciones, en particular las opciones americanas de venta. Los parámetros propuestos por Cox, Ross y Rubinstein son elegantes ya que están en función de la volatilidad y el tiempo remanente, y se obtienen a partir del límite de la distribución binomial a la distribución log-gaussiana.

La estimación propuesta en este trabajo se obtiene a partir de un sistema de ecuaciones y el resultado incluye a la tasa de interés, a la varianza proporcional y al tiempo remanente. La tasa de interés libre de riesgo es un factor que tiene menor influencia en la teoría de valuación de opciones, sin embargo el cambio en la tasa de interés libre de riesgo produce un cambio en la valuación de opciones debido al cambio en el modelado del precio subyacente y en el valor actual de éste. La estimación propuesta tiene diferencias con la estimación de Cox, Ross y Rubinstein, la cual es elegante, pero puede subestimar o sobreestimar el modelado del precio subyacente por la propiedad de tricotomía de los números reales, y como consecuencia subestimar o sobreestimar el riesgo de mercado y también se presentan diferencias en la valuación de las opciones subestimando o sobrestimando el riesgo por la cobertura. El modelo propuesto utiliza supuestos idénticos al modelo de Cox, Ross y Rubinstein, sin embargo la estimación de los parámetros a través de una ecuación de segundo grado es la diferencia del modelo propuesto y el resultado incluye a la tasa de interés en los parámetros de la probabilidad libre de riesgo y como un factor de influencia en el modelado del precio subyacente, de la cuantificación del riesgo y de la valuación de las opciones.

Se utilizan los insumos de una opción europea de compra sobre la paridad fix y los insumos de un warrant americano sobre la acción de Kodak y se compara la valuación teórica que realiza el proveedor de precios Valmer a través del método de Cox, Ross y Rubinstein con el modelo propuesto y la convergencia al modelo de Merton, al modelo de Black y Scholes y al modelo de Barone-Adesi y Whaley (1987), respectivamente, mostrando que el modelo de Cox, Ross y Rubinstein subestima o sobreestima el riesgo de mercado y así también la valuación de las opciones debido a la propiedad de tricotomía de los números reales aun cuando el modelo propuesto utiliza los mismos supuestos y el mismo marco teórico como modelo de optimización para los flujos de efectivo en valor actual. En las opciones valuadas en este trabajo las diferencias se presentan a partir de un cierto número de contratos que amparan cien subyacentes, por lo que con un volumen mayor de operación en los contratos las diferencias son mayores.

Como investigaciones futuras se puede utilizar el modelo propuesto en la valuación de opciones reales como lo hacen Cruz Aranda (2012) y Milanesi (2013), y analizar un modelo de tiempo discreto y la estimación de parámetros de la probabilidad libre de riesgo para analizar la convergencia a un modelo de tiempo continuo con distribución log-estable para la valuación de opciones como se propone en las investigaciones de Contreras Piedragil y Venegas Martínez (2011) y de Climent Hernández y Venegas Martínez (2013).

Bibliografía

Bachelier, L. J. B. A. (1900). Théorie de la Spéculation, PhD thesis, Sorbonne. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. www.numdam.org/item?id=ASENS_1900_3_17__21_0.

Barone-Adesi, G. y Whaley, R. (1987). "Efficient Analytic Approximation of American Options Values". *The Journal of Finace*, 42(2): 301-320.

Black, F. y M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, 81(3): 637-654.

Brennan, M. J. y Schwartz, E. S. (1977). "The Valuation of American put Options". *The Journal of Finance*, 32(2): 449-462.

Climent Hernández, J. A. (2005). "Valuación de opciones, Vínculo Matemático No. 38". Facultad de Ciencias, UNAM.

Climent Hernández, J. A. y Venegas Martínez, F. (2013). "Valuación de opciones sobre subyacentes con rendimientos α–estables". *Contaduría y Administración*, 58(4): 119-150.

Contreras Piedragil, C. E. y Venegas-Martínez, F. (2011). "Valuación de opciones sobre activos subyacentes con distribuciones estables". *Estocástica* 1(1): 55–71.

Cox, J. y S. Ross (1976). "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes". *Journal of Financial Economics*, 3(1): 145-166.

Cruz Aranda, F. (2012). "Procesos estocásticos en la valuación de proyectos de inversión, opciones reales, árboles binomiales, simulación bootstrap y simulación Montecarlo: flexibilidad en la toma de decisiones". *Contaduría y Administración*, 57(2): 83-112.

Martínez Palacios, Ma. Teresa. V. (2012). "Modelo macroeconómico de riesgos de mercado y política fiscal incierta". Tesis, Escuela Superior de Economía, IPN.

______________, y Sánchez Daza, Alfredo, Venegas-Martínez, Francisco (2012). "Valuación de opciones americanas: un enfoque de control óptimo estocástico en un horizonte finito con fecha final aleatoria". *Análisis Económico*, 64(XXVII): 165-183.

Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1): 141-183.

Milanesi, G. (2013). "El modelo binomial borroso y la valoración de opciones reles: el caso de valuación de uncontrato de concesión para la explotación petrolera". *Estocástica* 3(3): 55–118.

Ross, S. (1976). "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing". *Journal of Economic Theory*, 13(3): 341-360.

Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos: productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Cengage Learning Latin America. Segunda edición.

Villeneuve, S. y Zanette, A. (2002). *Parabolic A.D.I. Methods for Pricing American Options on Two Stocks*. *Mathematics of Operations Research*, 27: 121-149.

Apéndice A

Valuación de opciones sobre subyacentes que pagan dividendos

Suponiendo que $\forall j=1,\ldots,m$ el subyacente paga dividendos y se conoce por anticipado el valor de los dividendos $\{D_1,\ldots,D_m\}$ en las fechas $\{0\le\tau_1<\cdots<\tau_m\le T\}$ donde $0\le\tau_j\le T$ y $D_j\in[0,T]$, en las fechas τ_j en las que el subyacente paga los dividendos D_j, el subyacente disminuye de precio en un valor equivalente al pago del dividendo, entonces, el pago de dividendos disminuye el valor de las opciones de compra e incrementa el valor de las opciones de venta. El precio subyacente es modelado a través de la programación dinámica estocástica suponiendo que el precio subyacente es la suma del componente libre de riesgo y del componente con riesgo. El valor del componente libre de riesgo es:

$$D_\eta=\sum_{j=1}^{m}D_j\exp\left(-r\left(\tau_j-\eta\delta T\right)\right) \tag{27}$$

La volatilidad del componente con riesgo es:

$$\sigma_1=\sigma\frac{M_0}{M_0-D_0} \tag{28}$$

Sustituyendo la ecuación en B se tiene que:

$$B=-\left(\sigma_1^2\delta T+u^2+1\right)\exp\left(-\left(i-r\right)\delta T\right) \tag{29}$$

donde las probabilidades libres de riesgo están expresadas por la ecuación siguiente:

$$\pi=\frac{u-d_1}{a_1-d_1}\quad \text{y}\quad 1-\pi=\frac{a_1-u}{a_1-d_1} \tag{30}$$

Por lo que el componente con riesgo se modela de la forma siguiente:

$$M_\eta^{a_1^k d_1^{\eta-k}}=\begin{cases}\tilde{M}_\eta^{a_1^k d_1^{\eta-k}}+D_\eta=\tilde{M}_0 a_1^k d_1^{\eta-k}+D_\eta & \text{si } \eta\delta T\le\tau_j\\ \tilde{M}_\eta^{a_1^k d_1^{\eta-k}}=\tilde{M}_0 a_1^k d_1^{\eta-k} & \text{si } \tau_j<\eta\delta T\end{cases} \tag{31}$$

donde:

$$\tilde{M}_0 = \begin{cases} M_0 & \text{si } \eta = 0 \\ M_0 - D_0 & \text{si } 0 < \tau_j < \eta\delta T \end{cases} \tag{32}$$

Apéndice B

Convergencia del modelo

Sea $\omega = \lfloor w \rfloor$ el número entero mínimo de movimientos del precio subyacente para que el las opciones europeas estén dentro de dinero entonces la distribución complementaria es:

$$B(\omega; n, \pi) = \sum_{k=\omega}^{n} \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k} \tag{33}$$

Sustituyendo la ecuación en la ecuación se tiene:

$$V(0, M_0) = \left(\sum_{k=\omega}^{n} \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k} V\left(n, M_n^{a^k d^{n-k}}\right) \right) \exp(-iT) \tag{34}$$

Sean $\tilde{\pi} = a_1 \pi \exp(-i\delta\tau)$ y $\tilde{\theta} = 1 - \tilde{\pi} = d_1 (1-\pi) \exp(-i\delta\tau)$, entonces se obtiene:

$$\begin{aligned} c(0, M_0) &= M_0 \exp(-rT) B(\omega; n, \tilde{\pi}) - S \exp(-iT) B(\omega; n, \pi) \\ p(0, M_0) &= S \exp(-iT)\big(1 - B(\omega; n, \pi)\big) - M_0 \exp(-rT)\big(1 - B(\omega; n, \tilde{\pi})\big) \end{aligned} \tag{35}$$

Sea $R_T = \ln\left(\frac{M_n}{M_0}\right)$, entonces $R = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{n} \ln(X_k)$, entonces la tasa instantánea de crecimiento es:

$$\mu = \frac{1}{\delta T}\big(\pi \ln(a_1) + (1-\pi)\ln(d_1)\big) \tag{36}$$

La varianza de la tasa instantánea de crecimiento durante el periodo δT es:

$$\operatorname{var}(R) = \frac{1}{T^2}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{var}\left(\ln\left(X_k\right)\right) \tag{37}$$

Por lo que la varianza de la tasa instantánea de crecimiento es:

$$\sigma^2 = \frac{\pi\left(1-\pi\right)}{\delta T}\ln^2\left(\frac{a_1}{d_1}\right) \tag{38}$$

Sean $a_1 = a^* \exp\left(i\delta\tau\right)$ y $d_1 = d^* \exp\left(i\delta\tau\right)$, ya que $\mathrm{E}\left(X\right) = \exp\left(\left(i-r\right)T\right) = a_1\pi + d_1\left(1-\pi\right)$, entonces $a^*\pi + d^*\left(1-\pi\right) = 1$. Sea ρ el parámetro de riesgo tal que:

$$\exp\left(2\rho\sqrt{\delta\tau}\right) = \frac{a_1}{d_1} \tag{39}$$

Sustituyendo la ecuación (39) en la ecuación (38) se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$1 = \pi + \left(1-\pi\right) \quad \text{y} \quad \sigma^2 = 4\pi\left(1-\pi\right)\rho^2 \tag{40}$$

Por lo cual:

$$4\rho^2\pi^2 - 4\rho^2\pi + \sigma^2 = 0 \tag{41}$$

Resolviendo la ecuación (41) se obtiene que:

$$\pi = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{\sigma^2}{\rho^2}}\right) \quad \text{y} \quad 1-\pi = \frac{1}{2}\left(1 \mp \sqrt{1-\frac{\sigma^2}{\rho^2}}\right) \tag{42}$$

donde $0 < \sigma \le \rho$ para satisfacer que $\pi \in \left[0,1\right]$.

De la ecuación (39) y $\mathrm{E}\left(X\right) = \exp\left(\left(i-r\right)T\right) = a_1\pi + d_1\left(1-\pi\right)$ se tiene que:

$$a_1 = \frac{\exp\left(\rho\sqrt{\delta\tau} + i\delta\tau\right)}{\pi\exp\left(\rho\sqrt{\delta\tau}\right) + (1-\pi)\exp\left(-\rho\sqrt{\delta\tau}\right)}$$
$$d_1 = \frac{\exp\left(-\rho\sqrt{\delta\tau} + i\delta\tau\right)}{\pi\exp\left(\rho\sqrt{\delta\tau}\right) + (1-\pi)\exp\left(-\rho\sqrt{\delta\tau}\right)} \qquad (43)$$

Sustituyendo la ecuación en la ecuación se tiene que la tasa de crecimiento esperada es:

$$\mu = i - r - \frac{\rho}{\sqrt{\delta\tau}} - \frac{1}{\delta\tau}\ln\left(\pi\exp\left(\rho\sqrt{\delta\tau}\right) + (1-\pi)\exp\left(-\rho\sqrt{\delta\tau}\right)\right) \qquad (44)$$

Resolviendo las ecuaciones y cuando $\rho = \sigma$, se tiene que $\pi = 1 - \pi = \frac{1}{2}$ por lo cual:

$$\mu = i - r - \lim_{\delta\tau\to 0}\frac{1}{\delta\tau}\ln\left(\frac{\exp\left(\sigma\sqrt{\delta\tau}\right) + \exp\left(-\sigma\sqrt{\delta\tau}\right)}{2}\right) = i - r - \frac{\sigma^2}{2} \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \sigma_n^2 T$$

(45)

Sea $Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ donde $Y_k = \frac{1}{T}\ln\left(X_k\right)$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} Z_n \overset{P}{=} \mathrm{N}\left(n\mu_n, n\sigma_n^2\right) \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} Z_n \overset{d}{=} \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \qquad (46)$$

donde $\lim_{n\to\infty} Z_n \overset{P}{=} \mathrm{N}\left(n\mu_n, n\sigma_n^2\right)$ significa que la variable aleatoria Z_n converge en medida (en probabilidad) a la variable gaussiana con media $n\mu_n$ y varianza $n\sigma_n^2$ y $\lim_{n\to\infty} Z_n \overset{d}{=} \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ significa que la variable aleatoria Z_n converge en ley (en distribución) a la variable gaussiana con media μ y varianza σ^2. Por lo que el precio subyacente tiene una distribución log-gaussiana:

$$M_t = M_0 \exp\left(i - r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma \mathrm{d}W_t \qquad (47)$$

donde $\mathrm{d}W_t$ representa el proceso de Wiener, por lo tanto el modelo propuesto para valuar opciones europeas converge al modelo log-gaussiano.