**Universidad
Autónoma
Metropolitana**

Casa abierta al tiempo **Azcapotzalco**

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**Maestría en Ciencias en Ingeniería
Electromagnética**

**IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS EN TIEMPO REAL DE
UN MOTOR DE CD DE IMANES PERMANENTES SIN
ESCOBILLAS**

Tesis que presenta:

José Jiménez González

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

Director:

Dr. Víctor Manuel Jiménez Mondragón

Codirector:

Dr. Jesús Ulises Liceaga Castro

Declaratoria

- Yo, Dr. Víctor Manuel Jiménez Mondragón, declaro que aprobé el contenido del presente reporte de Idónea Comunicación de Resultados y doy mi autorización para su publicación en la Biblioteca Digital, así como en el repositorio Institucional de UAM Azcapotzalco.

Firma _____

- Yo, Dr. Jesús Ulises Liceaga Castro, declaro que aprobé el contenido del presente reporte de Idónea Comunicación de Resultados y doy mi autorización para su publicación en la Biblioteca Digital, así como en el repositorio Institucional de UAM Azcapotzalco.

Firma _____

- Yo, José Jiménez González, doy mi autorización a la Coordinación de Servicios de Información de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, para publicar el presente documento en la Biblioteca Digital, así como en el repositorio Institucional de UAM Azcapotzalco.

Firma _____

Ciudad de México a 1 de abril de 2021

Jurado asignado:

Presidente: Dr. Hoover Mujica Ortega

Secretario: Dr. Rafael Escarela Pérez

Vocal 1: M. en C. Felipe de Jesús González Montañez

Vocal 2: Dr. Víctor Manuel Jiménez Mondragón

Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

CONSTANCIA DE ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00004

Matrícula: 2183802728

Identificación de parámetros
en tiempo real de un motor
de CD de imanes permanentes
sin escobillas

JOSE JIMENEZ GONZALEZ
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

En la Ciudad de México, se presentaron virtualmente a las
10:00 horas del día 19 del mes de marzo del año 2021, los
suscritos miembros del jurado:

DR. HOOVER MUJICA ORTEGA
DR. VÍCTOR MANUEL JIMENEZ MONDRAGON
MTRO. FELIPE DE JESUS GONZALEZ MONTAÑEZ
DR. RAFAEL ESCARELA PEREZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de
Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen
de Grado cuya denominación aparece al margen, para la
obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA ELECTROMAGNETICA

DE: JOSE JIMENEZ GONZALEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del
Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad
Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado
resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al
interesado el resultado de la evaluación y, en caso
aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTORA DE LA DIVISION DE CBI

DRA. TERESA MERCHAND HERNANDEZ

PRESIDENTE

DR. HOOVER MUJICA ORTEGA

VOCAL

DR. VÍCTOR MANUEL JIMENEZ
MONDRAGON

VOCAL

MTRO. FELIPE DE JESUS GONZALEZ
MONTAÑEZ

SECRETARIO

DR. RAFAEL ESCARELA PEREZ

A mis padres.

José Jiménez González,
Ciudad de México, 2021

It's the questions we can't answer that teach us the most.
They teach us how to think. If you give a man an answer, all
he gains is a little fact. But give him a question and he'll
look for his own answers.

P. Rothfuss,

Agradecimientos

A mis padres por apoyarme siempre en todas mis decisiones.

A mi hermanos por motivarme siempre a dar lo mejor de mí. Gracias, Marce por las largas pláticas antiestrés.

A mis asesores por sus útiles consejos, siempre oportunos.

A mis hermanitos electromagnéticos por enseñarme tanto y por hacer llevaderos los días de estrés en la maestría más larga de la historia.

A mis profesores y amigos del área IEE por recordarme siempre que el camino es largo y siempre queda mucho por aprender. Especialmente Felipe, por abrirme tantas puertas todos estos años, figurativas y literales.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo otorgado mediante la beca de maestría (septiembre 2019 a agosto de 2020)

Resumen

En este trabajo se aborda el problema de identificar los parámetros del modelo dinámico de un motor de CD de imanes permanentes sin escobillas: resistencia e inductancia del estator, constante de fuerza contraelectromotriz, coeficiente de amortiguamiento y momento de inercia. La identificación de parámetros se hace a través de mediciones en tiempo real de las variables eléctricas y mecánicas de un motor de 6000 rpm, y del análisis de las respuestas, transitoria y en estado estacionario, en distintos regímenes de operación. Se adaptaron las pruebas estándar con la máquina operando como motor o generador en vacío, a rotor bloqueado, y de mediciones de resistencias considerando las características de operación de este tipo de motores. Se propusieron esquemas de arranque y operación en lazo abierto y un algoritmo de operación utilizando sólo dos sensores de posición. También se implementó el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos con factor de olvido para identificar el coeficiente de amortiguamiento y el momento de inercia de la aproximación de primer orden del motor. Los resultados se validaron contra los parámetros proporcionados por el fabricante y comparando las respuestas experimental y la simulación utilizando el modelo en el espacio de estados en lazo abierto y en lazo cerrado.

Abstract

This thesis addresses the problem of identifying the dynamic model parameters of a permanent magnet brushless DC motor: stator resistance and inductance, back-emf force, damping coefficient and moment of inertia. The parameter identification is done through real-time measurements of the electrical and mechanical variables of a 6000 rpm, motor, and through the analysis of transient and steady-state responses in different operation regimes. Standard tests, such as no-load with the machine operating as a motor or a generator, blocked rotor and resistance measurements were adapted to fit the operation characteristics of this kind of motors. Startup and open-loop schemes were proposed, as well as an algorithm for running with only two position sensors. The recursive least-squares algorithm with forgetting factor was used to identify the damping coefficient and moment of inertia of the first order approximation of the motor. The results are validated against manufacturer provided information and by comparing the experimental and simulation results using the state space model in open and closed-loop operation.

Contenido

Resumen	I
Abstract	II
Contenido	III
Índice de Figuras	IV
Índice de Tablas	v
1. Introducción	1
1.0.1. Generalidades	2
1.1. Antecedentes	4
1.1.1. Pruebas para identificación de parámetros	4
1.1.2. Parámetros a identificar	5
1.2. Planteamiento del problema y justificación	9
1.2.1. Planteamiento del problema	9
1.2.2. Justificación	9
1.3. Objetivos	10
1.3.1. Objetivo general	10
1.3.2. Objetivos específicos	10
2. Motor BLDC	11
2.1. Principio de funcionamiento	11
2.1.1. Construcción	11
2.1.2. Encadenamientos de flujo en un motor BLDC	12
2.1.3. Voltaje inducido	16
2.1.4. Par desarrollado	17
2.2. Modelo matemático	18
2.2.1. Conmutación en 120°	18

3. Plataforma Experimental	22
3.1. Elementos principales	22
3.1.1. Circuitos de acondicionamiento	22
3.1.2. Caracterización de los sensores	23
3.1.3. Generación de voltajes	24
3.2. Características del motor BLDC	25
3.2.1. Operación con dos sensores de posición	25
3.2.2. Control escalar de un motor BLDC	26
4. Método de mínimos cuadrados recursivos con factor de olvido	28
4.1. El criterio de mínimos cuadrados	28
4.1.1. Ruido en la estimación	30
4.2. Mínimos cuadrados ponderados y recursivos	31
4.3. MCRFO aplicado a un sistema lineal de primer orden	32
5. Metodología experimental	34
5.1. Prueba a rotor bloqueado: obtención de la resistencia e inductancia	34
5.2. Medición directa de resistencias	36
5.3. Prueba como generador en vacío: obtención de la constante de fuerza contra-electromotriz	36
5.4. Prueba de motor sin carga: obtención del coeficiente de amortiguamiento y momento de inercia	37
5.5. Identificación de parámetros utilizando el método de mínimos cuadrados recursivos con factor de olvido	38
6. Resultados y validación	40
6.1. Resultados de las pruebas de respuesta transitoria	40
6.1.1. Medición directa de las resistencias del estator	40
6.1.2. Identificación de la resistencia e inductancia del estator	40
6.1.3. Identificación de la constante de fuerza contraelectromotriz	41
6.1.4. Identificación del par de fricción estática	42
6.1.5. Identificación del coeficiente de amortiguamiento y el momento de inercia	43
6.2. Resultados de la identificación utilizando el método de MCRFO	43
6.2.1. Par obtenido de las mediciones	44
6.2.2. Configuración del algoritmo	47
6.2.3. Estimación utilizando el par sin filtro	49
6.2.4. Estimación utilizando el par con filtro pasabajas	51
6.2.5. Estimación utilizando par con filtro de media móvil	51
6.2.6. Estimación utilizando el par con filtro pasabajas y de media móvil	52
6.3. Validación de resultados	55
6.3.1. Validez de los parámetros en distintas condiciones de operación	56
6.3.2. Control en lazo cerrado	58
7. Conclusiones y perspectivas futuras	60
7.1. Conclusiones	60
7.2. Perspectivas futuras	60
Referencias	61

Índice de Figuras

1.1. Sensores de efecto Hall para la medición de posición angular.	2
1.2. Diagrama de un sistema basado en motor BLDC.	3
1.3. Métodos de identificación de parámetros de máquinas BLDC.	5
2.1. Esquema de un motor BLDC de dos polos.	12
2.2. Esquema completo de un motor BLDC de dos polos.	13
2.3. Encadentamientos de flujo y funciones trapezoidales.	16
2.4. Par desarrollado ideal. Las tres gráficas de arriba muestran las formas de onda ideales de las corrientes de fase (línea continua), las funciones trapezoidales de fase (línea discontinua) y de línea (línea punteada). La gráfica de abajo muestra el par resultante producido por cada corriente y el par desarrollado total τ_d . . .	19
2.5. Conexión de un motor BLDC utilizando un inversor de puente de onda completa.	21
3.1. Diagrama a bloques de la plataforma experimental utilizada en este trabajo. . .	23
3.2. Esquema general de los circuitos de acondicionamiento de los sensores de voltaje y corriente.	23
3.3. Circuitos utilizados para la caracterización de los sensores.	24
3.4. Curvas características de los sensores de voltaje y corriente. Las líneas continuas muestran el ajuste lineal de los valores medidos.	25
3.5. Control escalar de un motor BLDC.	27
5.1. Circuitos utilizados en las pruebas de medición de resistencia.	35
5.2. Circuito armado para la prueba como generador en circuito abierto	36
6.1. Resultados de la prueba a rotor bloqueado a distintos niveles de voltaje. Se muestran las corrientes medidas (líneas continuas) y las corrientes calculadas con los parámetros estimados (5.2) (líneas punteadas). Cada resultado muestra una región sombreada acotada por los valores de incertidumbre en los parámetros.	41
6.2. Funciones de forma de fuerza contraelectromotriz para seis velocidades distin- tas. Las líneas punteadas indican la magnitud $2k_v$	42
6.3. Mediciones de par y velocidad para determinar el par de fricción. La línea continua indica el ajuste lineal realizado.	43

6.4. Resultados de la prueba sin carga a distintas velocidades. Se muestran la velocidad medida (líneas continuas) y las velocidades calculadas con los parámetros estimados (líneas punteadas). La región sombreada muestra los intervalos de incertidumbre en los parámetros.	44
6.5. Perfil de velocidad utilizado para la identificación utilizando el método de MCRFO.	45
6.6. Espectro de frecuencias de las señales medidas por los sensores de voltaje y corriente.	45
6.7. Diagrama de Bode del filtro pasabajas utilizado sobre las señales de voltaje y corriente.	46
6.8. Espectro de frecuencias de las señales medidas por los sensores de voltaje y corriente filtradas.	47
6.9. Voltajes y corrientes utilizados para determinar el voltaje inducido e_{xy} . Se muestra también las curvas resultantes de filtrar las señales medidas y la función trapezoidal reconstruida a partir de la posición del rotor.	48
6.10. Par electromagnético obtenido utilizando las ecuaciones (6.10) y (6.12).	48
6.11. Resultados de la identificación de parámetros. (a) par de entrada τ_e utilizado; (b) velocidad medida (línea punteada) y del modelo con los resultados de la estimación (línea continua); (c), (d) $\hat{v}_1$ y $\hat{v}_2$ esperada (línea punteada) y obtenida (línea continua); (e), (f) error de la estimación $\varepsilon_{\hat{v}_1}$ y $\varepsilon_{\hat{v}_2}$	50
6.12. Resultados de la identificación de parámetros. (a) par de entrada τ_f utilizado; (b) velocidad medida (línea punteada) y del modelo con los resultados de la estimación (línea continua); (c), (d) $\hat{v}_1$ y $\hat{v}_2$ esperada (línea punteada) y obtenida (línea continua); (e), (f) error de la estimación $\varepsilon_{\hat{v}_1}$ y $\varepsilon_{\hat{v}_2}$	50
6.13. Resultados de la identificación de parámetros. (a) par de entrada τ_e con filtro pasabajas; (b) velocidad medida (línea punteada) y del modelo con los resultados de la estimación (línea continua); (c), (d) $\hat{v}_1$ y $\hat{v}_2$ esperada (línea punteada) y obtenida (línea continua); (e), (f) error de la estimación $\varepsilon_{\hat{v}_1}$ y $\varepsilon_{\hat{v}_2}$	51
6.14. Resultados de la identificación de parámetros. (a) par de entrada τ_f con filtro pasa bajas; (b) velocidad medida (línea punteada) y del modelo con los resultados de la estimación (línea continua); (c), (d) $\hat{v}_1$ y $\hat{v}_2$ esperada (línea punteada) y obtenida (línea continua); (e), (f) error de la estimación $\varepsilon_{\hat{v}_1}$ y $\varepsilon_{\hat{v}_2}$	52
6.15. Resultados de la identificación de parámetros. (a) par de entrada τ_e con filtro de media móvil; (b) velocidad medida (línea punteada) y del modelo con los resultados de la estimación (línea continua); (c), (d) $\hat{v}_1$ y $\hat{v}_2$ esperada (línea punteada) y obtenida (línea continua); (e), (f) error de la estimación $\varepsilon_{\hat{v}_1}$ y $\varepsilon_{\hat{v}_2}$	53
6.16. Resultados de la identificación de parámetros. (a) par de entrada τ_f con filtro de media móvil; (b) velocidad medida (línea punteada) y del modelo con los resultados de la estimación (línea continua); (c), (d) $\hat{v}_1$ y $\hat{v}_2$ esperada (línea punteada) y obtenida (línea continua); (e), (f) error de la estimación $\varepsilon_{\hat{v}_1}$ y $\varepsilon_{\hat{v}_2}$	53
6.17. Resultados de la identificación de parámetros. (a) par de entrada τ_e con ambos filtros; (b) velocidad medida (línea punteada) y del modelo con los resultados de la estimación (línea continua); (c), (d) $\hat{v}_1$ y $\hat{v}_2$ esperada (línea punteada) y obtenida (línea continua); (e), (f) error de la estimación $\varepsilon_{\hat{v}_1}$ y $\varepsilon_{\hat{v}_2}$	54
6.18. Resultados de la identificación de parámetros. (a) par de entrada τ_f con ambos filtros; (b) velocidad medida (línea punteada) y del modelo con los resultados de la estimación (línea continua); (c), (d) $\hat{v}_1$ y $\hat{v}_2$ esperada (línea punteada) y obtenida (línea continua); (e), (f) error de la estimación $\varepsilon_{\hat{v}_1}$ y $\varepsilon_{\hat{v}_2}$	54

6.19. Comparación de los parámetros identificados en el análisis de respuesta transitoria y los proporcionados por el fabricante.	56
6.20. Resultados de la prueba en lazo abierto a distintas velocidades. (??) $\omega_r = 122\text{--}159\text{ rad s}^{-1}$. (??) $\omega_r = 160\text{--}206\text{ rad s}^{-1}$. (??) $\omega_r = 231\text{--}288\text{ rad s}^{-1}$. (??) $\omega_r = 330\text{--}405\text{ rad s}^{-1}$. (??)–(??) error relativo.	57
6.21. Comportamiento del motor con frecuencia variable y validación del modelo obtenido.	58
6.22. Resultados de control en lazo cerrado con los parámetros determinados.	59

Índice de Tablas

3.1. Componentes principales de la plataforma de adquisición de datos.	22
3.2. Valores de componentes de los circuitos de acondicionamiento.	24
3.3. Parámetros de los ajustes lineales de la caracterización de sensores.	24
3.4. Datos nominales del motor y parámetros del modelo.	26
3.5. Secuencia de conmutación del motor utilizado. Las variables H_x son las salidas de los SEH y las variables I_x son las magnitudes de las corrientes deseadas. . .	27
6.1. Resistencias equivalentes medidas y por fase (calculadas)	40
6.2. Resultados de las estimaciones utilizando el método de MCRFO.	55
6.3. Datos nominales del motor y parámetros del modelo.	56
6.4. Desempeño de los parámetros estimados a distintas velocidades.	58

1. Introducción

Actualmente, una gran cantidad de dispositivos dependen del uso de motores eléctricos. Estos pueden encontrarse en aplicaciones como vehículos eléctricos, vehículos híbridos, industria aeronáutica, industria aeroespacial y militar, robótica, electrodomésticos, herramientas, equipo médico, equipo de oficina, entre otras. Dependiendo del tipo de aplicación se diseñan diferentes tipos de motores que satisfagan de manera eficiente y segura todos los requerimientos. Dentro de los diferentes tipos de máquinas, los motores síncronos de imanes permanentes tienen un alto par desarrollado, precisión y eficiencia, sin embargo, regular la velocidad es complicado, lo cual limita su rango de aplicación. Los motores de inducción son de estructura más sencilla y son fáciles de fabricar, sin embargo, el diseño del controlador no es obvio ni sencillo. Pero se han diseñado e implementado con excelentes resultados y desempeño en muy amplios rangos de operación. Los motores de reluctancia variable son de construcción sencilla y bajo costo, pero presentan alto rizo en el par y velocidad y son ruidosos, lo que los ha vuelto menos populares en comparación con motores de CD. Estos últimos son sumamente populares en una gran variedad de aplicaciones, desde electrodomésticos hasta vehículos eléctricos, debido a su facilidad en la regulación de velocidad y su alto par de arranque. El inconveniente principal de los motores de CD es el sistema de conmutación mecánico basado en escobillas, lo que resulta en altos niveles de fricción y un aumento importante en el mantenimiento y una reducción en la vida útil; además, debido a la posibilidad de crear descargas, su uso se ha limitado en algunas áreas [1,2].

El uso de imanes permanentes para sistemas de excitación en máquinas eléctricas comenzó durante el siglo XIX, sin embargo, la mala calidad de los materiales magnéticos propició su desuso en años subsecuentes. Con el desarrollo de mejores materiales se comenzaron a utilizar cada vez más motores con excitación basada en imanes. En las últimas cuatro décadas la creación de imanes de tierras raras—neodimio y samario-cobalto—llevó a los motores de imanes permanentes sin escobillas a ser una opción cada vez más atractiva, principalmente debido a que se eliminan las pérdidas en devanados de excitación, lo que mejora sustancialmente la eficiencia, incrementa la densidad de potencia y par, mejora el desempeño dinámico, simplifica la construcción, disminuye el mantenimiento y, adicionalmente, los precios de los imanes de tierras raras también han disminuido [1,3,4].

Los motores de CD de imanes permanentes sin escobillas se diseñan para superar algunos de los inconvenientes en los motores eléctricos. El uso de imanes permanentes como excitación incrementa la eficiencia del motor y la conmutación electrónica elimina las pérdidas por fricción inherentes a los motores de CD convencionales. En un motor sin escobillas es necesario conocer la posición del rotor con precisión, para poder alimentar cada fase en los instantes

Figura 1.1: Sensores de efecto Hall para la medición de posición angular.

de tiempo correctos y conmutar electrónicamente la fuente de alimentación. Esto tiene como consecuencia que este tipo de motores esté obligatoriamente acompañado de sensores de posición, convertidores de potencia y controladores, haciéndolo un objeto de estudio en áreas como la ingeniería electrónica, de control y de materiales.

1.0.1. Generalidades

Los motores sin escobillas se clasifican de acuerdo a su excitación en senoidal o trapezoidal. La primera se obtiene con devanados distribuidos senoidalmente en el estator, a los cuales se inyectan corrientes alternas (CA) senoidales. La segunda se logra cuando la corriente de armadura, que circula a través de devanados concentrados, se sincroniza con la posición del rotor. La manera más común de lograr esto es a través de sensores de posición alojados en la periferia del estator o en la flecha del rotor [5–7]. Este esquema de operación es funcionalmente equivalente a la conmutación mecánica tradicional en los motores de CD, por lo que los motores de excitación trapezoidal son comúnmente llamados motores de CD sin escobillas (BLDC por sus siglas en inglés) [1]. Los motores que utilizan excitación senoidal se conocen comúnmente como motores síncronos de imanes permanentes (PMSM por sus siglas en inglés) o motores de CA sin escobillas.

A pesar de las ventajas que trae consigo el uso de motores BLDC, surgen algunas complicaciones relacionadas con su operación. Un sistema basado en un motor BLDC requiere no sólo del motor, sino también un convertidor de potencia (inversor trifásico), sensores de posición angular y un generador de señales de compuerta.

El sensado de posición angular en un motor BLDC se realiza generalmente utilizando sensores de efecto Hall (SEH), *encoders* ópticos o resolvidores. La mayoría de los motores BLDC comerciales están equipados con tres sensores de efecto Hall para la medición de posición angular en un arreglo como el que se muestra en la figura 1.1. En una máquina trifásica de dos polos, estos sensores se colocan espaciados 120° entre sí, de tal manera que cada uno genera una onda cuadrada desfasada 120° en una revolución del rotor. Los encoders consisten

Figura 1.2: Diagrama de un sistema basado en motor BLDC.

en un haz de luz que pasa a través de secciones transparentes de un disco y son sensadas por un fotodetector. Los encoders pueden ser incrementales o absolutos, siendo los primeros los más comunes debido a su funcionamiento tan simple. En un encoder incremental se genera un pulso por cada incremento de la posición angular de la flecha, la cual se determina contando la cantidad de pulsos a partir de una referencia. Para poder tener información sobre la dirección de giro se utilizan dos fotodetectores en cuadratura (desplazados 90°). Utilizando ambos canales (fotodetectores) es posible cuadruplicar la resolución del encoder. Los resolvedores son arreglos cilíndricos de devanados que funcionan como transformadores rotatorios; el devanado primario se encuentra en el «estator» del resolvedor y se alimenta con una fuente externa de CA. En el estator también se encuentran un par de devanados colocados en cuadratura, llamados seno y coseno, que registran la posición del rotor de forma indirecta. El «rotor» del resolvedor está acoplado directamente a la flecha del motor BLDC y acopla magnéticamente el devanado primario con los devanados seno y coseno. Los voltajes medidos en estos últimos son un seno y un coseno modulados que permiten determinar la posición del rotor. La elección del método de medición de posición está en función del tipo de aplicación del motor BLDC [1].

El uso de sensores para la posición angular en un motor BLDC tiene también algunas desventajas, como la necesidad de instrumentación adicional para la adquisición de datos de posición y el costo del mantenimiento asociado. Debido a esto, el estudio del control y operación de estos motores sin sensores es de gran interés [8,9]. En general, la posición angular del rotor se puede obtener sin sensores a través de la detección de fuerza contraelectromotriz, detección de tercer armónico o detección del intervalo de conducción de los diodos de libre circulación del inversor [1].

Conocer la posición angular, o alguna otra variable en el caso de control sin sensores, hace necesario el uso de plataformas de adquisición de datos para poder retroalimentar las señales correspondientes de posición y a su vez proporcionar al convertidor de potencia los disparos para que el motor pueda operar. Esto a su vez trae consigo la necesidad de equipos que sean capaces de realizar la medición de posición, la retroalimentación de la información, la generación de las señales de control y la conmutación del inversor de la forma más eficiente posible. En este sentido, el tipo de aplicación para la que se requiera el motor va a definir la velocidad de conmutación de todos los dispositivos que forman el bloque de control de la máquina. La figura 1.2 muestra un diagrama simplificado de un sistema basado en un motor BLDC.

1.1. Antecedentes

1.1.1. Pruebas para identificación de parámetros

En la actualidad no se cuenta con una metodología estándar para determinar parámetros de máquinas BLDC. En general, los parámetros pueden estimarse a partir de la información de diseño de la máquina, o extraerse de mediciones experimentales [10]. En 2015 la IEEE publicó una guía para la determinación de parámetros de máquinas de imanes permanentes que abarca algunas de las pruebas tradicionales de máquinas eléctricas: medición de resistencia de los devanados, pruebas de cortocircuito, en vacío y con carga, tanto en régimen estacionario como transitorio [11]. Las máquinas de imanes permanentes, idealmente, producen una densidad de flujo magnético constante en el entrehierro, por lo que algunas pruebas deben adaptarse a este hecho, particularmente las pruebas para la determinación de pérdidas mecánicas y la magnitud del rizo del par.

Si se cuenta con información detallada de diseño de la máquina—principalmente los materiales utilizados, su geometría y distribución de los devanados—es posible determinar parámetros como inductancia, resistencia e inercia a partir de las expresiones analíticas que describen estos parámetros. En [6] se estudia un motor BLDC del cual se conoce la distribución de los devanados y la geometría de los imanes. Se realiza el análisis del circuito magnético y se determina cómo varía la inductancia en función de la posición del rotor. Una alternativa es la presentada en [12], donde se diseña un prototipo de motor BLDC utilizando valores nominales deseados y optimización a partir de un modelo de elementos finitos. Con los resultados de elemento finito se determinan los parámetros del modelo de la máquina y se comparan con mediciones experimentales.

En general, una vez que el motor ya fue construido es raro tener acceso a toda su información de diseño, por lo que los parámetros son comúnmente proporcionados por el fabricante o determinados a través de pruebas experimentales. Se pueden realizar pruebas estándar a la máquina, como las pruebas en vacío, a rotor bloqueado y con carga, y el cálculo de los parámetros se basa en una representación de la máquina mediante un circuito equivalente [13]. Estas pruebas simplifican el circuito equivalente—anulando la velocidad en la prueba a rotor bloqueado y la corriente de los devanados en la prueba en vacío—lo que permite obtener los parámetros en estado estacionario [4].

Si se tiene acceso a una plataforma de adquisición de datos y es posible operar a la máquina en un rango amplio de velocidades, se puede llevar a cabo un proceso de identificación basado en la respuesta en frecuencia [14]. Si además se asume linealidad en el modelo, es posible utilizar los conceptos de control clásico para determinar los parámetros del motor debido a que se puede simplificar en distintas condiciones de operación [15].

Alternativamente, las mediciones de las variables de entrada y de salida pueden utilizarse para realizar la estimación a través de la teoría de identificación de sistemas. Entre los métodos más elementales para este fin son las regresiones lineales por mínimos cuadrados y métodos de gradientes [3, 16, 17]. Un método de estimación paramétrica que puede ser utilizado tanto fuera de línea como en línea es el de mínimos cuadrados recursivos con factor de olvido (MCRFO) [16, 17].

En [18] se presenta un resumen de las técnicas de identificación disponibles para motores BLDC, con énfasis en técnicas fuera de línea. Algunas de estas técnicas están resumidas en el diagrama de la figura 1.3, donde se resaltan las técnicas que se usan en este trabajo.

1.1.2. Parámetros a identificar

En la literatura se muestran distintos enfoques hacia la identificación de parámetros de motores BLDC dependiendo de su aplicación. En general, buscan estimar parámetros para mejorar las respuestas de los controladores. Los parámetros involucrados en el modelo matemático de la máquina BLDC son la resistencia de los devanados del estator r en ohms, la inductancia de los devanados del estator ℓ en henrys, la constante de fuerza contraelectromotriz k_m en volt-segundo, el coeficiente de fricción viscosa b en newton-metro-segundo por radián y el momento de inercia del rotor J en kilogramo-metro cuadrado. En todos los trabajos, los parámetros que no se estiman se asumen conocidos—proporcionados por el fabricante o tomados de referencias—y constantes debido al modelo dinámico considerado.

Resistencia de los devanados de estator, r

No es frecuente realizar pruebas para determinar la resistencia de los devanados del estator dado que suele ser un parámetro proporcionado por los fabricantes [4, 19]. Sin embargo, este parámetro se puede determinar a través de mediciones directas o indirectas. La medición directa consiste en conectar un óhmetro directamente a cada devanado. También es posible realizar mediciones de corriente a distintos voltajes en CD con el rotor bloqueado y obtener la resistencia a través de un ajuste lineal. La ventaja de realizar estas pruebas consiste en su facilidad. El error asociado con estas pruebas está relacionado con la precisión de los instrumentos de medición utilizados. Por otro lado, los devanados del estator de los motores BLDC usualmente tienen conexión en estrella y no se tiene acceso al punto común, por lo que no es posible realizar la medición de resistencia a cada devanado de manera individual [13]. En [15] se realiza una prueba a rotor bloqueado a un motor de CD con conexión serie. Esto es equivalente a tener un circuito RL simple, el cual es un sistema lineal de primer orden y se puede determinar r a partir de la ganancia de la función de transferencia. Este enfoque tiene la ventaja de que la prueba se realiza a rotor bloqueado, la cual produce el mismo

Figura 1.3: Métodos de identificación de parámetros de máquinas BLDC.

circuito equivalente en una máquina BLDC. Si se realizan pruebas subsecuentes a distintos valores de voltaje de entrada es posible determinar la variación de este parámetro en distintos puntos de operación. En [20] se propone un método sin sensores para estimar posición y velocidad angular a través de un filtro de Kalman extendido. El objetivo del trabajo no incluye estimación de parámetros, sin embargo, incluye la estimación de la resistencia para mejorar el desempeño de su esquema. Los resultados de la estimación de posición y velocidad mejoran significativamente cuando consideran una resistencia adaptativa y no constante. En [10] se proponen estrategias para estimar la relación de inductancias y la constante de fuerza contraelectromotriz con pruebas de cortocircuito, donde se desprecia la resistencia de los devanados de estator, sin embargo, el autor propone realizar la prueba utilizando también un wáttmetro si la resistencia no puede despreciarse. Un inconveniente con esta prueba es que el autor utiliza un PMSM, por lo que no es la manera ideal para determinar la resistencia de un motor BLDC, dado que las pruebas determinan los parámetros para un modelo de dos ejes. En [21] se propone una metodología algebraica para la estimación de parámetros en línea en un lazo cerrado de control. Asumiendo balance en las tres fases, se puede construir un criterio cuadrático a partir de sólo una de las ecuaciones del motor, el cual se minimiza utilizando el método del gradiente. Los resultados de la simulación del motor para seguimiento y regulación son satisfactorios, sin embargo, no se tiene una implementación experimental. El método utiliza muchos integradores lo que puede impactar de manera considerable en un marco experimental, dado que en sistemas de control digitales el uso de más de un integrador tiende a desestabilizar el sistema en lazo cerrado. En [22] se realiza la caracterización de un PMSM utilizando el método de identificación por error de salida, y se recomienda utilizar las resistencias proporcionadas por el fabricante como valor inicial para el algoritmo. En [23] se propone un método de identificación de par de alta precisión con la finalidad de minimizar el rizo. Para realizar esta estimación es necesario en uno de los pasos del algoritmo identificar la resistencia de cada devanado (asumiendo asimetría), las cuales se determinan de manera recursiva utilizando el método de mínimos cuadrados. Finalmente, en [24] se simula un modelo lineal y no lineal de un motor PMSM. La no linealidad magnética es representada a través de un polinomio de tercer orden. En ambos modelos se aplica un esquema de identificación en línea basado en el método de mínimos cuadrados. Los parámetros a identificar son las resistencias por fase, que se consideran asimétricas en el modelo. Se hace un análisis de sensibilidad del vector de estados con respecto a estos parámetros, llegando a la conclusión de que las resistencias por fase se pueden estimar únicamente si una de las corrientes tiene excitación persistente o si tanto la velocidad como la corriente son distintas de cero. La identificación es combinada con compensadores de asimetría (en resistencias) para disminuir el rizo en el torque tiempo real y eliminarlo completamente en simulación.

Inductancia, ℓ

Las inductancias de los devanados presentan una mayor dificultad para ser estimadas, debido a que dependen de la reluctancia de la máquina y varían con la posición del rotor si existe saliencia en los polos. En [6] se determinan las inductancias propias y mutuas del motor BLDC a través del análisis del circuito magnético considerando la geometría de los imanes permanentes y el material del que están hechos. Las variaciones debido a la saliencia se toman en cuenta y se llega a un modelo de inductancias que varía de forma senoidal con la posición del rotor. En los casos en que la geometría de la máquina sea conocida este es un buen enfoque para la determinación de las inductancias, sin embargo, no siempre es el caso. La información de diseño debe ser lo más precisa posible para tener una buena estimación de

forma analítica con este método.

En la prueba a rotor bloqueado realizada al motor CD en serie en [15], se determina la inductancia de armadura a partir del tiempo de establecimiento de la respuesta transitoria y del previo cálculo de la resistencia de armadura. Una vez más se toma ventaja de que a rotor bloqueado la máquina se convierte en un circuito RL, cuyos parámetros transitorios están bien caracterizados en la teoría clásica de sistemas dinámicos. En [10] se presenta la identificación de las inductancias de un PMSM. Debido a la distribución y alimentación senoidal de los devanados, es posible realizar una transformación del modelo trifásico de estos motores a una representación en dos ejes: directo d y cuadratura q [25]. Con esta simplificación, se determinan las inductancias del eje d y eje q a partir de mediciones de par, posición angular y corriente con de pruebas a rotor bloqueado, alcanzando la misma corriente en ambas pero con el rotor posicionado a distintos ángulos. Esta prueba es posible si se tiene a disposición un torquímetro para poder determinar ambas inductancias simultáneamente. En [12] se presenta otra variante de la prueba a rotor bloqueado. Se calculan las inductancias de eje directo y de cuadratura alineando dichos ejes con una fase alimentada, midiendo el tiempo de establecimiento a una entrada de tipo escalón, similar al procedimiento utilizado en [15]. En [22] se determinan los parámetros de un PMSM haciendo una prueba a rotor bloqueado. La diferencia en este trabajo es que determina a través de un algoritmo de optimización el número de devanados de amortiguamiento, tanto en el eje d como en el eje q , que minimiza el error de predicción. El algoritmo de identificación toma como valores iniciales los parámetros proporcionados por el fabricante. Las pruebas se repitieron agregando sucesivamente devanados de amortiguamiento hasta que el ajuste entre las respuestas obtenidas en simulación y los resultados experimentales fueran satisfactorios. De manera similar, en [4] se modela el acoplamiento mutuo entre estator y rotor a través de un devanado ficticio en el rotor, es decir, suponiendo que el campo debido a los imanes es producido por un devanado con inductancias propias y mutuas. En este trabajo se buscó aproximar lo mejor posible el par dentado, por lo que las inductancias mutuas entre estator y rotor se modelaron utilizando series de Fourier.

A excepción del enfoque presentado en [6], la revisión bibliográfica presenta distintas variantes de la prueba a rotor bloqueado para determinar inductancias. Más aún, la mayoría de los trabajos estudian a la máquina del tipo PMSM, lo que permite a los autores utilizar un modelo de dos ejes y no de variables de fase. El modelo con el que se trabajará en esta tesis considera la inductancia por fase, debido al modelo matemático del motor BLDC, por lo que se pretende adaptar las pruebas tanto experimentales como de optimización para determinar la inductancia ℓ .

Constante de fuerza contraelectromotriz, k_v

La constante de fuerza contraelectromotriz (k_{cem}) constituye una medida de los encañamientos de flujo en los devanados del estator producido por los imanes permanentes. En el modelo dinámico, el producto de este parámetro por la velocidad del rotor resulta en el voltaje interno de la máquina [3, 25]. Si se opera la máquina como generador sin carga a velocidad constante, este voltaje es igual al voltaje en las terminales, por lo que se puede determinar a partir de mediciones de voltaje y velocidad. Esta prueba se realiza en [12] a velocidad nominal. Si se cuenta con medidores de par, como una opción alternativa para determinar experimentalmente este parámetro, se puede utilizar la metodología presentada en [10] que se describió en la sección anterior. De las mediciones de par, corriente y el ángulo del rotor se obtienen tanto las inductancias como la constante de k_{cem} . Las inductancias determinadas en [4], en realidad representan este parámetro como función de la posición del rotor y sus componentes armónicas

en la producción del rizo del par. En [15] se determina, para un motor serie, la constante de f_{cem} utilizando el circuito equivalente en estado estacionario. Es importante mencionar que para determinar este parámetro siguiendo esta metodología, la resistencia y la inductancia se asumen conocidas. La metodología algebraica y de optimización utilizada en [21] también permite obtener un estimado de la constante de f_{cem} , el cual se utiliza posteriormente para determinar los parámetros mecánicos. En [26], se enfocan en técnicas de identificación de los parámetros mecánicos de un motor de CD de imanes permanentes, sin embargo, la constante de f_{cem} se determina a partir de la ecuación de voltaje en estado estacionario y los valores de placa del motor. El autor asume que la resistencia es proporcionada por el fabricante, por lo que con este valor y los valores nominales de voltaje, corriente y velocidad es posible calcular analíticamente este parámetro.

Además de las pruebas reportadas en la literatura este parámetro suele estar indicado por el fabricante.

Coefficiente de fricción viscosa, b

El coeficiente de fricción se relaciona de manera no lineal con la velocidad de la máquina, aunque en la mayoría de los modelos utilizados para sistemas de control se considera como constante, típicamente en un valor de estado estacionario. Adicionalmente, la fricción puede presentarse de distintas maneras en el caso más general. Los tipos de fricción en motores eléctricos incluyen la fricción estática, viscosa, de Coulomb y el efecto *stirbeck* [27]. La fricción es responsable del fenómeno de «zona muerta», la cual representa un problema serio principalmente en el diseño de esquemas de control de posición [27,28]. Este último fenómeno es al que se le han dedicado más trabajos de investigación en lo que respecta a la no linealidad del coeficiente de fricción viscosa. En [15] y [26] se presenta una metodología basada en la respuesta transitoria de un motor de CD serie y de imanes permanentes, respectivamente, aproximando al sistema mecánico con una función de transferencia de primer orden. En el primer trabajo, esto se hace argumentando que la dinámica eléctrica es tan rápida en comparación con la mecánica que para fines de análisis transitorio de las variables mecánicas, es despreciable. El coeficiente de fricción se calcula a partir de la ganancia en estado estacionario de la velocidad ante una entrada de par tipo escalón. Esto impone una aproximación adicional, debido a que el par de entrada no necesariamente es un escalón en la mayoría de las máquinas debido al acoplamiento entre el subsistema eléctrico y mecánico, y se puede observar en las curvas de corriente que tienen ligeras oscilaciones y un sobretiro en el arranque. En el caso de [26], se maneja el motor de imanes permanentes con la dinámica completa de segundo orden. A partir de la medición del sobretiro y el tiempo de establecimiento el autor obtiene la frecuencia natural de oscilación y el coeficiente de amortiguamiento. Comparando con la función de transferencia para la velocidad y dado que considera previamente conocidos los parámetros eléctricos, los parámetros mecánicos se determinan de manera inmediata. Las aproximaciones de estos trabajos son posibles debido que se consideran los motores como sistemas lineales. Esta metodología se puede adaptar al motor BLDC si se cuenta con una plataforma de adquisición de datos que permita obtener los transitorios y caracterizar la no linealidad de las formas de onda trapezoidales. En [19] se enlistan una serie de pasos para determinar el coeficiente de fricción a partir de mediciones de corriente, velocidad angular y par en estado estacionario. Una vez más se considera al subsistema mecánico como un sistema lineal de primer orden, al cual se le puede medir la ganancia en estado estacionario y el tiempo de establecimiento. En general, si se dispone de la instrumentación adecuada es posible determinar el coeficiente de fricción si se conocen previamente algunos de los otros parámetros.

El coeficiente de fricción es variable en distintos puntos de operación y dependiente de la temperatura. En la literatura consultada no se ha encontrado ningún trabajo en el que se aborde explícitamente este problema. Esta prueba puede realizarse en distintos puntos de operación midiendo la velocidad y el par mecánico en estado estacionario y con estos datos determinar a b .

Momento de inercia, J

Estimar el momento de inercia también presenta algunas dificultades. Además de los trabajos en los que se estima a partir de pruebas experimentales utilizando métodos de optimización [6, 22], se han reportado algunas técnicas para determinarlo analíticamente a partir de la geometría del rotor. Sin embargo, en la literatura consultada se requiere el previo conocimiento de los demás parámetros [19, 26]. Para el motor serie presentado en [15], se determina la inercia a partir de la constante de tiempo del subsistema mecánico, la cual se mide durante el arranque. Si se determina el coeficiente de fricción como se describió en la sección anterior, se puede obtener directamente el momento de inercia con esta prueba. En [19] se ataca el problema de forma similar, la diferencia principal radica en que la inercia se obtiene desconectando la fuente y midiendo el tiempo en que la velocidad del motor decrece a un valor equivalente a la constante de tiempo del subsistema mecánico. El enfoque es prácticamente el mismo que en los otros trabajos, sin embargo tiene la ventaja de que la dinámica de paro es más lenta que la de arranque, por lo que se puede tener una mejor medición de la constante de tiempo. Algunos fabricantes proporcionan un valor estimado del momento de inercia [19]. Adicionalmente, es posible estimar el momento de inercia si se conocen las características de diseño del rotor a detalle, aunque es poco común contar con esta información.

1.2. Planteamiento del problema y justificación

1.2.1. Planteamiento del problema

Para poder realizar el análisis o control del motor BLDC es indispensable tener certeza sobre el modelo que se está utilizando. En el caso en que los parámetros del modelo no se conozcan es necesaria una metodología apropiada de identificación. La estimación paramétrica de una máquina eléctrica ha presentado un reto en las áreas de control, electromagnetismo computacional e ingeniería. Esto aplica al motor BLDC, debido a que actualmente no se tiene una metodología estándar de caracterización [18]. Por esta razón resulta de gran interés determinar qué pruebas podrían tener una aplicación directa en la identificación de parámetros utilizados en el modelo dinámico del motor BLDC.

1.2.2. Justificación

En años recientes se han reportado aplicaciones de los motores BLDC en vehículos eléctricos, vehículos híbridos, aeronáutica, robótica, bombas de combustible, entre otras [5, 19]. Estos motores cuentan con múltiples ventajas: una estructura simple, requieren poco mantenimiento, tienen alta densidad de par y de eficiencia, su operación es confiable, son fáciles de controlar, no presentan pérdidas por fricción en escobillas ni descargas eléctricas durante el proceso de conmutación, y producen menos ruido que sus contrapartes con escobillas [7]. Es claro que este tipo de motores han cobrado importancia en los últimos años y su creciente popularidad ha impuesto distintos retos en el desarrollo de esquemas de control que exploten

sus ventajas de manera segura y eficiente. Las ventajas de tener una metodología apropiada de identificación se vuelven más evidentes dependiendo de la aplicación, por lo que el correcto desarrollo de esta tesis puede impactar de forma positiva en el desarrollo de mejores estrategias de análisis y control de estas máquinas. Esto, aunado al hecho de que no existen estándares para la determinación de parámetros en estas máquinas, hace necesario aprovechar todas las herramientas disponibles para su análisis.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Realizar la identificación en tiempo real de parámetros de una máquina de CD de imanes permanentes sin escobillas a través de las respuestas transitorias y estacionarias de las variables del modelo dinámico.

1.3.2. Objetivos específicos

- Preparar la plataforma experimental para la realización de pruebas en tiempo real a un motor BLDC
- Investigar pruebas fuera de línea que permitan determinar los parámetros de un motor BLDC
- Identificar los parámetros del modelo dinámico del motor BLDC a partir de su respuesta transitoria y estacionaria (r , ℓ , k_v , b y J)
- Identificar los parámetros del modelo dinámico del motor utilizando el método de mínimos cuadrados recursivos con factor de olvido
- Validar el conjunto de parámetros obtenidos a través de la simulación numérica del modelo dinámico del motor BLDC

2. Motor BLDC

2.1. Principio de funcionamiento

El modelo matemático de un motor BLDC es fundamental para diseñar y evaluar esquemas de control, que cumplan con especificaciones de diseño y garanticen estabilidad durante la operación del sistema. Un motor BLDC desde el punto de vista de construcción es similar al motor síncrono de imanes permanentes: un devanado trifásico en el estator y un rotor de imanes permanentes. La diferencia principal es que en un motor BLDC los devanados están uniformemente distribuidos [3]. La conmutación de los voltajes de alimentación, que en motores de CD convencionales se realiza a través de un componente mecánico acoplado al motor, es realizada por dispositivos electrónicos. Por esta razón esta máquina es llamada «de CD», ya que utilizando un controlador apropiado, sus características terminales se parecen a las de una máquina de CD [25]. En esta sección se presentan las características principales de la construcción y operación de un motor BLDC y cómo estas impactan en las ecuaciones que modelan su dinámica.

2.1.1. Construcción

El núcleo magnético del estator de un motor BLDC está hecho de un material ferromagnético, con ranuras por las que se insertan los devanados de armadura. Estos pueden estar conectados en estrella o en delta, y ser concentrados o distribuidos uniformemente en la periferia del estator. La figura 2.1a muestra de manera esquemática el estator de un motor de dos polos con devanados distribuidos conectados en estrella [3].

El rotor también es fabricado de un material ferromagnético, con un determinado número de imanes permanentes que pueden estar montados en la superficie o embebidos en el interior del rotor. Los primeros se conocen como motores de imanes permanentes superficiales (IPS) y los segundos como de imanes permanentes interiores (IPI). Los imanes de neodimio (NdFeB) son muy utilizados debido a su alta fuerza coercitiva y flujo remanente. La figura 2.1b muestra un rotor con IPS. El ángulo Δ corresponde a la separación entre los polos norte y sur de los imanes. El eje magnético del rotor está dado por la posición del polo norte.

La alimentación del motor se realiza a través de un inversor trifásico, el cual debe conmutar cada fase en una secuencia apropiada para que el rotor pueda girar continuamente. Esta secuencia se determina con la posición del rotor a través de los sensores de posición.

La figura 2.2 muestra el estator y el rotor de la máquina indicando los ejes magnéticos y el circuito eléctrico equivalente del motor. Tomando como referencia el eje magnético de la fase a en la figura 2.2a, el ángulo θ corresponde a una posición arbitraria en la máquina, el

Figura 2.1: Esquema de un motor BLDC de dos polos.

ángulo θ_r indica la posición del rotor y el ángulo $\phi_r = \theta - \theta_r$ indica la posición arbitraria con respecto al rotor. Los devanados que se muestran en la figura 2.2b se modelan con un resistor en serie con un inductor. La dirección de las corrientes corresponde con la convención de motor. Asumiendo que los devanados son simétricos, cada uno cuenta con N_s vueltas equivalentes y una resistencia r . Los voltajes de alimentación v_a , v_b y v_c son proporcionados por un convertidor de potencia, y sus magnitudes y frecuencias son determinadas por el punto de operación. Para el desarrollo del modelo matemático se asume que las formas de onda proporcionadas por el inversor son ideales. De esta forma, las ecuaciones de las tres fases están dadas por

$$\mathbf{v}(t) = r\mathbf{i}(t) + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda}(t), \quad (2.1)$$

donde r es la resistencia de los devanados y $\mathbf{v}$, $\mathbf{i}$ y $\boldsymbol{\lambda}$ son los vectores de voltaje, corriente y encadenamientos de flujo por fase. Estos tres vectores tienen la forma $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_a \ \alpha_b \ \alpha_c]^T$, por lo que (2.1) es una ecuación matricial.

2.1.2. Encadenamientos de flujo en un motor BLDC

El análisis del comportamiento de un motor BLDC depende de que los voltajes inducidos (derivada de los encadenamientos de flujo) puedan determinarse. En general,

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{\lambda}_s(t) + \boldsymbol{\lambda}_r(\theta_e), \quad (2.2)$$

donde el subíndice s se refiere a los encadenamientos de flujo producidos por las corrientes en cada devanado del estator y r por los imanes permanentes del rotor. El ángulo θ_e del que dependen los encadenamientos de flujo del rotor es la posición del rotor θ_r expresada en grados eléctricos y cumple la relación

$$\theta_e = \frac{P}{2}\theta_r, \quad (2.3)$$

con P el número de polos de la máquina. Los encadenamientos de flujo del estator pueden determinarse a través de la formulación de funciones de devanado [25].

Figura 2.2: Esquema completo de un motor BLDC de dos polos.

Funciones de devanado

Una función de devanado es una descripción de cuántas veces un devanado enlaza densidad de flujo en una posición determinada. Se puede interpretar como el número de vueltas asociadas con un devanado distribuido como función de la posición. Para un devanado x de una máquina de P polos, la función de devanado que lo representa es

$$w_x(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{P}} n_x(\theta) d\theta - \int_0^\theta n_x(\xi) d\xi, \quad (2.4)$$

donde n_x es la densidad de conductores en función de la posición. Esta cantidad se representa de manera idealizada como una serie de Fourier de la forma

$$n_x(\theta) = \sum_{j=1}^N a_j \cos(j\theta) + b_j \sin(j\theta), \quad (2.5a)$$

$$a_j = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^S N_{x,i} \cos(j\theta_i), \quad (2.5b)$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^S N_{x,i} \sin(j\theta_i). \quad (2.5c)$$

Los coeficientes (2.5b) y (2.5c) dependen del número de ranuras en el estator S y del número de conductores de la fase x en la i -ésima ranura $N_{x,i}$. El límite superior de (2.5) N es el número de términos a utilizar en la serie. Se puede observar que los coeficientes se calculan a partir de una descripción discreta del número de conductores como función de la posición, es decir, la posición está dada por el número de ranura que se esté considerando.

Estas expresiones permiten obtener una expresión continua para la fuerza magnetomotriz, la intensidad de campo magnético en el entrehierro y la densidad de flujo magnético en el entrehierro. Asumiendo una densidad de flujo finita y una permeabilidad alta, la caída de

fuerza magnetomotriz en el núcleo puede despreciarse. Así, la fuerza magnetomotriz en el entrehierro debida a la corriente que circula en el devanado y , $\mathcal{F}_{yg}$, está dada por

$$\mathcal{F}_{yg}(\theta) = H_{yg}(\theta) g(\theta) = w_y(\theta) i_y, \quad (2.6)$$

donde H_{yg} es la intensidad de campo magnético en el entrehierro, g es la longitud del entrehierro que puede variar con la posición, y el producto wi se interpreta como la corriente encerrada por la trayectoria de integración de la ley de Ampère de la que se deriva (2.6). La densidad de flujo en el entrehierro es entonces

$$B_{yg}(\theta) = \mu_0 \frac{\mathcal{F}_{yg}(\theta)}{g(\theta)}, \quad (2.7)$$

donde μ_0 es la permeabilidad del vacío. El flujo que atraviesa un área incremental dada por la longitud del rotor l y el diferencial de arco $Rd\theta$ que subtiende el rotor de radio R es

$$d\Phi = B_{yg}(\theta) l R d\theta. \quad (2.8)$$

Con la expresión (2.8) y la definición de función de devanado, el flujo producido por el devando y que enlaza el devanado x se calcula con la integral

$$\lambda_{xy} = \int_0^{2\pi} B_{yg}(\theta) w_x(\theta) l R d\theta. \quad (2.9)$$

Sustituyendo (2.6) en (2.7), (2.9) se reduce a

$$\lambda_{xy}(t) = \mu_0 R l i_y(t) \int_0^{2\pi} \frac{w_x(\theta) w_y(\theta)}{g(\theta)} d\theta. \quad (2.10)$$

El siguiente desarrollo se realiza para una máquina de P polos, tres fases y S_y ranuras en el estator con un devanado distribuido uniformemente. Las funciones de devanado por fase hasta los primeros cinco armónicos están dadas por

$$\begin{aligned} w_a(\theta) &= \frac{3PN_s}{S_y} (a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta + a_3 \cos(3\theta) \\ &\quad + b_3 \sin(3\theta) + a_5 \cos(5\theta) + b_5 \sin(5\theta)), \\ w_b(\theta) &= w_a\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{y} \quad w_c(\theta) = w_a\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right), \end{aligned} \quad (2.11)$$

con

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \left(4 \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 4 \sin\left(\frac{11\pi}{30}\right) + 4 \sin\left(\frac{13\pi}{30}\right) + 4 \sin\left(\frac{7\pi}{15}\right) + \sqrt{3} + 2 \right) \\ a_3 &= -\frac{1}{3\pi} \left(4 \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 4 \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) + 4 \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) + 4 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2 \right) \\ a_5 &= \frac{\sqrt{3} + 2}{5\pi} & b_1 &= -\frac{1}{\pi} \\ b_3 &= \frac{2}{3\pi} & b_5 &= -\frac{1}{5\pi} \end{aligned} \quad (2.12)$$

los coeficientes de la expansión de Fourier. Sustituyendo (2.11) en (2.10) se obtienen los encadenamientos de flujo propios y mutuos

$$\lambda_{xx} = 350\pi\mu_0 \left(\frac{Rl}{g}\right) \left(\frac{PN_s}{S_y}\right)^2 i_x(t) \quad \text{y} \quad \lambda_{xy} = -150\pi\mu_0 \left(\frac{Rl}{g}\right) \left(\frac{PN_s}{S_y}\right)^2 i_y(t), \quad (2.13)$$

de donde se pueden definir las inductancias

$$L_{xx} = \frac{\lambda_{xx}(t)}{i_x(t)} = 350\pi\mu_0 \left(\frac{Rl}{g}\right) \left(\frac{PN_s}{S_y}\right)^2 \quad \text{y} \quad M_{xy} = \frac{\lambda_{xy}(t)}{i_y(t)} = 150\pi\mu_0 \left(\frac{Rl}{g}\right) \left(\frac{PN_s}{S_y}\right)^2. \quad (2.14)$$

Las inductancias propias L_{xx} y mutuas M_{xy} de los devanados del estator son independientes de la posición del rotor. Esto se debe a que la función que describe la longitud del entrehierro se consideró uniforme para cualquier posición. En ese sentido, se puede simplificar el modelo si se considera que

$$L_{aa} = L_{bb} = L_{cc} = L \quad \text{y} \quad (2.15)$$

$$M_{ab} = M_{ba} = M_{ac} = M_{ca} = M_{bc} = M_{cb} = M. \quad (2.16)$$

Asimismo se puede observar que $L_{xx} = 7M_{xy}/3$. De esta forma, los encadenamientos de flujo del estator pueden expresarse como

$$\boldsymbol{\lambda}_s = \mathbf{L}\mathbf{i}, \quad \text{con} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L & -M & -M \\ -M & L & -M \\ -M & -M & L \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

En el caso de los encadenamientos de flujo debidos a los imanes permanentes se tiene que considerar la variación de estos con la posición del rotor. Los encadenamientos de flujo producidos por los imanes se pueden expresar con la función definida a trozos [3]

$$\lambda_r(\theta_e) = k_v \begin{cases} -\frac{3}{\pi}\theta_e^2 + \frac{5\pi}{12} & -\frac{\pi}{6} \leq \theta_e < \frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{2} - \theta_e & \frac{\pi}{6} \leq \theta_e < \frac{5\pi}{6} \\ \frac{3}{\pi}(\theta_e - \pi)^2 - \frac{5\pi}{12} & \frac{5\pi}{6} \leq \theta_e < \frac{7\pi}{6} \\ \theta_e - \frac{5\pi}{3} & \frac{7\pi}{6} \leq \theta_e < \frac{11\pi}{6} \end{cases}, \quad (2.18)$$

donde k_v es la constante de fuerza contraelectromotriz. Se puede observar que los encadenamientos de flujo son una función cuadrática de la posición del rotor. Tomando la fase a como referencia, los encadenamientos de flujo por fase se pueden escribir como

$$\lambda_{ar}(\theta_e) = \lambda_r(\theta_e), \quad \lambda_{br}(\theta_e) = \lambda_r\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{y} \quad \lambda_{cr}(\theta_e) = \lambda_r\left(\theta_e - \frac{4\pi}{3}\right). \quad (2.19)$$

La figura 2.3 muestra estas expresiones graficadas para un ciclo eléctrico.

Sustituyendo (2.17) y (2.19) en (2.2), los encadenamientos de flujo por fase están dados por la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} \lambda_a(t) \\ \lambda_b(t) \\ \lambda_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & -M & -M \\ -M & L & -M \\ -M & -M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{ar}(\theta_e) \\ \lambda_{br}(\theta_e) \\ \lambda_{cr}(\theta_e) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Figura 2.3: Encadenamientos de flujo y funciones trapezoidales.

2.1.3. Voltaje inducido

El voltaje inducido en un motor BLDC se obtiene derivando (2.20) respecto al tiempo. Los voltajes inducidos por fase, debido a los encadenamientos de flujo producidos por las corrientes en el estator, son:

$$\begin{bmatrix} e_{as}(t) \\ e_{bs}(t) \\ e_{cs}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & -M & -M \\ -M & L & -M \\ -M & -M & L \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Tomando la derivada temporal de $\lambda_r(\theta_e)$ es posible expresar los encadenamientos del rotor como una función de la velocidad:

$$\frac{d}{dt} \lambda_r(\theta_e) = \left(\frac{d}{d\theta_e} \lambda_r(\theta_e) \right) \left(\frac{d}{dt} \theta_e(t) \right) = \omega_e(t) \frac{d}{d\theta_e} \lambda_r(\theta_e), \quad (2.22)$$

donde

$$\frac{d}{dt} \theta_e(t) = \omega_e(t). \quad (2.23)$$

La derivada de $\lambda_r(\theta_e)$ respecto a θ_e produce funciones trapezoidales cuya magnitud es k_v . Denotando estas funciones como $f_x(\theta_e)$, los voltajes inducidos debidos al flujo producido por los imanes permanentes en el rotor son:

$$\begin{bmatrix} e_{ar}(t) \\ e_{br}(t) \\ e_{cr}(t) \end{bmatrix} = k_v \omega_e(t) \begin{bmatrix} f_a(\theta_e) \\ f_b(\theta_e) \\ f_c(\theta_e) \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Las funciones trapezoidales correspondientes a cada fase se muestran en la figura 2.3. Es importante mencionar que la amplitud de estas funciones es 1, y la magnitud de los voltajes inducidos está dada por el producto $k_v \omega_e$. Las funciones trapezoidales están definidas por la

función a trozos

$$f(\theta_e) = \begin{cases} -\frac{6}{\pi}\theta_e & -\frac{\pi}{6} \leq \theta_e < \frac{\pi}{6} \\ -1 & \frac{\pi}{6} \leq \theta_e < \frac{5\pi}{6} \\ \frac{6}{\pi}(\theta_e - \pi) & \frac{5\pi}{6} \leq \theta_e < \frac{7\pi}{6} \\ 1 & \frac{7\pi}{6} \leq \theta_e < \frac{11\pi}{6} \end{cases},$$

$$f_a(\theta_e) = f(\theta_e), \quad f_b(\theta_e) = f\left(\theta_e - \frac{2\pi}{3}\right), \quad y \quad f_c(\theta_e) = f\left(\theta_e - \frac{4\pi}{3}\right). \quad (2.25)$$

2.1.4. Par desarrollado

Un motor BLDC transforma la energía eléctrica suministrada por una fuente en energía mecánica en la flecha del motor. La potencia que se transmite del subsistema eléctrico al subsistema mecánico es aquella parte de la potencia suministrada menos las pérdidas en los devanados del motor [25]. En este caso, esta potencia desarrollada P_d puede escribirse como el producto de los voltajes inducidos y las corrientes por fase:

$$\begin{aligned} P_d(t) &= \mathbf{e}(t)^T \mathbf{i}(t) \\ &= e_a(t) i_a(t) + e_b(t) i_b(t) + e_c(t) i_c(t) \\ &= \left(\frac{P}{2}\right) k_v \omega_r(t) [f_a(\theta_e) i_a(t) + f_b(\theta_e) i_b(t) + f_c(\theta_e) i_c(t)], \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde

$$\omega_r(t) = \left(\frac{2}{P}\right) \omega_e(t) \quad (2.27)$$

es la velocidad angular expresada en radianes mecánicos. El par electromagnético desarrollado por un motor está dado por

$$\tau_d(t) = \frac{P_d(t)}{\omega_r(t)}, \quad (2.28)$$

sustituyendo (2.26) en (2.28), el par electromagnético se calcula con la siguiente expresión

$$\tau_d(t) = \left(\frac{P}{2}\right) k_v [f_a(\theta_e) i_a(t) + f_b(\theta_e) i_b(t) + f_c(\theta_e) i_c(t)] \quad (2.29)$$

$$= \left(\frac{P}{2}\right) k_v \mathbf{f}(\theta_e)^T \mathbf{i}(t). \quad (2.30)$$

Las funciones $\mathbf{f}$ son periódicas en θ_e , sin embargo, están definidas como funciones a trozos que no son suaves en las posiciones donde inicia la transición entre valores positivos y negativos. Esto genera pulsaciones en el par desarrollado por cada una de las fases si las corrientes

no tienen la forma adecuada. Para desarrollar un par electromagnético constante la corriente de la fase x se selecciona siguiendo la relación [3]

$$i_x(t) = \begin{cases} I_p & f_x(\theta_e) = 1 \\ -I_p & f_x(\theta_e) = -1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}, \quad (2.31)$$

donde I_p se elige dependiendo de la velocidad a la que se desee operar. Las formas de onda de corriente y de las trapezoidales se muestran en la figura 2.4. También se muestran los pares que desarrollan las tres fases, denotados por τ_{ia} , τ_{ib} y τ_{ic} . Se puede ver que cuando el par producido por una fase es cero, es constante en las dos restantes. Así, utilizando estas formas de onda ideales, el par desarrollado tiene un valor constante igual a

$$\tau_d(t) = Pk_v I_p. \quad (2.32)$$

En un sistema rotatorio la suma de pares actuando sobre él debe ser igual al momento de inercia multiplicado por la aceleración angular. Para el caso del motor BLDC esto puede escribirse como

$$J \frac{d}{dt} \omega_r(t) = \sum \tau_{ext}, \quad (2.33)$$

donde J es el momento de inercia y τ_{ext} son los pares externos aplicados. En la dinámica de un motor BLDC se tienen que considerar el par desarrollado τ_d , el par de amortiguamiento τ_b , el par dentado τ_c , el par debido a la conmutación del inversor τ_i , el par de carga mecánica τ_L , entre otros. Para el desarrollo del modelo del BLDC se considerarán únicamente τ_d , τ_b y τ_L . El par dentado τ_c tiene efecto sobre todo a bajas velocidades [14], por lo que si se opera el motor a velocidades altas es común despreciarlo sin efectos significativos. El par de conmutación τ_i normalmente se considera en estudios de eficiencia de los convertidores de potencia; debido a que su dinámica es mucho más rápida que la del motor. También puede despreciarse sin efectos significativos en la respuesta del motor.

2.2. Modelo matemático

Con las consideraciones presentadas en secciones anteriores y sustituyendo (2.21) y (2.24) en (2.1) y (2.28) en (2.33), el comportamiento dinámico del motor está dado por

$$\mathbf{v}(t) = r\mathbf{i}(t) + \mathbf{L} \frac{d}{dt} \mathbf{i}(t) + k_v \omega_e(t) \mathbf{f}(\theta_e) \quad (2.34a)$$

$$\tau_d(t) = J \frac{d}{dt} \omega_r(t) + b\omega_r(t) + \tau_L(t), \quad (2.34b)$$

donde b es el coeficiente de amortiguamiento.

2.2.1. Conmutación en 120°

La figura 2.5 muestra el diagrama de un inversor de puente completo, formado por interruptores IGBT (T1-T6) con diodos de libre circulación. Cada interruptor es activado para permitir el paso de las corrientes de cada fase en el orden y el instante determinados por las señales producidas por los sensores de posición. Utilizando sensores de efecto Hall espaciados

Figura 2.4: Par desarrollado ideal. Las tres gráficas de arriba muestran las formas de onda ideales de las corrientes de fase (línea continua), las funciones trapezoidales de fase (línea discontinua) y de línea (línea punteada). La gráfica de abajo muestra el par resultante producido por cada corriente y el par desarrollado total τ_d .

120°, las señales de posición son ondas cuadradas desfasadas 120° a lo largo de un ciclo eléctrico del motor. Esto da un total de seis posiciones discretas por ciclo eléctrico, es decir, en cada instante de conmutación el rotor gira 60°. Con esta configuración, se tiene un estado de corriente continua circulando por cada devanado durante 120° eléctricos, y en cada instante se tienen dos fases conectadas en serie y la tercera está «flotando». Este modo de operación se conoce como conmutación en 120°. En cada intervalo de conmutación, sólo un interruptor superior e inferior del puente se encuentran activados, de manera que la corriente que entra por una de las fases circula por la parte superior del puente y la corriente que sale por alguna de las otras dos fases circula por la parte inferior [2]. La corriente circulando en cada uno de los devanados produce un par, y la suma de ambos constituye el par desarrollado (cf. figura 2.4).

Las ecuaciones (2.34) se pueden reescribir para considerar la conmutación en 120° a través de las cantidades de línea [1, 2]. En cada instante de conmutación las fases x y y están conectadas en serie, de manera que $i_x = -i_y$ y el voltaje $v_{xy} = v_x - v_y$ que se aplica entre esas dos fases es

$$v_{xy}(t) = 2r i_x(t) + 2(L + M) \frac{d}{dt} i_x(t) + k_v \omega_e(t) f_{xy}(\theta_e). \quad (2.35)$$

Definiendo la resistencia terminal y la inductancia terminal como

$$r_t = 2r \quad \text{y} \quad \ell_t = 2\ell = 2(L + M), \quad (2.36)$$

las ecuaciones de línea están dadas por

$$\mathbf{v}_L(t) = r_t \mathbf{i}(t) + \ell_t \frac{d}{dt} \mathbf{i}(t) + \left(\frac{P}{2}\right) k_v \omega_r(t) \mathbf{f}_L(\theta_e). \quad (2.37)$$

donde los vectores con subíndice L son de la forma $\boldsymbol{\alpha}_L = [\alpha_{ab} \quad \alpha_{bc} \quad \alpha_{ca}]^T$.

El uso de las cantidades de línea tiene gran utilidad práctica, debido a que los devanados de motores BLDC comúnmente tienen conexión en estrella y no se tiene acceso al neutro, por lo que las mediciones en aplicaciones reales suelen hacerse entre líneas. Por esta razón, conviene expresar también a las corrientes como «corrientes de línea» para realizar los cálculos correspondientes al par desarrollado. Así, la ecuación (2.37) es equivalente a

$$\mathbf{v}_L(t) = r \mathbf{i}_L(t) + \ell \frac{d}{dt} \mathbf{i}_L(t) + k_v \omega_e(t) \mathbf{f}_L(t). \quad (2.38)$$

Nótese que en la ecuación (2.38) se deben utilizar la resistencia y la inductancia por fase r y ℓ , no sus valores terminales. A partir de esta expresión, el par desarrollado puede también expresarse en términos de las mediciones de corrientes de línea, y se puede demostrar que

$$\tau_d = \left(\frac{P}{2}\right) \left(\frac{k_v}{3}\right) \mathbf{f}_L(\theta_e)^T \mathbf{i}_L(t). \quad (2.39)$$

Debido a la configuración de la plataforma experimental (Cap. 3), estas son las ecuaciones del modelo con las que se trabajaron en esta tesis. Las funciones trapezoidales de línea se muestran en la figura 2.4, donde se observa que su amplitud es 2 y tienen un periodo de conducción de 60°.

Figura 2.5: Conexión de un motor BLDC utilizando un inversor de puente de onda completa.

3. Plataforma Experimental

3.1. Elementos principales

Las pruebas a realizar en la máquina BLDC requieren la medición de variables eléctricas (voltajes y corrientes) y mecánicas (posición angular, velocidad y par). Para este fin se utiliza una plataforma de adquisición de datos que consta de dos sensores de voltaje denotados por SV_1 y SV_2 , dos sensores de corriente denotados por SC_1 y SC_2 y un encoder incremental denotado por SP. Adicionalmente se midieron las señales de los SEH del motor utilizado. El esquema general de la plataforma de adquisición de datos se muestra en la figura 3.1.

En el caso de los sensores de voltaje y corriente, las salidas se conectan a una etapa acondicionamiento, que consta de un circuito de amplificación y filtrado para los sensores de voltaje y un circuito de filtrado para los sensores de corriente. Las salidas de los circuitos de acondicionamiento y los Sensores de Efecto Hall (SEH) se conectan a una tarjeta de adquisición de datos (TAD) analógica y la salida del encoder a una TAD digital. Los componentes utilizados para las mediciones se describen en la tabla 3.1.

Tabla 3.1: Componentes principales de la plataforma de adquisición de datos.

Marca	Componente	Descripción
Microswitch	CSLF1ACF	Sensor de corriente
LEM	LV25-P	Sensor de voltaje
Bourns	ENA1J-B28	Encoder incremental
National Instruments	NI-PCI-6602	TAD analógica
National Instruments	NI-PCI-6221	TAD digital

Las TAD se conectan a una computadora *target* cuyo sistema operativo es Simulink Real-Time [29]. Esta computadora está conectada a través de un cable de red a otra computadora *host*, la cual utiliza MATLAB para la interpretación de la información adquirida por las tarjetas.

3.1.1. Circuitos de acondicionamiento

La etapa de acondicionamiento es necesaria para aprovechar todo el rango de medición de señales analógicas de la TAD 6602, que está entre ± 10 V. La salida de los sensores de voltaje se encuentra en el rango de mV, por lo que se utiliza un amplificador operacional en

Figura 3.1: Diagrama a bloques de la plataforma experimental utilizada en este trabajo.

Figura 3.2: Esquema general de los circuitos de acondicionamiento de los sensores de voltaje y corriente.

configuración no inversora con una ganancia de aproximadamente 6, diseñada para permitir a los sensores medir voltajes trifásicos de 220 V rms. Para los sensores de corriente no fue necesaria la etapa de amplificación, ya que sus salidas se encuentran dentro del rango de medición de la TAD.

Las salidas de los amplificadores en el caso de los sensores de voltaje, y de los sensores de corriente se conectaron a un filtro RC de primer orden, para reducir el ruido inherente a los sensores. Un esquema general de los circuitos de acondicionamiento de los sensores de voltaje y de corriente se muestra en las figuras 3.2a y 3.2b, respectivamente. Las mediciones de voltaje V_m y corriente I_m se envían a la TAD analógica en forma de los voltajes v_{Vx} y v_{Cx} , donde el subíndice V indica que se trata de un sensor de voltaje, el subíndice C indica un sensor de corriente, y x puede ser 1 o 2, dependiendo del sensor que se esté utilizando.

Los valores de las resistencias y capacitores de los circuitos de acondicionamiento se resumen en la tabla 3.2. Adicionalmente se muestran las ganancias G de cada amplificador y las frecuencias de corte f_c de los filtros.

3.1.2. Caracterización de los sensores

Para la caracterización de los sensores se aplicaron voltajes y corrientes conocidos y se hicieron pasar por los sensores correspondientes. Se midieron los voltajes a la salida de cada

Tabla 3.2: Valores de componentes de los circuitos de acondicionamiento.

Sensor	R_1 [k Ω]	R_r [k Ω]	R_f [Ω]	C_f [μ F]	G	f_c [Hz]
SV ₁	1.0	4.7	270	1.0	5.7	589.46
SV ₂	1.0	4.7	370	1.0	5.7	430.15
SC ₁	–	–	470	1.0	–	338.63
SC ₂	–	–	470	1.0	–	338.63

Tabla 3.3: Parámetros de los ajustes lineales de la caracterización de sensores.

Sensor	Ajuste lineal	R^2
SV ₁	$V = 38.26v_{V1} + 0.4751$	1.0000
SV ₂	$V = 38.26v_{V2} + 0.5472$	1.0000
SC ₁	$I = 11.79v_{C1} - 72.92$	0.9993
SC ₂	$I = 11.46v_{C2} - 70.69$	0.9998

sensor para encontrar la relación entre las variables medidas y los voltajes que se proporcionan a la TAD. La figuras 3.3a y 3.3b muestran los circuitos armados para la caracterización de los sensores de voltaje y corriente, respectivamente. Los voltajes de salida de cada sensor, de acuerdo con la figura 3.2, son v_{V1} , v_{V2} , v_{C1} y v_{C2} , y fueron medidos con voltímetros digitales. En los diagramas no se muestran los circuitos de acondicionamiento, sin embargo, los voltajes se midieron a la salida de estos.

(a) Sensores de voltaje.

(b) Sensores de corriente.

Figura 3.3: Circuitos utilizados para la caracterización de los sensores.

En el caso de los sensores de voltaje, se aplicó una tensión en CD desde -20 a $+20$ V en intervalos de 3 V y se registraron los valores medidos a la salida de los circuitos de acondicionamiento (v_{V1} , v_{V2}). Para los sensores de corriente se conectó una carga resistiva y se varió la corriente de -2.5 a $+2.5$ A en CD, en intervalos de 0.5 A. Estos rangos se eligieron tomando en cuenta las limitaciones de la fuente y la carga que se podía conectar a los sensores. Las curvas características de los sensores se muestran en la figura 3.4.

Es evidente que las curvas características obedecen a una relación lineal entre las variables medidas y los voltajes de salida. La figura 3.4 muestra ajustes lineales entre los valores medidos y los voltajes de salida. La tabla 3.3 resume la ecuaciones lineales correspondientes con el coeficiente de determinación R^2 de cada ajuste.

3.1.3. Generación de voltajes

Para el desarrollo de este trabajo se utilizó un módulo de potencia inteligente basado en el encapsulado FSBF15CH60BT de la marca On Semiconductor®. Este componente es un

Figura 3.4: Curvas características de los sensores de voltaje y corriente. Las líneas continuas muestran el ajuste lineal de los valores medidos.

inversor trifásico basado en transistores de potencia IGBT con diodos de libre circulación. Este inversor es capaz de generar los voltajes trifásicos necesarios para la correcta operación del motor BLDC, siempre y cuando se cumpla lo siguiente:

- Las seis señales requeridas para controlar la apertura y cierre de las compuertas de los transistores sean proporcionadas por el usuario
- El motor a controlar esté conectado a las terminales destinadas para esto
- El voltaje de alimentación del inversor y del motor estén dentro del rango de 125 y 400 V de CD, respectivamente.

La generación de las señales para producir voltajes desfasados 120° entre sí se puede lograr utilizando modulación de ancho de pulso (PWM, por sus siglas en inglés). En este trabajo, las señales PWM son generadas en Simulink y enviadas a través de la PC target a la TAD 6621. Las señales generadas por la TAD 6621 están aisladas ópticamente de los puertos de entrada del inversor para proteger los dispositivos. Los optoaisladores utilizados son de la marca Broadcom Limited, modelo HCPL-7720.

3.2. Características del motor BLDC

El motor BLDC utilizado es de 6000 rpm, 170 V y 4 polos de la marca AMETEK. El rotor del motor es de imanes permanentes de neodimio. La tabla 3.4 muestra los datos de placa del motor y los parámetros reportados por el fabricante.

El motor utilizado es de fuerza contraelectromotriz trapezoidal cuya secuencia de conmutación se muestra en la tabla 3.5.

3.2.1. Operación con dos sensores de posición

El motor utilizado tenía dañado el sensor de posición correspondiente a la fase a . Para poder realizar la conmutación de manera precisa y segura se utilizó una metodología de arranque

conocida como método de prelocalización [30–32]. Esta técnica es comúnmente utilizada en el uso de controladores sin sensores, debido a que se tiene que tener certeza en la posición inicial del rotor para poder operarlo de manera segura. La prelocalización se refiere básicamente a alinear el rotor a una posición conocida alimentando dos fases del estator.

El diseño del algoritmo de arranque tomó en consideración que la única posición de la que se puede tener certeza es la que está resaltada en la tabla 3.5. En todos los experimentos realizados se utilizó la prelocalización para alinear el rotor en la posición correspondiente. Esto se hizo aplicando un voltaje tipo escalón de 2.5 V a las terminales a y c durante 0.25 s. Posteriormente se mantuvo al motor en esta posición ($H_b = H_c = 1$) por 0.25 s adicionales, de tal manera que el tiempo inicial de las pruebas $t_0 = 0.5$ s. Una vez localizada la posición del rotor se generó una señal para la fase a ficticia $\mathcal{H}_a$ utilizando un disparo de bajada con la fase c , la cual está dada por

$$\mathcal{H}_a = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{3} < \theta_{\mathcal{H}}, < \frac{4\pi}{3} \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $\theta_{\mathcal{H}} = \theta_{\mathcal{H}}(\theta_e)$ es el ángulo medido desde que H_c cambia de uno a cero.

3.2.2. Control escalar de un motor BLDC

Los motores BLDC deben conmutarse de acuerdo con las señales proporcionadas por los SEH. Por esta razón, un controlador es indispensable para su operación. A continuación se propone una estrategia de control en lazo abierto basada en la técnica de control escalar de motores de inducción.

El control escalar consiste en la suposición de que la magnitud del voltaje inducido E_p , en estado estacionario, es aproximadamente igual a la del voltaje aplicado V_p [33], es decir, la caída de voltaje en la resistencia e inductancia por fase es despreciable en comparación con el voltaje inducido cuando la máquina opera a velocidad constante. Para una operación segura en un rango amplio de velocidades, el flujo debería permanecer constante [13]. El flujo magnético es proporcional al voltaje inducido e inversamente proporcional a la frecuencia del voltaje aplicado $\Lambda_p \propto E_p/\omega$. Esta aproximación tiene sentido si se considera que el motor se diseña de tal forma que se tenga la menor cantidad de pérdidas. De esta forma, en estado

Tabla 3.4: Datos nominales del motor y parámetros del modelo.

Parámetro	Unidades	Valor	Tolerancia
Voltaje nominal	V	170	–
Velocidad nominal	rpm	6000	–
Corriente nominal	A	4.5	–
Par nominal	oz·in	55	–
Resistencia terminal	Ω	1.18	10 %
Inductancia terminal	mH	2.3	15 %
Constante de f_{cem}	V/krpm	9.2	10 %
Coefficiente de amortiguamiento	oz·in/krpm	0.038	–
Momento de inercia	oz·in·s ²	0.0025	–

Tabla 3.5: Secuencia de conmutación del motor utilizado. Las variables H_x son las salidas de los SEH y las variables I_x son las magnitudes de las corrientes deseadas.

H_a	H_b	H_c	i_a	i_b	i_c
1	0	1	$-I_p$	I_p	0
1	0	0	$-I_p$	0	I_p
1	1	0	0	$-I_p$	I_p
0	1	0	I_p	$-I_p$	0
0	1	1	I_p	0	$-I_p$
0	0	1	0	I_p	$-I_p$

Figura 3.5: Control escalar de un motor BLDC.

estacionario,

$$\begin{aligned} V_p &\approx E_p \\ \Lambda &\propto \frac{V_p}{\omega_r}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

La relación de voltaje inducido y velocidad también está presente en (2.24), por lo que la constante de fuerza contraelectromotriz es un buen candidato para el valor constante que debe tener el flujo:

$$\Lambda \approx k_v \propto \frac{V_p}{\omega_e} \quad (3.3)$$

Se implementó el controlador con estas consideraciones a partir de una velocidad mecánica deseada ω_r^* . La figura 3.5 muestra el diagrama a bloques simplificado del control escalar. La velocidad deseada se convierte a velocidad en grados eléctricos y se multiplica por la constante de fuerza contraelectromotriz para obtener V_p^* de acuerdo con (3.3). La forma de onda de los voltajes deseados está dada por las reglas de conmutación de la tabla 3.5, que están representadas con el bloque H/V, el cual se encarga de decodificar las señales de los SEH y generar las formas de onda deseadas $\mathbf{v}^*$. La posición angular del motor es realimentada a este bloque para producir los disparos en los instantes apropiados.

Este esquema de control, junto con el método de arranque por prelocalización y el algoritmo de reconstrucción de $\mathcal{H}_a$, se utilizó para realizar todas las pruebas al motor BLDC en vacío, para identificación utilizando mínimos cuadrados y la validación de resultados.

4. Método de mínimos cuadrados recursivos con factor de olvido

4.1. El criterio de mínimos cuadrados

Supongamos que la información disponible de un sistema consiste únicamente en datos históricos. Esto conduce a representar al sistema en *tiempo discreto*, debido a que los datos observados son recabados por muestreo con un periodo T . Tener una colección de datos que representen un sistema sugiere la posibilidad de tratarlos desde un punto de vista estadístico, en el que las variables de interés o salidas del sistema y puedan predecirse utilizando información de variables φ . Estas dos variables estadísticas se relacionan a través de coeficientes denotados por ϑ a través de la ecuación

$$y(k) = \vartheta^T \varphi(k) = \varphi^T(k) \vartheta, \quad (4.1)$$

donde k es el índice que representa la muestra en el instante kT .

Un modelo de la forma dada por (4.1) se conoce como regresión lineal, por lo que el vector φ se conoce como *vector de regresión* o *regresor*. Este vector contiene información pasada del sistema y está dado por

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(k-1) \\ y(k-2) \\ \vdots \\ y(k-n) \\ u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(k-m) \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

donde u contiene los valores de las entradas al sistema, y n y m son el número de muestras de salida y entrada, respectivamente, necesarias para reconstruir en tiempo discreto la dinámica del sistema [34]. El tamaño del vector φ está relacionado con los coeficientes ϑ presentes en el modelo [16, 17, 34]. En ocasiones no se tiene conocimiento de estos coeficientes que relacionan las salidas con los regresores, por lo tanto en el modelo (4.1) se consideran como parámetros a estimar. Por esta razón ϑ se conoce como *vector de parámetros*.

El no disponer de ϑ hace que la ecuación (4.1) represente un conjunto de modelos, en el que el más apropiado se determina a través de métodos de estimación. Un modelo «bueno» es

aquel que produce errores de predicción pequeños cuando se le compara con datos medidos. Entre los métodos más utilizados para determinar o estimar los valores de ϑ , el criterio de mínimos cuadrados ha demostrado arrojar excelentes resultados al implementarse [15–17]. Este método se detallará en los párrafos siguientes.

Sea $\hat{y}(k)$ un modelo que busca reproducir las variables medidas $y(k)$. Si definimos el error entre el sistema real y el modelo como

$$\varepsilon(k, \vartheta) = y(k) - \hat{y}(k), \quad (4.3)$$

con

$$\hat{y}(k) = \hat{\vartheta}^T \varphi(k), \quad (4.4)$$

el criterio de mínimos cuadrados se puede expresar a través de la suma de errores cuadrados como sigue:

$$\mathcal{J}(\hat{\vartheta}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \varepsilon(k, \hat{\vartheta})^2, \quad (4.5)$$

donde ε representa la diferencia entre los datos generados por el modelo identificado y los datos reales medidos del proceso y N es el número de mediciones disponibles. A partir de (4.5), el vector $\hat{\vartheta}$ que minimiza a $\mathcal{J}$ es la estimación de mínimos cuadrados. Debido a que (4.5) es una función cuadrática en $\hat{\vartheta}$, puede ser minimizada analíticamente derivando respecto al vector de parámetros e igualando a cero:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\vartheta}} \mathcal{J}(\hat{\vartheta}) = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[\left(y(k) - \hat{\vartheta}^T \varphi(k) \right) \varphi(k) \right] = 0. \quad (4.6)$$

Para que se cumpla la igualdad anterior para todo k , $\varepsilon(k, \vartheta)$ o $\varphi(k)$ deben ser idénticamente cero. Sin embargo, hacer $\varphi(k) = 0$ implica hacer cero la información de entrada y salida, lo cual lleva a la solución trivial. Por lo tanto, se requiere que

$$-\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(y(k) - \hat{\vartheta}^T \varphi(k) \right) = 0 \quad (4.7)$$

y expandiendo la sumatoria se llega a

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) = \hat{\vartheta}^T \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \right], \quad (4.8)$$

donde se extrajo $\hat{\vartheta}^T$ de la suma. Realizando las operaciones necesarias para invertir el vector del lado derecho de (4.8), el vector de parámetros que minimiza (4.5) es

$$\hat{\vartheta} = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) y(k), \quad (4.9)$$

asumiendo que la inversa del primer término del lado derecho exista.

4.1.1. Ruido en la estimación

La validez de este método radica en la forma del modelo del sistema $\hat{y}$. En la realidad, el vector regresor φ , compuesto por la información de entrada y salida, está contaminado de perturbaciones y ruidos en mediciones. Estas pueden concentrarse en un término aditivo ϖ actuando en y :

$$y(k) = \vartheta^T \varphi(k) + \varpi(k). \quad (4.10)$$

Sustituyendo esta ecuación en (4.9) se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta} &= \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) (\vartheta^T \varphi(k) + \varpi(k)) \right] \\ &= \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \vartheta + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varpi(k) \right] \\ &= \vartheta + \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varpi(k) \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Para que la estimación converja al valor real $\hat{\vartheta} \rightarrow \vartheta$ cuando $N \rightarrow \infty$ se debe cumplir que el valor esperado de la matriz de covarianza [16, 34]

$$\langle \varphi(k) \varphi^T(k) \rangle^{-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \quad (4.12)$$

sea no singular y que

$$\langle \varphi(k) \varpi(k) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varpi(k) = 0, \quad (4.13)$$

donde el símbolo $\langle x \rangle$ representa el valor esperado de x . La ecuación (4.10) depende de $\varphi(k)$ y de $\varpi(k)$. A su vez, el vector de regresión $\varphi(k)$ depende de $[y(k-1), y(k-2), \dots]$ y por lo tanto también de $[\varpi(k-1), \varpi(k-2), \dots]$. Entonces, la ecuación (4.13) se puede reescribir como

$$\langle \varpi(k-1) \varpi(k) \rangle = 0. \quad (4.14)$$

Esta última ecuación representa el valor esperado del ruido, y éste es igual a cero cuando ϖ tiene media cero y está descorrelacionado, es decir, cuando el ruido es ruido blanco o gaussiano [34]. De lo contrario, la estimación se encontrará polarizada a un valor distinto del real. Si el ruido no es blanco se representa a través del modelo autorregresivo de media móvil

$$\varpi(k) = \nu(k) + c\nu(k-1), \quad (4.15)$$

donde ν es un ruido gaussiano, c una constante y el valor esperado (4.14) está dado por

$$\begin{aligned} \langle \varpi(k-1) \varpi(k) \rangle &= \langle (\nu(k-1) + c\nu(k-2)) (\nu(k) + c\nu(k-1)) \rangle \\ &= \langle \nu(k-1) \nu(k) \rangle + \langle c\nu^2(k-1) \rangle \\ &\quad + \langle c\nu(k-2) \nu(k) \rangle + \langle c^2 \nu(k-2) \nu(k-1) \rangle \\ &= \langle c\nu^2(k-1) \rangle = c\sigma_\nu^2, \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde σ_ν^2 es la varianza de ν . Esto implica que el vector de parámetros estimado estará polarizado con una dispersión $\sigma_{\hat{\vartheta}} \geq \sigma_\nu$ [34].

4.2. Mínimos cuadrados ponderados y recursivos

En la ecuación (4.9) todas las observaciones tienen asignado el mismo peso. Cuando se requiere asignar un peso distinto a cada observación, el criterio cuadrático (4.5) puede escribirse como

$$\mathcal{J}(\hat{\vartheta}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Lambda(N, k) \left[y(k) - \hat{\vartheta}^T \varphi(k) \right]^2, \quad (4.17)$$

donde $\Lambda(N, k)$ es una función de ponderación. Minimizando (4.17) con respecto a $\hat{\vartheta}$, el vector de parámetros estimados es

$$\hat{\vartheta} = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Lambda(N, k) \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Lambda(N, k) \varphi(k) y(k). \quad (4.18)$$

En ocasiones es necesario tener un modelo del sistema en línea. Este modelo debe operar de manera que con la información de una muestra sea posible realizar los cálculos en un intervalo de muestreo. Las técnicas que cumplen con este requerimiento son llamadas técnicas recursivas de identificación, dado que las mediciones de entrada y salida son procesadas conforme están disponibles.

Para el caso del algoritmo de mínimos cuadrados ponderados recursivos, supongamos que la función de ponderación tiene las siguientes propiedades:

$$\Lambda(N, k) = \lambda(N) \Lambda(N-1, k), \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (4.19)$$

$$\Lambda(N, N) = 1. \quad (4.20)$$

En (4.19) se impone la recursividad a la función de ponderación, dado que cada Λ depende de una constante de peso λ y del valor de Λ correspondiente a la muestra anterior. Así, (4.19) puede expresarse como

$$\Lambda(N, k) = \prod_{j=1}^N \lambda(j), \quad (4.21)$$

Para simplificar la notación y sustituyendo (4.21) en (4.18), sean

$$\tilde{F}_k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \prod_{j=1}^N \lambda(j) \varphi(k) \varphi^T(k) \quad \text{y} \quad f_k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \prod_{j=1}^N \lambda(j) \varphi(k) y(k), \quad (4.22)$$

de forma que el vector de parámetros resulta

$$\hat{\vartheta}_k = \tilde{F}_k^{-1} f_k, \quad (4.23)$$

donde el subíndice k indica dependencia en k . Nótese que en este caso $\hat{\vartheta}$ también cuenta con un índice ya que se busca que se actualice en cada iteración. Con la selección de la función de ponderación (4.21), las expresiones en (4.22) se pueden reescribir como

$$\tilde{F}_k = \lambda_k \tilde{F}_{k-1} + \varphi_k \varphi_k^T \quad \text{y} \quad f_k = \lambda_k f_{k-1} + \varphi_k y_k. \quad (4.24)$$

Sustituyendo (4.24) en (4.23) y simplificando resulta en

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}(k) &= \tilde{F}_k^{-1} [\lambda_k f_{k-1} + \varphi_k y_k] \\ &= \tilde{F}_k^{-1} \left\{ \lambda_k \left[\tilde{F}_{k-1} \hat{\vartheta}_{k-1} \right] + \varphi_k y_k \right\} \\ &= \hat{\vartheta}_{k-1} - \tilde{F}_k^{-1} \varphi_k \left[y_k - \varphi_k^T \hat{\vartheta}_{k-1} \right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

El problema de identificación se reduce ahora a encontrar la inversa de la matriz $\tilde{F}_k$. Haciendo $A = \lambda_k \tilde{F}_{k-1}$, $U = V^T = \varphi_k$ y $C = 1$, se observa que $\tilde{F}_k$ tiene una estructura de la forma

$$X = A + UCV, \quad (4.26)$$

entonces, haciendo $F_k = \tilde{F}_k^{-1}$ y utilizando la identidad de Woodbury para invertir matrices [16, 17, 35].

$$F_k = \frac{1}{\lambda_k} \left[F_{k-1} - \frac{F_{k-1} \varphi_k \varphi_k^T F_{k-1}}{\lambda_k + \varphi_k^T F_{k-1} \varphi_k} \right], \quad (4.27)$$

y definiendo el producto $F_k^{-1} \varphi_k \equiv L_k$ presente en (4.25)

$$\begin{aligned} L_k &= \frac{1}{\lambda_k} F_{k-1} \varphi_k - \frac{1}{\lambda_k} \frac{F_{k-1} \varphi_k \varphi_k^T F_{k-1}}{\lambda_k + \varphi_k^T F_{k-1} \varphi_k} \varphi_k \\ &= \frac{F_{k-1} \varphi_k [\lambda_k + \varphi_k^T F_{k-1} \varphi_k] - F_{k-1} \varphi_k \varphi_k^T F_{k-1}}{\lambda_k [\lambda_k + \varphi_k^T F_{k-1} \varphi_k]} \\ &= \frac{F_{k-1} \varphi_k \lambda_k + F_{k-1} \varphi_k \varphi_k^T F_{k-1} \varphi_k - F_{k-1} \varphi_k \varphi_k^T F_{k-1}}{\lambda_k [\lambda_k + \varphi_k^T F_{k-1} \varphi_k]} \\ &= \frac{F_{k-1} \varphi_k}{\lambda_k + \varphi_k^T F_{k-1} \varphi_k}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Sustituyendo en (4.25) y seleccionando a $\lambda(k) = \lambda$ constante para todas las muestras con la condición de que $0 \leq \lambda \leq 1$, el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos se reduce a:

$$\hat{\vartheta}(k) = \hat{\vartheta}(k-1) + L(k) e(k) \quad (4.29a)$$

$$e(k) = [\omega_r(k) - \varphi^T(k) \hat{\vartheta}(k-1)] \quad (4.29b)$$

$$L(k) = \frac{F(k-1) \varphi(k)}{\lambda + \varphi^T(k) F(k-1) \varphi(k)} \quad (4.29c)$$

$$F(k) = \frac{1}{\lambda} \left[F(k-1) - \frac{F(k-1) \varphi(k) \varphi^T(k) F(k-1)}{\lambda - \varphi^T(k) F(k-1) \varphi(k)} \right]. \quad (4.29d)$$

Esta selección de λ garantiza que las observaciones más viejas tengan menos peso. Cuando la función de peso cumple estas condiciones el algoritmo se conoce como método de mínimos cuadrados recursivos con *factor de olvido* (MCRFO) [16, 34].

4.3. MCRFO aplicado a un sistema lineal de primer orden

Sea el sistema lineal de primer orden

$$a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u, \quad (4.30)$$

cuya función de transferencia está dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0}. \quad (4.31)$$

Con esta estructura se pueden definir la ganancia en estado estacionario K y la constante de tiempo τ como

$$K = \frac{b_0}{a_0} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{a_1}{a_0}, \quad (4.32)$$

de manera que (4.31) puede reescribirse como

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}. \quad (4.33)$$

Esta función de transferencia puede expresarse en tiempo discreto a través de la transformada $\mathcal{Z}$ incluyendo al Retenedor de Orden Cero (ROC) [34]:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}_T. \quad (4.34)$$

La variable T es el periodo de muestreo de las señales y y u . La función de transferencia en tiempo discreto de (4.30) se determina sustituyendo (4.31) en (4.34):

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{K}{s(\tau s + 1)} \right\}_T \\ &= K(1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{\frac{1}{\tau}}{s(s + \frac{1}{\tau})} \right\}_T \\ &= K(1 - z^{-1}) \left[\frac{z^{-1}(1 - e^{-T/\tau})}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T/\tau}z^{-1})} \right] \\ &= K \frac{(1 - e^{-T/\tau})z^{-1}}{1 - e^{-T/\tau}z^{-1}}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Expresando (4.35) en términos de las variables de entrada y salida se llega a

$$(1 - e^{-T/\tau}z^{-1})Y(z) = K(1 - e^{-T/\tau})z^{-1}U(z), \quad (4.36)$$

de donde se puede reconstruir la ecuación de diferencias como

$$\begin{aligned} y(k) - e^{-T/\tau}y(k-1) &= K(1 - e^{-T/\tau})u(k-1), \\ y(k) &= e^{-T/\tau}y(k-1) + K(1 - e^{-T/\tau})u(k-1). \end{aligned} \quad (4.37)$$

La ecuación (4.37) tiene la misma estructura que (4.1) si se consideran los vectores

$$\vartheta = [\vartheta_1 \quad \vartheta_2]^T = \begin{bmatrix} e^{-T/\tau} & K(1 - e^{-T/\tau}) \end{bmatrix}^T \quad \text{y} \quad (4.38)$$

$$\varphi(k) = [y(k-1) \quad u(k-1)]^T. \quad (4.39)$$

Entonces, los parámetros del sistema discreto pueden estimarse utilizando las ecuaciones (4.29), y los parámetros en tiempo continuo están dados por

$$\hat{\tau} = -\frac{T}{\ln(\hat{\vartheta}_1)} \quad \text{y} \quad \hat{K} = \frac{\hat{\vartheta}_2}{1 - \hat{\vartheta}_1}, \quad (4.40)$$

donde el símbolo $\hat{\vartheta}_1$ y $\hat{\vartheta}_2$ son los estimados de ϑ_1 y ϑ_2 , respectivamente.

5. Metodología experimental

Los parámetros del modelo se determinaron utilizando los métodos descritos en la Sección 1.1.2 con algunas modificaciones para aplicarlos al problema del motor BLDC. La determinación de la resistencia e inductancia por fase se realizó a través del análisis transitorio de la prueba a rotor bloqueado, la constante de fuerza contraelectromotriz se determinó a partir de la prueba como generador en vacío, el coeficiente de amortiguamiento y el momento de inercia se obtuvieron del análisis transitorio de la prueba como motor sin carga. Para la determinación de parámetros utilizando el método de MRFO se realizó una prueba en vacío con un perfil de velocidad variable. Esta misma prueba se utilizó para la validación numérica de los resultados.

En esta sección se describen las pruebas realizadas y cómo determinar los parámetros a partir de estas, así como la configuración de la plataforma experimental.

5.1. Prueba a rotor bloqueado: obtención de la resistencia e inductancia

Las pruebas en las que se alimenta a la máquina a bajo voltaje frenando la flecha del rotor hasta alcanzar la corriente nominal se conocen como pruebas a rotor bloqueado [3, 13]. Los voltajes de alimentación de un motor BLDC deben tener la forma que garantice las corrientes dadas por (2.31) y su frecuencia está determinada por la posición del rotor. También se requiere que cada fase sea alimentada en la secuencia adecuada para poder girar. Esto conlleva una complicación en el sentido de que no se pueden generar los voltajes a alguna frecuencia deseada si la posición del rotor no está cambiando. Por esta razón se propone una variante de esta prueba para determinar las resistencias e inductancias de la máquina a partir de su respuesta transitoria, adaptada de las pruebas realizadas en motores de CD [15, 26]. Si el rotor no cambia su posición, el inversor genera un voltaje constante a dos fases distintas, lo cual obedece la ecuación (2.38) de voltaje del modo de conmutación en 120° con la velocidad igual a cero. Este modo de operación es equivalente al circuito de la figura 5.1a. La prueba a rotor bloqueado, sin un comando de conmutación, se convierte en una prueba de cortocircuito; de esta forma al aplicar un voltaje tipo escalón, la respuesta transitoria puede obtenerse de las lecturas de los sensores de voltaje y corriente. Particularmente, la máquina BLDC con el rotor bloqueado es un circuito RL—el cual es un sistema de primer orden— cuya dinámica está determinada por la ecuación (2.38) con $\omega_r \equiv 0$

$$\mathbf{v}_L = r_t \mathbf{i}(t) + \ell_t \frac{d}{dt} \mathbf{i}(t). \quad (5.1)$$

(a) Medición de la resistencia a partir de la respuesta transitoria. (b) Medición directa de la resistencia de los devanados de estator.

Figura 5.1: Circuitos utilizados en las pruebas de medición de resistencia.

Si se alimentan dos fases x y y con un voltaje constante V_{xy} , esta ecuación tiene una solución analítica dada por

$$i_x(t) = -i_y(t) = K_e V_{xy} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_e}\right) \right) \quad (5.2)$$

donde K_e es la ganancia en estado estacionario y τ_e la constante de tiempo, de acuerdo con (4.32), están dadas por:

$$K_e = \frac{1}{r_t} \quad \text{y} \quad \tau_e = \frac{\ell_t}{r_t}. \quad (5.3)$$

Se realizó la prueba de cortocircuito aplicando distintos voltajes a las terminales del motor alternando las fases. Los sensores de voltaje y corriente se conectaron de acuerdo a la figura 5.1a. En cada prueba se obtuvieron: el voltaje en estado estacionario V_k , la corriente en estado estacionario I_k y el tiempo de establecimiento $t_{s,k}$. El índice k indica que son variables medidas durante la k -ésima prueba. El voltaje y la corriente se calcularon como el valor promedio de las lecturas del sensor una vez que se alcanzó el estado estacionario:

$$V_k = \bar{V}_{xy} \quad \text{y} \quad I_k = \bar{I}_x. \quad (5.4)$$

Así, la resistencia y la constante de tiempo de la k -ésima prueba están dados por

$$r_k = \frac{\bar{V}_k}{\bar{I}_k}, \quad \text{y} \quad \tau_{e,k} = \frac{t_{s,k}}{4}. \quad (5.5)$$

El factor de $1/4$ en la expresión de la constante de tiempo surge del argumento de la exponencial de la solución (5.2), donde se asume que cuando $t = 4\tau_e$ la corriente ya alcanzó el 98 % de su valor en estado estacionario [34]. La inductancia por fase de la k -ésima prueba está dada por

$$\ell_k = \tau_{e,k} r_k. \quad (5.6)$$

Utilizando el teorema del límite central [36], la resistencia $\hat{r}_t$ y la inductancia $\hat{\ell}_t$ estimadas están dada por

$$\hat{r}_t = \bar{r} \pm \delta r_t \quad \text{y} \quad \hat{\ell}_t = \bar{\ell} \pm \delta \ell_t. \quad (5.7)$$

En la ecuación (5.7), las cantidades con barra $\bar{x}$ son el promedio tomado sobre m pruebas y las incertidumbres δx son el error estándar de las mediciones, dados por:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k, \quad \delta x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{m}} \quad \text{y} \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (x_k - \bar{x})^2}. \quad (5.8)$$

Figura 5.2: Circuito armado para la prueba como generador en circuito abierto

5.2. Medición directa de resistencias

La resistencia de los devanados también puede medirse directamente. Para realizar las mediciones de resistencia se utilizó el circuito mostrado en la figura 5.1b, donde una de las fases se conecta directamente a los instrumentos de medición o fuente y las otras dos se cortocircuitan. La razón de elegir esta configuración en las mediciones se debe a que no se tiene acceso al común de los devanados de estator, por lo que las mediciones por fase no son posibles. Se armó el circuito mostrado en la figura 5.1b y las mediciones se hicieron conectando el óhmetro a las terminales del estator del motor. En el diagrama, las resistencias con subíndices x , y y z pueden representar las fases a , b o c , según sea el caso. El valor de la resistencia medida r_m es la resistencia equivalente vista desde el óhmetro, que resulta de sumar a r_x el paralelo entre r_y y r_z . Su valor es

$$r_m = r_x + \frac{r_y r_z}{r_y + r_z}. \quad (5.9)$$

Se realizaron tres pruebas, en cada una de las cuales se cambió el orden de las fases ($x = a, b, c$), de donde resulta el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} r_a + \frac{r_b r_c}{r_b + r_c} &= r_{m1} \\ r_b + \frac{r_a r_c}{r_a + r_c} &= r_{m2} \\ r_c + \frac{r_a r_b}{r_a + r_b} &= r_{m3}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

cuya solución arroja los valores de resistencia en cada fase.

5.3. Prueba como generador en vacío: obtención de la constante de fuerza contraelectromotriz

Si se opera la máquina como generador, la ecuación (2.34a) se puede reescribir como

$$k_v \left(\frac{P}{2} \right) \omega_r(t) \mathbf{f}(\theta_r) = \mathbf{v}(t) + r \mathbf{i}(t) + \ell \frac{d}{dt} \mathbf{i}(t). \quad (5.11)$$

La constante de fuerza contraelectromotriz k_v se puede determinar realizando una en vacío. Manteniendo las terminales de la máquina abiertas, la corriente de armadura es igual a cero, de forma que el voltaje terminal medido es igual al voltaje generado.

Se acopló un motor de CD con regulador de velocidad a la flecha del motor BLDC. Los voltajes del estator se midieron utilizando los sensores de voltaje de la plataforma experimental. El montaje de esta prueba se muestra en la figura 5.2.

La magnitud de los voltajes inducidos están dados por

$$\mathbf{V}_L(t) = \mathbf{E}_L(t) = k_v \left(\frac{P}{2} \right) \omega_r(t) \mathbf{F}_L(\theta_r), \quad (5.12)$$

donde $\mathbf{V}_L$, $\mathbf{E}_L$ y $\mathbf{F}_L$ son los valores pico medidos entre fases. Asumiendo formas de onda ideales, las trapezoidales de línea tienen una magnitud igual a 2. Sea $\bar{\Omega}_{r,k}$ la velocidad promedio medida en estado estacionario y $\bar{E}_k$ el voltaje en vacío promedio medido entre dos fases. La constante de fuerza contraelectromotriz $k_{v,k}$ correspondiente a la k -ésima prueba está dada por

$$k_{v,k} = \left(\frac{1}{P} \right) \frac{\bar{E}_k}{\bar{\Omega}_{r,k}}. \quad (5.13)$$

La estimación de fuerza contraelectromotriz está dada por

$$\hat{k}_v = \bar{k}_v \pm \delta k_v, \quad (5.14)$$

donde, $\bar{k}_v$ es el promedio sobre m pruebas y δk_v es el error estándar.

5.4. Prueba de motor sin carga: obtención del coeficiente de amortiguamiento y momento de inercia

A partir de la prueba operando al motor sin carga se pueden extraer los parámetros de la ecuación mecánica (2.34b) midiendo la velocidad, reconstruyendo el par aplicado y tomando en cuenta que el par de carga $\tau_L(t) = 0$. El par electromagnético se determinó sustituyendo la magnitud de la corriente medida en la ecuación de par ideal dada por (2.32). El par electromagnético se aproximó como una entrada constante, sin embargo, su dinámica está asociada a la dinámica de las corrientes, por lo que no es una entrada tipo escalón ideal. La razón de que esta aproximación sea válida es debido a que la constante de tiempo eléctrica de motores BLDC es típicamente mucho menor a la constante de tiempo mecánica, por lo que el polo del subsistema eléctrico es sumamente no dominante.

Para determinar los parámetros correspondientes a la ecuación mecánica (2.34b) se realizaron pruebas de arranque en vacío a distintas velocidades. El arranque del motor se realizó utilizando el método de prelocalización [30], alimentando las fases correspondientes a $H_b = 1$ y $H_c = 1$. La operación a distintas velocidades se hizo utilizando el control escalar del motor BLDC descrito en la sección 3.2.2. En condiciones de operación sin carga la dinámica del motor está dada por la ecuación

$$J \frac{d}{dt} \omega_r(t) + b \omega_r(t) = \tau_d(t). \quad (5.15)$$

Asumiendo un par de entrada constante $\tau_d(t) = T_d$, la ecuación (5.15) tiene solución analítica dada por

$$\omega_r(t) = K_m T_d \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_m} \right) \right), \quad (5.16)$$

donde K_m es la ganancia en estado estacionario y τ_m la constante de tiempo, a su vez definidos por

$$K_m = \frac{1}{b} \quad \text{y} \quad \tau_m = \frac{J}{b}. \quad (5.17)$$

Al igual que en la prueba a rotor bloqueado se puede obtener de la k -ésima prueba la ganancia en estado estacionario y la constante de tiempo a partir de los valores promedio de par $\bar{T}_{d,k}$ y velocidad $\bar{\Omega}_{r,k}$

$$b_k = \frac{\bar{T}_{d,k}}{\bar{\Omega}_{r,k}} \quad \text{y} \quad \tau_{m,k} = \frac{t_{s,k}}{4}, \quad (5.18)$$

y el momento de inercia está dado por

$$J_k = \tau_{m,k} b_k. \quad (5.19)$$

Para el cálculo de la constante de tiempo se utilizó el mismo criterio mencionado en la Secc. 5.1. La estimación de estos parámetros, utilizando las definiciones dadas en (5.8), es

$$\hat{b} = \bar{b} \pm \delta b \quad \text{y} \quad \hat{J} = \bar{J} \pm \delta J. \quad (5.20)$$

En todas las pruebas realizadas se determinó el par electromagnético ideal utilizando (2.32) a partir de las mediciones de corriente.

5.5. Identificación de parámetros utilizando el método de mínimos cuadrados recursivos con factor de olvido

El método de mínimos cuadrados para identificación en un sistema dinámico requiere de mediciones tanto de la entrada. Deben ser distintas de cero y la entrada debe satisfacer la condición de excitación persistente para tener un desempeño óptimo del algoritmo [14, 16, 24]. Esto implica excitar todos los modos del sistema para poder ser identificados. Esto es un requerimiento muy complejo desde el punto de vista práctico debido a que a bajas frecuencias el motor se ve significativamente afectado por efectos que no se están modelando, como el par dentado y el par producido por la conmutación electrónica, y a altas frecuencias se requiere de incrementar la frecuencia de muestreo y la velocidad de los procesadores durante la adquisición de datos.

Por estas razones se implementó el algoritmo utilizando una señal de entrada que mantiene transitorios a intervalos constantes más no excita todos los modos del sistema. En el algoritmo se utilizó el par calculado como entrada y la velocidad mecánica como salida para la identificación de los parámetros correspondientes a la ecuación mecánica del modelo, por lo que se aproxima la dinámica de la velocidad con un sistema de primer orden cuya función de transferencia y ecuación de diferencias son

$$G_m(z) = K_m \frac{(1 - \exp^{-T/\tau_m}) z^{-1}}{1 - \exp(-T/\tau_m) z^{-1}}, \quad (5.21)$$

$$\omega_r(k) = [\vartheta_1 \quad \vartheta_2] \begin{bmatrix} \omega_r(k-1) \\ \tau_d(k-1) \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

con ϑ_1 , ϑ_2 , K_m y τ_m definidos en (4.39) y (5.17). En las pruebas de estimación se asumió que el ruido debido a los sensores es ruido blanco: media cero, esperanza cero y descorrelacionado [34].

El algoritmo se programó en MATLAB® como una función llamada `mcrfo.m`. Los argumentos de entrada de esta función son los vectores de datos de entrada y salida (**Entrada** y **Salida**), el vector de parámetros iniciales ϑ_0 (**ParamsIni**) y el factor de olvido λ (**Olvido**). La función regresa el vector de parámetros estimados calculado con (4.29a) (**Params**) y el error (4.29b) (**Error**).

Código 5.1: Algoritmo de mínimos cuadrados recursivos con factor de olvido programado en MATLAB®

```

1 function [Params,Error] = mcrfo(Entrada,Salida,ParamsIni,Olvido)
2
3 N=length(Salida);           % Número de muestras
4
5 % Inicialización del algoritmo
6 F=[40 0;0 50];             % Matriz de correlación
7 Params=zeros(2,N);          % Vector de vectores de parámetros
8 Error=zeros(2,N);           % Vector de errores
9 Params(:,1)=ParamsIni;       % Asignación de parámetros iniciales
10
11 % Algoritmo de mínimos cuadrados recursivos con factor de olvido
12 for j=2:N
13     phi=[Salida(j-1) Entrada(j-1)]'; % Vector regresor
14     Error(j)=Salida(j)-Params(:,j-1)'*phi; % Error planta-modelo
15
16     % Ecuación de actualización de parámetros (4.29a)
17     Params(:,j)=Params(:,j-1)+F*phi*Error(j)/(Olvido+phi'*F*phi);
18
19     % Ecuación de actualización de matriz de correlación
20     F=(F-(F*(phi*phi')*F)/(Olvido+phi'*F*phi))/Olvido;
21 end

```

6. Resultados y validación

Este capítulo presenta los resultados de las pruebas experimentales para la determinación de parámetros del modelo (2.34) del motor BLDC a través del análisis de respuestas transitorias y el algoritmo MCRFO. Además se presenta la validación de los parámetros, comparando con los proporcionados con el fabricante. También se validan estos parámetros comparando los resultados experimentales contra los de simulación cuando el sistema opera con un control en lazo abierto y en lazo cerrado.

6.1. Resultados de las pruebas de respuesta transitoria

6.1.1. Medición directa de las resistencias del estator

Las resistencias del estator se midieron utilizando el circuito de la figura 5.1b. Para las tres fases el valor medido fue $r_m = 0.8 \pm 0.0072 \Omega$, por lo que no se aprecia asimetría debido a resolución del instrumento utilizado. Tomando $r_{m1} = r_{m2} = r_{m3} = r_m$, la ecuación (5.9) se reduce a

$$r = \frac{2}{3}r_m. \quad (6.1)$$

Los valores obtenidos en los tres casos se muestran en la tabla 6.1, donde se indica en la primer columna la fase que no se cortocircuitó.

6.1.2. Identificación de la resistencia e inductancia del estator

Se realizó la prueba a rotor bloqueado con el arreglo de la figura 5.1a. Los voltajes de CD aplicados variaron entre ± 5.5 V. Esta prueba estuvo limitada por la precisión de la fuente utilizada y por la corriente nominal del motor. Se realizaron seis pruebas por fase, obteniéndose los siguientes parámetros:

$$\hat{r}_t = 1.5825 \pm 0.0018 \Omega \quad \text{y} \quad \hat{\ell}_t = 2.0369 \pm 0.2640 \text{ mH}, \quad (6.2)$$

Tabla 6.1: Resistencias equivalentes medidas y por fase (calculadas)

x	$r_m, [\Omega]$	$r_x, [\Omega]$
a	0.8 ± 0.0072	0.5333 ± 0.0048
b	0.8 ± 0.0072	0.5333 ± 0.0048
c	0.8 ± 0.0072	0.5333 ± 0.0048

Figura 6.1: Resultados de la prueba a rotor bloqueado a distintos niveles de voltaje. Se muestran las corrientes medidas (líneas continuas) y las corrientes calculadas con los parámetros estimados (5.2) (líneas punteadas). Cada resultado muestra una región sombreada acotada por los valores de incertidumbre en los parámetros.

utilizando el procedimiento descrito en la Secc. 5.1. La figura 6.1 muestra las mediciones de corriente para distintos voltajes. En la gráfica se muestran también las curvas obtenidas de sustituir los parámetros de (6.2) en (5.2) (la solución analítica de la prueba) en líneas punteadas. El área sombreada indica la región de incertidumbre de los parámetros obtenidos; se observa que la ganancia en estado estacionario dada por la ecuación 5.3, la cual está determinada por el valor de resistencia, tiene una incertidumbre de 0.12 %, sin embargo, el tiempo de establecimiento tiene una incertidumbre de 13.07 %, el cual se ve reflejado en el área sombreada de la figura 6.1.

Durante el transitorio en esta prueba se tiene una discrepancia entre la corriente medida y la corriente calculada. Las formas de la curva difieren debido a que se modeló el motor como un circuito lineal de primer orden.

Es de interés abordar la discrepancia entre la resistencia estimada utilizando los resultados de la prueba de cortocircuito y los resultados de la medición directa. Esta se debe a que la resistencia obtenida de la prueba a rotor bloqueado la resistencia efectiva del sistema, que incluye la resistencia de los conductores que van del inversor a los sensores de corriente y los que van de estos a las terminales del motor. La medición directa de la resistencia de estos conductores da un valor de $r_w = 0.4 \pm 0.0038 \Omega$, por lo que la resistencia estimada vista desde las terminales del motor es

$$\hat{r}_t = 1.18 \pm 0.0056 \Omega. \quad (6.3)$$

6.1.3. Identificación de la constante de fuerza contraelectromotriz

El primo-motor utilizado para la prueba como generador en vacío descrita en la Secc. 5.3 es un motor de CD, cuyo rango de velocidad está entre 12 a 22 rad s^{-1} . La gráfica 6.2 muestra las mediciones de voltaje obtenidas e_{xy} divididas sobre la velocidad promedio $\bar{\omega}_e$ de la prueba,

Figura 6.2: Funciones de forma de fuerza contraelectromotriz para seis velocidades distintas. Las líneas punteadas indican la magnitud $2k_v$.

es decir, se muestran las funciones

$$\frac{e_{xy}}{\omega_e} = k_v f_{xy}. \quad (6.4)$$

Se puede observar para todas las velocidades se obtienen curvas de la misma magnitud, igual a $2k_v$ como se muestra en la figura 2.4. Para cada prueba, se obtuvieron los valores pico de los voltajes generados y se determinaron constantes de fuerza contraelectromotriz de acuerdo con la ecuación 5.13. La estimación de este parámetro con base en el procedimiento descrito en la Secc. 5.3 es

$$\hat{k}_v = 23.9940 \pm 0.0377 \text{ mV s rad}^{-1}. \quad (6.5)$$

6.1.4. Identificación del par de fricción estática

Se realizaron pruebas de arranque al motor sin carga en un rango de velocidades desde 50 hasta 400 rad s^{-1} , es decir, velocidades del 8 al 64 % de la velocidad nominal. Esto con base en el procedimiento descrito en la Secc. 5.4. Estas condiciones de operación estuvieron limitadas por la corriente máxima que puede circular por el inversor utilizado.

La figura 6.3 muestra una gráfica de par contra velocidad en estado estacionario. Existe una tendencia lineal entre el par aplicado T_d y la velocidad Ω_r , sin embargo, también se muestra que la ordenada en el origen es distinta de cero. Esto se puede interpretar como una perturbación constante T_f para el rango de velocidades estudiado, lo cual implica que el par de amortiguamiento debe modelarse como

$$\tau_b(t) = b\omega_r(t) + T_f, \quad (6.6)$$

donde T_f representa el par de fricción estática del motor. Del ajuste lineal mostrado en la figura 6.3 se obtiene el valor correspondiente

$$T_f = 6.8043 \text{ mN m}. \quad (6.7)$$

Figura 6.3: Mediciones de par y velocidad para determinar el par de fricción. La línea continua indica el ajuste lineal realizado.

6.1.5. Identificación del coeficiente de amortiguamiento y el momento de inercia

Con la inclusión del par T_f al modelo, la ecuación (5.16) se reescribe como

$$\omega_r(t) = K_m(T_d - T_f) \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right) \right), \quad (6.8)$$

y los parámetros b y J asociados a esta solución resultaron

$$\hat{b} = 305.2632 \pm 3.5033 \mu\text{Ns rad}^{-1} \quad \text{y} \quad \hat{J} = 172.8570 \pm 2.7229 \text{ g cm}^2. \quad (6.9)$$

la figura 6.4 muestra las curvas de velocidad experimentales y la curva obtenida de sustituir los parámetros de (6.9) en (5.16). Al igual que en la prueba de cortocircuito, el área sombreada indica la región de incertidumbre en los parámetros estimados. Se observa una buena correspondencia entre las mediciones experimentales y la aproximación de primer orden del modelo.

6.2. Resultados de la identificación utilizando el método de MCRFO

Con las mediciones de velocidad y la determinación del par electromagnético es posible aproximar al motor como un sistema de primer orden a través de la ecuación (4.33). Para poder hacer uso del algoritmo de mínimos cuadrados es necesario determinar el par electromagnético producido por las corrientes del estator. Con las mediciones de voltaje, corriente y velocidad el par puede determinarse a partir de los voltajes inducidos de línea y las corrientes de línea. Sea τ_e el par calculado con los voltajes inducidos, el cual está dado por

$$\tau_e = \frac{e_{ab}(t)i_{ab}(t) + e_{bc}(t)i_{bc}(t) + e_{ca}(t)i_{ca}(t)}{3\omega_r(t)}, \quad (6.10)$$

para cada par de fases x y y , el voltaje inducido puede obtenerse con:

$$e_{xy}(t) = v_{xy}(t) - r i_{xy}(t) - \ell \frac{d}{dt} i_{xy}(t), \quad (6.11)$$

Figura 6.4: Resultados de la prueba sin carga a distintas velocidades. Se muestran la velocidad medida (líneas continuas) y las velocidades calculadas con los parámetros estimados (líneas punteadas). La región sombreada muestra los intervalos de incertidumbre en los parámetros.

donde $i_{xy} = i_x - i_y$.

Utilizando la definición de $f(\theta_e)$ dada en (2.25), el par también puede calcularse mediante la ecuación

$$\tau_f = k_v \left(\frac{P}{2} \right) (f_a(\theta_e) i_a(t) + f_b(\theta_e) i_b(t) + f_c(t) i_c(t)), \quad (6.12)$$

Es importante mencionar que ambas expresiones representan la misma cantidad—el par desarrollado— y en condiciones ideales $\tau_d = \tau_e = \tau_f$.

El perfil de velocidades utilizado se muestra en la figura 6.5, en el cual se toman en cuenta dos velocidades en el rango medio de operación del motor BLDC bajo estudio.

6.2.1. Par obtenido de las mediciones

Se determinó el par electromagnético utilizando las estimaciones de r y ℓ y las mediciones de voltaje y corriente durante la prueba para la identificación. Debido al ruido, las señales de voltaje y corriente medidas tienen un alto contenido frecuencial, por lo que se aplicó un filtro pasabajas a estas señales. La figura 6.6 muestra el análisis frecuencial de las señales de voltaje y corriente observadas durante los intervalos «rápidos» de la prueba de identificación. Las gráficas superiores corresponden a los sensores de voltaje y las inferiores a los sensores de corriente. Los armónicos principales en todos los casos son

$$\omega_1 = 180\pi \text{ rad s}^{-1}, \quad \omega_5 = 900\pi \text{ rad s}^{-1} \quad \text{y} \quad \omega_7 = 1260\pi \text{ rad s}^{-1}. \quad (6.13)$$

Considerando las magnitudes de estos armónicos, se seleccionó un filtro con las siguientes características:

- filtro digital

Figura 6.5: Perfil de velocidad utilizado para la identificación utilizando el método de MCRFO.

Figura 6.6: Espectro de frecuencias de las señales medidas por los sensores de voltaje y corriente.

Figura 6.7: Diagrama de Bode del filtro pasabajas utilizado sobre las señales de voltaje y corriente.

- ancho de banda de $\omega_B = 1000\pi \text{ rad s}^{-1}$
- atenuación de 60 dB.

El filtro se diseñó utilizando la Signal Processing Toolbox™ de MATLAB® [37]. Es importante mencionar que el ancho de banda del filtro se seleccionó considerando el análisis de armónicos de las señales de voltaje y corriente. El rango de operación del motor está en el rango de $100\pi \text{ rad s}^{-1}$, por lo que las formas de onda se conservan y las componentes de frecuencias mayores a ω_7 , principalmente debidas a la conmutación, se atenúan de manera efectiva. La figura 6.7 muestra el diagrama de Bode del filtro seleccionado y la figura 6.8 muestra el contenido frecuencial de las señales filtradas.

Los resultados se muestran en la figura 6.9. La columna izquierda muestra, de arriba hacia abajo, las mediciones de v_{xy} , i_x , la corriente de línea i_{xy} y el voltaje inducido determinado e_{xy} ; la columna derecha muestra un acercamiento a un periodo de las mismas variables junto con los filtros utilizados para reducir el ruido de la señal. La figura 6.9a muestra el voltaje de alimentación v_{ab} durante toda la prueba (los voltajes bc y ca tienen la misma forma y están desfasados 120°). La magnitud de los voltajes cambia entre 20 y 25 V para las velocidades consideradas. La de la figura 6.9b muestra un periodo de la señal medida con la señal filtrada sobrepuesta. Se puede ver que la señal mantiene la misma forma pero mucho más suave en comparación con la original. La figura 6.9c muestra la corriente i_a medida durante la prueba. Los valores alcanzados durante esta prueba son 0.6 A. El acercamiento a un periodo de la señal mostrado en la figura 6.9d permite ver una discrepancia significativa entre la forma ideal de la corriente (pulsos cuadrados discontinuos) y la corriente real. Sobrepuesta se muestran tanto la señal filtrada y la función trapezoidal reconstruida de la medición de la posición del rotor utilizando (2.25). Se puede observar que los semiciclos positivo y negativo coinciden en ambas funciones. La corriente $i_{ab} = i_a - i_b$ y el voltaje e_{ab} calculado con (6.11) se muestran respectivamente en las figuras 6.9e y 6.9g, y un periodo de las mismas señales en 6.9f y 6.9h; se observa que el filtro no afecta significativamente la señal, debido a que estas cantidades se

Figura 6.8: Espectro de frecuencias de las señales medidas por los sensores de voltaje y corriente filtradas.

calcularon con las señales de voltaje y corriente ya filtradas. A partir de las señales calculadas y utilizando las expresiones (6.10) y (6.12) se determinó el par electromagnético. La figura 6.10 muestra el par τ_e obtenido a partir de los voltajes inducidos y el obtenido de las funciones trapezoidales τ_f . En ambos casos se obtiene una señal con un contenido frecuencial sumamente alto, a pesar de haberse filtrado las señales originales. Esto se debe a la cantidad de armónicos aún presentes en las señales utilizadas en el cálculo.

6.2.2. Configuración del algoritmo

A partir de las mediciones de par y velocidad y la siguiente ecuación de diferencias:

$$\omega_r(k) = e^{-\frac{T}{\tau_m}} \omega_r(k-1) + K_m \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau_m}}\right) \tau_d(k-1),$$

el algoritmo de mínimos cuadrados con factor de olvido de las ecuaciones (4.29) se puede reescribir con el vector de regresión dado por

$$\varphi(k) = [\omega_r(k-1) \quad \tau_d(k-1)]^T, \quad (6.14)$$

y el vector de parámetros a identificar por

$$\vartheta = [\vartheta_1 \quad \vartheta_2]^T = \left[e^{-T/\tau_m} \quad K_m \left(1 - e^{-T/\tau_m}\right) \right]^T. \quad (6.15)$$

El modelo de primer orden asociado es

$$G_m(z) = \frac{\vartheta_2 z^{-1}}{1 - \vartheta_1 z^{-1}}. \quad (6.16)$$

El algoritmo se inicializó utilizando los parámetros determinados en el análisis de las pruebas sin carga utilizando

$$\tau_0 = \frac{\hat{J}}{\hat{b}} \quad \text{y} \quad K_0 = \frac{1}{\hat{b}}, \quad (6.17)$$

Figura 6.9: Voltajes y corrientes utilizados para determinar el voltaje inducido e_{xy} . Se muestra también las curvas resultantes de filtrar las señales medidas y la función trapezoidal reconstruida a partir de la posición del rotor.

Figura 6.10: Par electromagnético obtenido utilizando las ecuaciones (6.10) y (6.12).

donde el subíndice 0 representa los valores de τ_m y K_m en la primera iteración. El periodo de muestreo utilizado en todas las pruebas fue de 125 μ s. La razón de escoger un periodo tan reducido se debe a la necesidad de tener la posición del rotor actualizada para poder realizar la conmutación de forma segura. Así el vector de parámetros inicial ($k = 0$) es

$$\vartheta(0) = \left[\exp\left(-\frac{T}{\tau_0}\right) \quad K_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{T}{\tau_0}\right)\right) \right]^T \quad (6.18)$$

con

$$\tau_1 = \frac{\hat{J}}{\hat{b}} \quad \text{y} \quad K_1 = \frac{1}{\hat{b}}.$$

No existe una estrategia para seleccionar el factor de olvido óptimo para utilizar en el algoritmo. En (4.29d) se puede ver que afecta directamente la matriz de correlación. La selección del factor de olvido requiere de una decisión entre sensibilidad al ruido y habilidad para seguir la trayectoria del parámetro que se está identificando. Un factor de olvido alto es una ganancia que hace que el algoritmo esté alerta ante los cambios en la variable de entrada, pero al mismo tiempo lo vuelve sensible a perturbaciones en la entrada. Por el contrario, un factor de olvido bajo le da menos peso a la información previa pero la velocidad de convergencia se ve afectada. Debido a la cantidad de ruido presente en las señales de entrada y al tipo de prueba se realizaron distintas pruebas y se determinó un factor de olvido $\lambda = 0.92$ como un buen candidato para realizar la identificación. Por lo tanto, las condiciones iniciales seleccionadas son:

$$\lambda = 0.92, \quad T = 125 \mu\text{s} \quad \text{y} \quad \vartheta(0) = [0.9977 \quad 7.2234]^T. \quad (6.19)$$

6.2.3. Estimación utilizando el par sin filtro

La estimación recursiva se muestra en la figura 6.11 con el par determinado a partir de (6.10). La estimación de parámetros se muestra en las figuras 6.11c y 6.11d. Las líneas punteadas en las gráficas indican los valores que se espera obtener durante la identificación. Se puede ver que la estimación no converge a estos valores, lo cual se puede atribuir principalmente a la cantidad de ruido presente en las señales de entrada y salida, el cual produce ruido y polarización en la estimación de acuerdo con (4.16). En particular, el parámetro $\hat{\vartheta}_1$ se encuentra polarizado en valores superiores a 1. La gráfica 6.11b muestra la dinámica de la ecuación (6.16) utilizando los parámetros estimados, donde es claro que los parámetros obtenidos no son candidatos a representar la dinámica deseada, sin embargo, de acuerdo con las gráficas 6.11e y 6.11f, el error calculado por el algoritmo (4.29b) sí tiende a cero. Es decir, el algoritmo está encontrando un conjunto de parámetros que minimizan el error cuadrático mas no corresponden con los parámetros deseados.

De manera similar, la figura 6.12 muestra los resultados de la identificación utilizando el par τ_f determinado con (6.12) (ver figura 6.12a). En este caso $\hat{\vartheta}_1$ también se encuentra polarizado a valores mayores que 1. Para que la identificación tenga sentido se debe cumplir que

$$\vartheta_1 < 1. \quad (6.20)$$

Esto también afecta la estimación de $\hat{\vartheta}_2$, debido a la relación $\hat{\vartheta}_2 = K_m(1 - \hat{\vartheta}_1)$. De aquí que la dinámica de los parámetros mostrados en 6.12c y 6.12d no reproduzcan el perfil de velocidades de la figura 6.12b.

Figura 6.11: Resultados de la identificación de parámetros. (a) par de entrada τ_e utilizado; (b) velocidad medida (línea punteada) y del modelo con los resultados de la estimación (línea continua); (c), (d) $\hat{\vartheta}_1$ y $\hat{\vartheta}_2$ esperada (línea punteada) y obtenida (línea continua); (e), (f) error de la estimación $\varepsilon_{\hat{\vartheta}_1}$ y $\varepsilon_{\hat{\vartheta}_2}$.

Figura 6.12: Resultados de la identificación de parámetros. (a) par de entrada τ_f utilizado; (b) velocidad medida (línea punteada) y del modelo con los resultados de la estimación (línea continua); (c), (d) $\hat{\vartheta}_1$ y $\hat{\vartheta}_2$ esperada (línea punteada) y obtenida (línea continua); (e), (f) error de la estimación $\varepsilon_{\hat{\vartheta}_1}$ y $\varepsilon_{\hat{\vartheta}_2}$.

Figura 6.13: Resultados de la identificación de parámetros. (a) par de entrada τ_e con filtro pasabajas; (b) velocidad medida (línea punteada) y del modelo con los resultados de la estimación (línea continua); (c), (d) $\hat{\vartheta}_1$ y $\hat{\vartheta}_2$ esperada (línea punteada) y obtenida (línea continua); (e), (f) error de la estimación $\varepsilon_{\hat{\vartheta}_1}$ y $\varepsilon_{\hat{\vartheta}_2}$.

6.2.4. Estimación utilizando el par con filtro pasabajas

Para mejorar la forma de onda del par electromagnético se filtró la señal para eliminar los armónicos debidos a la conmutación del inversor, el periodo de muestreo y el ruido de los sensores. Dado que se espera que el par electromagnético sea constante en un escenario ideal, se puede seleccionar un ancho de banda relativamente bajo. Para el caso de ambos pares, τ_e y τ_f , se seleccionó un ancho de banda de $\omega_B = 2\pi \times 10^{-1} \text{ rad s}^{-1}$. Se probó el algoritmo con la misma configuración dada por (6.19).

Se puede observar en la figura 6.13 que el ruido disminuye significativamente, sin embargo, la polarización de los parámetros identificados permanece. Adicionalmente, la forma de calcular el par dividiendo sobre la velocidad del rotor, hace que se tenga un transitorio de valores sumamente altos durante el arranque del motor, lo cual también afecta la estimación.

El par calculado utilizando la expresión para τ_f no tiene el problema del transitorio de arranque, por lo que en la figura 6.14 se puede visualizar la tendencia del par electromagnético de manera más clara. Al igual que en los casos anteriores se mantiene la polarización de los parámetros identificados, y los resultados de la simulación del modelo (6.16) (figura (b)) en ambas pruebas no corresponde con la dinámica obtenida experimentalmente.

6.2.5. Estimación utilizando par con filtro de media móvil

Con el fin de reducir el ruido de la señal de entrada se utilizó un filtro numérico de media móvil, con una ventana de 0.1 s. Este tipo de filtros obtienen el promedio de los valores obtenidos en una ventana móvil de datos de un tamaño determinado. La finalidad de utilizar este tipo de filtrado es que la señal se suaviza significativamente manteniendo su tendencia. La

Figura 6.14: Resultados de la identificación de parámetros. (a) par de entrada τ_f con filtro pasa bajas; (b) velocidad medida (línea punteada) y del modelo con los resultados de la estimación (línea continua); (c), (d) $\hat{\vartheta}_1$ y $\hat{\vartheta}_2$ esperada (línea punteada) y obtenida (línea continua); (e), (f) error de la estimación $\varepsilon_{\hat{\vartheta}_1}$ y $\varepsilon_{\hat{\vartheta}_2}$.

desventaja es que no se tiene control sobre las bandas de frecuencias que se están conservando.

Las figuras 6.15 y 6.16 muestran los resultados de la estimación utilizando este tipo de filtrado. Para la prueba realizada con τ_e los parámetros resultantes (ver figuras 6.15c y 6.15d) mejoran la aproximación de la ganancia en estado estacionario, sin embargo, la constante de tiempo no, como se muestra en la figura 6.15b.

En el caso del par calculado con las trapezoidales τ_f mostrado en la figura 6.16 con respecto al filtro pasabajas y la señal sin filtro se ve una mejora en la ganancia en estado estacionario, mas no tanto como en el caso de la figura 6.15. En ambos casos se reduce la polarización del parámetro $\hat{\vartheta}_2$ (figura 6.15c y 6.16c), sin embargo, el ruido en la estimación se incrementa significativamente, por lo que es más difícil establecer una tendencia en los resultados.

6.2.6. Estimación utilizando el par con filtro pasabajas y de media móvil

Las figuras 6.17 y 6.18 muestran los resultados de la estimación aplicando un filtro de media móvil sobre un filtro pasabajas a la señal de entrada. Los filtros se seleccionaron con las características descritas en las Secc. 6.2.4 y 6.2.5.

Para el caso del par τ_e , se puede observar que los parámetros obtenidos resultan en un incremento importante en la ganancia en estado estacionario y en el tiempo de establecimiento. Adicionalmente, el ruido en la estimación también incrementa de manera significativa debido a la forma de onda de entrada resultante.

La estimación aplicando ambos filtros al par τ_f se muestra en la figura 6.18. Los parámetros obtenidos también tiene un ruido elevado, sin embargo, la tendencia de estos parámetros permite reproducir de manera adecuada la dinámica de la velocidad medida experimentalmente

Figura 6.15: Resultados de la identificación de parámetros. (a) par de entrada τ_e con filtro de media móvil; (b) velocidad medida (línea punteada) y del modelo con los resultados de la estimación (línea continua); (c), (d) $\hat{\vartheta}_1$ y $\hat{\vartheta}_2$ esperada (línea punteada) y obtenida (línea continua); (e), (f) error de la estimación $\varepsilon_{\hat{\vartheta}_1}$ y $\varepsilon_{\hat{\vartheta}_2}$.

Figura 6.16: Resultados de la identificación de parámetros. (a) par de entrada τ_f con filtro de media móvil; (b) velocidad medida (línea punteada) y del modelo con los resultados de la estimación (línea continua); (c), (d) $\hat{\vartheta}_1$ y $\hat{\vartheta}_2$ esperada (línea punteada) y obtenida (línea continua); (e), (f) error de la estimación $\varepsilon_{\hat{\vartheta}_1}$ y $\varepsilon_{\hat{\vartheta}_2}$.

Figura 6.17: Resultados de la identificación de parámetros. (a) par de entrada τ_e con ambos filtros; (b) velocidad medida (línea punteada) y del modelo con los resultados de la estimación (línea continua); (c), (d) $\hat{\vartheta}_1$ y $\hat{\vartheta}_2$ esperada (línea punteada) y obtenida (línea continua); (e), (f) error de la estimación $\varepsilon_{\hat{\vartheta}_1}$ y $\varepsilon_{\hat{\vartheta}_2}$.

como se muestra en la figura 6.18b. Estos parámetros son

$$\hat{\vartheta} = [0.9986 \quad 8.1069]^T. \quad (6.21)$$

Los resultados obtenidos de todas las pruebas se resumen en la tabla 6.2, donde se indican también la desviación estándar del parámetro estimado con respecto al valor esperado, el error medio ϵ entre el parámetro deseado y el parámetro identificado y la desviación estándar de este error σ_ϵ . Los valores que se encuentran muy alejados de los valores esperados también minimizan el error cuadrático del algoritmo, mas no convergen a los parámetros deseados.

Tabla 6.2: Resultados de las estimaciones utilizando el método de MCRFO.

		$\hat{\vartheta}_1$	σ_1	ϵ_1	$\sigma_{\epsilon 1}$	$\hat{\vartheta}_2$	σ_2	ϵ_2	$\sigma_{\epsilon 2}$
Sin Filtro	τ_e	0.9999	0.0007	0.0021	0.0007	0.0121	0.14704	7.2112	0.1470
	τ_f	0.9999	0.0022	0.0021	0.0022	0.0245	0.53042	7.1988	0.5304
Pasabajas	τ_e	0.9997	0.0023	0.0019	0.0023	0.0774	0.40658	7.1460	0.4065
	τ_f	0.9999	0.0027	0.0021	0.0027	0.0494	1.68827	7.1740	1.6882
Media Móvil	τ_e	0.9997	0.0012	0.0019	0.0012	1.6069	11.8480	5.6164	11.848
	τ_e	0.9998	0.0046	0.0020	0.0046	0.3505	23.5965	6.8728	23.596
Ambos	τ_e	0.1485	15.293	0.8492	15.293	7843.2	133619	7836.07	133619
	τ_f	0.9986	0.0189	0.0008	0.0189	8.1069	111.182	0.88348	111.18

Como se muestra en las figuras, los mejores candidatos para la identificación del par son las señales que pasaron por dos filtrados distintos. Esta es una limitante importante, dado que incrementa el preprocesamiento de las señales y evita que el uso de este método sea una opción factible para implementarse en línea en controles adaptables.

Figura 6.18: Resultados de la identificación de parámetros. (a) par de entrada τ_f con ambos filtros; (b) velocidad medida (línea punteada) y del modelo con los resultados de la estimación (línea continua); (c), (d) $\hat{\vartheta}_1$ y $\hat{\vartheta}_2$ esperada (línea punteada) y obtenida (línea continua); (e), (f) error de la estimación $\varepsilon_{\hat{\vartheta}_1}$ y $\varepsilon_{\hat{\vartheta}_2}$.

Una alternativa a este problema es utilizar simplificaciones en el cálculo del par, como la expresión

$$\tau_d(t) = k_v P I_p, \quad (\text{cf. Secc. 2.1.4}).$$

Sin embargo, esto trae consigo otras complicaciones, tales como el diseño del algoritmo que calcule las magnitudes de corriente I_p cuando las señales son no ideales.

En términos generales, es deseable desarrollar una estrategia que sea capaz de filtrar de manera eficiente el ruido de la señal de par, que no afecte significativamente la dinámica del sistema, que sea estable y pueda implementarse en línea.

6.3. Validación de resultados

En esta sección se realiza la validación de los parámetros del motor BLDC identificados. En la Tabla 6.3 se comparan los datos proporcionados por el fabricante contra los estimados. Se puede observar que se tiene una buena concordancia entre los parámetros estimados utilizando el análisis de respuesta transitoria y los datos reportados por el fabricante, con excepción de los parámetros asociados al par de fricción. La figura 6.19 muestra de manera gráfica cómo se comparan los parámetros estimados con los proporcionados por el fabricante. Los parámetros mostrados están normalizados al valor del fabricante y las barras de error representan la incertidumbre de cada parámetro en la misma escala.

Los parámetros con mayores discrepancias son los que están asociados al par de fricción. Estas discrepancias se pueden deber a alguna o varias de las siguientes razones:

- Los parámetros proporcionados por el fabricante están basados en un modelo distinto al utilizado en esta tesis

Tabla 6.3: Datos nominales del motor y parámetros del modelo.

		Análisis de respuesta transitoria			
Parámetro	Unidades	Fabricante		Estimado	
		Valor	Tolerancia %	Valor	Tolerancia %
r	Ω	0.59	10.0	0.59	0.48
ℓ	mH	1.15	15.0	1.02	12.96
k_v	mV s rad^{-1}	21.96	10.0	23.99	0.04
b	$\mu\text{N m s rad}^{-1}$	25.62	2.6	305.27	1.15
J	g cm^2	176.00	20.0	172.86	1.57
T_f	mN m	15.39	0.46	6.80	
Método de MCRFO					
b	$\mu\text{N m s rad}^{-1}$	25.62	2.6	172.69	12.4
J	g cm^2	176.00	20.0	154.04	18.5

Figura 6.19: Comparación de los parámetros identificados en el análisis de respuesta transitoria y los proporcionados por el fabricante.

- El motor utilizado fue adquirido de segunda mano, por lo que no se puede saber si ha sufrido desgastes, daños, alteraciones o algo que afecte significativamente las estimaciones
- El modelo de fricción utilizado corresponde a regímenes de operación muy particulares: el motor se arrancó en todas las pruebas desde la misma condición inicial, girando en el mismo sentido y las estimaciones se hicieron en pruebas de aceleración libre
- Los fenómenos de fricción se saben no lineales y dependientes de gran cantidad de factores, como la temperatura de operación, el tiempo de operación, etc. Ninguno de estos fueron modelados, por lo que los parámetros estimados pueden considerarse válidos bajo las condiciones del laboratorio donde se realizaron las pruebas.

Figura 6.20: Resultados de la prueba en lazo abierto a distintas velocidades. (??) $\omega_r = 122\text{--}159\text{ rad s}^{-1}$. (??) $\omega_r = 160\text{--}206\text{ rad s}^{-1}$. (??) $\omega_r = 231\text{--}288\text{ rad s}^{-1}$. (??) $\omega_r = 330\text{--}405\text{ rad s}^{-1}$. (??)–(??) error relativo.

6.3.1. Validez de los parámetros en distintas condiciones de operación

Se probaron los parámetros determinados utilizando el algoritmo de MCRFO utilizando un perfil de velocidades similar al de la figura 6.5 desde 122 hasta 405 rad s^{-1} . Los resultados se muestran en la figura 6.20. Las gráficas de la columna izquierda ??–?? muestran los resultados obtenidos comparados con la velocidad medida. Las gráficas ??–?? muestran el error relativo en cada caso.

En el rango de velocidades probados se tienen errores inferiores al 5 % para velocidades menores a 330 rad s^{-1} y errores inferiores a 7.5 % para velocidades mayores. La aproximación al modelo utilizada representa adecuadamente el comportamiento de la máquina en un rango de velocidades seleccionado. Considerando que la velocidad nominal del motor es $n_n = 6000\text{ rpm}$, la tabla 6.4 muestra el porcentaje de la velocidad nominal probado y el error asociado a cada prueba. Es importante mencionar que las pruebas se hicieron para velocidades máximas de 440 rad s^{-1} , debido a las limitaciones del inversor. Velocidades más altas resultaban en conmutación deficiente y en atascamientos durante la operación del motor. Entonces, los resultados obtenidos se pueden considerar aceptables dentro del rango de operación del motor.

Se probó el sistema con un par de entrada de amplitud constante y frecuencia variable. Esta prueba permite visualizar en qué rango de frecuencias la aproximación al modelo es buena. La frecuencia de la señal se incrementó de manera uniforme de 0.05 a 7 Hz en 20 s. El resultado de esta prueba se muestra en la figura 6.21, donde se puede observar que el modelo

Tabla 6.4: Desempeño de los parámetros estimados a distintas velocidades.

$\%n_n$	$\epsilon_\omega [\text{rad s}^{-1}]$	$\sigma_\epsilon [\text{rad s}^{-1}]$
19.40	2.69	3.48
25.30	1.94	0.92
25.55	3.75	4.30
32.74	2.59	1.24
36.87	6.83	4.83
45.95	7.68	2.28
52.53	22.51	9.68
64.36	18.96	6.47

Figura 6.21: Comportamiento del motor con frecuencia variable y validación del modelo obtenido.

reproduce de manera aproximada la velocidad medida hasta 6 s, que corresponde con 2.8 Hz o 17.65 rad s^{-1} . Después de este tiempo la señal original comienza a atenuarse rápidamente. Esto se debe al análisis siguiente. A partir del vector de parámetros estimado 6.21 se puede obtener la constante de tiempo de la aproximación de primer orden $\hat{\tau}$ y el ancho de banda del sistema ω_{BLDC}

$$\hat{\tau} = -\frac{T}{\ln \hat{\vartheta}_1} = 0.0892 \text{ s}, \quad \hat{\omega}_{BLDC} = \frac{1}{\hat{\tau}} = 11.21 \text{ rad s}^{-1}. \quad (6.22)$$

La atenuación esperada en frecuencias superiores sucede en el motor, sin embargo, el modelo continúa con amplitud prácticamente constante incluso con frecuencias por encima de 25 rad s^{-1} . Esto no tiene mucha importancia debido a que el comportamiento del modelo y el motor no difieren mucho dentro del rango de operación del motor. En el intervalo de 0 a ω_{BLDC} el error relativo medio es de 4.79 %. Este resultado permite acotar el modelo a entradas de par cuyas frecuencias estén dentro del rango

$$0 \leq \omega_\tau \leq \omega_{BLDC}, \quad (6.23)$$

donde ω_τ es la frecuencia angular del par que se desee alimentar al motor.

6.3.2. Control en lazo cerrado

Se implementó un controlador de velocidad clásico reportado en la literatura [2, 3]. Este es un control proporcional-integral sobre el error de velocidades entre la referencia y la velocidad

Figura 6.22: Resultados de control en lazo cerrado con los parámetros determinados.

medida. Se utilizaron los parámetros estimados para simular y sintonizar el controlador. La función de transferencia de controlador utilizado está dad por:

$$C(s) = 2.5 \left(\frac{s+1}{s} \right). \quad (6.24)$$

La señal de referencia elegida fue una subida suave de 0 a $\omega_r = 100 \text{ rad s}^{-1}$ durante 3 s, donde se mantiene por 1.5 s y comienza a oscilar entre 100 y 140 rad s^{-1} con una frecuencia de $2\pi \text{ rad s}^{-1}$. Esta frecuencia se seleccionó dentro del rango de operación del motor. Utilizando las mismas ganancias, se probó el controlador sobre la plataforma experimental. Los resultados se observan en la figura 6.22, donde se muestra la curva de referencia, los resultados de simulación y los resultados experimentales. Se presenta también la corriente del estator, la cual alcanza un valor de -4.8 A durante la transición de 100 rad s^{-1} al seguimiento de la senoidal y permanece por debajo de 1 A el resto de la prueba. Se puede observar que los parámetros utilizados son apropiados para reproducir la dinámica del motor en condiciones de lazo cerrado.

7. Conclusiones y perspectivas futuras

7.1. Conclusiones

- Los parámetros del motor BLDC determinados a partir de pruebas experimentales están dentro de un margen de error muy aceptable comparado con los datos proporcionados por el fabricante. Las pruebas se presentaron de manera sistemática y son reproducibles, por lo que su uso puede extenderse a otros motores BLDC de características similares al utilizado en este trabajo.
- El esquema de arranque y operación basado en dos sensores de posición permitió operar al motor en lazo abierto y en lazo cerrado de manera segura y eficiente en un rango amplio de operación. Al momento de la escritura de esta tesis no se han encontrado referencias que hagan uso de estas estrategias para la operación del motor BLDC, por lo que se considera una contribución importante de este trabajo.
- El método de MCRFO arrojó parámetros que reproducen la dinámica del motor con un margen de error aceptable, sin embargo, hay que tener en consideración el ruido presente en mediciones y utilizar un esquema de filtro para mejorar el desempeño del algoritmo.
- Los parámetros obtenidos pueden modelar al motor en un rango de frecuencias dentro de los límites de operación nominales, por lo que el modelo dinámico considerado y la aproximación de primer orden utilizado son útiles para fines de identificación y control.

7.2. Perspectivas futuras

- Un inconveniente importante en el desarrollo de este trabajo fue la determinación del par desarrollado, dado que las técnicas utilizadas tenían un alto contenido frecuencial. Queda por estudiar técnicas que permitan reducir el ruido en las mediciones, tanto en línea como fuera de línea, para poder aplicar algoritmos de identificación que puedan dar resultados consistentes en cualquier prueba.
- Una simplificación similar a la realizada en este trabajo se puede hacer para aproximar la ecuación eléctrica a un primer orden y realizar la estimación de los parámetros eléctricos del motor.

Referencias

- [1] J. F. Gieras, *Permanent magnet motor technology: design and applications*. CRC press, 2009.
- [2] C.-l. Xia, *Permanent magnet brushless DC motor drives and controls*. John Wiley & Sons, 2012.
- [3] J. Chiasson, *Modeling and high performance control of electric machines*. John Wiley & Sons, 2005, vol. 26.
- [4] A. Kapun, M. Čurkovič, A. Hace, and K. Jezernik, “Identifying dynamic model parameters of a BLDC motor,” *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 16, no. 9, pp. 1254–1265, 2008.
- [5] B. Singh and S. Singh, “State of the art on permanent magnet brushless DC motor drives,” *Journal of Power Electronics*, vol. 9, no. 1, pp. 1–17, 2009.
- [6] A. K. Wallace and R. Spee, “The effects of motor parameters on the performance of brushless DC drives,” *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 5, no. 1, pp. 2–8, 1990.
- [7] R. Krishnan, *Permanent magnet synchronous and brushless DC motor drives*. CRC press, 2009.
- [8] S. Chen, G. Liu, and L. Zhu, “Sensorless control strategy of a 315 kw high-speed bldc motor based on a speed-independent flux linkage function,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 11, pp. 8607–8617, 2017.
- [9] T. Li and J. Zhou, “High-stability position-sensorless control method for brushless dc motors at low speed,” *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 34, no. 5, pp. 4895–4903, 2018.
- [10] S. A. Odhano, R. Bojoi, E. Armando, G. Homrich, A. F. Flores Filho, M. Popescu, and D. G. Dorrell, “Identification of three-phase IPM machine parameters using torque tests,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 53, no. 3, pp. 1883–1891, 2016.
- [11] “IEEE trial-use guide for testing permanent magnet machines,” *IEEE Std 1812-2014*, pp. 1–56, Feb 2015.
- [12] Y. A. Apatya, A. Subiantoro, and F. Yusivar, “Design and prototyping of 3-phase BLDC motor,” in *2017 15th International Conference on Quality in Research (QiR): International Symposium on Electrical and Computer Engineering*. IEEE, 2017, pp. 209–214.

- [13] A. E. Fitzgerald, C. Kingsley, S. D. Umans, and B. James, *Electric machinery*. McGraw-Hill New York, 2003, vol. 5.
- [14] C. Xiang, X. Wang, Y. Ma, and B. Xu, “Practical modeling and comprehensive system identification of a bldc motor,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, 2015.
- [15] J. U. Liceaga-Castro, I. I. Siller-Alcalá, J. Jaimes-Ponce, R. A. Alcántara-Ramírez, and E. Arévalo Zamudio, “Identification and real time speed control of a series DC motor,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2017, 2017.
- [16] L. Ljung, “System identification,” *Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*, pp. 1–19, 1999.
- [17] G. C. Goodwin and K. S. Sin, *Adaptive filtering prediction and control*. Courier Corporation, 2014.
- [18] S. Odhano, R. Bojoi, M. Popescu, and A. Tenconi, “Parameter identification and self-commissioning of AC permanent magnet machines-a review,” in *2015 IEEE Workshop on Electrical Machines Design, Control and Diagnosis (WEMDCD)*. IEEE, 2015, pp. 195–203.
- [19] R. Shanmugasundram, K. M. Zakariaiah, and N. Yadaiah, “Effect of parameter variations on the performance of direct current (DC) servomotor drives,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 19, no. 10, pp. 1575–1586, 2013.
- [20] B. Terzic and M. Jadric, “Design and implementation of the extended kalman filter for the speed and rotor position estimation of brushless DC motor,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 48, no. 6, pp. 1065–1073, 2001.
- [21] J. Cortés-Romero, A. Luviano-Juarez, H. Sira-Ramírez *et al.*, “Fast identification and control of an uncertain brushless dc motor using algebraic methods,” in *12th IEEE International Power Electronics Congress*. IEEE, 2010, pp. 9–14.
- [22] S. Weisgerber, A. Proca, and A. Keyhani, “Estimation of permanent magnet motor parameters,” in *IAS’97. Conference Record of the 1997 IEEE Industry Applications Conference Thirty-Second IAS Annual Meeting*, vol. 1. IEEE, 1997, pp. 29–34.
- [23] J. Fang, X. Zhou, and G. Liu, “Instantaneous torque control of small inductance brushless DC motor,” *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 27, no. 12, pp. 4952–4964, 2012.
- [24] Y. Xu, N. Parspour, and U. Vollmer, “Torque ripple minimization using online estimation of the stator resistances with consideration of magnetic saturation,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 61, no. 9, pp. 5105–5114, 2013.
- [25] P. Krause, O. Wasynczuk, S. D. Sudhoff, and S. Pekarek, *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*. John Wiley & Sons, 2013.
- [26] R. Beloiu, “Dynamic determination of DC motor parameters-simulation and testing,” in *Proceedings of the 2014 6th International Conference on Electronics, Computers and Artificial Intelligence (ECAI)*. IEEE, 2014, pp. 13–18.

- [27] I. Virgala and M. Kelemen, "Experimental friction identification of a DC motor," *International journal of mechanics and applications*, vol. 3, no. 1, pp. 26–30, 2013.
- [28] M. Iwasaki, T. Shibata, and N. Matsui, "Disturbance-observer-based nonlinear friction compensation in table drive system," *IEEE/ASME transactions on mechatronics*, vol. 4, no. 1, pp. 3–8, 1999.
- [29] I. The MathWorks™, *Simulink Real Time*, Natick, Massachusetts, United State, 2020. [Online]. Available: https://la.mathworks.com/help/pdf_doc/slrealtime/index.html?s_cid=doc_ftr
- [30] Z. Wu, H. Lyu, Y. Shi, and D. Shi, "On stability of open-loop operation without rotor information for brushless dc motors," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014, 2014.
- [31] S. Microelectronics, "Application note an1276 bldc motor start routine for the st72141 microcontroller."
- [32] C. L. Baratieri and H. Pinheiro, "An if starting method for smooth and fast transition to sensorless control of bldc motors," in *2013 Brazilian Power Electronics Conference*. IEEE, 2013, pp. 836–843.
- [33] J. Jimenez-Gonzalez, J. Delgado-Quintero, C. Perez-Gomez, I. Lopez-Garcia, V. Jimenez-Mondragon, and E. Campero-Littlewood, "Scalar control of squirrel cage induction motors-fundamentals and scope," in *2019 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC)*. IEEE, 2019, pp. 1–6.
- [34] I. D. Landau and G. Zito, *Digital control systems: design, identification and implementation*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [35] H. V. Henderson and S. R. Searle, "On deriving the inverse of a sum of matrices," *SIAM Review*, vol. 23, no. 1, pp. 53–60, 1981. [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/2029838>
- [36] J. Taylor, *Introduction to error analysis, the study of uncertainties in physical measurements*, 1997.
- [37] I. The MathWorks™, *Signal Processing Toolbox*, Natick, Massachusetts, United State, 2020. [Online]. Available: https://la.mathworks.com/help/pdf_doc/signal/signal_ref.pdf