**Universidad
Autónoma
Metropolitana**

Casa abierta al tiempo **Azcapotzalco**

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
Maestría en Ciencias en Ingeniería Electromagnética

MODELADO DEL MOTOR DE CD SIN ESCOBILLAS
CONSIDERANDO CONMUTACIÓN ELECTRÓNICA

Tesis que presenta:

Juan Manuel Delgado Q
Juan Manuel Delgado Quintero

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

Director:

Dr. Rafael Escarela Pérez

Codirector:

M. en C. Eduardo Campero Littlewood

Ciudad de México, marzo de 2021

Contenido

Contenido	I
Índice de Figuras	III
Resumen	1
1. Introducción	2
1.1. Objetivo	2
1.2. Justificación	3
1.3. Aportaciones	4
1.4. Estado del arte	4
1.5. Limitaciones y alcances	5
1.6. Estructura	6
2. Motor de CD sin escobillas	7
2.1. Estructura	7
2.2. Principio de funcionamiento	8
2.3. Modelado del motor de CD sin escobillas	9
2.4. Método de Runge-Kutta	27
3. Saturación en el motor BLDC	29
3.1. Saturación magnética	29
3.2. Obtención del factor de saturación (<i>Cubic splines</i>)	32
4. Simulación del motor de CD sin escobillas	39
4.1. Definición de variables	39
4.2. Emulación de los sensores de efecto hall	43
4.3. Construcción de las señales de los voltajes de alimentación	46
4.4. Construcción de las funciones trapezoidales para la fuerza contra-electromotriz	49
4.5. Obtención de las curvas de las señales de intensidad de campo magnético	52

4.6. Programación y solución de las ecuaciones del sistema eléctrico y mecánico del motor	55
4.7. Construcción de las señales de compuerta para el dispositivo de conmutación	60
4.8. Ventajas y desventajas de ambas alternativas de programación	61
5. Comparación y análisis de resultados	64
5.1. Comparación con el bloque <i>permanent magnet synchronous machine</i>	64
6. Conclusiones y trabajos futuros	68
6.1. Conclusiones	68
6.2. Trabajos Futuros	68
7. Referencias	70

Índice de Figuras

1.1. Etapas de desarrollo de la idónea comunicación de resultados	2
2.1. Elementos que componen al sistema del motor de CD sin escobillas	8
2.2. Primer paso del proceso de conmutación electrónica [6]	9
2.3. Segundo paso del proceso de conmutación electrónica [6]	9
2.4. Tercer paso del proceso de conmutación electrónica [6]	10
2.5. Cuarto paso del proceso de conmutación electrónica [6]	10
2.6. Quinto paso del proceso de conmutación electrónica [6]	11
2.7. Sexto paso del proceso de conmutación electrónica [6]	11
2.8. Señales de interés durante el proceso de conmutación a seis pasos	12
2.9. Estructura de un motor de CD sin escobillas trifásico	13
2.10. Rotor de un motor de CD sin escobillas con un solo par de polos	13
2.11. Distribución del campo magnético en el entrehierro debido a los imanes perma- nentes del rotor $\mathbf{B}_r$	14
2.12. Trayectoria de aplicación de la ley de Ampère para la fase a	15
2.13. Densidad del campo magnético $\mathbf{B}_a$ en el entrehierro generado por la fase a . . .	17
2.14. Superficie de integración para la determinación de flujo magnético en una espira de la fase a producido por la corriente i_a	17
2.15. Superficie de integración para la determinación de flujo magnético en una espira de la fase b producido por la corriente i_a	19
2.16. Superficie de integración para la determinación de flujo magnético en una espira de la fase c producido por la corriente i_a	20
2.17. Superficie de integración para la determinación del flujo magnético de una espira de la fase a debido al campo magnético del rotor cuando $\frac{\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{5\pi}{6}$	21
2.18. Superficie de integración para la determinación del flujo magnético de una espira de la fase a debido al campo magnético del rotor cuando $\frac{-\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{\pi}{6}$ y $\theta_r + \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$	22

2.19. Superficie de integración para la determinación del flujo magnético de una espira de la fase a debido al campo magnético del rotor cuando θ_r entre $-\frac{\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \theta_r + \frac{\pi}{2}$	23
2.20. Fuerza magnética ejercida por el campo magnético del rotor sobre una de las espiras del devanado de la fase a en la sección axial superior	24
3.1. Curva de saturación en vacío indicando los efectos de saturación.	30
3.2. Curva de saturación en vacío indicando las regiones de saturación.	31
3.3. Curva de magnetización, curva del entrehierro y factor de saturación para el material N38SH	36
3.4. Curva de magnetización, curva del entrehierro y factor de saturación para el material N30SH	37
3.5. Curva de magnetización, curva del entrehierro y factor de saturación para el material N40UH	37
3.6. Curva de magnetización, curva del entrehierro y factor de saturación para el material Y30	38
3.7. Curva de magnetización, curva del entrehierro y factor de saturación para el material N52	38
4.1. Esquema implementado para identificar la posición del rotor por sectores (Ejemplo sector 1)	43
4.2. Posición del rotor identificada por sectores para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	45
4.3. Esquema implementado para emular las señales entregadas por los sensores de efecto hall (Ejemplo Hall A)	45
4.4. Señal emulada para el sensor de efecto hall A para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	47
4.5. Señal emulada para el sensor de efecto hall B para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	47
4.6. Señal emulada para el sensor de efecto hall C para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	48
4.7. Esquema implementado para construir las señales de los voltajes de alimentación (Ejemplo alimentación fase a)	48
4.8. Voltaje de alimentación de la fase <i>a</i> con Vdc=16 y un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	50
4.9. Voltaje de alimentación de la fase <i>b</i> con Vdc=16 y un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	51
4.10. Voltaje de alimentación de la fase <i>c</i> con Vdc=16 y un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	52
4.11. Forma de onda de la fuerza contra-electromotriz de la fase <i>a</i> para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	52
4.12. Forma de onda de la fuerza contra-electromotriz de la fase <i>b</i> para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	53
4.13. Forma de onda de la fuerza contra-electromotriz de la fase <i>c</i> para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	54

4.14. Intensidad de campo magnético en el entrehierro debido a la fase <i>a</i> para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	55
4.15. Intensidad de campo magnético en el entrehierro debido a la fase <i>b</i> para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	56
4.16. Intensidad de campo magnético en el entrehierro debido a la fase <i>c</i> para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	57
4.17. Intensidad de campo magnético total en el entrehierro para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	58
4.18. Factor de saturación calculada para un tiempo de simulación de 0.1 segundos. .	59
4.19. Corriente de alimentación de la fase <i>a</i> para un voltaje de alimentación de 16 volts y un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	59
4.20. Corriente de alimentación de la fase <i>b</i> para un voltaje de alimentación de 16 volts y un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	60
4.21. Corriente de alimentación de la fase <i>c</i> para un voltaje de alimentación de 16 volts y un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	60
4.22. Velocidad angular del motor para un voltaje de alimentación de 16 volts y un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	61
4.23. Par electromagnético generado por el motor para un voltaje de alimentación de 16 volts y un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	62
4.24. Esquema implementado para construir las señales de compuerta para el dispositivo de conmutación	62
4.25. Esquema implementado para construir el dispositivo de conmutación	63
4.26. Voltaje Línea-Neutro para la fase <i>a</i> entregada por el inversor para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	63
5.1. Comparación número 1 de la corriente de alimentación de la fase <i>a</i> para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	65
5.2. Comparación número 1 de la corriente de alimentación de la fase <i>b</i> para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	66
5.3. Comparación número 1 de la corriente de alimentación de la fase <i>c</i> para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	66
5.4. Comparación número 1 de la velocidad angular del motor para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	67
5.5. Comparación número 1 del par electromagnético generado por el motor para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.	67

Modelado del Motor de CD sin Escobillas considerando conmutación electrónica

A todas las personas que han contribuido a convertirme en el
hombre que soy.

Juan Manuel Delgado Quintero,
Ciudad de México, 2021

Agradecimientos

A mis seres queridos por el constante apoyo brindado.

A mis asesores que han contribuido en mi crecimiento académico y personal.

A mis compañeros de maestría por las experiencias y consejos brindados.

A el concejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca recibida durante la maestría.

Resumen

El tema tratado en este trabajo es el modelado y simulación del motor de CD sin escobillas (BLDC por sus siglas en inglés) incluyendo todos los elementos que garantizan su correcto funcionamiento (sensores y dispositivo de conmutación). Se inicia con la selección de un modelo para el motor que se plantea como punto de partida y que fue elegido a partir de la revisión de diversas referencias relacionadas con el motor BLDC. En la segunda etapa se analiza la incorporación al modelo de elementos tales como, el efecto de saturación magnética, reacción del inducido, para mejorar la precisión en la representación del comportamiento del motor. La simulación del modelo se plantea utilizando los programas: Matlab y Fortran, de forma que el modelo emule todos los elementos físicos; para finalizar se comparan los resultados obtenidos de las simulaciones con mediciones realizadas en un motor BLDC cuyos parámetros son conocidos.

La selección del modelo se realizó en función de diversas consideraciones: qué tan fiel es la representación que se logra de las características del motor, la facilidad de programación y el número de parámetros necesarios para realizar la simulación. El modelo que se presenta en este trabajo considera una parte de la no linealidad natural del motor al considerar el efecto de saturación magnética, logrando con esto un modelo mas completo sin sacrificar factibilidad de implementación.

Para realizar la simulación del motor se consultaron diversas referencias en las cuales se plantean las inconveniencias que surgen al no incluir ciertos elementos físicos como por ejemplo sensores de posición, controladores y dispositivos de conmutación encargados de generar las señales indispensables para el funcionamiento del motor. La simulación se realizó utilizando los parámetros del motor cuya referencia es I2383092NC-Z1XX-SP de la empresa *AMETEK TECHNICAL AND INDUSTRIAL PRODUCTS*.

Por último se incluye una comparación y análisis de los resultados de la simulación con las señales del bloque *Permanent magnet synchronous machine* de *Simulink* y se discute y justifica la validez del modelo utilizado para el desarrollo de este trabajo.

1. Introducción

En este capítulo se presenta la justificación, objetivos, aportaciones, estado del arte, limitaciones, alcance y estructura del presente trabajo. En este trabajo se desarrolla el modelado y simulación del motor de CD sin escobillas. Como se indica en el diagrama de la figura 1.1, se inició seleccionando el modelo del motor que se planteó como punto de partida. La selección del modelo se realizó basándose en criterios como fiel representación de las características del motor, facilidad de programación y número de parámetros necesarios para realizar la simulación. Una vez seleccionado el modelo se estudiaron diferentes alternativas de elementos adicionales a incorporar, por ejemplo, el efecto de saturación, reacción del inducido, pérdidas, entre otros. El elemento adicional que se incluye es el efecto de la saturación, que una vez incorporado al modelo se llevo a cabo su simulación utilizando el programa Simulink de MATLAB. Este paso fue de gran utilidad para identificar errores y asegurar que los resultados fuesen coherentes, además se programó el modelo en lenguaje Fortran obteniendo los mismos resultados en un menor periodo de tiempo y destinando menos recursos. Finalmente, con el propósito de validar el modelo obtenido en este trabajo se analizaron y compararon los resultados obtenidos con mediciones realizadas a un motor real.

1.1. Objetivo

El objetivo de este trabajo es plantear y programar un modelo de resistencias e inductancias equivalentes de un motor de CD sin escobillas, en el marco de referencia *abc*, que sea capaz de modelar el comportamiento electromecánico del motor BLDC bajo diferentes regímenes de operación.

Para cumplir con este objetivo se plantearon los siguientes objetivos específicos:

- Obtener el modelo de resistencias e inductancias del motor de CD sin escobillas en el marco de referencia *abc*.

Figura 1.1: Etapas de desarrollo de la idónea comunicación de resultados

- Incorporar al modelo del motor BLDC el modelo de circuitos equivalentes del dispositivo de electrónica de potencia encargado de la conmutación de las corrientes de alimentación.
- Implementar el modelo obtenido en lenguaje de programación Fortran.
- Validar el modelo obtenido.

1.2. Justificación

Los motores de CD son preferidos sobre los motores de CA por múltiples razones, como por ejemplo: su diseño es simple, su operación es sencilla, es fácil variar su velocidad, tienen mayor densidad de potencia, menos inercia y sus actuadores son más pequeños. Dado que llevan aproximadamente más de 140 años siendo utilizados, actualmente se conoce muy bien su funcionamiento y necesidades de mantenimiento. Precisamente, uno de los elementos que aumenta considerablemente la demanda de mantenimiento y que reduce la vida útil es el uso de escobillas, necesarias para el proceso de conmutación de corriente, pero que provocan ruido y tienen un rápido desgaste. Lo anterior originó el desarrollo del motor de CD sin escobillas.

Los motores BLDC han adquirido gran importancia durante los últimos 20 años. Actualmente se emplean en múltiples áreas y para diversas aplicaciones como por ejemplo en la industria automotriz, aeronáutica y electrodomésticos. La alta popularidad de este tipo de motores se debe a las ventajas que brindan ya sea su estructura simple, operación confiable, bajo mantenimiento, alta densidad de par, alta eficiencia, control eficiente, sin pérdidas por fricción en escobillas, reducción de ruido y la ausencia de arcos eléctricos durante el proceso de conmutación. Precisamente los trolebuses recientemente adquiridos para el transporte público en la Ciudad de México tienen un motor de CD sin escobillas como impulsor. Estos trolebuses, que ya se encuentran circulando, son de la marca Yutong, tienen un motor BLCD de 215 hp y una capacidad de transporte para 85 pasajeros.

Con la finalidad de mejorar el desempeño de los motores de CD sin escobillas se han destinado múltiples esfuerzos en el desarrollo de nuevas estrategias de control y en la mejora de los diseños de estos motores. Esto solo se puede realizar con modelos que representen adecuadamente todos los sistemas que componen al motor. Así, se hace indispensable contar con modelos numéricos y analíticos que permitan estudiar confiablemente las características eléctricas y mecánicas de la máquina, analizar su funcionamiento bajo distintas condiciones de operación, diseñar e implementar diversas estrategias de control, así como poder predecir el comportamiento del motor antes de su construcción.

Por lo tanto resulta de interés contar con un modelo cuyos resultados se acerquen lo más posible al comportamiento real del motor. En este trabajo se pretende obtener un modelo donde las resistencias e inductancias equivalentes del motor de CD sin escobillas incorporen con precisión su comportamiento electromecánico, superando modelos existentes en términos de eficiencia computacional y en representación de los fenómenos de intercambio de energía magnética, eléctrica y mecánica. Se incluye en el modelo de la máquina, la interconexión de la electrónica de potencia usualmente conectada en sus terminales para la conmutación de sus corrientes de alimentación, así como las cargas mecánicas conectadas al rotor del motor. Se seleccionó como elemento adicional la saturación magnética dado que su implementación es factible utilizando una herramienta computacional y se estaría incorporando al modelo la no linealidad.

1.3. Aportaciones

Las principales aportaciones de este trabajo se mencionan a continuación:

- La reconstrucción de la curva de magnetización de un material ferromagnético mediante la aplicación del método numérico *Cubic Splines*.
- La implementación de una metodología que considere el efecto de saturación en el modelo del motor de CD sin escobillas.
- Una guía para realizar la simulación del motor de CD sin escobillas ante la ausencia de las señales generadas por los elementos de medición.
- La simulación del motor de CD sin escobillas utilizando el programa Simulink de MATLAB y el lenguaje de programación Fortran.
- La comparación entre los resultados de simulaciones del motor de CD sin escobillas.

1.4. Estado del arte

Desde finales del siglo XX se han destinado múltiples recursos en el desarrollo de investigaciones relacionadas con el motor de CD sin escobillas, motivadas por la necesidad de contar con motores con ciclos de vida más largos, mejor rendimiento y cuyo funcionamiento sea flexible ante diferentes aplicaciones. Los motores de CD sin escobillas cuentan con los elementos necesarios para satisfacer estas necesidades de manera relativamente económica garantizando un funcionamiento fiable y eficiente [1].

Como su nombre lo indica el motor de CD sin escobillas se asemeja en funcionamiento a un motor de CD tradicional con la particularidad de que el proceso de conmutación se realiza de manera electrónica. Las investigaciones que se han realizado con respecto a estos motores han permitido identificar las ventajas que presentan, entre ellas [1]:

- Mayor rango de velocidad debido a la no dependencia de las características mecánicas de las escobillas.
- Mejor característica par-velocidad, debido a la ausencia de fricción producida por las escobillas que reduce el par útil del motor.
- Mejor respuesta dinámica debido a que el rotor tiene menor inercia.
- Menor ruido debido a la ausencia de descargas durante el proceso de conmutación.
- Menor tamaño, lo que amplía su rango de aplicación.

Todo lo anterior se traduce en un motor mas eficiente con un mayor periodo de vida en comparación con un motor de CD tradicional. Para el desarrollo de este trabajo resulta indispensable conocer el estado del arte del motor de CD sin escobillas. Existen numerosos libros que abordan su funcionamiento, sus materiales y componentes, así como las características que lo definen.

En [2] se presenta el principio de funcionamiento y la estructura básica del motor de CD sin escobillas. Se realiza una comparación del motor BLDC con el motor de CD convencional. Adicionalmente se profundiza en las diferentes alternativas existentes para la detección de la

posición del rotor para garantizar su correcto funcionamiento. Finalmente se presentan algunas de las principales configuraciones y aplicaciones.

En [3] se exponen los principios básicos de las máquinas eléctricas. Se profundiza en el estudio del estado estable del motor, obteniendo sus ecuaciones en diferentes marcos de referencia. De igual manera se aborda su desempeño dinámico y las diferentes topologías de actuadores utilizados.

En [4] se enumeran los diferentes materiales ferromagnéticos utilizados en la construcción de los motores de CD sin escobillas. Al igual que en [3] se desarrollan las ecuaciones que rigen el comportamiento del motor, se analiza el fenómeno de rizado en el par y la manera de minimizar sus efectos. Cabe destacar que el autor se interesa en las diversas maneras de controlar el movimiento del motor entre ellas microcontroladores y control basado en el procesamiento de señales digitales.

En [5] se analiza lo relacionado con la máquina de CA de imanes permanentes. Inicia abordando todos los fenómenos físicos presentes durante el funcionamiento de la máquina de CA. Obtiene el modelo matemático para diversas máquinas de CA como por ejemplo la síncrona de imanes permanentes y la de inducción. El autor realiza un estudio exhaustivo de las técnicas de control y de identificación de parámetros de los motores de imanes permanentes. Con respecto al motor de CD sin escobillas presenta, con gran detalle, el proceso de modelado y propone una estrategia de control a partir de las corrientes de alimentación.

En [6] se describe el proceso de funcionamiento del motor de CD sin escobillas específicamente para la aplicación de un vehículo híbrido. Se indican las formas características de señales de interés como por ejemplo las entregadas por los sensores de efecto hall, las de fuerza contra-electromotriz y la de par generado. También se desarrolla un esquema de control de par basado en un controlador PID para el vehículo híbrido.

De igual manera se han desarrollado numerosos artículos y tesis sobre los motores de CD sin escobillas. La mayoría de estos trabajos están enfocados en una aplicación en concreto. En [7] se realiza el modelado, simulación y control PID para manipular la trayectoria de un robot. En [8] se realiza el modelado del motor de CD sin escobillas empleando una red neuronal artificial con el objetivo de garantizar la mayor eficiencia de operación. En [9] se obtiene el modelo en circuitos equivalentes realizando una analogía entre los elementos mecánicos y eléctricos del motor. En [10] se plantea el modelado y simulación del motor en el marco de referencia $dq\theta$, se implementan dos controladores PI uno para el lazo de corriente y otro para el de velocidad. La simulación se lleva a cabo utilizando observadores para suplir la ausencia de elementos de medición. Este trabajo se destaca con respecto a los demás en el desarrollo de un modelo más completo, se muestra a detalle la manera en que se realiza la simulación y se implementa el método numérico *Cubic splines* para el cálculo del factor de saturación.

1.5. Limitaciones y alcances

Limitaciones

- La metodología para considerar la saturación en el modelo del motor de CD sin escobillas se implementó utilizando valores de la curva de magnetización de un material similar al del motor real, y se utilizaron datos de un material que no ha sido sometido al desgaste que tendría el motor. De acuerdo con esto resulta necesario tener en cuenta la posible presencia de un error en los resultados obtenidos de la simulación.
- La simulación se realizó considerando como ideales a los elementos que componen al dispositivo de conmutación (inversor), es decir la simulación no proporciona información acerca de la manera en que los parámetros del dispositivo de conmutación afecta el funcionamiento del motor.

Alcances

- La guía de simulación presentada en este trabajo facilitará la simulación del motor de CD sin escobillas indicando paso a paso la manera de llevarla a cabo. La simulación que se presenta en este trabajo no requiere de la utilización de elementos como sensores o dispositivos de medición.
- Las simulaciones realizadas en este trabajo son una herramienta de gran utilidad para futuras investigaciones relacionadas con el motor de CD sin escobillas, ya que podrán ser utilizadas para analizar el comportamiento del motor ante diferentes condiciones de operación al igual que para probar diversas estrategias de control.

1.6. Estructura

En el **Capítulo 1** se describen los aspectos generales de este trabajo, se da a conocer el objetivo, la justificación y un breve estado del arte acerca del modelado del motor de CD sin escobillas.

En el **Capítulo 2** se presentan las generalidades del motor de CD sin escobillas, su estructura, principio de funcionamiento y aplicaciones. También se da a conocer el modelo utilizado como punto de partida para el desarrollo de este trabajo.

En el **Capítulo 3** se describe la manera en que se implementó el método numérico *Cubic splines* para reconstruir la curva de magnetización del material ferromagnético, al igual que el método utilizado para considerar el efecto de saturación en el modelo del motor.

En el **Capítulo 4** se presenta la simulación del motor de CD sin escobillas.

En el **Capítulo 5** se analizan los resultados obtenidos y se comparan con los resultados entregados por el bloque *Permanent magnet synchronous machine* de MATLAB-Simulink.

En el **Capítulo 6** se establecen las conclusiones de este trabajo y las recomendaciones para futuros trabajos.

2. Motor de CD sin escobillas

Los motores de CD han sido usados ampliamente en aplicaciones de control de posición o velocidad, sin embargo debido a que requieren de mantenimiento constante de escobillas y del conmutador, han perdido popularidad en aplicaciones que requieren de operación continua y fiable. Para superar este problema se desarrolló el motor denominado de CD sin escobillas o BLDC por sus siglas en ingles *brushless direct current* motor [3].

El motor de CD sin escobillas tiene características eléctricas similares a las de un motor de CD convencional, pero con la particularidad de que se ha potenciado su fiabilidad mediante el reemplazo de una conmutación mecánica por una electrónica. Este motor utiliza sensores que miden la posición del rotor. La posición medida se envía al circuito actuador para excitar determinados devanados y con esto lograr que el motor rote. Debido a las múltiples ventajas que proporcionan como por ejemplo alta eficiencia, alta densidad de potencia y capacidad de trabajar a altas velocidades son usados para aplicaciones industriales, electrodomésticos, productos de oficina y en vehículos [3].

A diferencia del motor de CD tradicional el motor sin escobillas tiene los devanados de armadura ubicados en el estator y los imanes permanentes en el rotor, esto trae ventajas como por ejemplo una mejor respuesta de velocidad debido a que el rotor tiene menor inercia. De igual manera dado que los devanados se ubican en el estator se incrementa la capacidad de disipación de calor permitiendo la generación de un mayor par [3].

2.1. Estructura

El motor de CD sin escobillas puede definirse como un sistema compuesto principalmente por 4 elementos los cuales son: un convertidor electrónico de potencia, un motor de CA síncrono de imanes permanentes, sensores y un algoritmo de control [3].

Convertidor de potencia: Transforma un voltaje de CD en uno de CA trifásico, a partir de la frecuencia de la señal de alimentación se varía la velocidad de giro del rotor.

Motor de CA de imanes permanentes: Transforma energía eléctrica en energía mecánica.

Sensores: Miden la posición de los imanes permanentes del rotor, pueden ser de efecto Hall

u ópticos.

Algoritmo de control: Utilizando la posición medida por los sensores y una señal de control, la cual puede ser de velocidad, par o voltaje, se determinan las señales de compuerta de los semiconductores del convertidor de potencia que definen la frecuencia de alimentación al estator.

La figura 2.1 corresponde al esquema del motor de CD sin escobillas.

Figura 2.1: Elementos que componen al sistema del motor de CD sin escobillas

2.2. Principio de funcionamiento

El principio de funcionamiento del motor de CD sin escobillas se basa en modificar la alimentación de los devanados del estator de acuerdo con la posición de los imanes permanentes del rotor, generando con esto un par constante. De acuerdo a lo anterior es indispensable conocer la posición del rotor, para ello se utilizan sensores que por lo general funcionan a partir del efecto Hall [6].

Se utilizan 3 sensores de efecto Hall ubicados a 120 grados eléctricos entre ellos a lo largo de la periferia del estator, los sensores miden el flujo magnético generado por los imanes permanentes. Cada sensor entrega una señal que en conjunto permiten conocer la posición del rotor dividida en 6 secciones. La información obtenida de la posición del rotor se utiliza en conjunto con un algoritmo de control para generar las señales de compuerta de los semiconductores del convertidor de potencia (inversor trifásico) y con ello garantizar la correcta excitación de los devanados del estator. Este tipo de conmutación se denomina *conmutación a 6 pasos* [6].

En la conmutación a 6 pasos se excitan dos fases de manera simultánea mientras que una se deja sin excitación. La posición del rotor indica cual de las fases debe ser excitada en cada instante del ciclo eléctrico. En el inversor trifásico solamente se encuentran activos los interruptores de dos fases al mismo tiempo, cada interruptor tiene un periodo de conducción de 120 grados eléctricos. En las figuras 2.2 a 2.7 se presenta la secuencia de conmutación a seis pasos para un motor de CD sin escobillas trifásico con un par de polos en el rotor [6]. Tomando como ejemplo la figura 2.2 se compone de un circuito equivalente 2.2(a) y una representación

de los polos magnéticos en el motor 2.2(b).

Figura 2.2: Primer paso del proceso de conmutación electrónica [6]

Figura 2.3: Segundo paso del proceso de conmutación electrónica [6]

En la figura 2.8 muestra las ondas de las señales de interés para el funcionamiento del motor de CD sin escobillas. Se muestran las corrientes de alimentación, la forma de onda de la fuerza contra-electromotriz y el par generado [6].

2.3. Modelado del motor de CD sin escobillas

Como punto de partida se seleccionó como modelo del motor de CD sin escobillas el que se plantea en [5]. Se selecciona este modelo dado que considera la distribución de flujo magnético en el entrehierro como trapezoidal, característico de este tipo de motores, se involucran características físicas del motor en las expresiones de inductancia y se modela de manera separada el efecto de los imanes permanentes en el motor. A continuación se presenta paso a paso el modelado del motor especificando expresiones relevantes para la simulación y análisis futuros. El modelo se obtuvo para un motor bajo las siguientes consideraciones:

- El motor es de dos polos y tiene 3 devanados, uno para cada fase, distribuidos de manera uniforme a lo largo de la periferia del estator, los devanados tienen una separación de

Figura 2.4: Tercer paso del proceso de conmutación electrónica [6]

Figura 2.5: Cuarto paso del proceso de conmutación electrónica [6]

120 grados eléctricos.

- El rotor es de polos lisos con un par de polos.
- Cada devanado cuenta con el mismo número de vueltas y tienen el mismo valor de resistencia e inductancia.
- Se considera que la distribución del flujo magnético en el entrehierro es trapezoidal.
- No se consideran corrientes inducidas en el rotor, pérdidas en el acero ni saturación magnética.
- No se consideran devanados de amortiguamiento ya que para este tipo de maquinas no son necesarios.

Todas las figuras que se presentan en esta sección son adaptadas de [5]. La figura 2.9 muestra la construcción básica de un motor de CD sin escobillas trifásico.

Considerando el eje magnético de la fase a como referencia, el devanado de la fase a abarca la superficie del estator de $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{2\pi}{3}$ en un lado y de $\frac{4\pi}{3}$ a $\frac{5\pi}{3}$ en el otro. De manera similar,

Figura 2.6: Quinto paso del proceso de conmutación electrónica [6]

Figura 2.7: Sexto paso del proceso de conmutación electrónica [6]

la fase b de π a $\frac{4\pi}{3}$ y de 0 a $\frac{\pi}{3}$, por ultimo la fase c de $\frac{5\pi}{3}$ a 2π y de $\frac{2\pi}{3}$ a π . La figura 2.10 muestra el rotor compuesto por imanes permanentes, en ella se indica la posición de su eje magnético al igual que el ángulo Δ entre los extremos de los polos.

La posición del rotor se mide con respecto a su eje magnético. Los imanes permanentes ubicados en el rotor generan un campo magnético distribuido de manera uniforme (con respecto a θ que corresponde al ángulo medido desde el eje magnético de la fase a) en el entrehierro como se muestra en la siguiente ecuación:

Figura 2.8: Señales de interés durante el proceso de conmutación a seis pasos

$$\mathbf{B}_r(r, \phi) = \begin{cases} B_{r0} \frac{r_r}{r} \hat{\mathbf{r}} & \text{para } -\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta}{2} \\ -B_{r0} \frac{r_r}{r} \frac{2 \left(\phi - \frac{\pi}{2} \right)}{\Delta} \hat{\mathbf{r}} & \text{para } \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta}{2} \\ -B_{r0} \frac{r_r}{r} \hat{\mathbf{r}} & \text{para } \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta}{2} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2} - \frac{\Delta}{2} \\ B_{r0} \frac{r_r}{r} \frac{2 \left(\phi - \frac{3\pi}{2} \right)}{\Delta} \hat{\mathbf{r}} & \text{para } \frac{3\pi}{2} - \frac{\Delta}{2} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2} + \frac{\Delta}{2} \end{cases} \quad (2.1)$$

Figura 2.9: Estructura de un motor de CD sin escobillas trifásico

Figura 2.10: Rotor de un motor de CD sin escobillas con un solo par de polos

donde r_r corresponde al radio externo del rotor, B_{r0} a la magnitud de densidad de campo magnético de los imanes permanentes, r a la posición radial y $\hat{r}$ al vector unitario en la dirección radial. La relación $\frac{r_r}{r}$ garantiza la conservación del flujo magnético en el entrehierro, es necesaria esa relación debido a la variación del campo magnético en el entrehierro en función de $\frac{1}{r}$ (como se indica en la sección 4.2.1 de [5]) y el ángulo θ_r corresponde al ángulo entre el eje magnético de la fase a y el eje magnético del rotor. La figura 2.11 muestra la distribución radial del campo magnético en el entrehierro producido por los imanes permanentes del rotor, este campo tiene forma trapezoidal lo cual es característico de este tipo de motores.

Debido a la circulación de corriente a través de los devanados del estator se genera un campo magnético en el entrehierro. Para obtener la expresión de dicho campo magnético se analizó por separado el aporte de cada una de las fases. Iniciando con la fase a se definió la densidad de devanado uniforme N_a como:

Figura 2.11: Distribución del campo magnético en el entrehierro debido a los imanes permanentes del rotor $\mathbf{B}_r$

$$N_a(\theta) = \begin{cases} \frac{3 N_s}{\pi} & \text{para } \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \text{ y } \frac{4\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3} \\ 0 & \text{para Resto del estator} \end{cases} \quad (2.2)$$

donde N_s corresponde al número de vueltas por fase. Al integrar la densidad de devanado entre los intervalos comprendidos por el devanado de la fase a se obtiene el numero total de vueltas o espiras:

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{3 N_s}{\pi} d\theta = N_s \quad (2.3)$$

Se llega al mismo resultado si se realiza el mismo procedimiento para los devanados de la fase b y c .

Aplicando la ley de Ampère a lo largo de la trayectoria 1-2-3-1 indicada en la figura 2.12, considerando la intensidad de campo magnético en el acero como cero y teniendo en cuenta la simetría presente $H_a(i_a, \pi + \theta) = -H_a(i_a, \theta)$ se obtiene el siguiente resultado:

Figura 2.12: Trayectoria de aplicación de la ley de Ampère para la fase a

$$2gH_a(i_a, \theta) = \begin{cases} N_s i_a & \text{para } -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \\ \int_{\theta}^{2\pi/3} \frac{3(N_s i_a)}{\pi} d\theta - \int_{4\pi/3}^{\theta+\pi} \frac{3(N_s i_a)}{\pi} d\theta & \text{para } \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \\ -N_s i_a & \text{para } \frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3} \\ -\int_{\theta}^{5\pi/3} \frac{3(N_s i_a)}{\pi} d\theta + \int_{7\pi/3}^{\theta+\pi} \frac{3(N_s i_a)}{\pi} d\theta & \text{para } \frac{4\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3} \end{cases} \quad (2.4)$$

donde i_a corresponde a la corriente del devanado de la fase a y g a la longitud del entrehierro. De la ecuación 2.4 se obtiene la expresión de la intensidad de campo magnético generado por la fase a :

$$\mathbf{H}_a(i_a, r, \theta) = \begin{cases} \frac{N_s i_a}{2g} \frac{r_r}{r} \hat{\mathbf{r}} & \text{para } -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \\ \frac{N_s i_a}{2g} \left(3 - \frac{6\theta}{\pi}\right) \frac{r_r}{r} \hat{\mathbf{r}} & \text{para } \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \\ -\frac{N_s i_a}{2g} \frac{r_r}{r} \hat{\mathbf{r}} & \text{para } \frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3} \\ \frac{N_s i_a}{2g} \left(\frac{6\theta}{\pi} - 9\right) \frac{r_r}{r} \hat{\mathbf{r}} & \text{para } \frac{4\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3} \end{cases} \quad (2.5)$$

En [5] se asume que el campo magnético en el entrehierro es constante, sin embargo para asegurar la conservación del flujo magnético se adicionó el termino $\frac{r_r}{r}$. A partir de la ecuación 2.5 partiendo de que $\mathbf{B}_a = \mu_0 \mathbf{H}_a$ en el entrehierro, se obtiene la expresión del campo magnético generado por la fase a para cualquier punto (r, θ) en el entrehierro:

$$\mathbf{B}_a(i_a, r, \theta) = \begin{cases} \frac{\mu_0 N_s i_a}{2g} \frac{r_r}{r} \hat{\mathbf{r}} & \text{para } -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \\ \frac{\mu_0 N_s i_a}{2g} \left(3 - \frac{6\theta}{\pi}\right) \frac{r_r}{r} \hat{\mathbf{r}} & \text{para } \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \\ -\frac{\mu_0 N_s i_a}{2g} \frac{r_r}{r} \hat{\mathbf{r}} & \text{para } \frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3} \\ \frac{\mu_0 N_s i_a}{2g} \left(\frac{6\theta}{\pi} - 9\right) \frac{r_r}{r} \hat{\mathbf{r}} & \text{para } \frac{4\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3} \end{cases} \quad (2.6)$$

Realizando el mismo procedimiento para las fases b y c :

$$\mathbf{B}_b(i_b, r, \theta) = \mathbf{B}_a\left(i_b, r, \theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\mathbf{B}_c(i_c, r, \theta) = \mathbf{B}_a\left(i_c, r, \theta - \frac{4\pi}{3}\right)$$

El campo magnético generado por cada una de las fases del estator tiene forma trapezoidal. La figura 2.13 muestra esquemáticamente la distribución del campo magnético $\mathbf{B}_a$.

Figura 2.13: Densidad del campo magnético $\mathbf{B}_a$ en el entrehierro generado por la fase a

En [5] se plantea una expresión que relaciona los parámetros físicos de la máquina con la inductancia de los devanados del estator, se obtiene a partir del flujo magnético que enlaza a los devanados del estator. Utilizando la ecuación 2.6 y la superficie de integración indicada en la figura 2.14, se obtiene la expresión de los encadenamientos de flujo del devanado de la fase a debido a la corriente i_a :

Figura 2.14: Superficie de integración para la determinación de flujo magnético en una espira de la fase a producido por la corriente i_a

$$\begin{aligned}\phi_a(i_a, \theta) &= \int_0^{l_1} \int_{\theta-\pi}^{\theta} \mathbf{B}_a(i_a, r, \theta') \cdot \mathbf{r}_s d\theta' dl \mathbf{r} \\ &= \frac{\mu_0 r_r l_1 N_s i_a}{2g} \left(-\frac{6}{\pi} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)^2 + \frac{5\pi}{6} \right)\end{aligned}\quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}\lambda_a(i_a, 0, 0) &= \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \phi_a(i_a, \theta) \frac{3N_s}{\pi} d\theta \\ &= \frac{\mu_0 r_r l_1 \pi N_s^2 i_a}{2g} \frac{14}{18} \\ &= L_s i_a\end{aligned}\quad (2.8)$$

De acuerdo con la ecuación 2.8 se tiene que la inductancia propia del devanado de la fase **a** es:

$$L_s = \frac{\mu_0 r_r l_1 \pi N_s^2}{2g} \frac{14}{18} \quad (2.9)$$

donde l_1 corresponde a la longitud axial del estator. La inductancia es constante debido a que no varia el tamaño del entrehierro con respecto a la posición del rotor. Repitiendo el procedimiento, pero en esta ocasión utilizando el devanado de la fase **b** se obtiene, la expresión de los encadenamiento de flujo debido a la corriente i_a :

$$\begin{aligned}\phi_b(i_a, \theta) &= \int_0^{l_1} \int_{\theta-\pi}^{\theta} \mathbf{B}_a(i_a, r, \theta') \cdot \mathbf{r}_s d\theta' dl \mathbf{r} \\ &= \frac{\mu_0 r_r l_1 N_s i_a}{g} (\pi - \theta)\end{aligned}\quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}\lambda_b(i_a, 0, 0) &= \int_{\pi}^{4\pi/3} \phi_b(i_a, \theta) \frac{3N_s}{\pi} d\theta \\ &= -\frac{\mu_0 r_r l_1 \pi N_s^2 i_a}{6g} \\ &= -M i_a\end{aligned}\quad (2.11)$$

Figura 2.15: Superficie de integración para la determinación de flujo magnético en una espira de la fase b producido por la corriente i_a

La figura 2.15 muestra la superficie cilíndrica de integración implementada en este caso.

De acuerdo a la ecuación 2.11 se tiene que la inductancia mutua entre el devanado de la fase b y el de la fase a está dada por:

$$M = -\frac{\mu_0 r_r l_1 \pi N_s^2}{6 g} \quad (2.12)$$

De igual manera para el devanado de la fase c se obtiene, la expresión de los encadenamiento de flujo debido a la corriente i_a :

$$\begin{aligned} \phi_c(i_a, \theta) &= \int_0^{l_1} \int_{\theta-\pi}^{\theta} \mathbf{B}_a(i_a, r, \theta') \cdot \mathbf{r}_s d\theta' dl \mathbf{r} \\ &= \frac{\mu_0 r_r l_1 N_s i_a}{g} (\pi - 2\theta) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \lambda_c(i_a, 0, 0) &= \int_{5\pi/3}^{2\pi} \phi_c(i_a, \theta) \frac{3 N_s}{\pi} d\theta \\ &= -\frac{\mu_0 r_r l_1 \pi N_s^2 i_a}{6 g} \\ &= -M i_a \end{aligned} \quad (2.14)$$

Figura 2.16: Superficie de integración para la determinación de flujo magnético en una espira de la fase *c* producido por la corriente i_a

La figura 2.16 muestra la superficie cilíndrica de integración implementada en este caso.

De acuerdo a la ecuación 2.14 se tiene que la inductancia mutua entre el devanado de la fase *c* y el de la fase *a* es:

$$M = -\frac{\mu_0 r_r l_1 \pi N_s^2}{6g} \quad (2.15)$$

Para las otras dos fases el proceso es el mismo. En resumen, los encadenamientos de flujo de los devanados del estator debido a las corrientes del estator están dados por:

$$\lambda_a(i_a, i_b, i_c) = L_s i_a - M i_b - M i_c \quad (2.16)$$

$$\lambda_b(i_a, i_b, i_c) = -M i_a + L_s i_b - M i_c \quad (2.17)$$

$$\lambda_c(i_a, i_b, i_c) = -M i_a - M i_b + L_s i_c \quad (2.18)$$

En [5] se plantea que el campo magnético debido a los imanes permanentes también genera encadenamientos de flujo en los devanados del estator. El problema se divide en tres casos, para cada caso se obtiene la expresión de flujo magnético y a partir de ahí los encadenamientos de flujo. Este procedimiento se implementa para el devanado de la fase *a*.

Caso 1: Como se muestra en la figura 2.17, se obtiene la expresión de encadenamientos de flujo para valores de θ_r (posición del eje magnético del rotor con respecto al eje magnético de la fase **a**) entre $\frac{\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{5\pi}{6}$.

Figura 2.17: Superficie de integración para la determinación del flujo magnético de una espira de la fase **a** debido al campo magnético del rotor cuando $\frac{\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{5\pi}{6}$

Caso 2: Como se muestra en la figura 2.18, se obtiene la expresión de encadenamientos de flujo para valores de θ_r entre $-\frac{\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{\pi}{6}$ y $\theta_r + \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$.

Caso 3: Como se muestra en la figura 2.19, se obtiene la expresión de encadenamientos de flujo para valores de θ_r entre $-\frac{\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \theta_r + \frac{\pi}{2}$. Así,

$$\phi_{a_r}(i_a, \theta) = \int_0^{l_1} \int_{\theta-\pi}^{\theta} \mathbf{B}_r(r, \phi) \cdot \mathbf{r}_s d\theta' dl \mathbf{r} \quad (2.19)$$

$$\phi_{a_r}(i_a, \theta) = \begin{cases} 2 r_r l_1 B_{r0} (\theta - \theta_r) & \text{para } \frac{\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{5\pi}{6} \\ -2 r_r l_1 B_{r0} (\theta - \theta_r - \pi) & \text{para } -\frac{\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{\pi}{6} \text{ y } \theta_r + \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \\ 2 r_r l_1 B_{r0} (\theta - \theta_r) & \text{para } -\frac{\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{\pi}{6} \text{ y } \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \theta_r + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (2.20)$$

A partir de la ecuación 2.20 se obtiene la expresión de encadenamientos de flujo de la fase **a** debido a los imanes permanentes del rotor:

$$\lambda_{a_r}(\theta_r) = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \phi_{a_r}(i_a, \theta) \frac{3 N_s}{\pi} d\theta \quad (2.21)$$

Figura 2.18: Superficie de integración para la determinación del flujo magnético de una espira de la fase **a** debido al campo magnético del rotor cuando $-\frac{\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{\pi}{6}$ y $\theta_r + \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$

$$\lambda_{a_r}(\theta_r) = \begin{cases} r_r l_1 B_{r0} N_s \left(-\frac{6}{\pi} \theta_r^2 + \frac{5\pi}{6} \right) & \text{para } -\frac{\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{\pi}{6} \\ r_r l_1 B_{r0} N_s \left(2 \left(\frac{\pi}{3} - \theta_r \right) + \frac{\pi}{3} \right) & \text{para } \frac{\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{5\pi}{6} \\ -r_r l_1 B_{r0} N_s \left(-\frac{6}{\pi} (\theta_r - \pi)^2 + \frac{5\pi}{6} \right) & \text{para } \frac{5\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{7\pi}{6} \\ -r_r l_1 B_{r0} N_s \left(2 \left(\frac{\pi}{3} - (\theta_r - \pi) \right) + \frac{\pi}{3} \right) & \text{para } \frac{7\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{11\pi}{6} \end{cases} \quad (2.22)$$

Se define a λ_r como:

$$\lambda_r(\theta_r) = \frac{\lambda_{a_r}(\theta_r)}{M_{sr}} \quad (2.23)$$

donde $M_{sr} = 2 r_r l_1 N_s B_{r0}$ corresponde al coeficiente de inductancia mutua entre el estator y el rotor. A partir de los resultados obtenidos para la fase **a** se plantean las expresiones para las otras dos fases.

Figura 2.19: Superficie de integración para la determinación del flujo magnético de una espira de la fase **a** debido al campo magnético del rotor cuando θ_r entre $-\frac{\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \theta_r + \frac{\pi}{2}$

$$\lambda_{a_r}(\theta_r) = M_{sr} \lambda_r(\theta_r)$$

$$\lambda_{b_r}(\theta_r) = M_{sr} \lambda_r(\theta_r - \frac{2\pi}{3})$$

$$\lambda_{c_r}(\theta_r) = M_{sr} \lambda_r(\theta_r - \frac{4\pi}{3})$$

Utilizando la ley de Faraday se llega a la expresión de la fuerza electromotriz inducida en los devanados del estator. Para la fase **a** se tiene que

$$e_a = \frac{d}{dt} M_{sr} \lambda_r(\theta_r) \quad , \text{ tal que: } \quad (2.24)$$

$$e_a = \begin{cases} M_{sr} \frac{6\theta_r}{\pi} \omega_r & \text{para } -\frac{\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{\pi}{6} \\ M_{sr} \omega_r & \text{para } \frac{\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{5\pi}{6} \\ -M_{sr} \frac{6(\theta_r - \pi)}{\pi} \omega_r & \text{para } \frac{5\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{7\pi}{6} \\ -M_{sr} \omega_r & \text{para } \frac{7\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

Se define a $e_p = M_{sr}$ y

$$e(\theta_r) = \frac{e_a}{M_{sr} \omega_r} \quad (2.25)$$

se tiene que las fuerzas contra-electromotrices de los tres devanados del estator equivalen a:

$$\begin{aligned} e_a &= e_p e(\theta_r) \omega_r \\ e_b &= e_p e\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \omega_r \\ e_c &= e_p e\left(\theta_r - \frac{4\pi}{3}\right) \omega_r \end{aligned}$$

Estas tres fuerzas contra-electromotrices tienen forma trapezoidal y es la razón por la que este motor, en varias referencias, es conocido como motor síncrono de fuerza contra-electromotriz trapezoidal. Por último se debe obtener una expresión para el par electromagnético generado por el motor, para ello es necesario conocer la fuerza magnética que ejerce el campo magnético del rotor sobre los devanados del estator. Nuevamente se toma como ejemplo el devanado de la fase **a** para calcular la fuerza magnética que experimenta el devanado en la sección axial superior ($\pi/3 \leq \theta \leq 2\pi/3$) como se indica en la figura 2.20, por lo que:

Figura 2.20: Fuerza magnética ejercida por el campo magnético del rotor sobre una de las espiras del devanado de la fase **a** en la sección axial superior

$$\begin{aligned} \vec{F}_a(r, \phi) &= i_a (l_1 \mathbf{z}) \times \mathbf{B}_r(r, \phi) \\ &= i_a l_1 B_r(r, \phi) \vec{\theta} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Repetiendo el proceso anterior para la sección axial inferior

$$\begin{aligned} \vec{F}_a(r, \phi) &= i_a (-l_1 \mathbf{z}) \times \mathbf{B}_r(r, \phi) \\ &= -i_a l_1 B_r(r, \phi) \vec{\theta} \end{aligned} \quad (2.27)$$

El par total en la sección axial del devanado de la fase **a** producido por el campo magnético del rotor equivale a

$$\tau_a = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \vec{r} \times \vec{F}_a \frac{3N_s}{\pi} d\theta + \int_{4\pi/3}^{5\pi/3} \vec{r} \times \vec{F}_a \frac{3N_s}{\pi} d\theta \quad \text{tal que:} \quad (2.28)$$

$$\tau_a = \begin{cases} 2l_1 r_r N_s B_{r0} \frac{6\theta_r}{\pi} i_a & \text{para } -\frac{\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{\pi}{6} \\ 2l_1 r_r N_s B_{r0} i_a & \text{para } \frac{\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{5\pi}{6} \\ -2l_1 r_r N_s B_{r0} \frac{6(\theta_r - \pi)}{\pi} i_a & \text{para } \frac{5\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{7\pi}{6} \\ -2l_1 r_r N_s B_{r0} i_a & \text{para } \frac{7\pi}{6} \leq \theta_r \leq \frac{11\pi}{6} \end{cases} \quad (2.29)$$

El par electromagnético que experimenta el rotor debido al campo magnético generado por las corrientes del estator equivale a

$$\tau_{ra} = -\tau_a$$

Se define a $\tau_p = e_p = M_{sr}$, por lo tanto se tiene que los pares electromagnéticos que experimenta el rotor debido a cada una de las fases del estator se pueden representar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tau_{ra}(\theta_r, i_a) &= -\tau_p e(\theta_r) i_a \\ \tau_{rb}(\theta_r, i_b) &= -\tau_p e\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) i_b \\ \tau_{rc}(\theta_r, i_c) &= -\tau_p e\left(\theta_r - \frac{4\pi}{3}\right) i_c \end{aligned}$$

Finalmente se presentan las ecuaciones del sistema eléctrico y mecánico del motor, además de su representación en espacio de estado.

Sistema eléctrico

Encadenamientos de flujo del estator

$$\begin{aligned} \lambda_a(i_a, i_b, i_c) &= L_s i_a - M i_b - M i_c + e_p \lambda_r(\theta_r) \\ \lambda_b(i_a, i_b, i_c) &= -M i_a + L_s i_b - M i_c + e_p \lambda_r\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \lambda_c(i_a, i_b, i_c) &= -M i_a - M i_b + L_s i_c + e_p \lambda_r\left(\theta_r - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Par electromagnético generado por las fases del estator

$$\begin{aligned}\tau_{ra}(\theta_r, i_a) &= -\tau_p e(\theta_r) i_a \\ \tau_{rb}(\theta_r, i_b) &= -\tau_p e\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) i_b \\ \tau_{rc}(\theta_r, i_c) &= -\tau_p e\left(\theta_r - \frac{4\pi}{3}\right) i_c\end{aligned}$$

Ecuaciones de alimentación de los devanados del estator

Estas ecuaciones pueden representarse de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & -M & -M \\ -M & L_s & -M \\ -M & -M & L_s \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + R_s \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} - e_p \omega_r \begin{bmatrix} e(\theta_r) \\ e(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) \\ e(\theta_r - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

donde R_s corresponde a la resistencia de los devanados del estator. Si se consideran las corrientes del estator balanceadas, el sistema se modifica de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s + M & 0 & 0 \\ 0 & L_s + M & 0 \\ 0 & 0 & L_s + M \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + R_s \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} - e_p \omega_r \begin{bmatrix} e(\theta_r) \\ e(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) \\ e(\theta_r - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Sistema mecánico

Para el sistema mecánico se cuenta con dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}J \frac{d\omega_r}{dt} &= -\tau_p e(\theta_r) i_a - \tau_p e\left(\theta_r - \frac{2\pi}{3}\right) i_b - \tau_p e\left(\theta_r - \frac{4\pi}{3}\right) i_c - \tau_L \\ \frac{d\theta_r}{dt} &= \omega_r\end{aligned}$$

donde τ_L equivale al par de carga y ω_r a la velocidad de rotación del rotor:

Modelo en espacio de estados

Se definen como variables de estado del motor las corrientes de los devanados del estator, la posición del rotor y la velocidad angular del rotor, se define a:

$$a_1 = \frac{-R_s}{L_s + M} \quad a_2 = \frac{e_p}{L_s + M} \quad a_3 = \frac{1}{L_s + M} \quad b_1 = \frac{-\tau_p}{J} \quad b_2 = \frac{-\tau_L}{J}$$

$$\begin{bmatrix} di_a/dt \\ di_b/dt \\ di_c/dt \\ d\omega_r/dt \\ d\theta_r/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & a_2 e(\theta_r) \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 e(\theta_r - 2\pi/3) \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & a_2 e(\theta_r - 4\pi/3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1 e(\theta_r) & b_1 e(\theta_r - 2\pi/3) & b_1 e(\theta_r - 4\pi/3) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ \omega_r \\ \theta_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 u_1 \\ a_3 u_2 \\ a_3 u_3 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

El sistema de la ecuación 2.32 se resuelve con el metodo de Runge-Kutta.

2.4. Método de Runge-Kutta

El método de Runge-kutta tiene la misma precisión que las series de Taylor pero sin la necesidad de calcular derivadas de orden superior. De forma generalizada se tiene que:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h) h \quad (2.33)$$

donde $\phi(x_i, y_i, h)$ se denomina función de incremento que se puede interpretar como una pendiente representativa sobre el intervalo entre dos puntos, h corresponde al tamaño del paso entre puntos, y corresponde a la variable dependiente y x a la variable independiente. La función de incremento se escribe de la siguiente manera [12]:

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n \quad (2.34)$$

donde las a son constantes y las k equivalen a

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_1, y_1) \\ k_2 &= f(x_1 + p_1 h, y_1 + q_{11} k_1 h) \\ k_3 &= f(x_1 + p_2 h, y_1 + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\ &\vdots \\ k_n &= f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h) \end{aligned}$$

donde las p y q son constantes. El valor que se le asigna a n indica el orden del método, las constantes a 's, p 's y q 's se evalúan igualando la ecuacion 2.33 con la expansión de las series de Taylor de orden n , haciendo esto se obtiene un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones. En este trabajo se implementa el método de cuarto orden debido a su facilidad

de programación y a que el error es aceptable. La forma comúnmente utilizada se muestra a continuación:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) h \quad (2.35)$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3h) \end{aligned}$$

3. Saturación en el motor BLDC

En este trabajo se consideró el efecto de saturación magnética presente durante el funcionamiento del motor. Para ello se implementó la metodología planteada en [11] para considerar el efecto de la saturación en máquinas eléctricas en conjunto con el método numérico *Cubic splines* para reconstruir la curva de magnetización del material de los imanes permanentes del rotor. A continuación, se describe el proceso, se presentan los códigos programados y los resultados obtenidos.

3.1. Saturación magnética

En [11] se plantean las siguientes suposiciones para considerar la saturación magnética:

- Las inductancias de dispersión son independientes de la saturación. Principalmente el medio por el cual se desplazan los flujos de dispersión es el aire por lo tanto no se ven afectados por la saturación. De acuerdo con lo anterior la única inductancia que se vería afectada es la de magnetización [11].
- Los flujos de dispersión no contribuyen a la saturación del rotor. Los flujos de dispersión por lo general son pequeños y el camino por el cual se desplazan no coincide en muchos tramos con el flujo principal. La saturación se determina por el flujo presente en el entrehierro [11].
- La relación existente entre el flujo en el entrehierro y la fuerza magnetomotriz bajo condiciones de carga es la misma que bajo condición sin carga. De acuerdo con lo anterior es posible representar la saturación utilizando la curva de saturación en circuito abierto [11].
- La saturación magnética de los imanes permanentes del rotor afecta directamente al campo magnético presente en el entrehierro lo que a su vez modifica el valor de reluctancia de la máquina, este cambio se refleja en la inductancia de magnetización de la máquina dada la relación existente entre reluctancia e inductancia.

Teniendo en cuenta las suposiciones presentadas, la saturación se representa de la siguiente manera:

$$L_{ss} = k_s L_s \quad (3.1)$$

donde L_s corresponde al valor de la inductancia de magnetización no saturada, k_s a el factor de saturación y L_{ss} a la inductancia de magnetización saturada.

Figura 3.1: Curva de saturación en vacío indicando los efectos de saturación.

Definiendo un punto de operación a como se indica en la figura 3.1 el factor de saturación equivale a:

$$k_s = \frac{\lambda_a}{\lambda_{a0}} \quad (3.2)$$

La expresión 3.2 permite conocer el grado de saturación que presenta el motor para cualquier valor de voltaje o encadenamientos de flujo del entrehierro. Para poder calcular el factor de saturación es indispensable conocer la desviación existente entre la línea del entrehierro y la curva de saturación en vacío. En [11] se divide la curva de saturación en vacío en 3 regiones como se indica en la figura 3.2 y para cada una de ellas se obtiene una expresión matemática.

Las regiones de la curva de saturación son demarcadas por los valores λ_{T1} y λ_{T2} . Las regiones se definen de la siguiente manera :

Región 1: Se denomina región no saturada y corresponde a los valores de encadenamientos entre $\lambda_a \leq \lambda_{T1}$. Definiendo a λ_I como $\lambda_{a0} - \lambda_a$ se cuenta con la siguiente expresión para el factor de saturación.

Figura 3.2: Curva de saturación en vacío indicando las regiones de saturación.

$$k_s = \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_I} \quad (3.3)$$

Para la región no saturada, λ_I siempre tiene valor de 0.

Región 2: Se denomina región no lineal y corresponde a los valores de encadenamiento entre $\lambda_{T1} \leq \lambda_a \leq \lambda_{T2}$. En [11] se propone para λ_I lo siguiente:

$$\lambda_I = A_{sat} e^{B_{sat}(\lambda_a - \lambda_{T1})} \quad (3.4)$$

donde A_{sat} y B_{sat} son constantes que dependen de la característica de saturación en la región.

Región 3: Se denomina región lineal saturada y corresponde a los valores de encadenamientos entre $\lambda_a \leq \lambda_{T2}$. Al igual que para la región anterior se propone una expresión para λ_I .

$$\lambda_I = \lambda_{G2} + L_{rela} (\lambda_a - \lambda_{T2}) - \lambda_a \quad (3.5)$$

donde L_{rela} corresponde a la relación entre la pendiente de la curva del entrehierro y el incremento de la pendiente de la curva de saturación en vacío en la región lineal saturada L_{incr} .

A pesar de que la metodología planteada en [11] no aparenta ser muy compleja requiere en primera instancia de conocer muy bien la característica de saturación del material presente en el rotor del motor, además es necesario manipular y realizar mediciones sobre la curva de

saturación en vacío, lo que puede llegar a ser una tarea ardua y dificultosa. Se obtiene el factor de saturación implementando la ecuación 3.2, pero utilizando el método numérico *cubic splines* y la regresión lineal.

3.2. Obtención del factor de saturación (*Cubic splines*)

Por lo general se utilizan polinomios de orden n para interpolar $n + 1$ datos, por ejemplo para 5 datos se utiliza un polinomio de sexto orden. Este polinomio puede brindar una correcta aproximación a la curva que se ajusta a esos puntos pero existen casos para los cuales se llega a resultados erróneos debido a errores de redondeo. Por tal motivo se recomienda implementar un polinomio de menor orden para subconjuntos de datos, estos polinomios se denominan *funciones splines* [12].

En este trabajo se implementaron las funciones de tercer orden conocidas como *cubic splines*. Este tipo de interpolación consiste en obtener polinomios de tercer orden para cada intervalo entre puntos de datos. Los polinomios buscados son de la siguiente forma:

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad (3.6)$$

Para $n + 1$ datos existen n intervalos y por lo tanto $4n$ incógnitas por encontrar. Es necesario contar con $4n$ condiciones las cuales son [12]:

- El valor de las funciones debe ser igual en los puntos interiores ($2n - 2$ condiciones).
- La primera y última función deben pasar por el primer y segundo punto respectivamente (2 condiciones).
- La primera derivada de las funciones que comparten un punto interior deben de ser iguales ($n - 1$ condiciones).
- La segunda derivada de las funciones que comparten un punto interior deben de ser iguales ($n - 1$ condiciones).
- La segunda derivada de las funciones relacionadas con los puntos extremos son cero (2 condiciones).

Para cada uno de los intervalos entre puntos se tiene la siguiente ecuación cubica:

$$\begin{aligned} f_i(x) = & \frac{f_i''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})} (x_i - x)^3 + \frac{f_i''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})} (x - x_{i-1})^3 \\ & + \left[\frac{f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} - \frac{f_i''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x_i - x) \\ & + \left[\frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i-1})} - \frac{f_i''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x - x_{i-1}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para resolver la ecuación 3.7 se debe conocer el valor de la segunda derivada en los extremos del intervalo evaluado. Esto se puede solucionar a través de la expresión 3.8, la cual surge de igualar la primera derivada de x_i y x_{i-1} estas derivadas se calculan a partir de 3.7:

$$\begin{aligned} & (x_i - x_{i-1}) f_i''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1}) f_i''(x_i) + (x_{i+1} - x_i) f_i''(x_{i+1}) \\ &= \frac{6}{(x_{i+1} - x_i)} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{(x_i - x_{i+1})} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \end{aligned} \quad (3.8)$$

La ecuación 3.8 se plantea en los puntos que son comunes para dos intervalos. Se tienen entonces $n - 1$ ecuaciones simultáneas con $n - 1$ incógnitas. Para poder utilizar el método *cubic splines* primero se identificaron los tipos de imanes más comunes usados en el motor de CD sin escobillas. Por lo general se tienen tres tipos de aleación de aluminio-níquel-cobalto, imanes de ferrito y por último neodimio.

Con ayuda de la herramienta computacional Matlab se implementó el método numérico con los materiales de prueba. Los materiales utilizados fueron los siguientes N30SH, N38SH, N40UH, N52, Y30. Los datos utilizados para cada uno de los materiales se obtuvieron de la base de datos en línea de *K and J magnetics, inc.* Para el material N52 se utilizaron datos medidos para una temperatura de 40 grados celsius, para los demás se utilizaron los medidos para una temperatura de 20 grados celsius. A continuación se describe el código realizado para implementar la metodología planteada en [11] usando *cubic splines*.

Paso 1 Declaración de variables: Primero se deben declarar las variables en donde se almacenan los datos de intensidad de campo magnético y densidad de flujo magnético. También se debe contar con variables que almacenen el número total de puntos, el número total de intervalos y el tamaño entre cada uno de los intervalos.

$$\begin{aligned} H &= [\text{Datos de intensidad de campo magnético}] \\ B &= [\text{Datos de densidad de flujo magnético}] \\ N &= \text{length}(H) \quad \text{Número de puntos} \\ n &= N - 1 \quad \text{Número de intervalos} \\ p &= H(N) - H(1)/n \quad \text{Tamaño de cada intervalo} \end{aligned}$$

El comando *length* entrega el número de elementos de un vector o el tamaño de una matriz. El sistema de ecuaciones que se debe resolver se representa de forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_3 - 2y_2 + y_1 \\ y_4 - 2y_3 + y_2 \\ y_5 - 2y_4 + y_3 \\ \vdots \\ y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

En donde h corresponde al tamaño del intervalo entre puntos y y_n al valor de la variable dependiente (densidad de flujo magnético) en el punto número n . La ecuación 3.9 se resuelve para el vector σ con el resultado se obtienen las constantes de cada uno de los polinomios indicados en la ecuación 3.6.

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{6h} \\ b_i &= \frac{\sigma_i}{2} \\ c_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{h}{6} (2\sigma_i + \sigma_{i+1}) \\ d_i &= y_i \end{aligned}$$

De acuerdo a la ecuación 3.9 es indispensable crear la matriz diagonal del lado izquierdo y el vector del lado derecho de la igualdad:

```
Mdiag = diag(4 * ones(1, n - 1)) + diag(ones(1, n - 2), 1) + diag(ones(1, n - 2), -1)
for i = 1 : n - 1
    Vd(i) = 6/(p * p)(B(i + 2) - 2 B(i + 1) + B(i))
end
Vd = Vd' Se debe transponer el vector
```

El comando *ones* genera un vector conformado solamente por el número 1, el tamaño del vector depende de los parámetros que se ingresen. El comando *diag* genera una matriz diagonal.

Paso 2 Obtención del vector σ : Para obtener el vector sigma, se multiplica el vector del lado derecho de la ecuación 3.9 por la inversa de la matriz diagonal.

$$\begin{aligned} w &= \text{MdiagInv} \cdot \text{Vd} \\ \text{Vsigma} &= [0; w; 0] \end{aligned}$$

De la anterior operación se debe recalcar que σ_1 y σ_{n+1} equivalen a 0.

Paso 3 Obtención de las constantes de los polinomios f_i : Habiendo calculado cada uno de los componentes del vector σ se obtuvieron las constantes de cada polinomio f_i :

```

for i = 1 : n
a(i) = (Vsigma(i + 1) - Vsigma(i))/6 p
b(i) = Vsigma(i)/2
c(i) = ((B(i + 1) - B(i))p - (p/6) (2 · Vsigma(i) + Vsigma(i+1)))
d(i) = B(i)
end

```

Paso 4 Interpolación de datos: Para realizar la interpolación de datos primero se debe dividir cada intervalo en subintervalos. El número de subintervalos depende del tipo de margen de error que se tenga para el resultado final:

r = Número de subintervalo

hh = p/r Tamaño del subintervalo

Hnuevo = H(1) : hh : H(N) Se crea un nuevo vector de intensidad de campo magnético

Para finalizar se evalúa cada polinomio f_i utilizando los puntos creados en cada intervalo:

```

for i = 1 : n
for j = r · (i - 1) + 1 : r · i
f(j) = a(i) · (Hnuevo(j) - H(i))3 + b(i) · (Hnuevo(j) - H(i))2
+ c(i) · (Hnuevo(j) - H(i)) + d(i)
end
end
f(r · n + 1) = B(N) Ultimo valor de la curva de magnetización

```

Paso 5 Obtención de la curva del entrehierro: Para calcular el factor de saturación es indispensable contar con la curva del entrehierro. Utilizando dos puntos dentro de la región lineal de la curva de magnetización se implemento una interpolación lineal para obtener el valor de densidad de flujo magnético (sobre la curva del entrehierro) para diferentes valores de intensidad de campo magnetico.

P1 = [Punto numero 1]

P2 = [Punto numero 2]

Puntos = [Puntos de interes sobre la curva del entrehierro]

Nint = length(Puntos) Número de puntos a interpolar

for i = 1 : Nint

Centre(i) = (((Puntos(i) - P1(1))(P2(1) - P1(1))) · (P2(2) - P1(2))) + P1(2)

end

Paso 6 Obtención del factor de saturación: Para obtener el factor de saturación se realiza el cociente indicado en la ecuación 3.2.

```

for i = 1 : Nint
    k(i) = f(i)/Centre(i)
    if k(i) > 1
        k(i) = 1
    end
end
end

```

Se adicionó un condicional en el código para garantizar que el valor del factor de saturación no sea mayor a 1. A continuación se presentan los resultados obtenidos para los materiales de prueba especificados.

Figura 3.3: Curva de magnetización, curva del entrehierro y factor de saturación para el material N38SH

A partir de los resultados obtenidos para los materiales de prueba seleccionados se puede concluir lo siguiente:

- El número de datos utilizados de la región saturada para la implementación del método *cubic splines* no tiene una influencia significativa en los resultados finales. Esto se debe a que en esta región de la curva el comportamiento es prácticamente lineal por lo tanto los resultados no se ven afectados al reducir el número de puntos.
- A medida que incrementa la intensidad de campo magnético, a la cual se ve sometido el material magnético del rotor, disminuye el valor del factor de saturación. Un pequeño factor de saturación se traduce en una disminución considerable de la inductancia de magnetización.

Figura 3.4: Curva de magnetización, curva del entrehierro y factor de saturación para el material N30SH

Figura 3.5: Curva de magnetización, curva del entrehierro y factor de saturación para el material N40UH

Figura 3.6: Curva de magnetización, curva del entrehierro y factor de saturación para el material Y30

Figura 3.7: Curva de magnetización, curva del entrehierro y factor de saturación para el material N52

4. Simulación del motor de CD sin escobillas

En este capítulo se presenta la simulación del motor de CD sin escobillas. La simulación del motor se divide en las siguientes secciones:

- Emulación de las señales entregadas por los sensores de efecto hall.
- Construcción de las señales de los voltajes de alimentación.
- Construcción de las funciones trapezoidales para la fuerza contra-electromotriz.
- Obtención de las curvas de las señales de intensidad de campo magnético.
- Programación y solución de las ecuaciones del sistema eléctrico y mecánico del motor.
- De manera adicional se presentan las señales de compuerta para el dispositivo de conmutación.

Para cada una de estas secciones se presenta el código implementado en Matlab y en lenguaje Fortran, se presentan las especificaciones del motor utilizado para realizar la simulación, los resultados obtenidos para cada una de las secciones indicadas y por último las repuestas de velocidad, corrientes y par obtenidas de la simulación.

4.1. Definición de variables

Antes de abordar las secciones indicadas es indispensable definir las variables de trabajo. En Matlab solo es necesario especificar los parámetros físicos del motor. Por otro lado en Fortran se debe definir cada una de las variables a utilizar, estas variables se dividen principalmente en tres categorías: enteras, reales y reales asignables. Las variables reales asignables son aquellas a las cuales se les puede asignar el número de datos que almacenan en cualquier tramo del código. A continuación se presentan las variables utilizadas para realizar la simulación.

Para Matlab:

$V_{dc} = 16$ Voltaje de alimentación

$g = 0,9890e - 3$ Entrehiero estimado

$p = 2$ Pares de polos
 $L = 0,805e - 3$ Inductancia propia de los devanados del estator
 $M = (3/7) * L$ Inductancia mutua de los devanados del estator
 $ep = 22,02e - 3$ Constante de fuerza contraelectromotriz
 $tp = 22,02e - 3$ Constante de par
 $R = 0,7915$ Resistencia de los devanados del estator
 $J = 1,2278e - 5$ Momento de inercia del rotor
 $B = 1,9079e - 4$ Coeficiente de amortiguamiento

Para Fortran:

Enteras :

i Número de puntos
 j Contador de ciclo
 p Pares de polos
 t Tiempo de simulación

Reales :

paso Tamaño del paso para el método Rugen Kutta
 L Inductancia propia
 M Inductancia mutua
 R Resistencia de los devanados del estator
 ep Constante de fuerza contraelectromotriz
 tp Constante de par
 Jin Momento de inercia del rotor
 Vdc Voltaje de alimentación
 g Longitud del entrehierro
 $pi = \arccos(-1)$

$$\text{Cons1} = \frac{p \cdot ep}{L + M}$$

$$\text{Cons2} = \frac{R}{L + M}$$

$$\text{Cons3} = \frac{1}{L + M}$$

$$\text{Cons4} = \frac{-tp}{Jin}$$

$$\text{Cons5} = \frac{-1}{J_{in}}$$

$$\text{Cons6} = \frac{-B}{J_{in}}$$

Reales asignables :

Ii(:)	Corrientes del motor i:1,...,3
Vi(:)	Voltajes de alimentación i:1,...,3
ei(:)	Fuerza contraelectromotriz i:1,...,3
omegar(:)	Velocidad angular del motor
thetar(:)	Posición angular del motor
kij(:)	Variable del método Runge Kutta i:1,...,4 j:1,...,5
aij(:)	Variable del método Runge Kutta j:1,...,3
bij(:)	Variable del método Runge Kutta j:1,...,3
cij(:)	Variable del método Runge Kutta j:1,...,3
aomegar(:)	Variable del método Runge Kutta
bomegar(:)	Variable del método Runge Kutta
comegar(:)	Variable del método Runge Kutta
athetar(:)	Variable del método Runge Kutta
bthetar(:)	Variable del método Runge Kutta
cthetar(:)	Variable del método Runge Kutta
Rgrad(:)	Rotación angular del motor en grados
RRgrad(:)	Reset de la rotación en grados
RRrad(:)	Reset de la rotación en radianes
Sector(:)	Sector donde se ubica el eje magnético del rotor
Halli(:)	Señales de los sensores de efecto hall i:A,...,C
HalliN(:)	Señales negadas de los sensores de efecto hall i:A,...,C
ai(:)	Señales de interés para los voltajes de alimentación i:1,2
bi(:)	Señales de interés para los voltajes de alimentación i:1,2
ci(:)	Señales de interés para los voltajes de alimentación i:1,2
Formai(:)	Forma de los voltajes de alimentación i:A,...,C
Hi(:)	Intensidad de campo magnético producido por las fases del estator i:A,...,C
H(:)	Intensidad de campo magnético producido por el estator
ks(:)	Factor de saturación
tiempo(:)	Tiempo en segundos

Para poder definir el número de datos que almacenan las variables de tipo *asignables* se solicita al usuario el tiempo para el cual se realizará la simulación y el tamaño del paso para el cual se implementará el método Rugen-Kutta:

```

print *,Introduzca el tiempo total de duración de la simulación
read *,t
print *,Introduzca el paso con el cual se va a implemnetar el método
read *,paso

```

El paso de integración utilizado en la simulación fue de 10^{-6} segundos, para seleccionar el paso de integración se considera el tiempo total para obtener resultados, los recursos destinados para el almacenamiento de los datos y los requerimientos de error para los resultados. El número de datos se calcula de la siguiente manera:

$$i = \frac{t}{\text{paso}} + 1$$

Utilizando el comando *allocate* se asigna el tamaño a las variables indicadas anteriormente. Es de suma importancia que la separación entre datos de tiempo concuerde con el tamaño del paso establecido para la implementación del método Rugen Kutta. Para garantizar esto se implementa un ciclo tipo *while* como se indica a continuación:

```

tiempo(1) = 0
j = 2
do while (j.le.i)
    tiempo(j) = tiempo(j-1) + (paso)
    j = j + 1
end do

```

Otro de los requerimientos para poder realizar la simulación, es el de reiniciar el valor de la posición angular del motor una vez que se alcanzan los 360 grados o los 2π radianes dependiendo de en que unidades se desee manejar para la rotación. Para realizar esto se utiliza el comando *AMOD* el cual entrega el residuo de la división de los dos parámetros que se ingresen a:

```

do while (j.le.(i-1))
Reset en radianes
    RRrad(j) = AMOD ((thetar(j)· p), 2 · pi)
Reset en grados
    Rgrad(j) =  $\frac{\text{thetar}(j) \cdot 180 \cdot p}{\text{pi}}$ 
    RRgrad(j) = AMOD (Rgrad(j), 360)
    j = j + 1
end do

```

Figura 4.1: Esquema implementado para identificar la posición del rotor por sectores (Ejemplo sector 1)

Para finalizar con este primer paso se plantean las condiciones iniciales para la simulación. Dado que la simulación se realiza para un motor que no está conectado a una red eléctrica no hay inconvenientes en considerar las condiciones iniciales como 0:

$$\begin{aligned}
 i1(1) &= 0 \\
 i2(1) &= 0 \\
 i3(1) &= 0 \\
 \omega(1) &= 0 \\
 \theta(1) &= 0
 \end{aligned}$$

4.2. Emulación de los sensores de efecto hall

Como se ha mencionado en capítulos anteriores conocer la posición del rotor es indispensable para el funcionamiento del motor de CD sin escobillas. Los sensores de efecto hall son los encargados de medir la posición del rotor, para emular las señales entregadas por estos sensores se divide una rotación del rotor en seis sectores:

- De 1 a 60 grados → Sector 1
- De 61 a 120 grados → Sector 2
- De 121 a 180 grados → Sector 3
- De 181 a 240 grados → Sector 4
- De 241 a 300 grados → Sector 5
- De 301 a 360 grados → Sector 6

En *Matlab* este proceso puede realizarse de dos maneras, programando una función embebida o utilizando bloques lógicos. En este caso se optó por utilizar la segunda opción debido a que mayor parte de la simulación se realiza utilizando funciones embebidas y se quiere mostrar otra enfoque de programación. La figura 4.1 muestra el esquema implementado.

- La variable de posición angular utilizada en el esquema de la figura 4.1 es aquella que tiene aplicado el reinicio, una vez que se llega al valor de 360 grados. En Matlab esto se realiza utilizando el bloque *Math function* tipo *rem*.
- Utilizando dos bloques de *Relational operator* y un bloque *Logical operator* tipo *AND* se verifica que la posición angular del rotor se encuentre dentro del intervalo establecido para el sector. En el caso del sector 1 se fijan los extremos superior e inferior en 1 y 60 respectivamente.
- Utilizando el bloque *convert* se convierte la señal entregada por el bloque *AND*, la cual es de tipo booleana a tipo entero.
- La salida del convertidor se le aplica una ganancia cuyo valor corresponde a el número del sector.
- Para finalizar se lleva la señal afectada por la ganancia a un bloque tipo suma, donde también se conectan las señales correspondientes a los otros sectores. El valor que arroja el bloque tipo suma corresponde al sector para un determinado periodo de tiempo.

En *Fortran* el proceso se realizó de manera sencilla utilizando condicionales:

```

do while (j.le.(i-1))
  if((RRgrad(j).ge.0).and.(RRgrad(j).le.60)) then
    sector(j)=1
  elseif ((RRgrad(j).gt.60).and.(RRgrad(j).le.120)) then
    sector(j)=2
  elseif ((RRgrad(j).gt.120).and.(RRgrad(j).le.180)) then
    sector(j)=3
  elseif ((RRgrad(j).gt.180).and.(RRgrad(j).le.240)) then
    sector(j)=4
  elseif ((RRgrad(j).gt.240).and.(RRgrad(j).le.300)) then
    sector(j)=5
  elseif ((RRgrad(j).gt.300).and.(RRgrad(j).le.(360))) then
    sector(j)=6
  else
    sector(j)=0
  end if
  j = j + 1
end do

```

La figura 4.2 muestra el resultado que se obtiene para la variable *sector*. A partir de la información que se adquiere de la posición del rotor se emulan las señales entregadas por los sensores de efecto hall. Se debe satisfacer lo siguiente:

Figura 4.2: Posición del rotor identificada por sectores para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

Figura 4.3: Esquema implementado para emular las señales entregadas por los sensores de efecto hall (Ejemplo Hall A)

Sector=1,2 o 3 $\rightarrow$ Hall A = 1

Sector=3,4 o 5 $\rightarrow$ Hall B = 1

Sector=5,6 o 1 $\rightarrow$ Hall C = 1

La figura 4.3 muestra el esquema implementado en *Matlab* para emular la señal de sensor hall A:

- Se utilizan tres bloques *Compare To Constant* para verificar que la variable *sector* cumpla con las condiciones establecidas para cada sensor hall.
- Se utiliza un bloque *Logical Operator* tipo *OR* para asegurar que al menos unas de las tres condiciones se cumpla.
- Nuevamente es necesario utilizar el bloque tipo *convert* para convertir el tipo de dato. La señal entregada corresponde a lo que se obtiene de un sensor de efecto hall.

En *Fortran* el código que se implemento es el siguiente:

```
do while (j.le.(i-1))
  Sensor A
  if ((sector(j).eq.1).or.(sector(j).eq.2).or.(sector(j).eq.3))then
    HallA(j)=1
  else
    HallA(j)=0
  end if

  Sensor B
  if ((sector(j).eq.3).or.(sector(j).eq.4).or.(sector(j).eq.5))then
    HallB(j)=1
  else
    HallB(j)=0
  end if

  Sensor C
  if ((sector(j).eq.5).or.(sector(j).eq.6).or.(sector(j).eq.1))then
    HallC(j)=1
  else
    HallC(j)=0
  end if

  j = j + 1
end do
```

Las figuras 4.4 a 4.6 muestran las señales emuladas para los sensores hall A,B y C.

4.3. Construcción de las señales de los voltajes de alimentación

Utilizando las señales obtenidas para los sensores de efecto hall se construyen las señales de los voltajes de alimentación (Línea-neutro) de las fases del estator. La construcción de las señales se realizó basándose en las siguientes condiciones.

Si $H_a=1$ y $\overline{H_b}=1$ entonces $V_a=-1$

Si $H_b=1$ y $\overline{H_a}=1$ entonces $V_a=1$

Si $H_b=1$ y $\overline{H_c}=1$ entonces $V_b=-1$

Si $H_c=1$ y $\overline{H_b}=1$ entonces $V_b=1$

Si $H_c=1$ y $\overline{H_a}=1$ entonces $V_c=-1$

Si $H_a=1$ y $\overline{H_c}=1$ entonces $V_c=1$

Donde $\overline{H_a}$, $\overline{H_b}$ y $\overline{H_c}$ corresponden a las señales negadas de los sensores de efecto Hall. En *Matlab* nuevamente se optó por trabajar con bloques lógicos para obtener las señales negadas de los

Figura 4.4: Señal emulada para el sensor de efecto hall A para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

Figura 4.5: Señal emulada para el sensor de efecto hall B para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

sensores hall, como para construir las señales de alimentación. La figura 4.7 muestra el esquema implementado en *Matlab* para la construcción de la señal para el voltaje de alimentación de la fase a:

- Se utilizó un bloque *Logic Operator* tipo *NOT* para obtener la señal negada de los sensores de efecto hall.
- Utilizando dos bloques *Logic Operator* tipo *AND* se garantiza que se cumplan las condiciones necesarias para obtener un nivel alto o nivel bajo de señal.
- La ganancia V_{dc} corresponde al voltaje de alimentación que se desea para el motor.

El código implementando en Fortran es el siguiente:

Figura 4.6: Señal emulada para el sensor de efecto hall C para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

Figura 4.7: Esquema implementado para construir las señales de los voltajes de alimentación (Ejemplo alimentación fase a)

```

do while (j.le.(i-1))
  Alimentación fase a
  if((HallA(j).eq.1).and.(HallBN(j).eq.1))then
    a1(j)=1
  else
    a1(j)=0
  end if
  if((HallB(j).eq.1).and.(HallAN(j).eq.1))then
    a2(j)=1
  else
    a2(j)=0
  end if
  FormaA(j)=(a1(j)-a2(j))
  v1(j)=-Vdc·FormaA(j)
  Alimentación fase b 48
  if((HallB(j).eq.1).and.(HallCN(j).eq.1))then

```

```

else
    b1(j)=0
end if
if((HallC(j).eq.1).and.(HallBN(j).eq.1))then
    b2(j)=1
else
    b2(j)=0
end if
FormaB(j)=(b1(j)-b2(j))
v2(j)=-Vdc·FormaB(j)
Alimentación fase c
if((HallC(j).eq.1).and.(HallAN(j).eq.1))then
    c1(j)=1
else
    c1(j)=0
end if
if((HallA(j).eq.1).and.(HallCN(j).eq.1))then
    c2(j)=1
else
    c2(j)=0
end if
FormaC(j)=(c1(j)-c2(j))
v3(j)=-Vdc·FormaC(j)
j = j + 1
end do

```

Las figuras 4.8 a 4.10 muestran las señales de los voltajes de alimentación de las fases *a*, *b* y *c*.

4.4. Construcción de las funciones trapezoidales para la fuerza contra-electromotriz

Para poder tener una correcta representación del funcionamiento del motor es indispensable garantizar que la fuerza contra-electromotriz tenga forma trapezoidal. Para asegurarse de que esto se cumpla se han utilizado condicionales tanto en *Matlab* como en *Fortran* para construir la forma de la fuerza contra-electromotriz de cada fase. Solo se presenta el código implementado en *Fortran*, ya que en *Matlab* es prácticamente el mismo (solo se debe modificar la sintaxis):

Figura 4.8: Voltaje de alimentación de la fase a con $V_{dc}=16$ y un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

```

do while (j.le.(i-1))
Trapezoidal fase a
if((RRrad(j).gt.0).and.(RRrad(j).le.(pi/6))) then
    e1(j)=(6/pi)*RRrad(j)
elseif ((RRrad(j).gt.(pi/6)).and.(RRrad(j).le.(5*pi/6))) then
    e1(j)=1
elseif ((RRrad(j).gt.(5*pi/6)).and.(RRrad(j).le.(7*pi/6))) then
    e1(j)=-(6/pi)*(RRrad(j)-pi)
elseif ((RRrad(j).gt.(7*pi/6)).and.(RRrad(j).le.(11*pi/6))) then
    e1(j)=-1
elseif ((RRrad(j).gt.(11*pi/6)).and.(RRrad(j).le.(2*pi-1.01))) then
    e1(j)=((6/pi)*RRrad(j))-12
else
    e1(j)=0
end if
Trapezoidal fase b
if((RRrad(j).gt.(pi/2)).and.(RRrad(j).le.(5*pi/6))) then
    e2(j)=((6/pi)*RRrad(j))-4
elseif ((RRrad(j).gt.(5*pi/6)).and.(RRrad(j).le.(3*pi/2))) then
    e2(j)=1

```

Figura 4.9: Voltaje de alimentación de la fase b con $V_{dc}=16$ y un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

```

elseif ((RRrad(j).gt.(3*pi/2)).and.(RRrad(j).le.(11*pi/6))) then
    e2(j)=-((6/pi)*RRrad(j))+10
elseif ((RRrad(j).gt.(11*pi/6)).and.(RRrad(j).le.(2*pi-1.01))) then
    e2(j)=-1
elseif ((RRrad(j).ge.0).and.(RRrad(j).le.(pi/2))) then
    e2(j)=-1
else
    e2(j)=0
end if
Trapezoidal fase c
if((RRrad(j).gt.(7*pi/6)).and.(RRrad(j).le.(3*pi/2))) then
    e3(j)=((6/pi)*RRrad(j))-8
elseif ((RRrad(j).gt.(3*pi/2)).and.(RRrad(j).le.(2*pi-1.01))) then
    e3(j)=1
elseif ((RRrad(j).ge.0).and.(RRrad(j).le.(pi/6))) then
    e3(j)=1
elseif ((RRrad(j).gt.(pi/6)).and.(RRrad(j).le.(pi/2))) then
    e3(j)=-((6/pi)*RRrad(j))+2
elseif ((RRrad(j).ge.(pi/2)).and.(RRrad(j).le.(7*pi/6))) then
    e3(j)=-1
else
    e3(j)=0
end if
j = j + 1
end do

```

Figura 4.10: Voltaje de alimentación de la fase c con $V_{dc}=16$ y un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

Las figuras 4.11 a 4.13 muestran la forma de onda obtenida de la fuerza contra-electromotriz de las fases a, b y c .

Figura 4.11: Forma de onda de la fuerza contra-electromotriz de la fase a para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

4.5. Obtención de las curvas de las señales de intensidad de campo magnético

Para poder determinar el valor que toma el factor de saturación para cada intervalo de tiempo se debe conocer el valor de la intensidad de campo magnético en el entrehierro. Utilizando como referencia la ecuación 2.5, se obtiene la intensidad de campo magnético total en el entrehierro. Al igual que en la sección anterior solo se presenta el código realizado en *Fortran*:

Figura 4.12: Forma de onda de la fuerza contra-electromotriz de la fase b para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

```

do while (j.le.(i-1))
Intensidad fase A
if((RRrad(j).gt.(5*pi/3)).and.(RRrad(j).le.(2*pi))) then
    HA(j)=i1(j)*0.5
elseif ((RRrad(j).gt.0).and.(RRrad(j).le.(pi/3))) then
    HA(j)=i1(j)*0.5
elseif ((RRrad(j).gt.(pi/3)).and.(RRrad(j).le.(2*pi/3))) then
    HA(j)=i1(j)*(3/pi)*((pi/2)-RRrad(j))
elseif ((RRrad(j).gt.(2*pi/3)).and.(RRrad(j).le.(4*pi/3))) then
    HA(j)=-i1(j)*0.5
elseif ((RRrad(j).gt.(4*pi/3)).and.(RRrad(j).le.(5*pi/3))) then
    HA(j)=i1(j)*(3/pi)*(RRrad(j)-(3*pi/2))
else
    HA(j)=0
end if
Intensidad fase B
if((RRrad(j).gt.(pi/3)).and.(RRrad(j).le.pi)) then
    HB(j)=i2(j)*0.5
elseif ((RRrad(j).gt.pi).and.(RRrad(j).le.(4*pi/3))) then
    HB(j)=i2(j)*(3/pi)*((7*pi/6)-RRrad(j))
elseif ((RRrad(j).gt.(4*pi/3)).and.(RRrad(j).le.(2*pi))) then
    HB(j)=-i2(j)*0.5

```

Figura 4.13: Forma de onda de la fuerza contra-electromotriz de la fase c para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

```

elseif ((RRrad(j).ge.0).and.(RRrad(j).le.(pi/3))) then
    HB(j)=i2(j).*((3/pi)*RRrad(j))-0.5)
else
    HB(j)=0
end if
Intensidad fase C
if((RRrad(j).gt.pi).and.(RRrad(j).le.(5*pi/3))) then
    HC(j)=i3(j)*0.5
elseif ((RRrad(j).gt.(5*pi/3)).and.(RRrad(j).le.(2*pi))) then
    HC(j)=i3(j).*((-3/pi)*RRrad(j))+5.5)
elseif ((RRrad(j).gt.0).and.(RRrad(j).le.(2*pi/3))) then
    HC(j)=-i3(j)*0.5
elseif ((RRrad(j).ge.(2*pi/3)).and.(RRrad(j).le.pi)) then
    HC(j)=i3(j).*(3/pi)*(RRrad(j)-(5*pi/6))
else
    HC(j)=0
end if
Intensidad total
H(j)=-(HA(j)+HB(j)+HC(j))/g
j = j + 1
end do

```

Del código presentado para la intensidad de campo magnético se menciona lo siguiente:

- La relación $\frac{r_r}{r}$ se considera como 1.
- Debido a que no se cuenta con suficiente información acerca de los parámetros del motor simulado no es posible incorporar a la expresión el número de vueltas por fase N_s . Para solucionar este inconveniente se optó por usar un valor promedio de vueltas calculado de motores con características similares al simulado.
- No se conoce el material de los imanes presentes en el rotor por lo tanto se seleccionó uno de los materiales prueba (N52).

Las figuras 4.14 a 4.17 muestran las curvas de intensidad de campo magnético de las fases a , b , c y la intensidad de campo magnético total. Utilizando la información de la figura 3.7 y la curva de intensidad de campo magnético total en el entrehierro se obtiene el valor del factor de saturación. En la figura 4.18 se muestran los valores que adquiere el factor de saturación para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

Figura 4.14: Intensidad de campo magnético en el entrehierro debido a la fase a para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

4.6. Programación y solución de las ecuaciones del sistema eléctrico y mecánico del motor

Para obtener las curvas de las corrientes del estator, la posición y velocidad angular del rotor y el par electromagnético generado se debe resolver el modelo en espacio de estados representado por un sistema de ecuaciones diferenciales. Para resolver este sistema se optó por implementar el método numérico *Runge-Kutta* de cuarto orden descrito en el capítulo 2.

Para obtener una solución en *Matlab* se utiliza una función embebida en la cual se escriben las ecuaciones del sistema en espacio de estados y solo es necesario seleccionar el método de Runge-Kutta de cuarto orden como método de solución. Por otro lado en *Fortran* se implementa el

Figura 4.15: Intensidad de campo magnético en el entrehierro debido a la fase b para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

método numérico, avanzando por secciones como se indica a continuación:

```
do while (j.le.(i-1))
Par de carga
tl(j)=0
Implementación del metodo
Calculo de k1
k11(j)=((1/ks(j))· cons1 · omegar(j) · e1(j))-((1/ks(j)) · cons2 · i1(j))+
((1/ks(j)) · cons3·v1(j))
k12(j)=((1/ks(j)) · cons1 · omegar(j) · e2(j))-((1/ks(j)) · cons2 · i2(j))+
((1/ks(j)) · cons3 · v2(j))
k13(j)=((1/ks(j)) · cons1 · omegar(j) · e3(j))-((1/ks(j)) · cons2 · i3(j))+
((1/ks(j)) · cons3 · v3(j))
k14(j)=(cons4 · e1(j) · i1(j))+(cons4 · e2(j) · i2(j))+(cons4 · e3(j)· i3(j))
+(cons6 · omegar(j))+(cons5 · tl(j))
k15(j)=omegar(j)
Calculo del primer valor medio
ai1(j)=i1(j)+((k11(j) · paso)/2)
ai2(j)=i2(j)+((k12(j) · paso)/2)
ai3(j)=i3(j)+((k13(j) · paso)/2)
aomegar(j)=omegar(j)+((k14(j) · paso)/2)
athetar(j)=thetar(j)+((k15(j) · paso)/2)
Calculo de k2
k21(j)=((1/ks(j)) · cons1 · aomegar(j) · e1(j))-((1/ks(j)) · cons2 · ai1(j))+
((1/ks(j)) · cons3 · v1(j))
```

Figura 4.16: Intensidad de campo magnético en el entrehierro debido a la fase c para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

```

k22(j)=((1/ks(j)) · cons1 · aomegar(j) · e2(j))-((1/ks(j)) · cons2 · ai2(j))+
((1/ks(j)) · cons3 · v2(j))
k23(j)=((1/ks(j)) · cons1 · aomegar(j) · e3(j))-((1/ks(j)) · cons2 · ai3(j))+
((1/ks(j)) · cons3 · v3(j))
k24(j)=(cons4 · e1(j) · ai1(j))+(cons4 · e2(j) · ai2(j))+(cons4 · e3(j) · ai3(j))
+(cons6 · aomegar(j))+(cons5 · tl(j))
k25(j)=aomegar(j)
Calculo del segundo valor medio
bi1(j)=i1(j)+((k21(j) · paso)/2)
bi2(j)=i2(j)+((k22(j) · paso)/2)
bi3(j)=i3(j)+((k23(j) · paso)/2)
bomegar(j)=omegar(j)+((k24(j) · paso)/2)
bthetar(j)=thetar(j)+((k25(j) · paso)/2)
Calculo de k3
k31(j)=((1/ks(j)) · cons1 · bomegar(j) · e1(j))-((1/ks(j)) · cons2 · bi1(j))+
((1/ks(j)) · cons3 · v1(j))
k32(j)=((1/ks(j)) · cons1 · bomegar(j) · e2(j))-((1/ks(j)) · cons2 · bi2(j))+
((1/ks(j)) · cons3 · v2(j))
k33(j)=((1/ks(j)) · cons1 · bomegar(j) · e3(j))-((1/ks(j)) · cons2 · bi3(j))+
((1/ks(j)) · cons3 · v3(j))
k34(j)=(cons4 · e1(j) · bi1(j))+(cons4 · e2(j) · bi2(j))+(cons4 · e3(j) · bi3(j))
+(cons6 · bomegar(j))+(cons5 · tl(j))

```

Figura 4.17: Intensidad de campo magnético total en el entrehierro para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

```

k35(j)=bomegar(j)
Calculo del valor final
ci1(j)=i1(j)+(k31(j) · paso)
ci2(j)=i2(j)+(k32(j) · paso)
ci3(j)=i3(j)+(k33(j) · paso)
comegar(j)=omegar(j)+(k34(j) · paso)
cthetar(j)=thetar(j)+(k35(j) · paso)
Calculo de k4
k41(j)=((1/ks(j)) · cons1 · comegar(j) · e1(j))-((1/ks(j)) · cons2 · ci1(j))+
((1/ks(j)) · cons3 · v1(j))
k42(j)=((1/ks(j)) · cons1 · comegar(j) · e2(j))-((1/ks(j)) · cons2 · ci2(j))+
((1/ks(j)) · cons3 · v2(j))
k43(j)=((1/ks(j)) · cons1 · comegar(j) · e3(j))-((1/ks(j)) · cons2 · ci3(j))+
((1/ks(j)) · cons3 · v3(j))
k44(j)=(cons4 · e1(j) · ci1(j))+(cons4 · e2(j) · ci2(j))+(cons4 · e3(j) · ci3(j))
+(cons6 · comegar(j))+(cons5 · tl(j))
k45(j)=comegar(j)
Calculo del nuevo valor de las variables dependientes
i1(j+1)=i1(j)+((paso/6) · (k11(j)+(2 · k21(j))+(2 · k31(j))+k41(j)))
i2(j+1)=i2(j)+((paso/6) · (k12(j)+(2 · k22(j))+(2 · k32(j))+k42(j)))
i3(j+1)=i3(j)+((paso/6) · (k13(j)+(2 · k23(j))+(2 · k33(j))+k43(j)))
omegar(j+1)=omegar(j)+((paso/6) · (k14(j)+(2 · k24(j))+(2 · k34(j))+k44(j)))
thetar(j+1)=thetar(j)+((paso/6) · (k15(j)+(2 · k25(j))+(2 · k35(j))+k45(j)))
j=j+1
end do

```

Figura 4.18: Factor de saturación calculada para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

En la implementación del método Runge-Kutta se incorpora el factor de saturación afectando directamente a la inductancia del motor. Las figuras 4.19 a 4.23 muestran las curvas obtenidas para las corrientes de alimentación, velocidad angular del motor y par electromagnético generado para un voltaje de alimentación de 16 volts. La forma de las corrientes de cada fase es atribuible al proceso de conmutación presente en este tipo de máquinas, otro de los factores que influye es la reacción de armadura sin embargo en la simulación realizada no se considera este fenómeno.

Figura 4.19: Corriente de alimentación de la fase a para un voltaje de alimentación de 16 volts y un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

Figura 4.20: Corriente de alimentación de la fase *b* para un voltaje de alimentación de 16 volts y un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

Figura 4.21: Corriente de alimentación de la fase *c* para un voltaje de alimentación de 16 volts y un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

4.7. Construcción de las señales de compuerta para el dispositivo de conmutación

En *Matlab* es posible construir el dispositivo de conmutación (Inversor) encargado de alimentar las fases del estator de tal manera que se tenga par constante. Antes de pasar a construir el circuito electrónico se deben construir las señales de compuerta para cada uno de los transistores MOSFET que componen al inversor. A partir de las señales construidas para los voltajes de alimentación se construye el esquema que se muestra en la figura 4.24 utilizando bloques lógicos.

Teniendo las 6 señales de compuerta una para cada transistor del inversor se construye el esquema de la figura 4.25:

- Para la alimentación del dispositivo de alimentación se utiliza el bloque *DC voltage source*

Figura 4.22: Velocidad angular del motor para un voltaje de alimentación de 16 volts y un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

de la librería *Simscape Power Systems*.

- Las señales de compuerta generadas con el esquema de la figura 4.24 se ingresaron al bloque *Universal bridge* a través del puerto indicado con la letra g.
- A través del bloque *Universal Bridge* se selecciona el tipo de dispositivo de electrónica de potencia que se desee para la construcción del inversor, al igual que ajustar el valor de capacitancia y resistencia del dispositivo.
- Utilizando tres *Series RLC Branch* se construye una carga trifásica con la cual se analiza el comportamiento del dispositivo de conmutación ante diferente tipo de cargas.

La figura 4.26 muestra el voltaje Línea-Neutro para la fase *a* entregado por el inversor ajustando el voltaje de alimentación a 16 Volts y utilizando una carga R-L con los mismos valores que los parámetros del motor.

4.8. Ventajas y desventajas de ambas alternativas de programación

A continuación se enumeran las ventajas y desventajas que se identificaron al realizar la programación del motor de CD sin escobillas utilizando la herramienta computacional *Matlab* y el lenguaje de programación *Fortran*.

Matlab

Ventajas

- Se cuenta con la posibilidad de utilizar diversos métodos numéricos sin la necesidad de programarlos directamente.

Figura 4.23: Par electromagnético generado por el motor para un voltaje de alimentación de 16 volts y un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

Figura 4.24: Esquema implementado para construir las señales de conmutación para el dispositivo de conmutación

- Se facilita la identificación de errores dado que la propia interfaz de Simulink ayuda al usuario a identificarlos. Adicionalmente se pueden visualizar todas las variables que se deseen, facilitando la identificación de la sección del código donde se tengan inconvenientes.
- Permite observar el comportamiento del dispositivo de conmutación ante diferentes cargas trifásicas.

Desventajas

- Se requiere de un tiempo considerable de simulación para obtener resultados.
- No existe una manera sencilla de enlazar los elementos de la librería *Simscape Power System* con elementos de Simulink como por ejemplo las funciones embebidas.

Figura 4.25: Esquema implementado para construir el dispositivo de conmutación

Figura 4.26: Voltaje Linea-Neutro para la fase a entregada por el inversor para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

Fortran

Ventajas

- Tiempos de simulación aproximadamente cinco veces menores a los de Matlab.
- Se tiene la posibilidad de manipular todo el código y poder entenderlo en su totalidad.

Desventajas

- Es necesario programar el método numérico seleccionado para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales.
- Se dificulta la identificación de errores dado al número de líneas de código y a la dificultad de visualizar las curvas de cada variable.

5. Comparación y análisis de resultados

Con la finalidad de definir si los resultados obtenidos del modelo simulado son coherentes se comparan los resultados entregados por el modelo planteado en [5] incorporando y sin incorporar el factor de saturación, con los entregados por el bloque *Permanent magnet synchronous machine* de *Simulink*.

5.1. Comparación con el bloque *permanent magnet synchronous machine*

Uno de los recursos existentes para simular el motor de CD sin escobillas consiste en utilizar el bloque *permanent magnet synchronous machine* de *Simulink*. En [13–18] es utilizado para analizar el comportamiento del motor, validar las estrategias de control desarrolladas y poner a prueba actuadores. El modelo en espacio de estados del motor de CD sin escobillas programado en este bloque es el siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{di_a}{dt} &= \frac{1}{3L_s} \left(2v_{ab} + v_{bc} - 3R_s i_a + \lambda p \omega_m \left(-2\Phi'_a + \Phi'_b + \Phi'_c \right) \right) \\ \frac{di_b}{dt} &= \frac{1}{3L_s} \left(-v_{ab} + v_{bc} - 3R_s i_b + \lambda p \omega_m \left(\Phi'_a - 2\Phi'_b + \Phi'_c \right) \right) \\ \frac{di_c}{dt} &= - \left(\frac{di_a}{dt} + \frac{di_b}{dt} \right) \\ \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{1}{J} (T_e - T_f - F\omega_m - T_m) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega_m\end{aligned}$$

Donde L_s corresponde a la inductancia de los devanados del estator, R a la resistencia de los devanados del estator, i_a, i_b, i_c a las corrientes de fase, $\Phi'_a, \Phi'_b, \Phi'_c$ a la fuerza contra-electromotriz de cada fase en por unidad con respecto a λ . V_{ab}, V_{bc} corresponde a dos de los voltajes de línea del motor, ω_m a la velocidad angular mecánica del motor, λ a la magnitud del flujo inducido en los devanados del estator por los imanes permanentes del rotor, p al número de pares de polos, $T_e = p \left(\Phi'_a i_a + \Phi'_b i_b + \Phi'_c i_c \right)$ al par electromagnético generado, J a la inercia del rotor,

F al coeficiente de fricción, θ a la posición angular del rotor, T_m al par de carga y T_F al par de fricción estática.

La simulación se realizó bajo las siguientes especificaciones:

- Se utilizaron los parámetros indicados en el inicio del capítulo 4. Algunos de los parámetros solicitados por los modelos programados se desconocían por lo tanto se reemplazaron por los de motores de diseños similares.
- Las simulaciones se realizaron utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden con un tamaño de paso de $1 \cdot 10^{-6}$. Para fines de comparación se simuló durante 0.1 segundos.
- Para todas las simulaciones se adaptó la metodología planteada en el capítulo 4. El bloque *permanent magnet synchronous machine* emula las señales de los sensores de efecto Hall. Se utilizó un *Universal Bridge* para generar los voltajes de línea V_{ab} y V_{bc} .

Las figuras 5.1 a 5.5 muestran los resultados obtenidos para las corrientes de alimentación, la velocidad angular del motor y el par electromagnético generado.

Figura 5.1: Comparación número 1 de la corriente de alimentación de la fase a para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

A partir de los resultados obtenidos es evidente lo siguiente:

- En general la ausencia de parámetros de un mismo motor dificulta la comparación de resultados, a pesar de esto se observan similitudes entre las formas de onda entregadas por cada modelo. Las magnitudes de las curvas son comparables entre ellas y no se tiene ningún valor no coherente.
- De los resultados obtenidos para las corrientes de alimentación se evidencia un desfase entre las señales. El desfase es menor entre las señales de los modelos basados en lo planteado en [5]. Esta disminución se atribuye al hecho de que se utilizaron las mismas señales para los sensores de efecto Hall y para los voltajes de alimentación. En el caso del bloque *permanent magnet synchronous machine* se utilizaron las señales que él mismo genera. Se realizó una comparación entre las señales para los sensores de efecto Hall obtenidas a partir de la metodología planteada en el capítulo 4, con las entregadas por el bloque de Matlab y se evidenció un desfase entre ellas.

Figura 5.2: Comparación número 1 de la corriente de alimentación de la fase b para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

Figura 5.3: Comparación número 1 de la corriente de alimentación de la fase c para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

- Con respecto a la velocidad angular del motor para las tres simulaciones los resultados son similares, tanto en la forma de onda como en el valor en estado estacionario. Se evidenció que al incorporar el factor de saturación al modelo disminuye la velocidad angular, esta disminución hace que los resultados se asemejen mas a los del bloque *permanent magnet synchronous machine*. Al verse afectada la inductancia de los devanados del motor debido al factor de saturación disminuye el voltaje inducido, provocando una reducción del par electromagnético generado, lo que finalmente lleva a que la velocidad angular del motor sea menor.
- Las simulaciones se realizaron para una condición de operación sin carga por lo tanto se espera que el par electromagnético generado en estado estacionario sea nulo. Al incorporar el factor de saturación al modelo se logra que el valor medio del par electromagnético se acerque a cero.

Figura 5.4: Comparación número 1 de la velocidad angular del motor para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

Figura 5.5: Comparación número 1 del par electromagnético generado por el motor para un tiempo de simulación de 0.1 segundos.

6. Conclusiones y trabajos futuros

6.1. Conclusiones

- Durante el proceso de revisión bibliográfica relacionada con el motor de CD sin escobillas fue evidente que la mayoría de los autores optan por utilizar modelos en los que se considera la fuerza contra-electromotriz trapezoidal y en los que se realiza una representación de las dinámicas del motor a través de ecuaciones de circuitos equivalentes. Por estas razones se considera que el modelo descrito en este trabajo será de gran utilidad para futuras investigaciones.
- La metodología utilizada para considerar el efecto de saturación en el motor es sencilla de entender y de implementar en *Matlab* o en otros lenguajes de programación. Es flexible dado que se puede implementar para cualquiera de los materiales magnéticos comúnmente utilizados en motores y no depende de un número determinado de datos de la curva de magnetización del material magnético. Un factor de vital importancia para que los resultados de su implementación sean coherentes es tener claridad de cual es el material magnético del motor simulado.
- Al abordar la tarea de simular el motor de CD sin escobillas es evidente la importancia de contar con la información detallada de los elementos del motor, principalmente el tipo de material del que están fabricados, los sensores y el dispositivo de conmutación.. Desafortunadamente no existe información acerca de como realizar la simulación del motor ante la ausencia de datos relativos a estos elementos. La guía de simulación presentada en este trabajo es sin duda de gran utilidad y facilitará el desarrollo de futuras investigaciones. El modelo presentado en este trabajo considera más características naturales del motor, es por ello que se recomienda su utilización por encima de los modelos tradicionales.
- Al comparar los resultados entregados por las simulaciones se encontraron discrepancias que son atribuibles a distintos factores detallados en el capítulo 5. A pesar de estas discrepancias el presente trabajo muestra resultados, que aunque son aproximados, plantean la base para lograr avances en simulaciones que se realicen cuando se cuenten con toda la información necesaria.

6.2. Trabajos Futuros

- Con la finalidad de aprovechar el modelo planteado y las simulaciones realizadas, resulta importante contar con la información del motor, que incluya sus parámetros eléctricos y

mecánicos, sus características físicas y sus materiales de construcción.

- Se recomienda desarrollar la manera de enlazar los elementos de la librería *Simscape Power System* con elementos propios de *Matlab* como por ejemplo funciones embebidas, logrando con esto ver el efecto que tiene el dispositivo de conmutación no ideal sobre los resultados de la simulación.
- Para obtener un modelo que se acerque de mejor manera al comportamiento del motor real es recomendable incorporar más elementos al modelo como por ejemplo reacción de armadura, pérdidas o el efecto del par de *Cogging*.
- Se propone, en el futuro, llevar a cabo la simulación en conjunto con una plataforma que cuente con sensores y dispositivos de medición para con esto mejorar la metodología de simulación planteada en este trabajo.

7. Referencias

- [1] M. Duro López *et al.*, “Modelado y simulación del funcionamiento y control de un motor bldc,” 2017.
- [2] T. Kenjō and S. Nagamori, *Permanent-magnet and Brushless DC Motors*, ser. Monographs in electrical and electronic engineering. Clarendon Press, 1985. [Online]. Available: <https://books.google.com.mx/books?id=YSEoAQAAMAAJ>
- [3] P. Krause, O. Wasynczuk, and S. Sudhoff, *ANALYSIS OF ELECTRIC MACHINERY AND DRIVE SYSTEMS, 2ND ED.* Wiley India Pvt. Limited, 2010. [Online]. Available: <https://books.google.com.mx/books?id=yv91RAAACAAJ>
- [4] J. Gieras and M. Wing, *Permanent Magnet Motor Technology: Design and Applications, Second Edition*, ser. Electrical and Computer Engineering. Taylor & Francis, 2002. [Online]. Available: https://books.google.com.mx/books?id=u_NiSnZeLQQC
- [5] J. Chiasson, I. of Electrical, E. Engineers, and J. W. . Sons, *Modeling and High Performance Control of Electric Machines*, ser. IEEE Press Series on Power Engineering. Wiley, 2005. [Online]. Available: <https://books.google.com.mx/books?id=J-ISAAAAMAAJ>
- [6] S. Kim, *Electric Motor Control: DC, AC, and BLDC Motors*. Elsevier Science, 2017. [Online]. Available: <https://books.google.com.mx/books?id=ewKqDQAAQBAJ>
- [7] O. Oguntoyinbo, “Pid control of brushless dc motor and robot trajectory planning simulation with matlab®/simulink®,” 2009.
- [8] M. Nizam, A. Mujianto, H. Triwaloyo, and Inayati, “Modelling on bldc motor performance using artificial neural network (ann),” in *2013 Joint International Conference on Rural Information Communication Technology and Electric-Vehicle Technology (rICT ICeV-T)*, 2013, pp. 1–4.
- [9] M. Ridwan, M. N. Yuniarto, and Soedibyo, “Electrical equivalent circuit based modeling and analysis of brushless direct current (bldc) motor,” in *2016 International Seminar on Intelligent Technology and Its Applications (ISITIA)*, 2016, pp. 471–478.
- [10] M. Mariano, K. Scicluna, and J. Scerri, “Modelling of a sensorless rotor flux oriented bldc machine,” in *2017 19th International Conference on Electrical Drives and Power Electronics (EDPE)*, 2017, pp. 194–199.

-
- [11] *Power System Stability And Control*, ser. EPRI power system engineering series. McGraw-Hill, 1994. [Online]. Available: https://books.google.com.mx/books?id=v3RxH_GkwmsC
 - [12] S. Chapra, *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill Higher Education, 2014. [Online]. Available: <https://books.google.com.mx/books?id=3GpzCgAAQBAJ>
 - [13] B. BOSSOUFI, M. KARIM, S. IONITA, A. LAGRIOUI, and H. MAHMOUDI, “Indirect sliding mode control of a permanent magnet synchronous machine: Fpga-based implementation with matlab & simulink simulation.” *Journal of Theoretical & Applied Information Technology*, vol. 29, no. 1, 2011.
 - [14] B. Bossoufi, M. Karim, S. Ionita, A. Lagrioui, and G. Iana, “Matlab & simulink simulation with fpga-based implementation sliding mode control of a permanent magnet synchronous machine drive,” *WSEAS transactions on systems and control*, vol. 3, no. 6, pp. 92–103, 2011.
 - [15] Z. Lu, H. Sheng, H. L. Hess, and K. M. Buck, “The modeling and simulation of a permanent magnet synchronous motor with direct torque control based on matlab/simulink,” in *IEEE International Conference on Electric Machines and Drives, 2005*. IEEE, 2005, pp. 7–pp.
 - [16] J. Gupta and A. Kumar, “Fixed pitch wind turbine-based permanent magnet synchronous machine model for wind energy conversion systems,” *Journal of Engineering and Technology*, vol. 2, no. 1, pp. 52–62, 2012.
 - [17] Z. Zhang and J. Shu, “Matlab-based permanent magnet synchronous motor vector control simulation,” in *2010 3rd International Conference on Computer Science and Information Technology*, vol. 9. IEEE, 2010, pp. 539–542.
 - [18] K. N. Achari, B. Gururaj, D. A. Kumar, and M. V. Kumar, “A novel matlab/simulink model of pmsm drive using direct torque control with svm,” in *International Conference on Emerging Technology Trends on Advanced Engineering Research, Proceedings published by International Journal of Computer Applications*, 2012, pp. 34–39.